חוברת קיץ לעולים לכיתה יא'

תלמידי 5 יח"ל

הקדמה:

תלמידים יקרים,

לפניכם עבודת קיץ במתמטיקה המיועדת לתלמידי כיתה י' העולים לכיתה י"א ברמת 5 יחידות.

העבודה מורכבת משאלות נבחרות מתוך האתר bagrut.gool.co.il.

לרוב התרגילים בעבודה קיים **פתרון מלא בסרטון** אשר תוכלו לצפות בו על מנת להעשיר את הבנתכם. יש לפתור את התרגילים בעצמכם, ורק אם נתקעתם לגשת לסרטון. על מנת לגשת לסרטון תוכלו לסרוק את קוד ה-QR בצידו, או ללחוץ על הקוד במידה ובידיכם עותק דיגיטלי של העבודה.

לעבודה שני חלקים:

החלק הראשון של העבודה מכיל תרגילים מנושאים שנלמדו בכיתה י', המהווים בסיס לנושאים שיילמדו בכיתה י"א.

החלק השני מכיל שני פרקים ללמידה עצמית, פרק האינדוקציה ופרק מתחום הטריגונומטריה שנקרא המעגל הטריגונומטרי, נושאים אותם לומדים בתחילת כיתה י"א. עליכם ללמוד את הפרקים האלה לפני תחילת שנת הלימודים.

בתחילת שנת הלימודים הבאה תיערך בחינה על עבודת הקיץ, כולל שאלות מהפרקים ללמידה עצמית.

חופשה נעימה :)

תוכן העניינים:

פונקציית פולינום:

חקירה:

1) חקרו את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

iii. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

iv. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).

v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. $y=x^4-10x^2+9$

ב. $y=x(x-12)(2x-9)$

ג. $y=(6-x)^8$

סרטון

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3ax^3+54x-50$.

א. לאלו ערכים של הפרמטר a, עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?

ב. הציבו $a=6$ בפונקציה וחקרו אותה לפי הסעיפים הבאים:

תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y, סרטוט.

סרטון

3) נתונה הפונקציה: $y=(x-3)(2-x)^2$.

א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ב. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה: $y=2x^2(x+a)^2$, $a>-6$.

ידוע שלפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x=4$.

א. מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.

ב. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון? אם כן, מצאו אותן.

ג. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצאו האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה וכתבו את תחומי החיוביות והשליליות שלה.

פונקציה זוגית ואי זוגית:

סרטון

1) קבעו אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f\left(x\right)=3x-5$

ב. $f\left(x\right)=3x^2$

ג. $f\left(x\right)=2x^3$

ד. $f\left(x\right)=x^3-2x^2$

ה. $f\left(x\right)=4x^4-3x^2+1$

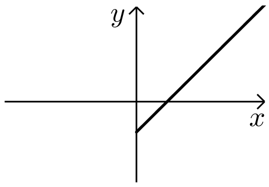
ו. $f\left(x\right)=4x^5-3x^3-1$

סרטון

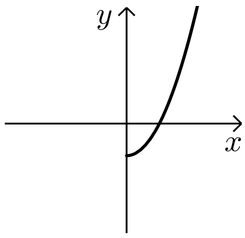
2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.

השלימו את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

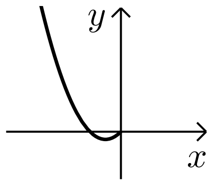
א.



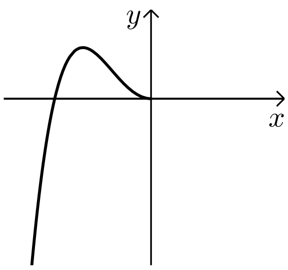
ב.



ג.



ד.

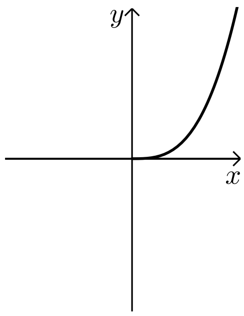


סרטון

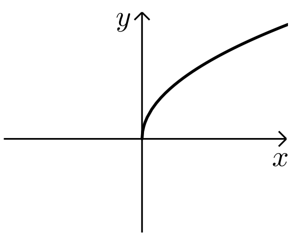
3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.

השלימו את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

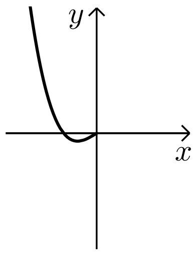
א.



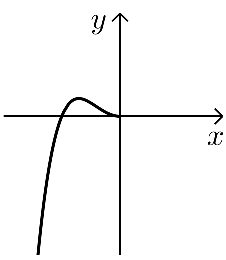
ב.



ג.



ד.



סרטון

4) לפניכם הפונקציה: $f(x)=-2x^6+3x^4+a$, a פרמטר.

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקרו את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,

מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?

נמקו באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמכו על ממצאיכם מהסעיפים הקודמים וסרטטו את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

סרטון

5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=3x^3-9x$.

א. חקרו את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:

כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,

מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכיחו כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבססו על ממצאיכם מהסעיפים הקודמים וסרטטו את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסיפו את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטתם בסעיף הקודם).

תשובות סופיות:

חקירה:

1) תשובות עבור סעיפים i-iv:

א. i. כל x. ii. $\min\left(\sqrt{5},-16\right)$, $\max\left(0,9\right)$, $\min\left(-\sqrt{5},-16\right)$.

iii. עולה: $x>\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}<x<0$, יורדת: $0<x<\sqrt{5}$, $x<-\sqrt{5}$.

iv. $\left(3,0\right)$, $\left(1,0\right)$, $\left(-1,0\right)$, $\left(-3,0\right)$, $\left(0,9\right)$.

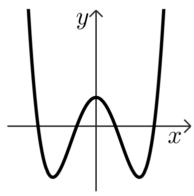
ב. i. כל x. ii. $\min\left(9,-243\right)$, $\max\left(2,100\right)$.

iii. עולה: $x>9$, $x<2$, יורדת: $2<x<9$. iv. $\left(4.5,0\right)$, $\left(12,0\right)$, $\left(0,0\right)$.

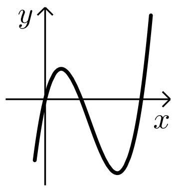
ג. i. כל x. ii. $\min\left(6,0\right)$. iii. עולה: $x>6$ יורדת: $x<6$. iv. $\left(0,6\right)$, $\left(6,0\right)$.

סקיצות עבור שאלה 1:

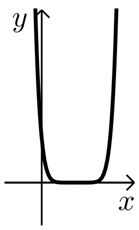
א.



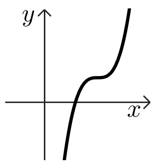
ב.



ג.



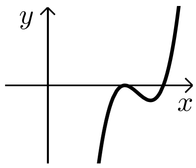
2) א. $-6\le a\le 6$ ב. כל x, אין קיצון, עולה בכל תחום הגדרה, $\left(0,-50\right)$, סקיצה:



ג. עולה: $x>0$, $-2<x<-\frac{1}{4}$, יורדת: $x<-2$, $-\frac{1}{4}<x<0$.

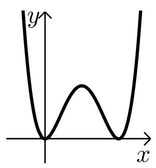
3) א. $\min\left(2\frac{2}{3},-\frac{4}{27}\right)$, $\max\left(2,0\right)$ ב. עולה: $x>2\frac{2}{3}$, $x<2$, יורדת: $2<x<2\frac{2}{3}$.

ג. $\left(0,-12\right)$, $\left(2,0\right)$, $\left(3,0\right)$. ד. ראו גרף בצד:



4) א. $a=-4$, $y=2x^2\left(x-4\right)^2$ ב. $\left(4,0\right)$, $\left(2,32\right)$, $\left(0,0\right)$.

ג. עולה: $x>4$, $0<x<2$, יורדת: $2<x<4$, $x<0$.



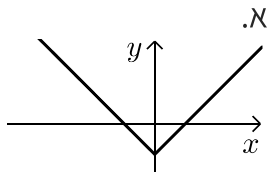
ד. $\left(0,0\right)$, $\left(4,0\right)$. ה. חיובית: $x\neq 0,4$. ראו גרף צד:

פונקציה זוגית ואי זוגית:

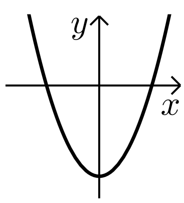
1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

2) להלן הגרפים:

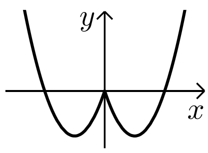
א.



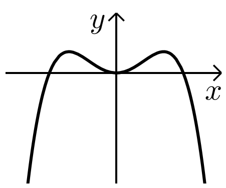
ב.



ג.

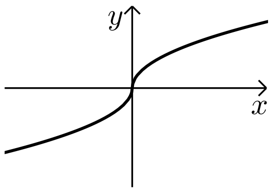


ד.

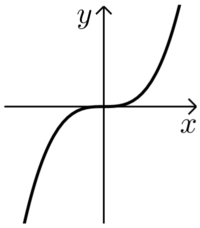


(3 להלן הגרפים:

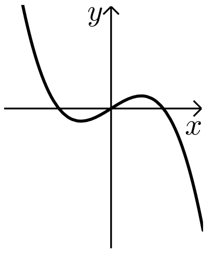
ב.

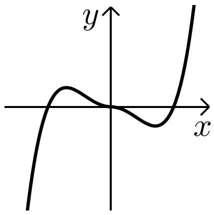


ג.



ד.



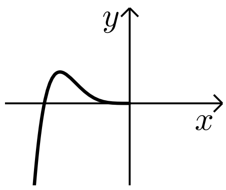


(4 א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2\le x\le 0$, חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(-1.225,0)$,

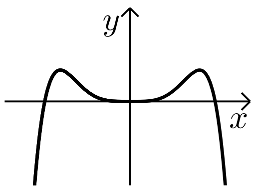
נקודות קיצון: $\min(-2,-80)$ קצה, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה.

עולה: $-2<x<-1$, יורדת: $-1<x<0$. ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:



סרטוט עבור סעיף ד:

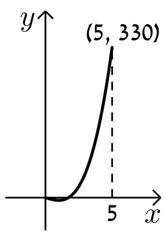


(5 א. תחום הגדרה: $0\le x\le 5$, חיתוך עם הצירים: $(\sqrt{3},0)$, $(0,0)$,

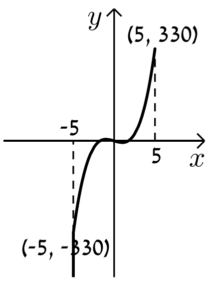
נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה.

עולה: $1<x<5$, יורדת: $0<x<1$, ב. אי-זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:



סרטוט עבור סעיף ג:



פונקציית שורש:

חקירה:

סרטון

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-4)\sqrt{x-1}$. חקרו את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

סרטון

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{6-x}$. חקרו את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

סרטון

3) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, a פרמטר.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y-x=0$.

א. מצאו את ערך הפרמטר a .
ב. כתבו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.
ד. כתבו את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

סרטון

4) לפניכם שלוש פונקציות: $h(x)=\frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$, $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$, $f(x)=x^2\sqrt{k-x^2}$, $(k>0)$.

א. קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדיקו את קביעותיכם באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$.

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- x כלל.

iii. הפונקציות: $h(x)$ ו- $g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן (כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

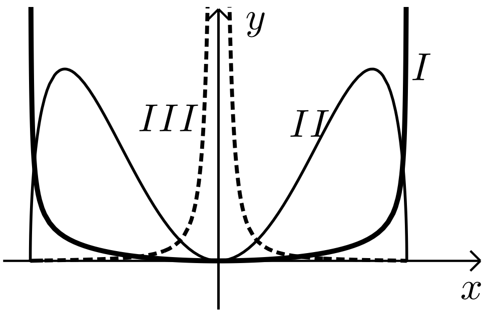
iv. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A(0,\sqrt{12})$ על ציר ה- y. ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x שאינה בראשית הוא: $d=6$.

ב. מצאו את k.

ג. מצאו את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ד. לפניכם איור ובו מסורטטות הסקיצות של שלושת הפונקציות.
קבעו עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף שייך לכל פונקציה.



תשובות סופיות:

1) א. $x\ge 1$ ב. $\min(2,-2)$, $\max(1,0)$ קצה

ג. עולה: $x>2$, יורדת: $1<x<2$. ד. $(1,0),(4,0)$ ה. אין.

2) א. $x\le 6$ ב. $\max(4,4\sqrt{2})$, $\min(6,0)$ קצה

ג. עלייה: $x<4$, ירידה: $4<x<6$ ד. $(6,0),(0,0)$.

3) א. $a=1$ ב. $-3<x<3$ ג. $(-1.5,\sqrt{3})$

ד. יורדת: $-3<x<-1.5$, עולה: $-1.5<x<3$.

4) א. i. לא נכון ii. לא נכון iii. נכון iv. לא נכון ב. $k=24$

ג. $\max(\pm 4,32\sqrt{2})$, $\min(0,0)$ ד. $\mathrm{III}=h(x)$, $\mathrm{II}=f(x)$, $\mathrm{I}=g(x)$.

פונקציית מנה:

חקירה:

סרטון

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^2-10x+6}{3x^2-10x+3}$. חקרו את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

סרטון

2) לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x=-8$.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

סרטון

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$, $(a\neq 1)$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. הביעו באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y.

ד. ענו על הסעיפים הבאים:

i. מצאו עבור אילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.

ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$.
מצאו את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x.

סרטון

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2-20x+28}{x^2+2a}$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה $(0.5,3)$.

א. מצאו את ערך הפרמטר a וכתבו את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ג. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. העזרו בגרף הפונקציה וקבעו עבור אלו ערכים של k הישר: $y=k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

תשובות סופיות:

1) א. $x\neq\frac{1}{3}$, $x\neq3$ ב. $\max\left(1,-\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(-1,1\frac{3}{8}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $-1<x<1$ וגם $x\neq\frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $1<x\neq3$ או $x<-1$.

ד. $(0,2)$ ה. $y=2$, $x=\frac{1}{3}$, $x=3$.

2) א. $a=1$, $f(x)=\frac{x+4}{x^2}$ ב. עולה: $-8<x<0$ יורדת: $x>0$, $x<-8$

ג. $(-4,0)$ ד. $y=0$, $x=0$.

3) א. $x\neq1$ ב. $y=1$, $x=1$ ג. $(0,a),(a,0)$ ד. i. $a>1$ ii. $a=2$.

4) א. $a=3$, $f(x)=\frac{3x^2-20x+28}{x^2+6}$, כל x.

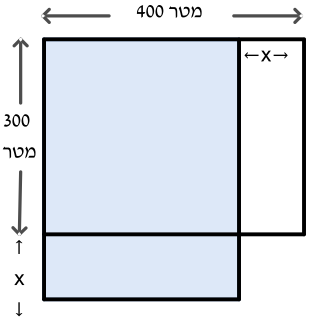
ב. $\max(-2,8)$, $\min\left(3,-\frac{1}{3}\right)$ ג. עולה: $x>3$, $x<-2$, יורדת: $-2<x<3$

ד. $\left(4\frac{2}{3},0\right),\left(0,4\frac{2}{3}\right),(2,0)$ ו. 3, $-\frac{1}{3}$, $k=8$.

בעיות קיצון:

בעיות קיצון בפונקציית פולינום:

יישומון



1) לדני יש חלקת אדמה מלבנית שאורכה 300 מטר ורוחבה 400 מטר.
דני רצה להגדיל את אורך החלקה ולהקטין את רוחבה
כך שהשטח שלה יהיה מקסימלי וההיקף שלה לא ישתנה.
נסמן את מספר המטרים שדני מוסיף לאורך ומוריד מהרוחב ב–x מטר.

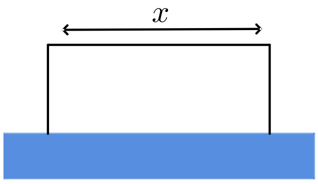
א. היעזרו ביישומון ובדקו כיצד שינוי באורך של x,
משפיע על שטח החלקה החדשה המתקבלת.

ב. בטאו באמצעות x את שטח החלקה החדשה – זו פונקציית המטרה.

ג. גזרו את הפונקציה ומצאו את הערך של x עבורו לפונקציית המטרה יש נקודות מקסימום.

ד. מצאו את שטח החלקה המקסימלי והשוו לגדלים המתקבלים ביישומון.

יישומון



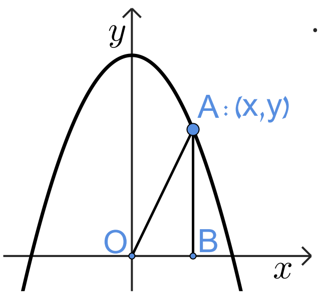
2) לאורי גדר תיל באורך 200 מטר, אורי רוצה להשתמש בגדר
כדי לגדר חלקת אדמה בצורת האות ח' בחזית ביתו וליצור בה גינת
פרחים. מה צריך להיות אורך הגדר כך ששטח גינת הפרחים יהיה
מקסימלי. נסמן ב–x את רוחב גינת הפרחים.

א. היעזרו ביישומון ותארו כיצד משפיע רוחב גינת הפרחים על שיטחה.

ב. בטאו באמצעות x את שטח גינת הפרחים.

ג. מצאו את הערך של x עבורו שטח הגינה יהיה מקסימלי.

יישומון



3) נקודה A הנמצאת ברביע הראשון על גרף על הפרבולה $y=-x^2+4$.
מנקודה A הורידו אנך לציר ה-x שחותך אותו בנקודה B.
הישר AO מחבר את הנקודה A עם ראשית הצירים (O).
כך שנוצר משולש ישר זווית ABO.
היעזרו ביישומון וענו על הסעיפים הבאים:

א. טיילו עם הנקודה A לאורך הפרבולה (ברביע הראשון),
מה קורה לשטח המשולש שנוצר?

ב. נסמן את שיעור ה-x של נקודה A באות t.
הביעו באמצעות t את שטח המשולש ABO, מה תחום ההגדרה של t?

ג. מבין כל המשולשים ישרי הזווית מצאו את t עבורו מתקבל המשולש בעל השטח
המקסימלי.

יישומון

4) נקודה A נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)=x^2+2$ מנקודה A הורידו אנך לציר ה-x החותך את גרף הפונקציה $g(x)=-x^2+2x-4$ בנקודה B.

היעזרו ביישומון ועניו על השאלות הבאות:

א. "טיילו" עם הנקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$.

כיצד משפיע מיקום הנקודה על אורך הקטע AB?

ב. נסמן את שיעור ה-x של נקודה A באות t.

הביעו באמצעות t את שיעורי הנקודות A ו-B.

ג. הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB (פונקציית מטרה).

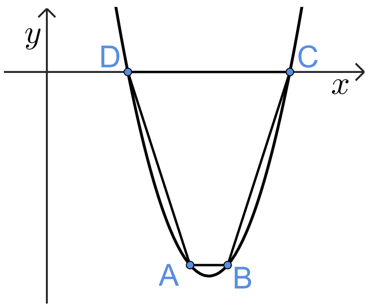
ד. מצאו את הערך של t עבורו האורך של AB הוא מינימלי.

5) נקודה A נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)=x^2-16x+48$ ברביע הרביעי.

מנקודה A מעבירים ישר מקביל לציר ה-x ושחותך את גרף הפונקציה בנקודה B. מחברים את הנקודות A ו-B עם הנקודות D ו-C שהן נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x (ראו סרטוט).

א. נסמן את שיעור ה-x של נקודה A באות t.

הביעו באמצעות t (במידת הצורך) את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.



ב. מצאו את משוואת ציר הסימטריה של הפונקציה.

ג. הביעו באמצעות t (במידת הצורך)

את אורך הקטעים AB ו-DC.

ד. מה תחום הערכים ש-t יכול לקבל?

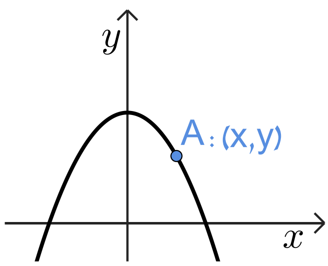
ה. הביעו באמצעות t את גובה הטרפז.

ו. האם אורך גובה הטרפז שווה לשיעור ה-y של הנקודה A?

ז. הביעו את שטח הטרפז שנוצר באמצעות t.

ח. מצאו את שטח הטרפז המקסימלי (עד שתי ספרות אחרי הנקודה).

6) על גרף הפרבולה $y=-x^2+2$ ברביע הראשון (כולל הצירים) בוחרים נקודה A.



א. מה תחום הערכים של x שמתאים לתנאי הבעיה?

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A עבורה

סכום ריבועי שיעורי הנקודה הוא מקסימלי.

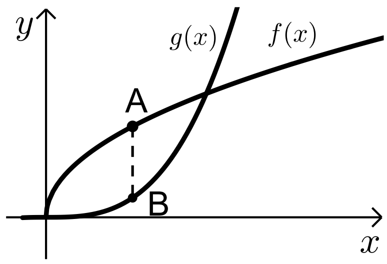
ג. מצאו את שיעורי הנקודה A עבורה

סכום ריבועי שיעורי הנקודה הוא מינימלי.

בעיות קיצון בפונקציית שורש:

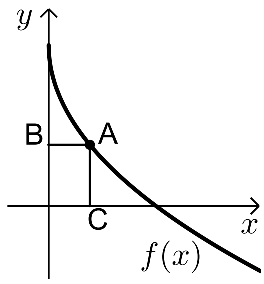
סרטון

1) נתונות הפונקציות $f\left(x\right)=2\sqrt{x}$ ו- $g\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3$.
את הנקודה A שעל $f\left(x\right)$ חיברו עם הנקודה B,
שנמצאות מתחתיה על $g\left(x\right)$ כך שהקטע AB מקביל
לציר ה- y.
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך
הקטע AB יהיה מקסימלי?



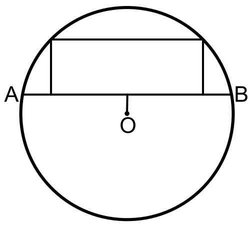
סרטון

2) באיור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה: $f\left(x\right)=6-3\sqrt{x}$.
הנקודה A נמצאות על גרף הפונקציה ברביע הראשון.
מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים
אותם בנקודות B ו-C כמתואר באיור.
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.
א. הביעו באמצעות t את סכום הקטעים AC+AB.
ב. מצאו את ערכו של t עבורו סכום הקטעים הנ"ל
יהיה מינימלי.



סרטון

3) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB
שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בסרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

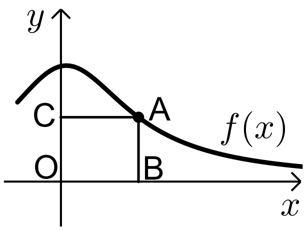


בעיות קיצון בפונקציית מנה:

סרטון

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+12}{x^2+3}$ בתחום: $x\geq 0$.

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור.



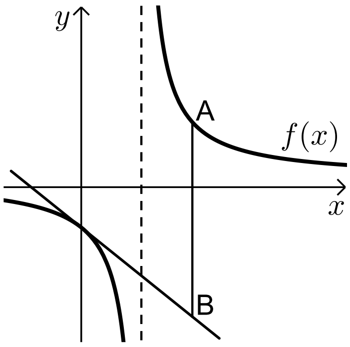
א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.

סרטון

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+10}{x-2}$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .



א. מצאו את משוואת המשיק.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

סרטון

3) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

מצאו שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.

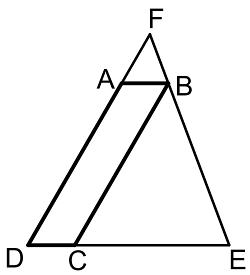
סרטון

4) המרובע ABCD הוא מקבילית.

מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD.

ידוע כי מידות המקבילית הן: 2 ס"מ $\text{AB}=$, 8 ס"מ $\text{AD}=$.

מסמנים את אורך הצלע DE ב- x .



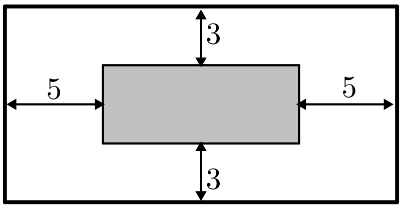
א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע DF.

ב. מצאו את x עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?

סרטון

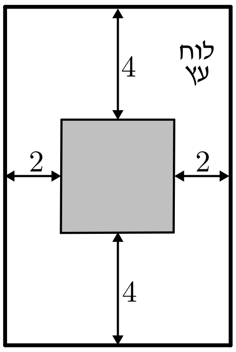
5) חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ".
תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי
קרטון בעלי שטח מינימלי כך שיישארו רווחים
של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון,
ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).
יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל
אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גלויות במידות
שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.
מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?".



א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראו דרך חישוב.
ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

סרטון

6) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת מלבנית לתמונה
מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים
יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון - 4 ס"מ (ראה איור).
כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח
המקסימלי שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).



א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?
ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

תשובות סופיות:

בעיות קיצון בפונקצית פולינום:

1) ב. $f(x)=(400-x)\cdot(300+x)$ ג. $x=50$ ד. 122,500 מ"ר.

2) ב. $f(x)=\left(\frac{200-x}{2}\right)\cdot x$ ג. $x=100$

3) ב. $\frac{1}{2}\cdot(-t^3+4t)$, $0<t<2$ ג. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

4) ב. $A(t,t^2+2)$, $B(t,-t^2+2t-4)$ ג. $f(t)=2t^2-2t+6$ ד. $t=\frac{1}{2}$.

5) א. $C(12,0)$, $D(4,0)$, $A(16-t,t^2-16t+48)$, $A(t,t^2-16t+48)$
ב. $x=8$ ג. $AB=16-2t$, $DC=8$
ד. $4<t<8$ ה. $-t^2+16t-48$ ו. לא.
ז. $\frac{(24-2t)\cdot(-t^2+16t-48)}{2}$ ח. 78.85.

6) א. $0\le x\le\sqrt{2}$ ב. $A(0,2)$ ג. $A\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{2}\right)$

בעיות קיצון בפונקציית שורש:

1) $A(1,2)$.

2) א. $l=t+6-3\sqrt{t}$ ב. $t=2.25$.

3) $2\sqrt{5}R-2a$ יחידות אורך.

בעיות קיצון בפונקציית מנה:

1) א. $A(2,2)$ ב. $A(0,4)$.

2) א. $y=-3x-5$ ב. $A(4,7)$ ג. $AB=24$.

3) $\left(\sqrt{3},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$.

4) א. $DF=\frac{8x}{x-2}$ ב. $x=6$, $L=\frac{x^2+6x}{x-2}$ ג. $L=18$.

5) א. 6 ס"מ על 10 ס"מ ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ.

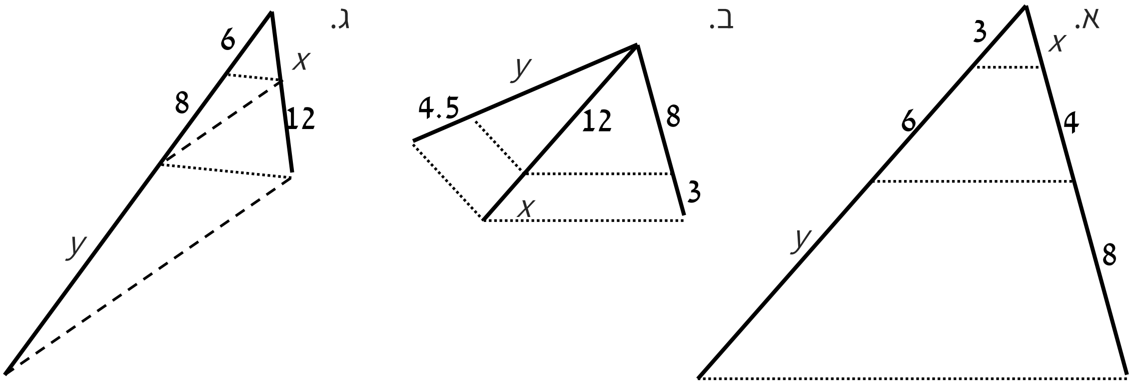
6) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ ב. $S=98$.

גיאומטריה - פרופורציה ודמיון:

משפט תאלס:

סרטון

1) חשבו את אורכי הקטעים x ו- y בסרטוטים שלפניכם (הקטעים המקווקוים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:



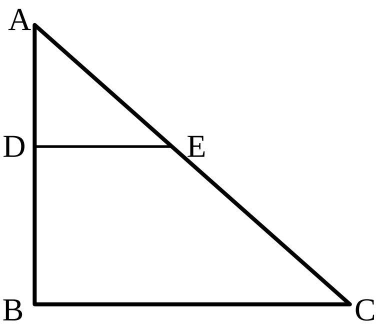
סרטון

2) במשולש שלפניכם נתון $DE \parallel BC$.

כמו כן: $\sphericalangle ADE = 90^\circ$

וכן: AE = BD = 10 ס"מ, DE = 8 ס"מ.

מצאו את אורכי הקטעים AD, CE ו-BC.



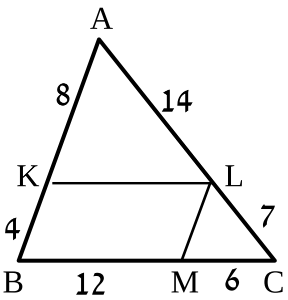
סרטון

3) מרובע KLMB חסום במשולש ABC.

הנתונים המספריים רשומים בסרטוט.

כל המידות הן בס"מ.

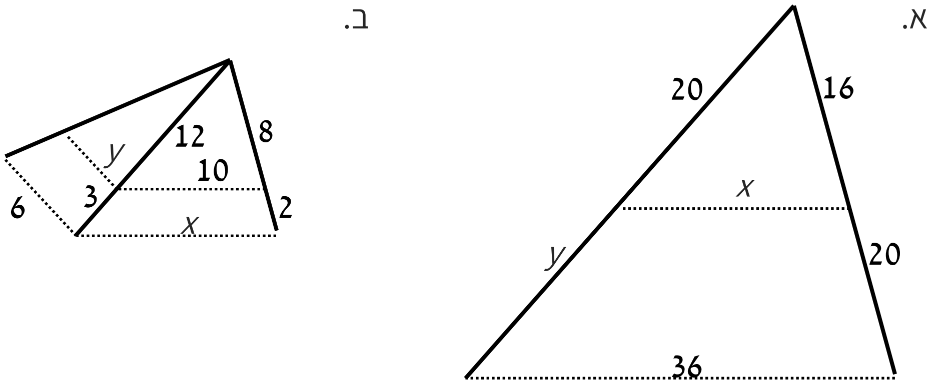
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.



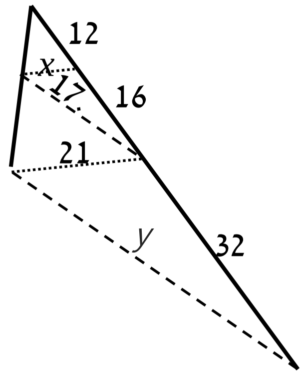
סרטון

4) חשבו את x ואת y בסרטוטים שלפניכם

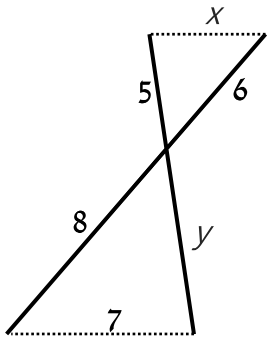
(הקטעים המקווקוים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:



ג.



ד.



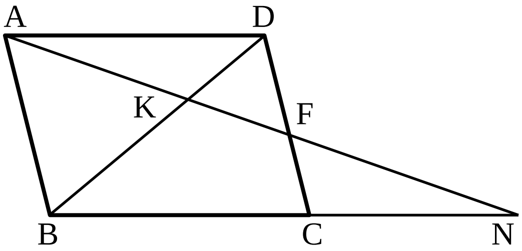
סרטון

5) במקבילית ABCD מעבירים ישר דרך הנקודה A החותך את הצלע CD בנקודה F ונפגש עם המשך BC בנקודה N.

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $\frac{NK}{AK}=\frac{AK}{KF}$.

ב. $\frac{BC}{CN}=\frac{DF}{CF}$.



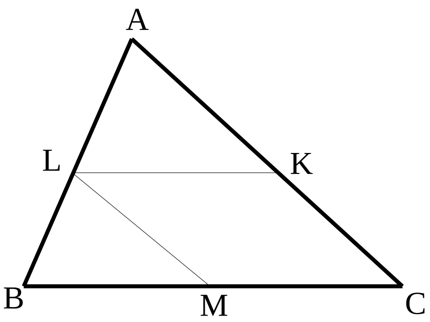
סרטון

6) בסרטוט נתון: $\frac{AK}{CK}=\frac{CM}{BM}=\frac{AL}{BL}$.

א. הוכיחו: המרובע KLMC הוא מקבילית.

ב. נתון: $AL=1.5BL$, BC = 10 ס"מ.

חשבו את אורך הקטע LK.



סרטון

7) במשולש ABC מעבירים את התיכונים BD ו-CE אשר נפגשים בנקודה M.

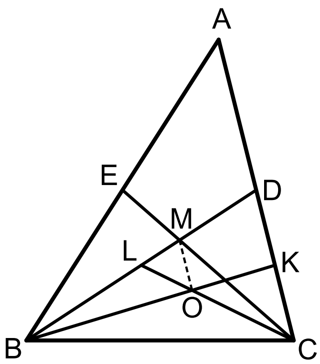
במשולש BDC מעבירים את התיכונים CL ו-BK הנפגשים בנקודה O.

א. הוכיחו כי: $3LM=BL$.

ב. הוכיחו כי: $AC \parallel MO$.

ג. נתון: $S_{BLC}=27$.

חשבו את שטח המשולש MOL.



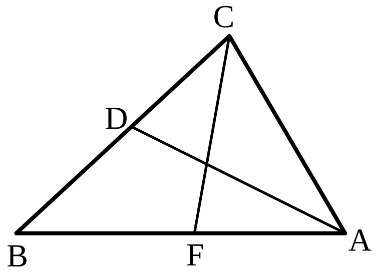
משפט חוצה הזווית:

סרטון

(1 הקטעים AD ו-CF הם חוצי הזוויות A ו-C בהתאמה במשולש ABC.

נתון: $AB =$ 18 ס"מ, $AC =$ 12 ס"מ, $CD =$ 6 ס"מ.

חשבו את אורך הקטע AF.



סרטון

(2 נתון משולש ABC. הקטע AE חוצה את זווית A של המשולש.

ממשיכים את AE עד לנקודה D כך שנוצר המשולש BDC.

F היא נקודה על הצלע BC המקיימת: $DF = FE = DC$.

הצלע AB מקבילה לצלע DC.

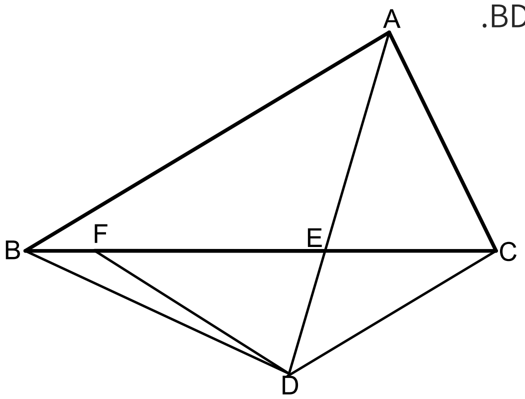
א. הוכיחו כי: $AC = EF$.

ב. הוכיחו: $\frac{FE}{CE} = \frac{AB}{BE}$.

ג. מסמנים נקודה G על AB ומחברים אותה עם הנקודה D כך ש- $AC \parallel DG$.

ד. הוכיחו כי המרובע ACDG הוא מעוין.

ה. הוכיחו: $\frac{AG}{CE} = \frac{AB}{BE}$.



סרטון

(3 נתון משולש ABC.

ממשיכים את הצלע AC מהכיוון של C עד לנקודה D.

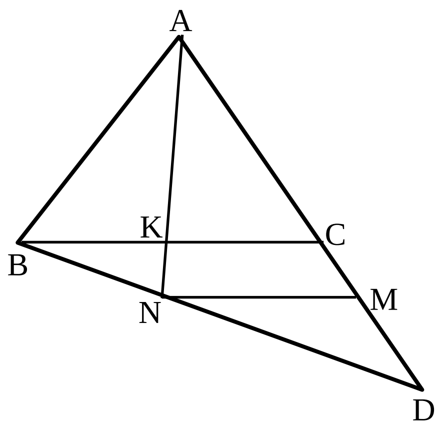
מחברים את הנקודה D עם הקודקוד B.

מעבירים את הקטע AK אשר חוצה את זווית A במשולש ABC.

המשך AK חותך את BD בנקודה N.

מעבירים את הקטע MN. נתון: $MN \parallel BC$.

הוכיחו: $\frac{CM}{DM} = \frac{AB}{AD}$.



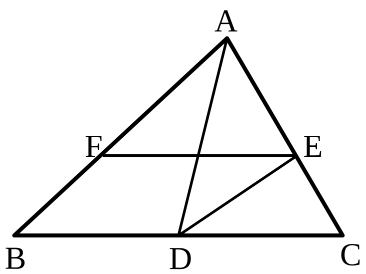
סרטון

(4 נתון משולש ABC. מעבירים את התיכון AD לצלע BC.

נתון כי DE הוא חוצה זווית $\sphericalangle ADC$

וכי DF הוא חוצה זווית $\sphericalangle ADB$.

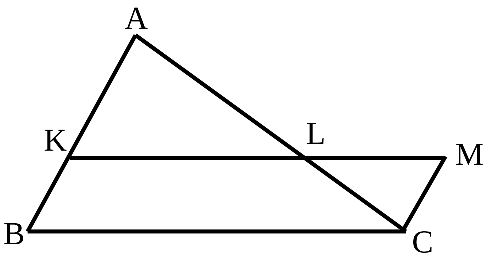
הוכיחו: $EF \parallel BC$.



דמיון משולשים:

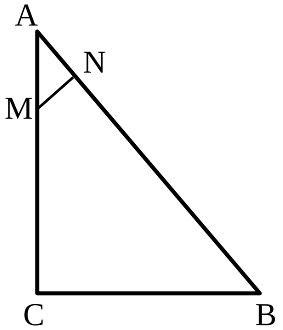
סרטון

1) נתונה מקבילית BKMC.
המשיכו את הצלע BK עד לנקודה A.
הקטע AC חותך את הצלע KM בנקודה L.
הוכיחו: $LC \cdot BC = LM \cdot AC$.



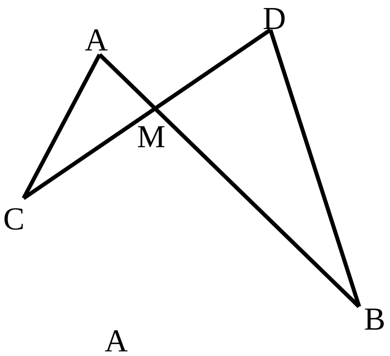
סרטון

2) המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle C = 90°)$.
מנקודה M שעל הניצב AC העלו אנך NM ליתר AB.
נתון כי: 20 ס"מ = AB, 4 ס"מ = AN, 12 ס"מ = BC.
מצאו את אורך הקטע AM.



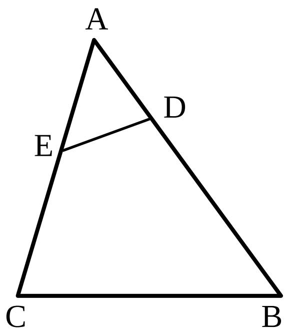
סרטון

3) הישרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
אורכי הקטעים הם: 3 ס"מ = AM,
10 ס"מ = BM, 6 ס"מ = CM, 5 ס"מ = DM.
א. הוכיחו כי: $\Delta AMC \sim \Delta DMB$.
ב. האם $AC \parallel BD$? נמקו.
ג. מצאו את אורכו של AC
אם נתון כי BD שווה ל-14 ס"מ.



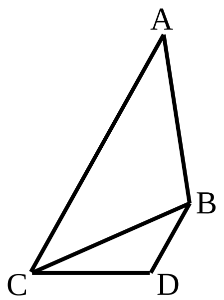
סרטון

4) לפניכם משולש ABC.
מעבירים את הקטע DE אשר יוצר את הגדלים הבאים:
4 ס"מ = AD, 11 ס"מ = BD, 5 ס"מ = AE, 7 ס"מ = CE.
א. הוכיחו כי: $\Delta ADE \sim \Delta ACB$.
ב. הוכיחו כי את המרובע BCED אפשר לחסום במעגל.



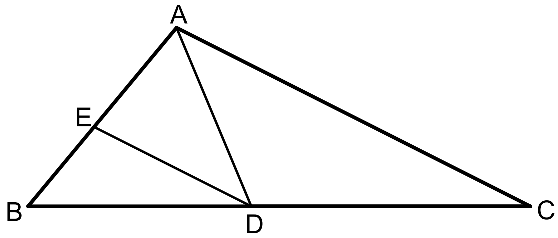
סרטון

5) נתונים המשולשים ABC ו-BDC.
ידוע כי: 16 ס"מ = AC, 10 ס"מ = AB,
8 ס"מ = BC, 5 ס"מ = DC, 4 ס"מ = BD.
א. הוכיחו כי שני המשולשים דומים ורשמו
אותם לפי סדר התאמת קודקודיהם.
ב. הוכיחו כי: $AC \parallel BD$.



סרטון

6) במשולש ABC הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות BC ו-AB בהתאמה.



נתון כי: $DE \parallel AC$, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BED$.

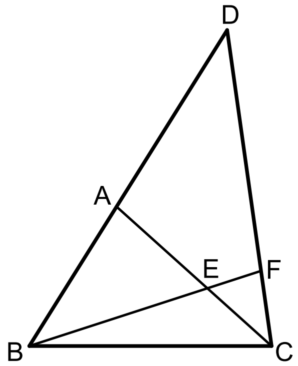
א. הוכיחו: $AD \cdot BD = AB \cdot DE$.

ב. ידוע כי הנקודה D מחלקת את הצלע BC באופן הבא: $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$

וכי: $AD \cdot BD = 16$. חשבו את המכפלה: $AB \cdot AC$.

סרטון

7) מהקודקוד C של המשולש BCD מעבירים את הקטע AC כך שהמשולש ACD הוא שווה שוקיים $(AC = AD)$.



הנקודה F נמצאות על הצלע CD כך שמתקיים:

$\sphericalangle D = \sphericalangle CBF$, $3 \cdot \sphericalangle ACD = \sphericalangle BEC$.

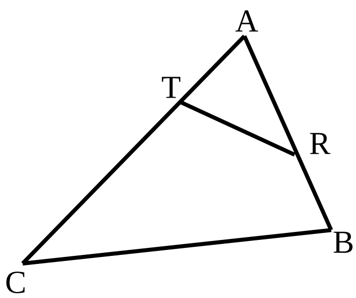
א. הוכיחו כי הקטע BF חוצה את זווית $\sphericalangle B$.

ב. הוכיחו כי: $\Delta AEB \sim \Delta FEC$.

ג. הוכיחו כי: $\frac{BE}{BC} = \frac{AE}{FC}$.

סרטון

8) בסרטוט שלפניכם נתון משולש ABC ובו קטע RT כך שמתקיימים האורכים הבאים:



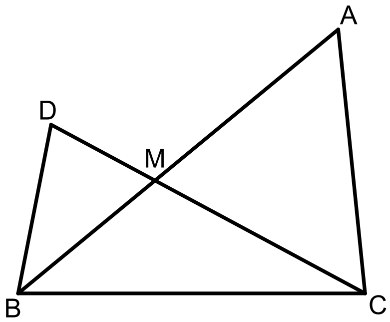
4 ס"מ = BR, 4 ס"מ = AT, 6 ס"מ = AR,

11 ס"מ = CT, 60 סמ"ר = S_{ABC} .

מצאו את שטח המרובע RTCB.

סרטון

9) נתון משולש ABC. על הצלע BC של המשולש ABC בונים משולש נוסף BDC.



הצלעות DC ו-AB נחתכות בנקודה M.

הצלע AB חוצה את זווית B וידוע כי: $2\sphericalangle ACD = \sphericalangle B$.

א. הוכיחו: $\Delta ACM \sim \Delta DBM$.

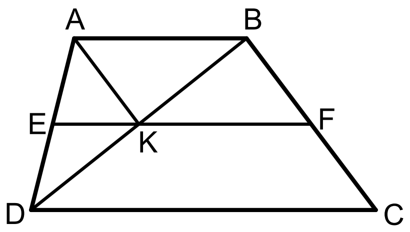
ב. הוכיחו: $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{CM}$.

ג. נתון כי: $\frac{AM}{CM} = \frac{8}{5}$ וכי אורך הצלע BD הוא 6 ס"מ. סכום הצלעות AC ו-BC הוא 19.5 ס"מ.

חשבו את היחס: $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}}$.

סרטון

10) המרובע ABCD הוא טרפז, $(AB \parallel CD)$.
מעבירים את קטע האמצעים EF החותך
את אלכסון הטרפז BD בנקודה K.
ידוע כי הקטע AK מקביל לשוק BC של הטרפז.
א. הוכיחו כי המרובע ABFK הוא מקבילית.
ב. נסמן: $S_{BKF} = S$.
הביעו באמצעות S את שטח הטרפז ABCD.



תשובות סופיות:

משפט תאלס:

1) א. $x=2$, $y=12$ ב. $x=4.5$, $y=12$ ג. $x=9$, $y=18\frac{2}{3}$.

2) AD = 6 ס"מ, BC = $21\frac{1}{3}$ ס"מ, CE = $16\frac{2}{3}$ ס"מ. **3)** שאלת הוכחה.

4) א. $x=16$, $y=25$ ב. $x=12.5$, $y=4.8$ ג. $x=9$, $y=37.5$ ד. $x=5.25$, $y=6\frac{2}{3}$

5) שאלת הוכחה.

6) א. שאלת הוכחה. ב. 6 ס"מ.

7) שאלת הוכחה.

משפט חוצה זווית:

1) 8 ס"מ.

דמיון משולשים:

1) שאלת הוכחה. **2)** 5 ס"מ.

3) א. שאלת הוכחה ב. לא. ג. 8.4 ס"מ.

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

5) א. $\Delta ABC \sim \Delta CDB$ ב. שאלת הוכחה.

6) א. שאלת הוכחה. ב. $AB \cdot AC = 36$

7) שאלת הוכחה

8) 50.4 סמ"ר.

9) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}} = 0.8$

10) א. שאלת הוכחה. ב. $6S$

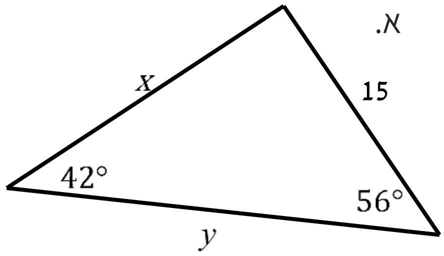
טריגונומטריה במישור:

משפט הסינוסים והקוסינוסים:

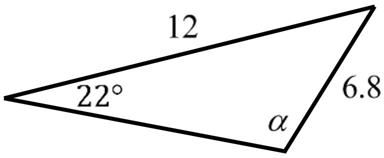
סרטון

1) מצאו את ערכו של α / x / y במשולשים הבאים:

א.



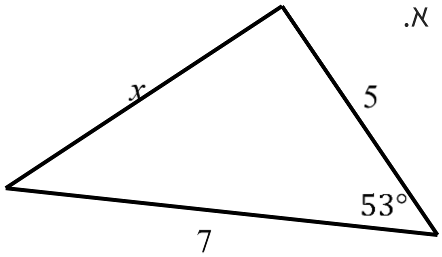
ב.



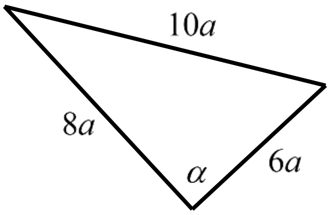
סרטון

2) מצאו את ערכו של α / x במשולשים הבאים:

א.

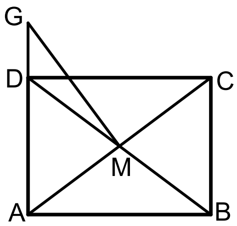


ב.



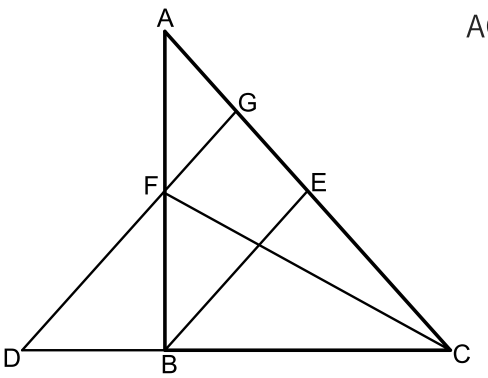
סרטון

3) אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M.
הנקודה G נמצאות על המשך הצלע AD.
נתון: AD = 3 ס"מ , AB = 4 ס"מ , DG = 1.2 ס"מ.
מצאו את גודלו של הקטע GM.



סרטון

4) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: AC = DC
ו- $GD \parallel BE$.



א. הוכיחו: $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: ME = 4 ס"מ.
חשבו את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי: $\measuredangle ACD = 48.189°$
הוכיחו כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.

סרטון

5) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \parallel CD\ ,\ \sphericalangle B = 90^\circ)$.

מסמנים את הבסיס: $DC = 3t$ ואת השוק $AD = 4t$.

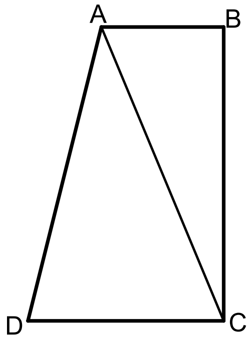
ידוע גם כי: $\sphericalangle D = 60^\circ$.

א. הביעו באמצעות t את אורך האלכסון AC.

ב. מצאו את זווית ACB אם ידוע כי $AB = t$.

ג. נתון: $BC = 4\sqrt{3} =$ 6.928 ס"מ.

חשבו את שטח הטרפז ABCD.



סרטון

6) מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA , OB , OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α.

המשולש COD הוא ישר זווית $\sphericalangle CDO = 90^\circ$.

נתונים האורכים: $DO = 10\ ,\ BO = 9$.

מסמנים: $CD = 1.5m\ ,\ BC = 1.4m$.

א. הביעו באמצעות m את $\sin\alpha$.

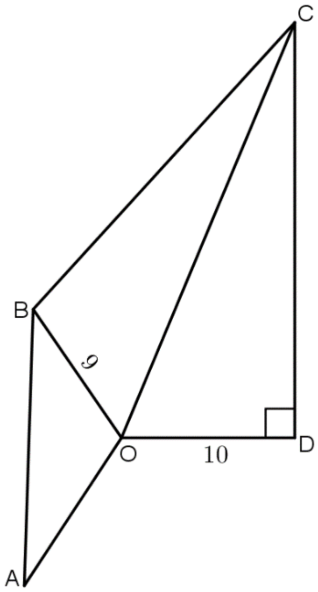
(העזרו במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי: $AB = m$. מצאו את m

אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם

את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.

ג. חשבו את זווית BOC.



סרטון

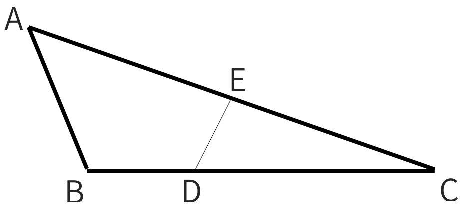
7) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאות

על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.

נתון: $AB = a\ ,\ BC = b$.

הביעו באמצעות a ו- b את אורך הקטע DE.



שטחים:

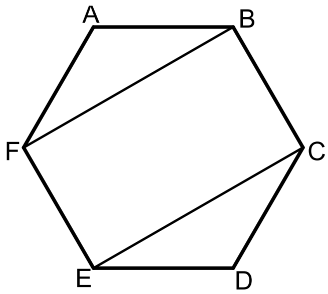
סרטון

1) באיור שלפניכם נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא S.

א. הביעו באמצעות S את אורך צלע המשושה.

ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן BFEC.

הביעו באמצעות S את שטח המלבן.



סרטון

2) במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC

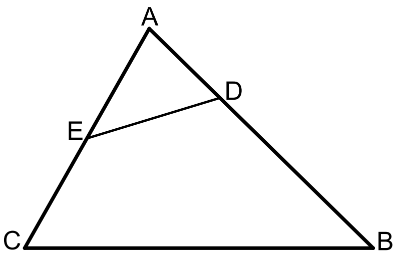
והנקודה D מקיימת: 3 ס"מ = AD.

ידוע כי: $\frac{DE}{BC}=\frac{2}{5}$.

א. מצאו את אורך הקטע DE.

ב. חשבו את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

ג. חשבו את שטח המרובע BCED.



סרטון

3) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.

הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.

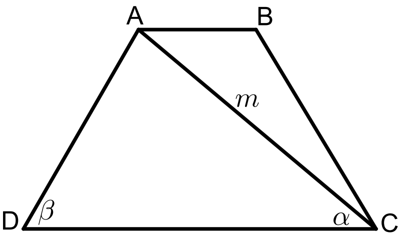
מסמנים: $\sphericalangle ADC=\beta$, $\sphericalangle ACD=\alpha$, $AC=m$.

א. הביעו באמצעות α , β ו- m את אורך הבסיס הגדול DC.

ב. נתון כי האלכסון AC מקיים: $S_{ADC}/S_{ABC}=3$.

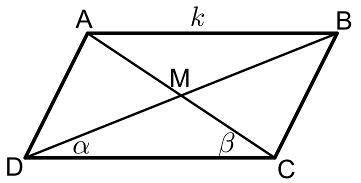
הביעו באמצעות α, β ו- m את הבסיס AB.

ג. חשבו את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\beta=60°$, $\alpha=40°$ ו- $m=8$.



סרטון

4) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים בנקודה M כמתואר באיור.



מסמנים: $\sphericalangle ACD=\beta$, $\sphericalangle BDC=\alpha$, $AB=k$.

א. הוכיחו כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

ב. ענו על השאלות הבאות:

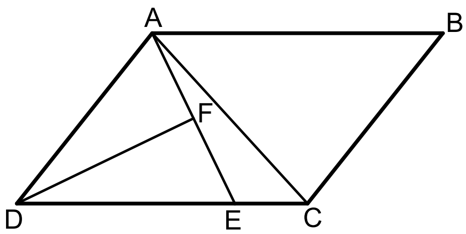
i. הביעו באמצעות α , β ו- k את שטח המשולש DMC.

ii. הביעו באמצעות α , β ו- k את שטח המקבילית ABCD.

ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD}=2$. הראו כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2\sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

סרטון

5) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים המקיימים: 3CE = DE.
מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.
ידוע כי: $\sphericalangle ADF=\sphericalangle CDF=\alpha$.
מסמנים: $CE=k$.



א. הביעו באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.
הביעו באמצעות k ו- α את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצאו את α .

תשובות סופיות:

משפט הסינוסים והקוסינוסים:

1) א. $y=$ 22.2 ס"מ, $x=$ 18.58 ס"מ ב. $\alpha=41.382°$ או $\alpha=138.618°$

2) א. $x=$ 5.646 ס"מ ב. $\alpha=90°$

3) GM = 3.360 ס"מ

4) DG = 18.

5) א. $AC=t\sqrt{13}$ ב. $\sphericalangle ACB=16.1°$ ג. $S_{ABCD}=16\sqrt{3}\approx$ 27.712 סמ"ר.

6) א. $\sin\alpha=\frac{1.5m}{\sqrt{100+2.25m^2}}$ ב. $m=16$ ג. $56.94°$

7) $DE=\sqrt{\frac{1}{9}b^2-a^2}$

שטחים:

1) א. $\sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}}\approx 0.62S$ ב. $\frac{2}{3}S$

2) א. DE = $2\sqrt{1.6}$ ס"מ = 2.53 ס"מ ב. $R=2$ ג. $S=$ 21.48 סמ"ר

3) א. $DC=\frac{m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ ב. $AB=\frac{m\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\beta}$ ג. $S_{ABCD}=31.2$

4) ב. i. $\frac{k^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ ב. ii. $\frac{2k^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

5) א. $AE=6k\sin\alpha$ ב. $P_{ACE}=k+6k\sin\alpha+k\sqrt{25-24\cos2\alpha}$

ג. $\alpha=14.47°$.

משימות לימוד עצמי

משימת לימוד 1 – אינדוקציה מתמטית:

סרטון

יישומון

צפו בסרטון , היכנסו ליישומון ועננו על השאלות הבאות:

תזכורת: אינדוקציה מתמטית היא שיטה המשמשת להוכחת טענה המתייחסת למספרים טבעיים.
בכדי להוכיח שטענה כלשהי מתקיימת לכל מספר טבעי נשתמש בעיקרון האינדוקציה
על פיו עלינו להוכיח שמתקיימות שתי הדרישות הבאות:
(1) המספר 1 מקיים את הטענה (שלב **הבסיס**).
(2) אם מספר טבעי כלשהו מקיים את הטענה אז גם המספר העוקב לו מקיים את הטענה.
(שלב **הצעד** או **הנחת האינדוקציה**).
כלומר, בשלב הראשון בודקים שהטענה נכונה ל $n=1$, ובשלב השני מניחים שהטענה נכונה
למספר טבעי $n=k$ ומוכיחים שהיא נכונה גם עבור $n=k+1$.
אקסיומת האינדוקציה קובעת כי מקיומן של שתי דרישות אלה נובע שהטענה מתקיימת
לכל מספר טבעי.
שימו לב: בכל פתרון, חשוב להראות בבירור את שלב הבסיס, את הנחת האינדוקציה ואת ההוכחה.
תזכורת: הגדרת עצרת של מספר טבעי: $n!=1\cdot2\cdot3...\cdot n$ כמו כן מגדירים: $0!=1$.

1) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת כי השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

2) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת כי השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

3) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת כי השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי:

$$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$$

4) דנה רצתה לבדוק אם השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2+n+1}{2}$.
לשם כך השתמשה באינדוקציה והראתה שאם מניחים שהשוויון נכון עבור $n=k$ טבעי כלשהו,
הוא נכון גם לגבי $n=k+1$ והסיקה מכך כי השוויון נכון.

א. בדקו שאכן טענתה של דנה מתקיימת,
(כלומר, הראו כי הטענה נכונה ל- $n=k+1$ כאשר מניחים שהיא נכונה ל- $n=k$).

ב. בדקו: (1) האם הטענה נכונה עבור $n=3$?
(2) האם הטענה נכונה עבור $n=1$?
(3) האם לדעתכם הטענה נכונה עבור n כלשהו?

ג. מה הייתה טעותה של דנה?

ד. תקנו את הביטוי בצד ימין של המשוואה כך שהטענה תהיה נכונה, והוכיחו את נכונותה באינדוקציה.

5) דני רצה לבדוק אם השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי: $2^n=n^2-n+2$.
דני בדק וראה כי השוויון אכן מתקיים עבור $n=3$, $n=2$, $n=1$ והסיק כי השוויון נכון לכל n כי זכר במעורפל שלפי אקסיומת האינדוקציה, אם הטענה נכונה ל- $n=1$, ובנוסף אם בהנחה שהיא נכונה ל- $k=2$ ומראים שהיא נכונה גם ל- $k+1$, אז היא נכונה לכל n.

א. בדקו את טענתו של דני לגבי $n=3$, $n=2$, $n=1$.
האם הם אכן מקיימים את המשוואה?

ב. האם דני צדק במסקנתו? הוכיחו או הפריכו אותה.

ג. מה הייתה טעותו של דני?

תזכורת:
א. כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי אי-זוגי:
(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=1$.
(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k הוא מספר טבעי אי-זוגי כלשהו)
נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$.
ב. תזכורת: כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי זוגי:
(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=2$.
(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k הוא מספר טבעי זוגי כלשהו)
נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$.

6) הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי אי-זוגי מתקיים:

$$3+7+11+....+(2n+1)=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

7) הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$4+10+16+...+(3n-2)=\frac{n(3n+2)}{4}$$

8) הוכיחו בעזרת אינדוקציה והנוסחה לנגזרת של מכפלה את הנוסחה הבאה:
עבור נגזרת של x^n עבור n טבעי: $(x^n)'=nx^{n-1}$. (תזכורת: $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$)

סרטון

9) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$4+7+10+13+\ldots+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$$

סרטון

10) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+\ldots+n\cdot3^{n-1}=\frac{1}{4}\left(3^n(2n-1)+1\right)$$

סרטון

11) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot2!}{2}+\frac{2\cdot3!}{4}+\frac{3\cdot4!}{8}+\ldots+\frac{n\cdot(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

תשובות סופיות:

1) נבדוק עבור $n=1$: $1=\frac{1(1+1)}{2}=1$. התקבל פסוק אמת.

הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$.

צ"ל: $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

נקבל: $\frac{k\cdot(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)+2\cdot(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

(2 נבדוק עבור $n=1$: $1^2=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2=1^3$. התקבל פסוק אמת.

הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: $1^3+2^3+\cdots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$, צ"ל:

$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.

נקבל:
$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=$$
$$=(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2^2}=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

(3 שלב הבסיס: נבדוק עבור $n=1$: $1\cdot 1!=(1+1)!-1=1$. התקבל פסוק אמת.

הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1$.

נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$, צ"ל:

$$1\cdot 1!+\cdots+k\cdot k!+(k+1)\cdot(k+1)!=(k+2)!-1$$
$$(k+1)!-1+(k+1)\cdot(k+1)!=(k+1)!(k+1+1)-1=(k+2)(k+1)!-1=(k+2)!-1$$

(4 ב.(1) לא (2) לא (3) לא.

ג. דנה לא ביצעה את הצעד הראשון בהוכחת באינדוקציה – בדיקה עבור $n=1$. ד. $\frac{n^2+n}{2}$.

(5 א. כן. ב. לא, אפשר להפריך ע"י בדיקה של $n=4$ למשל.

ג. דני ביצע את הצעד הראשון אבל שגה בהנחת האינדוקציה כאשר הניח $k=2$ ולא $n=k$.

(6 שאלת הוכחה.

(7 שאלת הוכחה.

(8 הוכחה על פי אינדוקציה כי $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$ נכון לכל n טבעי:

(1) שלב הבסיס - בדיקה עבור $n=1$: $\left(x^1\right)'=1x^0$ ← $x'=1$ ← אמת.

(2) הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: $\left(x^k\right)'=k\cdot x^{k-1}$.

(3) הוכחה עבור $n=k+1$:

נוכיח כי- $\left(x^{(k+1)}\right)'=(k+1)\cdot x^{(k+1)-1}$:

$$\left(x^{(k+1)}\right)'=\left(x^k\cdot x\right)'=1\cdot x^k+x\cdot\left(x^k\right)'=x^k+x\cdot kx^{k-1}=x^k+kx^k=(k+1)x^k$$

משימת לימוד 2 – מעגל היחידה:

סרטון

צפו בסרטון ▷ וענו על השאלות הבאות:

חלק א' – היכרות עם מעגל היחידה

תזכורת: מעגל היחידה הוא מעגל שמרכזו בראשית הצירים ואורך הרדיוס שלו הוא יחידה אחת.

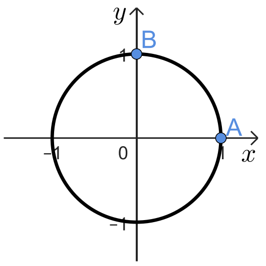
1) הביטו בסרטוט והשלימו את המשפטים הבאים:

א. שיעורי הנקודה A: ___________

ב. שיעורי הנקודה B: ___________

ג. שיעור ה- x של נקודות על מעגל היחידה הוא בין ____ ל- ______

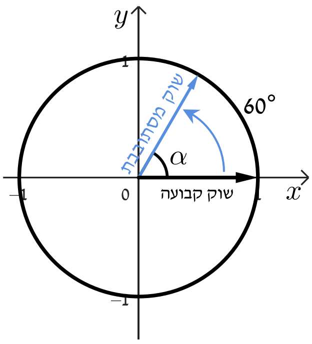
ד. שיעור ה- y של נקודות על מעגל היחידה הוא בין ____ ל- ______



הגדרת זווית במעגל היחידה - זווית מרכזית שיש לה שוק אחת קבועה מונחת על הכיוון החיובי של ציר x והשוק השנייה מתקבלת מסיבוב של רדיוס המעגל. סיבוב נגד כיוון השעון יוצר זווית חיובית, סיבוב עם כיוון השעון יוצר זווית שלילית.

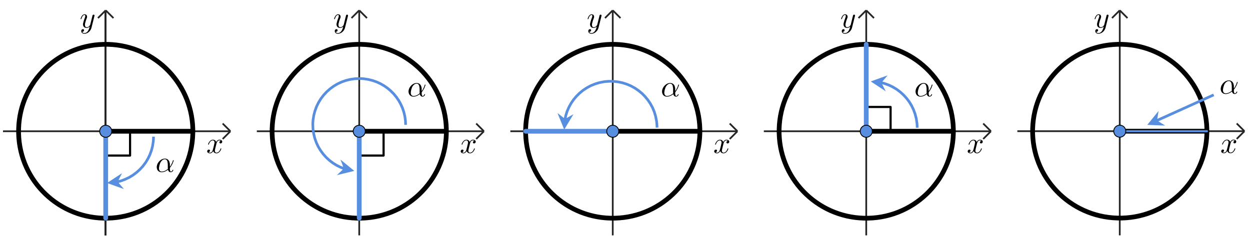
דוגמה:

בציור משמאלכם מתוארת זווית α בת $60°$, כאשר הרדיוס השחור מייצג את השוק הקבועה, והרדיוס בכחול את השוק שנעה נגד כיוון השעון.



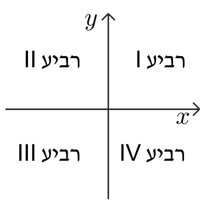
2) קבעו את גודל הזווית α בכל אחד מהשרטוטים הבאים:

א. ב. ג. ד. ה.



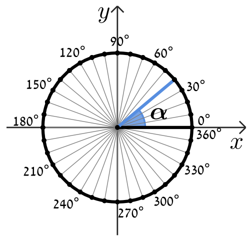
תזכורת:

מערכת הצירים מחלקת את המישור לארבעה רביעים באופן הבא:

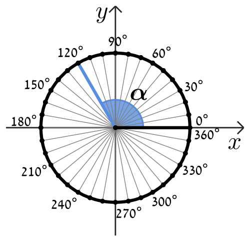


3) השלימו את גודל הזווית α והרביע המתאים עבור כל אחד מהשרטוטים שלפניכם:

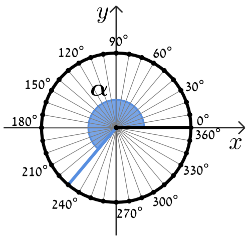
א.



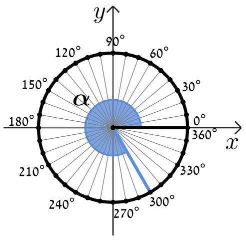
ב.



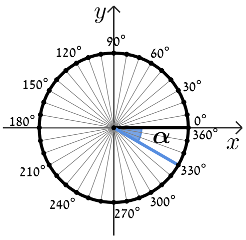
ג.



ד.



ה.



יישומון

4) העזרו ביישומון והשלימו את המשפטים הבאים:

א. זווית בת 100° נמצאת ברביע ה _______.

ב. זווית בת 390° נמצאת ברביע ה _______.

ג. זווית בת 750° נמצאת ברביע ה _______.

ד. זווית בת -30° נמצאת ברביע ה _______.

ה. זווית בת -200° נמצאת ברביע ה _______.

5) עבור כל משפט הקיפו בעיגול את התשובות הנכונות:

א. אם השוק המסתובבת נמצאת ברביע בראשון, הזווית יכולה להיות:

(1) 90° (2) 400° (3) 720° (4) 120° (5) -300°

ב. אם השוק המסתובבת נמצאת על ציר ה x , הזווית יכולה להיות:

(1) 0° (2) 270° (3) 720° (4) 180° (5) -90°

ג. אם השוק המסתובבת נמצאת על ציר ה y , הזווית יכולה להיות:

(1) 0° (2) 270° (3) 720° (4) 180° (5) -90°

ד. אם השוק המסתובבת נמצאת ברביע השלישי , הזווית יכולה להיות:

(1) 129° (2) 190° (3) 560° (4) 180° (5) -110°

ה. אם השוק המסתובבת נמצאת ברביע הרביעי, הזווית יכולה להיות:

(1) 0° (2) 270° (3) 710° (4) 280° (5) -30°

חלק ב' – הגדרת פונקציות טריגונומטריות במעגל היחידה

סרטון

יישומון

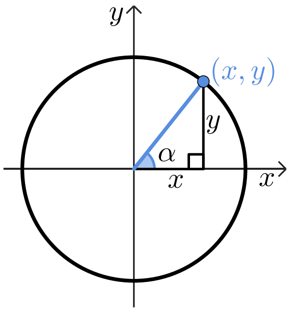
צפו בסרטון , היעזרו ביישומון , וענו על השאלות הבאות:

תזכורת:

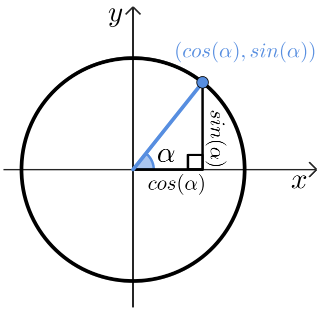
נקודה על מעגל היחידה תסומן ב- (x,y) ומייצגת זווית α חיובית כפי שהגדרנו מקודם.

- שיעור ה- x של נקודה על מעגל היחידה שווה ל- $\cos\alpha$.
- שיעור ה- y של נקודה על מעגל היחידה שווה ל- $\sin\alpha$.

סימון נקודה על מעגל היחידה



ערכי שיעורי הנקודה כתלות בזווית



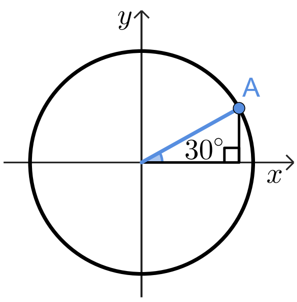
$$\boxed{y=\sin\alpha} \rightarrow \sin\alpha=\frac{y}{1}$$

$$\boxed{x=\cos\alpha} \rightarrow \cos\alpha=\frac{x}{1}$$

דוגמא:

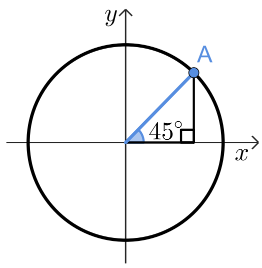
נמצא את שיעורי הנקודה A המתאימה לזווית בת $30°$ לפי השלבים הבאים:

- חישוב שיעור ה- x של הנקודה: $\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- חישוב שיעור ה- y של הנקודה: $\sin30°=\frac{1}{2}$.
- כתיבת שיעורי הנקודה A: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

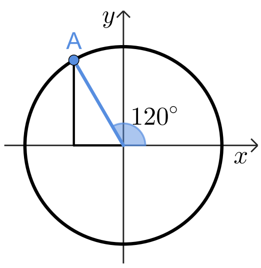


6) בכל אחד מהסרטוטים מצא את שיעורי הנקודה A המתאימה לזווית המסורטטת:

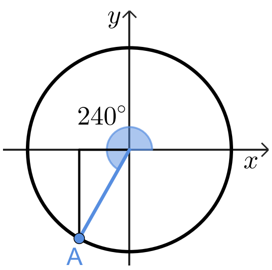
א.



ב.



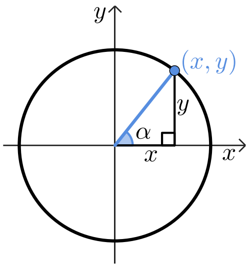
ג.



7) השלימו את הטבלה הבאה (במקרה ויש יותר מאופציה אחת לתשובה, הציעו דוגמה אחת):

זווית	שיעור הנקודה	רביע\על ציר
$60°$		
	$\left(\sqrt{3}/2\,,1/2\right)$	
$330°$		
	$(-1,0)$	
$-45°$		
$750°$		
$225°$		
		רביעי

8) השלימו את החסר:



א. לכל נקודה $A(x,y)$ על מעגל היחידה תחום הערכים של שיעורי הנקודה הם: $\_\_ \le x \le \_\_$, $\_\_ \le y \le \_\_$.

ב. לכל נקודה מתאימה $A(x,y)$ על מעגל היחידה מתאימה זווית α, כך ששיעורי הנקודה ניתנים לכתיבה באופן הבא: $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$

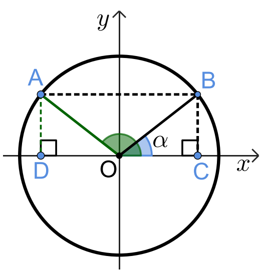
ולכן טווח הערכים של הפונקציות $\sin\alpha$ ו- $\cos\alpha$ הוא: $\_\_ \le \sin\alpha \le \_\_$, $\_\_ \le \cos\alpha \le \_\_$.

חלק ג' – זהויות טריגונומטריות

סרטון

צפו בסרטון ועננו על השאלות הבאות:

9) המרובע ABCD הוא מלבן.



א. הוכיחו: $\Delta ADO \cong \Delta BCO$.

ב. השלימו את המשפטים הבאים (הביעו באמצעות α לפי הצורך):

(1) $\sphericalangle AOD = \_\_\_\_\_\_$.

(2) $\sphericalangle AOC = \_\_\_\_\_\_$.

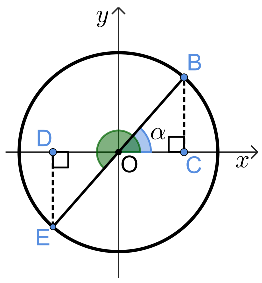
(3) שיעורי הנקודה B הם $(\_\_\_\_,\_\_\_\_)$.

(4) שיעורי הנקודה A הם $(\_\_\_\_,\_\_\_\_)$.

(5) $y_A = y_B$, ולכן מתקיימת הזהות: $\sin(180°-\alpha) = \_\_\_\_$.

(6) $x_A = -x_B$, ולכן מתקיימת הזהות: $\cos(180°-\alpha) = \_\_\_\_$.

10) הקטע BE עובר דרך ראשית הצירים.



א. הוכיחו: $\Delta EDO \cong \Delta BCO$.

ב. השלימו את המשפטים הבאים (הביעו באמצעות α לפי הצורך):

(1) $\sphericalangle EOD =$ ______ .

(2) $\sphericalangle EOC =$ ______ .

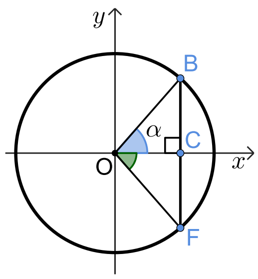
(3) שיעורי הנקודה B הם (____,____).

(4) שיעורי הנקודה E הם (____,____).

(5) $y_E = -y_B$, ולכן מתקיימת הזהות: $\sin(180° + \alpha) =$ ____ .

(6) $x_E = -x_B$, ולכן מתקיימת הזהות: $\cos(180° + \alpha) =$ ____ .

11) הקטע BF מאונך לציר ה- x.



א. הוכיחו: $\Delta FDO \cong \Delta BCO$.

ב. השלימו את המשפטים הבאים (הביעו באמצעות α לפי הצורך):

(1) $360° - \alpha =$ _____ $= \sphericalangle FOC$.

(2) שיעורי הנקודה B הם (____,____).

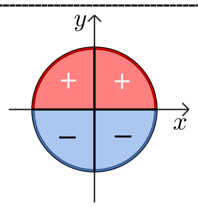
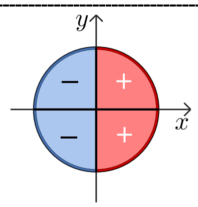
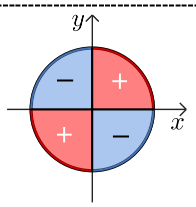
(3) שיעורי הנקודה F הם (____,____).

(4) $y_E = -y_B$, ולכן מתקיימת הזהות: $\sin(360° - \alpha) =$ ____ .

(5) $x_F = x_B$, ולכן מתקיימת הזהות: $\cos(360° - \alpha) =$ ____ .

לסיכום:

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
II	$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$
III	$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$	$\tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$
IV	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
סימנים			

12) השלימו את השוויונות הבאים בהתאם לזהויות שבכל רביע:

רביע II	רביע III	רביע IV
$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(360°-\alpha)=\cos\alpha$
$\sin150°=\sin(\_\_)$	$\sin200°=-\sin(\_\_)$	$\sin(-30°)=\sin330°=-\sin(\_\_)$
$\sin(\_\_)=\sin40°$	$\sin(\_\_)=-\sin40°$	$\sin(-\_\_)=\sin(\_\_)=-\sin70°$
$\cos150°=-\cos(\_\_)$	$\cos200°=-\cos(\_\_)$	$\cos(-30°)=\cos330°=\cos(\_\_)$
$\cos(\_\_)=-\cos40°$	$\cos(\_\_)=-\cos40°$	$\cos(-\_\_)=\cos(\_\_)=\cos70°$

סרטון

13) העבירו את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון. אין צורך לחשב את ערך הביטוי.

$$\sin120° \ , \ \cos150° \ , \ \tan160° \ , \ \cot130° \ , \ \sin215°$$

סרטון

14) העבירו את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון. אין צורך לחשב את ערך הביטוי.

$$\cos245° \ , \ \tan230° \ , \ \cot200° \ , \ \sin300° \ , \ \cos310°$$

סרטון

15) ענו ללא שימוש במחשבון:

$\cos(-45°)=$
$\sin510°=$
$\cos930°=$
$\tan(-225°)=$

$\tan225°=$
$\sin315°=$
$\cos120°=$
$\tan(-30°)=$

$\sin150°=$
$\cos210°=$
$\tan120°=$
$\sin330°=$

סרטון

16) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\left(\sin240°\cdot\tan150°+\cos(-60°)\right)^2$

ב. $8\sin^2150°\cdot\tan135°-2\cdot\sin135°\cdot\cos(-135°)$

ג. $\dfrac{\cos225°}{\sin(-225°)-\cos315°}+\tan^2210°$

תשובות סופיות:

1) א. $(1,0)$ ב. $(0,1)$ ג. בין 1- ל-1 ד. בין 1- ל-1.

2) א. $\alpha=0°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$ ד. $\alpha=270°$ ה. $\alpha=-90°$

3) א. $\alpha=40°$, רביע ראשון ב. $\alpha=120°$, רביע שני ג. $\alpha=230°$, רביע שלישי
ד. $\alpha=300°$, רביע רביעי ה. $\alpha=-30°$, רביע רביעי

4) א. רביע שני ב. רביע ראשון ג. רביע ראשון ד. רביע רביעי ה. רביע שני.

5) א. (2) , (5) ב. (1) , (3) , (4) ג. (2), (5) ד. (2) , (3) , (5) ה. (3) , (4) , (5).

6) א. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ב. $A\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ג. $A\left(-\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

7) להלן טבלה (מחולקת לשתי טבלאות):

זווית	שיעור הנקודה	רביע\על ציר
$60°$	$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	ראשון
$30°$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	ראשון
$330°$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$	רביעי
$180°$	$(-1,0)$	ציר x

זווית	שיעור הנקודה	רביע\על ציר
$-45°$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	רביעי
$750°$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	ראשון
$225°$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	שלישי
$300°$	$\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	רביעי

8) א. $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$ ב. $-1\le \sin\alpha\le 1$, $-1\le \cos\alpha\le 1$.

9) א. הוכחה.
ב. (1) α ב. (2) $180°-\alpha$
ב. (3) $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ ב. (4) $(\cos(180°-\alpha),\sin(180°-\alpha))$
ב. (5) $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ ב. (6) $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$

10) א. הוכחה.
ב. (1) α ב. (2) $180°+\alpha$
ב. (3) $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ ב. (4) $(\cos(180°+\alpha),\sin(180°+\alpha))$
ב. (5) $\cos(180°+\alpha)=-\sin\alpha$ ב. (6) $\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$

11) א. הוכחה.

ב. (1) $-\alpha$

ב. (2) $(\cos\alpha,\sin\alpha)$

ב. (3) $(\cos\alpha,-\sin\alpha)$

ב. (4) $\sin(360^\circ-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

ב. (5) $\cos(360^\circ-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

12) להלן טבלה:

רביע II	רביע III	רביע IV
$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha$
$\sin 150^\circ=\sin(30^\circ)$	$\sin 200^\circ=-\sin(20^\circ)$	$\sin(-30^\circ)=\sin 330^\circ=-\sin(30^\circ)$
$\sin(140^\circ)=\sin 40^\circ$	$\sin(220^\circ)=-\sin 40^\circ$	$\sin(-70^\circ)=\sin(290^\circ)=-\sin 70^\circ$
$\cos 150^\circ=-\cos(30^\circ)$	$\cos 200^\circ=-\cos(20^\circ)$	$\cos(-30^\circ)=\cos 330^\circ=\cos(30^\circ)$
$\cos(140^\circ)=-\cos 40^\circ$	$\cos(220^\circ)=-\cos 40^\circ$	$\cos(-70^\circ)=\cos(290^\circ)=\cos 70^\circ$

13) $\tan 160^\circ=-\tan 20^\circ$, $\cos 150^\circ=-\cos 30^\circ$, $\sin 120^\circ=\sin 60^\circ$

$\sin 215^\circ=-\sin 35^\circ$, $\cot 130^\circ=-\cot 50^\circ$

14) $\cot 200^\circ=\cot 20^\circ$, $\tan 230^\circ=\tan 50^\circ$, $\cos 245^\circ=-\cos 65^\circ$

$\cos 310^\circ=\cos 50^\circ$, $\sin 300^\circ=-\sin 60^\circ$

15) להלן פתרונות:

$\cos(-45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\tan 225^\circ=1$ $\quad$ $\sin 150^\circ=\frac{1}{2}$

$\sin 315^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\sin 315^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos 210^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$ $\quad$ $\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$

$\tan(-30^\circ)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\tan(-30^\circ)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\sin 330^\circ=-\frac{1}{2}$

16) א. 1. ב. ‎-1. ג. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$.