

סדרה הנדסית

דף עבודה ראשון – שאלון 571

לאחר שתתחברו לחשבון GOOL שלכם, צפו בסרטונים , וענו על השאלות הבאות:



הגדרה: סדרה הנדסית היא סדרה של מספרים, כך שהיחס בין איבר לאיבר הקודם לו הוא גודל קבוע שסימונו q .

כלומר, אם הסדרה: $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ היא סדרה הנדסית,

$$אז מתקיים: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.$$

כל איבר בסדרה הנדסית מתקבל על ידי הכפלת האיבר הקודם לו ב- q :

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

.....

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

כדי להוכיח שסדרה היא סדרה הנדסית:

יש להוכיח שהיחס בין איבר כללי לאיבר הקודם לו $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ הוא גודל קבוע ואינו תלוי ב- n .

1 בסדרה הנדסית נתון: $a_3 = 27, a_6 = 729$.

- מצאו את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון.
- בסדרה 7 איברים, מצאו את האיבר האחרון.
- האם יתכן שהמספר 6,460 הוא איבר בסדרה? נמקו תשובתכם.

2 השלימו את הטבלה הבאה:

a_n - איבר כללי	q -מנה	a_1 - איבר ראשון	4 איברים ראשונים בסדרה הנדסית
			2, 6, 18, 54, ...
$3 \cdot 2^{n-1}$			
	5	-2	
			-1, 4, -16, 64, ...
$-8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$			
	-3	1	
			9, 3, 1, $\frac{1}{3}$

3) עבור כל אחת מהסדרות ההנדסיות הבאות השלימו את החסר:

- א. $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$ מנת הסדרה: _____ הסדרה: _____ (עולה\יורדת\לא עולה ולא יורדת)
- ב. $\frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \dots$ מנת הסדרה: _____ הסדרה: _____ (עולה\יורדת\לא עולה ולא יורדת)
- ג. $-\frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \dots$ מנת הסדרה: _____ הסדרה: _____ (עולה\יורדת\לא עולה ולא יורדת)
- ד. $-16, -8, -4, -2, \dots$ מנת הסדרה: _____ הסדרה: _____ (עולה\יורדת\לא עולה ולא יורדת)
- ה. $16, 8, 4, 2, \dots$ מנת הסדרה: _____ הסדרה: _____ (עולה\יורדת\לא עולה ולא יורדת)

4) היעזרו ביישומון  עבור סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא a_1 ומנתה היא q ,

קבעו מי מהטענות הבאות נכונות, נמקו קביעתכם:

- א. אם $a_1 < 0$ ו- $q > 1$ הסדרה יורדת.
- ב. אם $a_1 > 0$ ו- $q > 0$ הסדרה עולה.
- ג. אם $a_1 > 0$ ו- $q < 0$ הסדרה יורדת.
- ד. אם $a_1 < 0$ ו- $0 < q < 1$ הסדרה עולה.
- ה. אם $a_1 > 0$ ו- $0 < q < 1$ הסדרה לא עולה ולא יורדת.



לסיכום: עבור סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא: a_1 ומנתה היא q .

- עבור $q < 0$ הסדרה היא סדרה משתנה (לא עולה ולא יורדת) לדוגמא: $1, -2, 4, -8, \dots$
- עבור $q > 1$ אם $a_1 > 0$ הסדרה היא סדרה **עולה**. לדוגמא: $1, 2, 4, 8, \dots$
- אם $a_1 < 0$ הסדרה היא סדרה **יורדת**. לדוגמא: $-1, -2, -4, -8, \dots$
- עבור $0 < q < 1$ אם $a_1 > 0$ הסדרה היא סדרה **יורדת**. לדוגמא: $1, 0.5, 0.25, 0.125, \dots$
- אם $a_1 < 0$ הסדרה היא סדרה **עולה**. לדוגמא: $-1, -0.5, -0.25, -0.125, \dots$

5) בסדרה הנדסית עולה, סכום האיברים הראשון והשני הוא 9. סכום האיברים השלישי והרביעי גדול פי 6 מהאיבר השני. מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

6) נתונה הנוסחה של איבר כללי של סדרה: $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$.

- א. מצאו את הנוסחה של האיבר העוקב a_{n+1} .
- ב. מצאו את היחס $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ וקבעו האם הסדרה היא הנדסית.

(7) בסעיפים הבאים נתון האיבר הכללי של סדרה. קבעו בכל סעיף אם הסדרה היא הנדסית או לא. במידה והסדרה הנדסית מצאו את מנת הסדרה והאיבר הראשון. במידה והסדרה אינה הנדסית הסבירו מדוע.

א. $a_n = -0.5 \cdot 5^n$ ב. $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$ ג. $a_n = 6^n$ ד. $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ ה. $a_n = 2 + 2^n$

דרכים למציאת מקומו הסידורי- n כאשר נתון ערכו של האיבר כללי בסדרה הנדסית a_n :
 אם $a^x = a^y$ ($a > 0, a \neq 1$) אז $x = y$. לדוגמא אם $2^{n-1} = 2^3$ אז: $n-1=3$ כלומר $n=4$.
 אם $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$) אז $x = \frac{\ln b}{\ln a}$. לדוגמא אם $2^n = 8$ אז: $n = \frac{\ln 8}{\ln 2}$.

(8) נתונה סדרה הנדסית שבה $a_1 = 0.5$ ו- $q = 2$. סכומם של שני איברים סמוכים בסדרה הוא 96. מצאו את מקומם הסידורי של איברים אלה.

(9) נתונות שתי סדרות הנדסיות:

(1) 1, 3, 9, ...

(2) 5, 15, 45, ...

בשתי הסדרות יש אותו מספר איברים. הסכום של האיבר האחרון בסדרה (1) והאיבר האחרון בסדרה (2) הוא 1458. מצאו את מספר האיברים בכל אחת מהסדרות.

(10) שאלות לתרגול נוסף עם פתרונות מלאים מתוך גול: [שאלה 1](#), [שאלה 2](#), [שאלה 3](#), [שאלה 4](#).



תשובות סופיות

- (1) א. 3,3 ב. 2,187 ג. לא מתחלק ב 3.
 (2) הטבלה המלאה:

איברים ראשונים בסדרה הנדסית	a_1 - איבר ראשון	q - מנה	a_n איבר כללי
2, 6, 18, 54, ...	2	3	$2 \cdot 3^{n-1}$
3, 6, 12, 24, ...	3	2	$3 \cdot 2^{n-1}$
-2, -10, -50, -250	-2	5	$-2 \cdot 5^{n-1}$
-1, 4, -16, 64, ...	-1	-4	$-1 \cdot (-4)^{n-1}$
-8, -4, -2, -1	-8	$\frac{1}{2}$	$-8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
1, -3, 9, -27	1	-3	$(-3)^{n-1}$
9, 3, 1, $\frac{1}{3}$	9	$\frac{1}{3}$	$9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

- (3) א. מנת הסדרה: 2, הסדרה: עולה. ב. מנת הסדרה: -2, הסדרה: לא עולה ולא יורדת.
 ג. מנת הסדרה: 2, הסדרה: יורדת. ד. מנת הסדרה: 0.5, הסדרה: עולה.
 ה. מנת הסדרה: 0.5, הסדרה: יורדת.
- (4) א. נכון ב. לא נכון, אם $0 < q < 1$ הסדרה יורדת. ג. לא נכון, הסדרה לא עולה ולא יורדת.
 ד. נכון ה. לא נכון, הסדרה יורדת.
- (5) $a_1 = 3, q = 2$
- (6) א. $a_n = 2 \cdot 5^n$ ב. 5, הסדרה הנדסית.
- (7) א. $a_1 = -2.5, q = 5$ ב. $a_1 = 2, q = -3$ ג. $a_1 = 6, q = 6$ ד. $a_1 = 2, q = 5$
- (8) $a_7 + a_8$
- (9) 6 איברים בכל סדרה.