

## וקטורים גאומטריים 2

# דף עבודה – שאלון 472

### חלק א' – צירוף לינארי של וקטורים:



, היעזרו ביישומון



לאתר שתתחברו לחשבון שלכם, צפו בסרטון GOOL בגרויט וענו על השאלות הבאות:



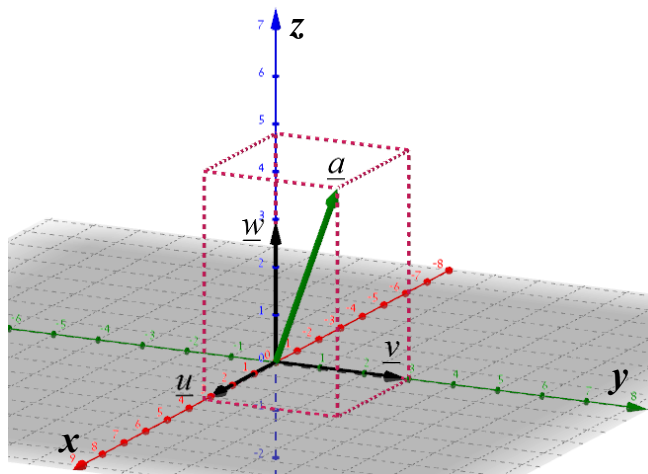
#### הגדרה:

וקטור  $\underline{a}$  הוא צירוף לינארי או קומבינציה לינארית של הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  אם הוא ניתן להבעה בצורה  $\underline{a} = t \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$  כאשר  $s$  ו- $t$  הם סקלרים.

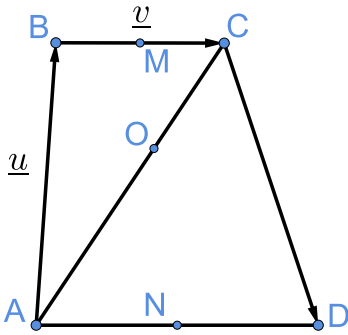
**משפט:** כל וקטור במישור ניתן להצגה יחידה כצירוף לינארי של שני וקטורים לא קולינאריים במישור. כל צירוף כזה נמצא במישור שנקבע על ידי שני וקטורים לא קולינאריים, או במישור מקביל אליו.

#### משפט:

כל וקטור במרחב ניתן להצגה יחידה כצירוף לינארי של שלושה וקטורים שלא נמצאים באותו מישור. וקטור  $\underline{a}$  הוא צירוף לינארי או קומבינציה לינארית של הווקטורים  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\underline{w}$  אם הוא ניתן להבעה בצורה:  $\underline{a} = r \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v} + t \cdot \underline{w}$  כאשר  $s$ ,  $r$  ו- $t$  הם סקלרים.



(1) בטרפז ABCD נתון:  $AD=2BC$  ( $AD \parallel BC$ )



הנקודה O מחלקת את האלכסון AC

ביחס של  $OC:AO=1:2$

הנקודות M ו-N הן אמצעי הצלעות BC ו-AD בהתאמה.

נסמן:  $\vec{BC} = \underline{v}$ ,  $\vec{AB} = \underline{u}$

א. הציגו את הווקטורים  $\vec{CO}$ ,  $\vec{CA}$ ,  $\vec{MN}$  כצירוף לינארי של  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$ .

ב. הראו כי הנקודות M, O, N נמצאות על אותו ישר.

(2) בפירמידה משולשת ABCD הנקודה E היא אמצע BC.

נסמן:  $\vec{BC} = \underline{w}$ ,  $\vec{BD} = \underline{v}$ ,  $\vec{BA} = \underline{u}$

הנקודות M ו-N מקיימות:  $\vec{BM} = \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{6}\underline{w}$ ,  $\vec{BN} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v}$

א. (1) מאיזה ווקטורים מורכב הווקטור  $\vec{BM}$ .

(2) קבעו על איזו פאה נמצאת הנקודה M. נמקו.

ב. (1) מאיזה ווקטורים מורכב הווקטור  $\vec{BN}$ .

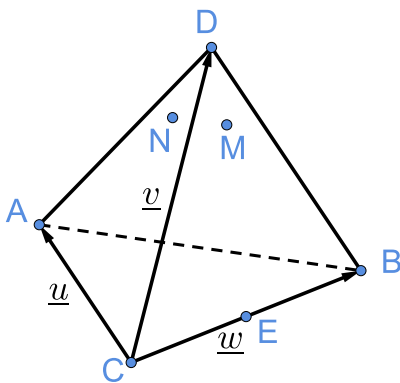
(2) קבעו על איזו פאה נמצאת הנקודה N. נמקו.

ג. הביעו באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\underline{w}$  את הווקטורים הבאים:

(1)  $\vec{DE}$  (2)  $\vec{DM}$  (3)  $\vec{EA}$  (4)  $\vec{MN}$

ד. הוכיחו כי הנקודות E, M, D נמצאות על ישר אחד.

ה. הוכיחו כי  $MN \parallel AE$ .



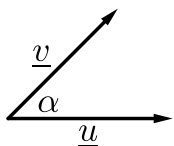
## חלק ב' - מכפלה סקלרית וניצבות של וקטורים:

צפו בסרטון וענו על השאלות הבאות:



מכפלה סקלרית של שני ווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  תסומן:  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$

כאשר  $\alpha$  היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.



ניתן למצוא את הזווית שבין שני ווקטורים ע"י:  $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$

**הערה:** המכפלה הסקלרית בין שני ווקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס.

היעזרו ביישומון הבא וענו על השאלות הבאות:



(3) חשבו את  $\cos \alpha$  ומהי המכפלה הסקלרית של הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  והשלימו את הטבלה הבאה:

כאשר נתון:  $|\underline{u}| = 4$ ,  $|\underline{v}| = 5$ .

|                                                                                                                                          |                                                                                                                                          |                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>א. <math>\cos \underline{\quad} = \underline{\quad}</math><br/><math>\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{\quad}</math></p> | <p>ב. <math>\cos \underline{\quad} = \underline{\quad}</math><br/><math>\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{\quad}</math></p> | <p>ג. <math>\cos \underline{\quad} = \underline{\quad}</math><br/><math>\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{\quad}</math></p> |
| <p>ד. <math>\cos \underline{\quad} = \underline{\quad}</math><br/><math>\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{\quad}</math></p> | <p>ה. <math>\cos \underline{\quad} = \underline{\quad}</math><br/><math>\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{\quad}</math></p> | <p>ו. <math>\cos \underline{\quad} = \underline{\quad}</math><br/><math>\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{\quad}</math></p> |

### השלימו את המסקנות הבאות:

כאשר הזווית קה - המכפלה הסקלרית            ולהיפך.

כאשר הזווית חדה - המכפלה הסקלרית            ולהיפך.

כאשר הזווית ישרה ( $90^\circ$ ) - המכפלה הסקלרית            ולהיפך.

מה ניתן ללמוד על הקשר בין הקוסינוסים של הזוויות  $53.13^\circ$  ו- $126.87^\circ$ ?           .

לפי הטבלה צריך להתקיים:  $\cos(180^\circ - \alpha) = \underline{\quad}$ .

### קביעת ניצבות בין ווקטורים:

$$\underline{u} \perp \underline{v} \quad \text{אם ורק אם} \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 0$$

שני ווקטורים יהיו ניצבים זה לזה אם המכפלה הסקלרית שלהם שווה אפס ולהיפך, אם מכפלה סקלרית בין שני ווקטורים שווה אפס, אז הווקטורים מאונכים זה לזה.

### גודל של וקטור:

גודל של וקטור יחושב באופן הבא:  $|\underline{u}| = \sqrt{u^2}$  ,  $u^2 = |\underline{u}|^2$

שימו לב: אסור לבטל את החזקה והשורש מכיוון ש- $\underline{u}$  הוא לא מספר אלא וקטור.



### פעולות עם מכפלה סקלרית:

חוק החילוף:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$  , הומוגניות:  $\underline{u} \cdot t\underline{v} = t(\underline{v} \cdot \underline{u})$

חוק הפילוג:  $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{v} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{w}$  (ללא הוכחה).

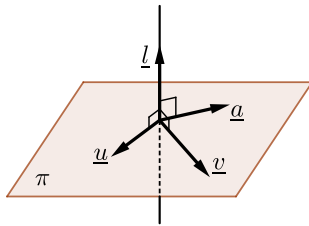
מכפלה סקלרית מקוצרת:  $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = u^2 - v^2$  ,  $(\underline{u} + \underline{v})^2 = u^2 + 2 \cdot \underline{v} \cdot \underline{u} + v^2$

### ניצבות בין וקטור למישור:

אם וקטור מאונך לשני וקטורים לא קולינאריים שמגדירים מישור אז הווקטור מאונך למישור.

כל וקטור  $\underline{a}$  הנמצא במישור  $\pi$  ניתן להציג כצירוף לינארי של הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$ .

נקבל:  $\underline{\ell} \cdot \underline{a} = \underline{\ell} \cdot (t\underline{u} + s\underline{v}) = t(\underline{\ell} \cdot \underline{u}) + s(\underline{\ell} \cdot \underline{v}) = 0 + 0 = 0$



### 4 ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את המכפלה הסקלרית של הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  על פי הנתונים, גודלם והזווית ביניהם:

$$\alpha = 30^\circ, |\underline{v}| = 6, |\underline{u}| = 2 \quad (3) \quad \alpha = 120^\circ, |\underline{v}| = 5, |\underline{u}| = 4 \quad (2) \quad \alpha = 60^\circ, |\underline{v}| = 2, |\underline{u}| = 3 \quad (1)$$

$$\alpha = 90^\circ, |\underline{v}| = 4, |\underline{u}| = 7 \quad (6) \quad \alpha = 0^\circ, |\underline{v}| = 5, |\underline{u}| = 3 \quad (5) \quad \alpha = 180^\circ, |\underline{v}| = 3, |\underline{u}| = 8 \quad (4)$$

ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = -4\sqrt{3}, |\underline{v}| = 2, |\underline{u}| = 4 \quad (2) \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 6, |\underline{v}| = 2, |\underline{u}| = 3 \quad (1)$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 12, |\underline{v}| = 6, |\underline{u}| = 2 \quad (4) \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 0, |\underline{v}| = 5, |\underline{u}| = 9 \quad (3)$$

5 נתונים שני ווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  המאונכים זה לזה שאורכם:  $|\underline{v}| = 5, |\underline{u}| = 4$

א. למה שווה המכפלה הסקלרית  $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ?

ב. נתון וקטור  $\overrightarrow{MN} = 0.5\underline{u} - \underline{v}$ , היעזרו בנתונים ובמה שמצאת בסעיף א'

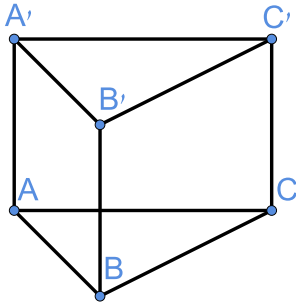
וחשבו את גודלו של הווקטור  $\overrightarrow{MN}$ .





(6) נתונים שני ווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  שאורכם:  $|\underline{u}|=6, |\underline{v}|=3$ . הזווית ביניהם היא  $120^\circ$ .

חשבו את גודל הזווית  $\angle QPM$  אם נתון:  $\overrightarrow{PM} = 4\underline{u} + \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$ .



(7) נתונה מנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$

שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6.

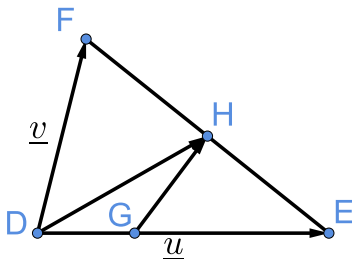
גובה המנסרה הוא 8.

הנקודה M היא אמצע המקצוע  $A'C'$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת  $BN = 2CN$ .

נסמן:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$ .

חשבו את גודל הזווית  $\angle MAN$ .



(8) הנקודה H היא אמצע הצלע EF במשולש DEF.

הנקודה G נמצאת על DE כך ש:  $DG:GE = 1:2$ .

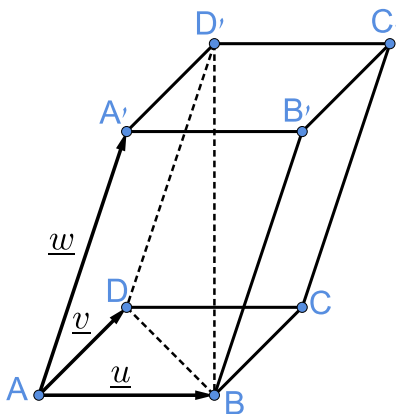
נתון:  $\overrightarrow{DE} = 9$ ,  $\overrightarrow{DF} = 5$ . נסמן:  $\overrightarrow{DE} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{DF} = \underline{v}$ .

א. בטאו את הווקטורים  $\overrightarrow{DH}$  ו- $\overrightarrow{GH}$  בעזרת  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$ .

ב. נתון  $|\overrightarrow{GH}| = 3$ .

(1) חשבו את  $\underline{u} \cdot \underline{v}$ .

(2) חשבו את שטח המשולש DEF.



(9) במקבילון  $ABCD A'B'C'D'$

$\angle BAD = \angle A'AD = \angle A'AB = 60^\circ$

נסמן:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$ .

נתון:  $|\underline{w}| = 3$ ,  $|\underline{v}| = 1$ ,  $|\underline{u}| = 2$ .

א. חשבו את  $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ,  $\underline{u} \cdot \underline{w}$ ,  $\underline{w} \cdot \underline{v}$ .

ב. (1) הביעו את הווקטור  $\overrightarrow{DB}$  באמצעות  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$ .

(2) חשבו את אורך הווקטור  $\overrightarrow{DB}$ .

ג. (1) חשבו את גודל הזווית  $\angle BDD'$ .

(2) חשבו את שטח המשולש  $\triangle BDD'$ .

## חלק ג' - חישוב נפחים:

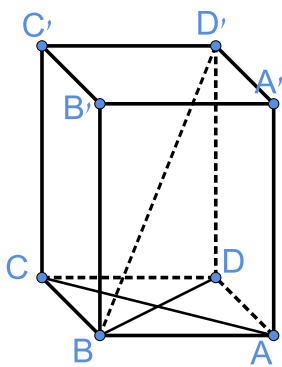
צפו בסרטון ובסרטון שאחריו, וענו על השאלות הבאות:



נפח מנסרה:  $V = B \cdot h$ .

נפח פירמידה:  $V = \frac{B \cdot h}{3}$  ( $B$  - שטח הבסיס,  $h$  - גובה הגוף).

זיכרו - תיבה וקובייה הן מקרים פרטיים של מנסרה.



**10** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  הבסיס  $ABCD$  הוא מלבן.

אורך אלכסון המלבן  $ABCD$  הוא 5 יח"א.

והזווית החדה בין אלכסוני המלבן היא  $60^\circ$ .

הזווית בין אלכסון התיבה  $BD'$  לאלכסון הבסיס  $BD$  היא  $30^\circ$ .

א. (1) מדוע משולש  $\triangle BDD'$  הוא ישר זווית? נמקו.

(2) חשבו את אורך המקצוע הצדדי של התיבה.

ב. חשבו את נפח התיבה.

ג. פי כמה גדול נפח התיבה מנפח הפירמידה  $ABDD'$ ?

**11** במנסרה ישרה  $ABCD A'B'C'D'$  הבסיס  $ABCD$  הוא מקבילית.

הנקודה  $E$  היא אמצע המקצוע  $D'C'$ .

נסמן:  $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ , נתון:  $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 8$ ,  $|\underline{w}| = 5$ ,  $|\overrightarrow{AE}| = 11$ .

א. הביעו את הווקטור  $\overrightarrow{AE}$  באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\underline{w}$ .

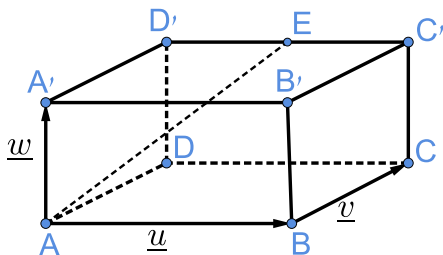
ב. חשבו את  $\underline{u} \cdot \underline{v}$ .

ג. חשבו את זווית  $\angle BAD$ .

ד. (1) חשבו את שטח בסיס המנסרה  $ABCD$ .

(2) חשבו את נפח המנסרה.

ה. האם  $\angle AD'E = 90^\circ$ ? נמקו.



## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \vec{CO} = -\frac{1}{3}(\underline{u} + \underline{v}), \quad \vec{CA} = -\underline{u} - \underline{v}, \quad \vec{MN} = -\underline{u} \quad \text{א. ב. הוכחה.}$$

$$(2) \quad \text{א. נקודה M על הפאה BDC. ב. נקודה N על הפאה ABD.}$$

$$\vec{DM} = \frac{1}{6}\underline{w} - \frac{1}{3}\underline{v} \quad \text{ג. (2)} \quad \vec{DE} = \frac{1}{2}\underline{w} - \underline{v} \quad \text{ג. (1)}$$

$$\vec{EA} = -\frac{1}{2}\underline{w} + \underline{u} \quad \text{ג. (3)} \quad \vec{MN} = \frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{6}\underline{w} \quad \text{ג. (4)} \quad \text{ד. הוכחה. ה. הוכחה.}$$

$$(3) \quad \cos 126.87^\circ = -0.6, \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = -12 \quad \text{א.}$$

$$\cos 53.13^\circ = 0.6, \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 12 \quad \text{ב.}$$

$$\cos 90^\circ = 0, \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \quad \text{ג.}$$

$$\cos 126.87^\circ = -0.6, \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = -12 \quad \text{ד.}$$

$$\cos 180^\circ = -1, \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = -20 \quad \text{ה.}$$

$$\cos 53.13^\circ = 0.6, \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 12 \quad \text{ו.}$$

### מסקנות:

כאשר הזווית **קהה** - המכפלה הסקלרית **שלילית** ולהיפך

כאשר הזווית **חדה** - המכפלה הסקלרית **חיובית** ולהיפך

כאשר הזווית **ישרה** - המכפלה הסקלרית **שווה אפס** ולהיפך

כאשר שתי זוויות משלימות ל- $180^\circ$ , ערכי הקוסינוס שלהן נגדיים ולכן:  $-\cos \alpha$ .

$$(4) \quad \text{א. (1) 3} \quad \text{(2) -10} \quad \text{(3) } 6\sqrt{3} \quad \text{(4) -24} \quad \text{(5) 15} \quad \text{(6) 0}$$

$$\text{ב. (1) } 60^\circ \quad \text{(2) } 150^\circ \quad \text{(3) } 90^\circ \quad \text{(4) } 0^\circ$$

$$(5) \quad \text{א. 0} \quad \text{ב. } |\vec{MN}| = \sqrt{29}$$

$$(6) \quad 31.87^\circ$$

$$(7) \quad 70.623^\circ$$

$$(8) \quad \text{א. } \vec{AD} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}, \quad \vec{ED} = \frac{1}{6}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{ב. } \underline{u} \cdot \underline{v} = 3 \quad \text{ג. שטח המשולש הוא 22.45.}$$

$$(9) \quad \text{א. } \underline{u} \cdot \underline{w} = 3, \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 1, \quad \underline{v} \cdot \underline{w} = 1.5 \quad \text{ב. (1) } \vec{DB} = \underline{u} - \underline{v} \quad \text{ב. (2) } |\vec{DB}| = \sqrt{3}$$

$$\text{ג. (1) } \angle BDD' = 73.22^\circ \quad \text{ג. (2) שטח המשולש הוא 2.49.}$$

$$(10) \quad \text{א. (1) הקטעים BD ו- D'D מאונכים ולכן זווית } \angle BDD' = 90^\circ \quad \text{והמשולש ישר זווית.}$$

$$\text{א. (2) אורך המקצוע הצדדי הוא 2.89.}$$

$$\text{ב. נפח תיבה הוא 31.285} \quad \text{ג. פי 6.}$$

$$(11) \quad \text{א. 3} \quad \text{ב. -10} \quad \text{ג. } 6\sqrt{3} \quad \text{ד. -24} \quad \text{ה. 15} \quad \text{ו. 0.}$$