

נגזרת פונקציית שורש (מותאם למיקוד תשפ"ה)

דף עבודה - שאלון 471

בדף הנוסחאות בבחינת הבגרות מופיעים 2 כללי גזירה שכדאי להכיר:

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

א. כלל גזירה בעזרתו ניתן לגזור כל פונקציית שורש:

ב. כאשר פונקציית השורש מופיעה במכפלה עם פונקציה

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{נשתמש בנוסחת נגזרת מכפלה:}$$

1 מיינו את הפונקציות לפי כללי הגזירה המתאימים להן למעלה:

כלל הגזירה	הפונקציה	כלל הגזירה	הפונקציה	כלל הגזירה	הפונקציה
	$f(x) = \sqrt{2-4x} + 3x$ (19)		$f(x) = 2\sqrt{3x-1}$ (10)		$f(x) = 5\sqrt{x}$ (1)
	$f(x) = 3x\sqrt{5-5x}$ (20)		$f(x) = 2x\sqrt{7x-8}$ (11)		$f(x) = 5x \cdot \sqrt{5x}$ (2)
	$f(x) = 3x + \sqrt{5x-1}$ (21)		$f(x) = 2x + \sqrt{2-4x}$ (12)		$f(x) = 5 + \sqrt{5+x}$ (3)
	$f(x) = (x+3)\sqrt{9x}$ (22)		$f(x) = 1 - \sqrt{2-3x}$ (13)		$f(x) = 5 + 5x\sqrt{-x}$ (4)
	$f(x) = x + 3\sqrt{9x}$ (23)		$f(x) = (\sqrt{4-x}) \cdot 2x$ (14)		$f(x) = -5x^2 + 5\sqrt{x}$ (5)
	$f(x) = \sqrt{-2x} + 9$ (24)		$f(x) = x\sqrt{-4x} + 8$ (15)		$f(x) = \sqrt{-5x} - 5x^2$ (6)
	$f(x) = \sqrt{2x} + 2x$ (25)		$f(x) = x + 5\sqrt{2-x}$ (16)		$f(x) = -5\sqrt{5-x}$ (7)
	$f(x) = \sqrt{2x} \cdot 2x$ (26)		$f(x) = (x+5)\sqrt{2-x}$ (17)		$f(x) = -5x\sqrt{-x}$ (8)
	$f(x) = -2x \cdot \sqrt{-2x}$ (27)		$f(x) = x - 2\sqrt{3x-4}$ (18)		$f(x) = -5 + \sqrt{5+x}$ (9)

2 עבור כל אחת מהפונקציות שבטבלה למעלה:

- א. מצאו את תחום ההגדרה (נסו על ידי התבוננות בפונקציה, ורק לאחר מכן באמצעות סרטוט או באופן אלגברי).
 ב. גזרו את הפונקציה.

3 הפונקציה: $f(x) = a\sqrt{x} - ax$ (פרמטר a) מוגדרת לכל $x \geq 0$ ועוברת בנקודה $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

- א. מצאו את הפרמטר a .
 ב. קבעו האם שיפוע גרף הפונקציה חיובי או שלילי בנקודה $x=1$?

4 נתונה הפונקציה: $f(x) = 3\sqrt{3x-3}$. גזרו והסבירו במילים מדוע הפונקציה עולה לכל $x \geq 1$.

לפניכם תשובות מלאות ל-9 הנגזרות הראשונות. פתרונות מלאים נוספים תוכלו לראות לאחר שתתחברו לחשבון שלכם, ותצפו בסרטון הזה.



1 מיינו את הפונקציות לפני כללי הגזירה המתאימים להם מלמעלה:

כלל הגזירה	הפונקציה	כלל הגזירה	הפונקציה	כלל הגזירה	הפונקציה			
א'	$f(x) = \sqrt{2-4x} + 3x$	(19)	א'	$f(x) = 2\sqrt{3x-1}$	(10)	א'	$f(x) = 5\sqrt{x}$	(1)
ב'	$f(x) = 3x\sqrt{5-5x}$	(20)	ב'	$f(x) = 2x\sqrt{7x-8}$	(11)	ב'	$f(x) = 5x \cdot \sqrt{5x}$	(2)
א'	$f(x) = 3x + \sqrt{5x-1}$	(21)	א'	$f(x) = 2x + \sqrt{2-4x}$	(12)	א'	$f(x) = 5 + \sqrt{5+x}$	(3)
ב'	$f(x) = (x+3)\sqrt{9x}$	(22)	א'	$f(x) = 1 - \sqrt{2-3x}$	(13)	ב'	$f(x) = 5 + 5x\sqrt{-x}$	(4)
א'	$f(x) = x + 3\sqrt{9x}$	(23)	ב'	$f(x) = (\sqrt{4-x}) \cdot 2x$	(14)	א'	$f(x) = -5x^2 + 5\sqrt{x}$	(5)
א'	$f(x) = \sqrt{-2x+9}$	(24)	ב'	$f(x) = x\sqrt{-4x+8}$	(15)	א'	$f(x) = \sqrt{-5x} - 5x^2$	(6)
א'	$f(x) = \sqrt{2x} + 2x$	(25)	א'	$f(x) = x + 5\sqrt{2-x}$	(16)	א'	$f(x) = -5\sqrt{5-x}$	(7)
ב'	$f(x) = \sqrt{2x} \cdot 2x$	(26)	ב'	$f(x) = (x+5)\sqrt{2-x}$	(17)	ב'	$f(x) = -5x\sqrt{-x}$	(8)
ב'	$f(x) = -2x \cdot \sqrt{-2x}$	(27)	א'	$f(x) = x - 2\sqrt{3x-4}$	(18)	א'	$f(x) = -5 + \sqrt{5+x}$	(9)

2 להלן פונקציות (1)-(9) עם פתרונות מלאים:

(1) הפונקציה: $f(x) = 5\sqrt{x}$

תחום ההגדרה: הביטוי מתחת לשורש צריך להיות אי-שלילי (חיובי או אפס) ולכן הפונקציה מוגדרת לכל $x \geq 0$.

נגזרת: כאשר מספר כופל פונקציה, ניתן לגזור רק את הפונקציה: $f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$

(2) הפונקציה: $f(x) = 5x \cdot \sqrt{5x}$

תחום ההגדרה: הביטוי מתחת לשורש צריך להיות אי-שלילי (חיובי או אפס) ולכן הפונקציה מוגדרת לכל $x \geq 0$.

הנגזרת: נגזור לפי מכפלה: $f'(x) = 5 \cdot \sqrt{5x} + 5x \cdot \frac{5}{2\sqrt{5x}} = 5\sqrt{5x} + \frac{25x}{2\sqrt{5x}}$

(3) הפונקציה: $f(x) = 5 + \sqrt{5+x}$

תחום ההגדרה: הביטוי מתחת לשורש צריך להיות אי-שלילי (חיובי או אפס)

ולכן הפונקציה מוגדרת לכל $x \geq -5$. הנגזרת: $f'(x) = 0 + \frac{1}{2\sqrt{5+x}} = \frac{1}{2\sqrt{5+x}}$

$$(4) \text{ הפונקציה: } f(x) = 5 + 5x\sqrt{-x}$$

תחום ההגדרה: הביטוי מתחת לשורש צריך להיות אי-שלילי (חיובי או אפס) ולכן הפונקציה מוגדרת לכל $x \leq 0$.

$$\text{הנגזרת: } f'(x) = 0 + 5 \cdot \sqrt{-x} + 5x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{-x}} = 5\sqrt{-x} - \frac{5x}{2\sqrt{-x}}$$

$$(5) \text{ הפונקציה: } f(x) = -5x^2 + 5\sqrt{x}$$

תחום ההגדרה: הביטוי מתחת לשורש צריך להיות אי-שלילי (חיובי או אפס) ולכן הפונקציה מוגדרת לכל $x \geq 0$.

$$\text{הנגזרת: } f'(x) = 2 \cdot (-5x) + 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -10x + \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

$$(6) \text{ הפונקציה: } f(x) = \sqrt{-5x} - 5x^2$$

תחום ההגדרה: הביטוי מתחת לשורש צריך להיות אי-שלילי (חיובי או אפס) ולכן הפונקציה מוגדרת לכל $x \leq 0$.

$$\text{הנגזרת: } f'(x) = -5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{-5x}} + 2 \cdot (-5x) = \frac{-5}{2\sqrt{-5x}} - 10x$$

$$(7) \text{ הפונקציה: } f(x) = -5\sqrt{5-x}$$

תחום ההגדרה: הביטוי מתחת לשורש צריך להיות אי-שלילי (חיובי או אפס) ולכן הפונקציה מוגדרת לכל $x \leq 5$.

$$\text{הנגזרת: } f'(x) = -5 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{5}{2\sqrt{5-x}}$$

$$(8) \text{ הפונקציה: } f(x) = -5x\sqrt{-x}$$

תחום ההגדרה: הביטוי מתחת לשורש צריך להיות אי-שלילי (חיובי או אפס) ולכן הפונקציה מוגדרת לכל $x \leq 0$.

$$\text{הנגזרת: נגזור לפי נגזרת מכפלה: } f'(x) = -5\sqrt{-x} + (-5x) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{-x}} = -5\sqrt{-x} + \frac{5x}{2\sqrt{-x}}$$

$$(9) \text{ הפונקציה: } f(x) = -5 + \sqrt{5+x}$$

תחום ההגדרה: הביטוי מתחת לשורש צריך להיות אי-שלילי (חיובי או אפס) ולכן הפונקציה מוגדרת לכל $x \geq -5$.

$$\text{הנגזרת: } f'(x) = 0 + \frac{1}{2\sqrt{5+x}} = \frac{1}{2\sqrt{5+x}}$$

להלן תשובות סופיות לפונקציות (10)-(27):

ת"ה	נגזרת	ת"ה	נגזרת
$x \leq \frac{1}{2}$	$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{2-4x}} + 3$	(19) $x \geq \frac{1}{3}$	$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{3x-1}}$
$x \leq 1$	$f'(x) = 3\sqrt{5-5x} - \frac{15x}{2\sqrt{5-5x}}$	(20) $x \geq \frac{8}{7}$	$f'(x) = 2\sqrt{7x-8} + \frac{7x}{\sqrt{7x-8}}$
$x \geq \frac{1}{5}$	$f'(x) = 3 + \frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$	(21) $x \leq \frac{1}{2}$	$f'(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt{2-4x}}$
$x \geq 0$	$f'(x) = \sqrt{9x} + \frac{9x+27}{2\sqrt{9x}}$	(22) $x \leq \frac{2}{3}$	$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{2-3x}}$
$x \geq 0$	$f'(x) = 1 + \frac{27}{2\sqrt{9x}}$	(23) $x \leq 4$	$f'(x) = 2\sqrt{4-x} - \frac{x}{\sqrt{4-x}}$
$x \leq 4.5$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{-2x+9}}$	(24) $x \leq 2$	$f'(x) = \sqrt{-4x+8} - \frac{2x}{\sqrt{-4x+8}}$
$x \geq 0$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + 2$	(25) $x \leq 2$	$f'(x) = 1 - \frac{5}{2\sqrt{2-x}}$
$x \geq 0$	$f'(x) = 3\sqrt{2x}$	(26) $x \leq 2$	$f'(x) = \sqrt{2-x} - \frac{x+5}{2\sqrt{2-x}}$
$x \leq 0$	$f'(x) = -2\sqrt{-2x} + \frac{2x}{\sqrt{-2x}}$	(27) $x \geq \frac{4}{3}$	$f'(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{3x-4}}$

3) התשובות הן:

a. $x = 1$

ב. שיפוע גרף הפונקציה שלילי, כי הנגזרת שלילית כאשר מצויים בה $x = 1$.

4) הפונקציה מוגדרת בתחום $x \geq 1$.

כאשר גוזרים את הפונקציה הנגזרת המתקבלת היא: $f'(x) = \frac{9}{2\sqrt{3x-3}}$.

לאחר שנשווה את הנגזרת לאפס, נקבל פסוק שקר: $9 = 0$ ומכאן שלפונקציה אין נק' קיצון פנימיות. לכן יש לבדוק את סימן הנגזרת לפי תחום ההגדרה כדי ללמוד על תחומי העלייה/ירידה של הפונקציה. ניתן לראות שהנגזרת חיובית לכל איקס בתחום ההגדרה (שכן המונה הוא מספר חיובי והמכנה גם הוא חיובי לכל איקס בת"ה) ולכן בסה"כ קיבלנו כי הפונקציה עולה לכל $x \geq 1$.