אינדוקציה מתמטית

דף עבודה – שאלון 571

סרטון

יישומון

לאחר שתתחברו לחשבון GOOL בגרויות שלכם, צפו בסרטון, היכנסו ליישומון
וענו על השאלות הבאות:

תזכורת: אינדוקציה מתמטית היא שיטה המשמשת להוכחת טענה המתייחסת למספרים טבעיים.
בכדי להוכיח שטענה כלשהי מתקיימת לכל מספר טבעי נשתמש בעיקרון האינדוקציה
על פיו עלינו להוכיח שמתקיימות שתי הדרישות הבאות:

(1) המספר 1 מקיים את הטענה (שלב **הבסיס**).
(2) אם מספר טבעי כלשהו מקיים את הטענה אז גם המספר העוקב לו מקיים את הטענה.
(שלב **הצעד** או **הנחת האינדוקציה**).

כלומר, בשלב הראשון בודקים שהטענה נכונה ל $n=1$, ובשלב השני מניחים שהטענה נכונה למספר טבעי $n=k$ ומוכיחים שהיא נכונה גם עבור $n=k+1$.

אקסיומת האינדוקציה קובעת כי מקיומן של שתי דרישות אלה נובע שהטענה מתקיימת לכל מספר טבעי.

שימו לב: בכל פתרון, חשוב להראות בבירור את שלב הבסיס, את הנחת האינדוקציה ואת ההוכחה.

תזכורת: הגדרת עצרת של מספר טבעי: $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ כמו כן מגדירים: $0!=1$.

1) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת כי השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

2) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת כי השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

3) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת כי השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי:

$$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$$

4) דנה רצתה לבדוק אם השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2+n+1}{2}$

לשם כך השתמשה באינדוקציה והראתה שאם מניחים שהשוויון נכון עבור $n=k$ טבעי כלשהו,
הוא נכון גם לגבי $n=k+1$ והסיקה מכך כי השוויון נכון.

א. בדקו שאכן טענתה של דנה מתקיימת,
(כלומר, הראו כי הטענה נכונה ל- $n=k+1$ כאשר מניחים שהיא נכונה ל- $n=k$).

ב. בדקו: (1) האם הטענה נכונה עבור $n=3$?
(2) האם הטענה נכונה עבור $n=1$?
(3) האם לדעתכם הטענה נכונה עבור n כלשהו?

ג. מה הייתה טעותה של דנה?

ד. תקנו את הביטוי בצד ימין של המשוואה כך שהטענה תהיה נכונה,
והוכיחו את נכונותה באינדוקציה.

5) דני רצה לבדוק אם השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי: $2^n=n^2-n+2$.
דני בדק וראה כי השוויון אכן מתקיים עבור $n=3$, $n=2$, $n=1$ והסיק כי השוויון נכון לכל n כי זכר במעורפל שלפי אקסיומת האינדוקציה, אם הטענה נכונה ל- $n=1$, ובנוסף אם בהנחה שהיא נכונה ל- $k=2$ ומראים שהיא נכונה גם ל- $k+1$, אז היא נכונה לכל n.

א. בדקו את טענתו של דני לגבי $n=3$, $n=2$, $n=1$.
האם הם אכן מקיימים את המשוואה?

ב. האם דני צדק במסקנתו? הוכיחו או הפריכו אותה.

ג. מה הייתה טעותו של דני?

תזכורת:
א. כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי אי-זוגי:
(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=1$.
(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k הוא מספר טבעי אי-זוגי כלשהו)
נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$.
ב. תזכורת: כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי זוגי:
(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=2$.
(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k הוא מספר טבעי זוגי כלשהו)
נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$.

6) הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי אי-זוגי מתקיים:

$$3+7+11+....+(2n+1)=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

7) הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$4+10+16+...+(3n-2)=\frac{n(3n+2)}{4}$$

8) הוכיחו בעזרת אינדוקציה והנוסחה לנגזרת של מכפלה את הנוסחה הבאה:
עבור נגזרת של x^n עבור n טבעי: $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$. (תזכורת: $\left(f\cdot g\right)'=f'\cdot g+f\cdot g'$)

9) שאלות לתרגול נוסף עם תשובות מלאות באתר גול: שאלה 1, שאלה 2, שאלה 3.

שאלה 1 שאלה 2 שאלה 3

תשובות סופיות:

1) נבדוק עבור $n=1$: $1=\frac{1(1+1)}{2}=1$. התקבל פסוק אמת.

הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$.

צ"ל: $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

נקבל: $\frac{k\cdot(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)+2\cdot(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

2) נבדוק עבור $n=1$: $1^2=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2=1^3$. התקבל פסוק אמת.

הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: $1^3+2^3+\cdots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$, צ"ל:

$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.

נקבל:

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=$$

$$=(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2^2}=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

3) שלב הבסיס: נבדוק עבור $n=1$: $1\cdot 1!=(1+1)!-1=1$. התקבל פסוק אמת.

הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1$.

נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$, צ"ל:

$1\cdot 1!+\cdots+k\cdot k!+(k+1)\cdot(k+1)!=(k+2)!-1$

$(k+1)!-1+(k+1)\cdot(k+1)!=(k+1)!(k+1+1)-1=(k+2)(k+1)!-1=(k+2)!-1$

4) ב.(1) לא (2) לא (3) לא.

ג. דנה לא ביצעה את הצעד הראשון בהוכחת באינדוקציה – בדיקה עבור $n=1$.

ד. $\frac{n^2+n}{2}$.

5) א. כן. ב. לא, אפשר להפריך ע"י בדיקה של $n=4$ למשל.

ג. דני ביצע את הצעד הראשון אבל שגה בהנחת האינדוקציה כאשר הניח $k=2$ ולא $n=k$.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) הוכחה על פי אינדוקציה כי $\left(x^{n}\right)'=nx^{n-1}$ נכון לכל n טבעי:

(1) שלב הבסיס - בדיקה עבור $n=1$: $\left(x^{1}\right)'=1x^{0}$ $\leftarrow$ $x'=1$ $\leftarrow$ אמת.

(2) הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: $\left(x^{k}\right)'=k\cdot x^{k-1}$.

(3) הוכחה עבור $n=k+1$:

נוכיח כי- $\left(x^{(k+1)}\right)'=(k+1)\cdot x^{(k+1)-1}$:

$$\left(x^{(k+1)}\right)'=\left(x^{k}\cdot x\right)'=1\cdot x^{k}+x\cdot\left(x^{k}\right)'=x^{k}+x\cdot kx^{k-1}=x^{k}+kx^{k}=(k+1)x^{k}$$