

התפלגות נורמלית 3

דף עבודה – שאלון 471

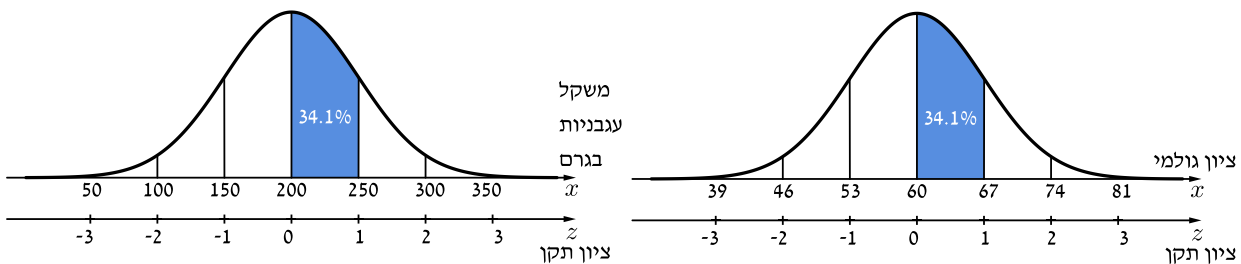
לאחר שתתחברו לחשבון שלכם, צפו בסרטון וענו על השאלות הבאות:



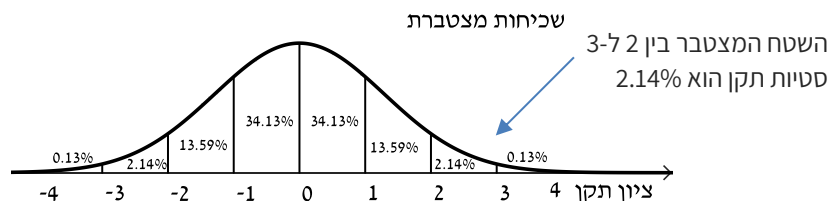
חלק א' – הקשר בין ציון התקן לשכיחות המצטברת



מתמטיקאים גילו תופעה מעניינת: בכל ההתפלגויות הנורמליות קיים קשר קבוע בין ציון התקן (מספר סטיות התקן מהממוצע) לבין השכיחות המצטברת (כלומר השטח) מתחת לעקומת ההתפלגות. לדוגמה: השטח המצטבר בין הממוצע לבין סטיית תקן אחת מעליו (או מתחתיו) הוא 34.1%. כלומר, 34.1% מערכי ההתפלגות נמצאים בתחום זה.



הקשר הזה מתקיים גם בין ציוני תקן אחרים, כמו שניתן לראות בגרף ההתפלגות הזה:



- 1) ברפת גדולה בדרום הארץ ובה 900 פרות נבדק כושר ייצור החלב של פרה בוגרת. נמצא כי הוא מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 ליטרים ביום, וסטיית תקן של 4 ליטרים. כעת היעזרו בגרפים שלעיל וענו על הסעיפים הבאים:
 - א. איזה חלק מהפרות בישראל מניבות 34-38 ליטר חלב ביום?
 - ב. האם כמות הפרות המניבות 34-38 ליטר חלב גדולה, קטנה או שווה לכמות הפרות המניבות 22-26 ליטר חלב?
 - ג. מהי השכיחות המצטברת של הפרות המניבות **יותר** מ-34 ליטר חלב ביום?

חלק ב' - טבלת התפלגות נורמלית סטנדרטית (טבלת Z)

כדי להימנע משינון של הערכים, ובעיקר כדי לעבוד עם ציוני תקן שאינם מספרים שלמים, נצטרך כלי עזר חדש. למזלנו יש כזה: טבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית (בקיצור: **טבלת Z**). נביא חלק קטן ממנה ונסביר את המבנה שלה:

הערכים המופיעים **בעמודה השמאלית ובשורה הראשונה** מתארים את **ציון התקן**: בעמודה השמאלית 2 הספרות הראשונות בציון התקן ובשורה הראשונה דיוק של המספר השלישי. ואילו הערכים **בתוך הטבלה** מתארים את השטח המצטבר מתחת לעקומת ההתפלגות **משמאל לציון התקן**. שטח זה מתאר למעשה את ההסתברות לקבל ערכים בתחום הזה.

לסיכום: מסביב: ציוני תקן, בתוך הטבלה: שטח=הסתברות לערכים **משמאל** לציון התקן.

למשל: $z = -2.37$

טבלת התפלגות נורמלית

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0046	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0135	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0227	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233

(2) צפו בסרטון והשלימו את הטבלה:



משמעות מילולית (שימו לב לניסוחים השקולים: שטח=הסתברות)	שרטוט מתאים	השטח מימין לציון התקן (השלמה ל-1)	השטח משמאל לציון התקן (על פי הטבלה)	ציון תקן (Z)
73.2% מהערכים בהתפלגות נמצאים מתחת לציון התקן 0.62		0.2680	0.7320	0.62
השתמשו במילים "השטח משמאל..."		0.7020	0.2980	
השתמשו במילה "ההסתברות..."				-2.35
השתמשו במילה "הסיכוי..."			0.9280	
השכיחות המצטברת מימין לציון התקן היא 0.0113				2.28

חלק ג' – שאלות הבנה לסיכום הנושא

3) השלימו את המשפטים הבאים וסמנו בסרטוט המצורף את הנתונים:

א. בהתפלגות נורמלית מסוימת נמצא שהחציון 15 וסטיית התקן 5.

השטח המצטבר מתחת לעקומת ההתפלגות הנורמלית

הוא 0.2 ולכן ציון התקן הוא _____.

הערך המתאים לציון תקן הוא _____ והוא נמצא _____ לממוצע.

השטח המצטבר שנמצא **מימין** לציון התקן הוא _____.

ב. בהתפלגות נורמלית מסוימת נמצא שהערך 43 מייצג ציון תקן של -1.23.

ולכן ערך זה נמצא _____ לשכיח,

וההסתברות באוכלוסייה לקבלת

ערך קטן או שווה לו _____ מחצי.

בטבלת ההתפלגות הנורמלית נמצא שההסתברות המדויקת היא _____.

ג. בהתפלגות נורמלית כלשהי נמצא שציון התקן 0.87,

מייצג שטח מצטבר של _____ מתחת לציון זה.

בכל התפלגות נורמלית אחרת נמצא

שטח מצטבר _____ (זהה / שונה) מתחת לציון זה.

ד. ציוני בחינה מתפלגים נורמלית.

נמצא ש- 92.5% מהציונים נמוכים מהציון 88.

ציון התקן המתאים לציון בחינה זה הוא _____

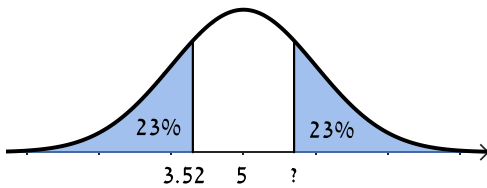
והוא נמצא _____ לממוצע.

אם בכיתה 40 תלמידים, ישנם _____ תלמידים שהשיגו ציון גבוה מ- 88.

4) לפניכם מספר טענות, קבעו עבור כל טענה האם היא נכונה או שגויה ונמקו.

טענה	נכונה / שגויה	נימוק
מכיוון שהתפלגות נורמלית היא סימטרית אז השטח שנמוך מציון תקן 0.5- שווה לשטח הגבוה מציון תקן 0.5.		
בהתפלגות נורמלית של משקלים, נתון ממוצע 72 ק"ג וסטיית תקן 6 ק"ג. נתון ש- 67% מהאוכלוסייה נמוכה ממשקל מסוים. כדי למצוא משקל זה יש להציב: $0.67 = \frac{x-72}{6}$.		
בהתפלגות נורמלית שבה 90% מהערכים נמוכים מ- 150, ו- 90% מהערכים גבוהים מ- 60 ניתן למצוא את החציון.		
בהתפלגות נורמלית שבה הממוצע 20 וסטיית התקן 4 הוסיפו לכל הערכים 2 וכעת הממוצע 22 וסטיית התקן 6.		

חלק ד' - שאלות ברוח בחינת הבגרות



(1) משקל אבטיחים מתפלג נורמלית.

א. היעזרו בנתונים שבסרטוט

ומצאו את המשקל החסר בסרטוט

ואת סטיית התקן.

במקשה של אבטיחים 1,200 אבטיחים.

5.5% מהאבטיחים הגדולים ביותר נחשבים איכותיים ביותר בשל גודלם.

ב. מצאו את מספר האבטיחים האיכותיים ביותר.

מה גודלו המינימלי של אבטיח שיכול להיחשב איכותי במיוחד?

חקלאים הצליחו להגדיל את משקלם של האבטיחים ב- 20%.

ג. מהו הממוצע החדש ומהי סטיית התקן החדשה של משקל האבטיחים לאחר ההגדלה?

(2) משקל חטיף אנרגיה מתפלג נורמלית עם ממוצע 130 גרם וסטיית תקן של 5 גרם. מנהל המפעל

החליט שכל החטיפים שמשקלם נמוך מ- 120 גרם או גבוה מ- 140 גרם לא מיועדים למכירה.

א. מה אחוז החטיפים שלא מיועדים למכירה?

משקל קופסת מסטיקים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן זהה לזו של חטיף האנרגיה.

ידוע שמשקלן של $\frac{1}{10}$ מהקופסאות נמוך מ- 60 גרם.

ב. מהו המשקל השכיח של קופסת מסטיקים?

לאחר שהגדילו את קופסאות המסטיקים ב- 8 גרם, הוחלט שקופסת מסטיקים שמשקלה חורג

מטווח של סטיית תקן אחת מעל או מתחת לממוצע נחשבת פגומה.

ג. מהו טווח המשקל של קופסת מסטיקים שנחשבת תקינה?

(3) משקלי פינגווינים בקוטב הדרומי מתפלגים נורמלית עם משקל ממוצע של 85 ק"ג.

96.41% מהפינגווינים בקוטב הדרומי שוקלים פחות מ- 125.5 ק"ג.

א. מצאו את סטיית התקן של משקל הפינגווינים שנולדו בקוטב הדרומי.

משקלה של ג'קי הפינגווינית גבוה ממשקלם של 9% מהפינגווינים בקוטב הדרומי.

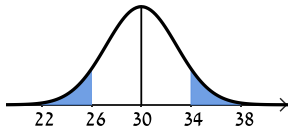
ב. מצאו את משקלה של ג'קי.

פיני הפינגווין נולד בקוטב הצפוני ומשקלו זהה למשקלה של ג'קי. משקל הפינגווינים בקוטב הצפוני

מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן של 20 ק"ג. משקלם של ג'קי ופיני מתאר ציון תקן זהה.

ג. מצאו את המשקל הממוצע של הפינגווינים בקוטב הצפוני.

תשובות סופיות:



1) א. 13.59% מהפרות.

ב. משיקולי סימטריה כמות הפרות שווה בשני המקרים:

ג. השטח המצטבר משמאל לציון תקן זה הוא 84.13%

ולכן השטח המצטבר מימין הוא המשלים לאוכלוסייה כולה: 15.86%.

2) הטבלה המלאה:

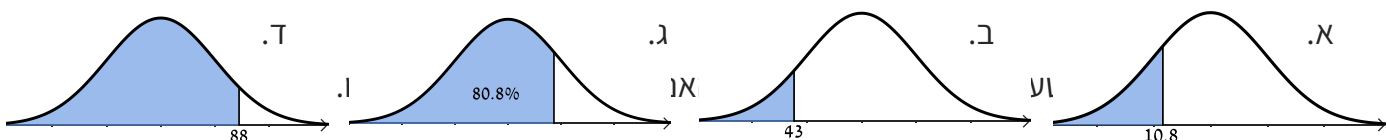
ציון תקן (Z)	השטח משמאל לציון התקן (על פי הטבלה)	השטח מימין לציון התקן (השלמה ל-1)	שרטוט מתאים	משמעות מילולית (שימו לב לניסוחים: שטח=הסתברות)
0.62	0.7320	0.2680		73.2% מהערכים בהתפלגות נמצאים מתחת לציון התקן 0.62
-0.53	0.2980	0.7020		השטח המצטבר משמאל לציון התקן הוא 0.2980 כלומר 29.8% מהאוכלוסייה נמוכה או שווה לערך זה
-2.35	0.0094	0.9906		ההסתברות לקבלת ערך נמוך מציון התקן הוא 0.94%
1.46	0.9280	0.072		הסיכוי לבחור בפרט מהאוכלוסייה שציון התקן שלו נמוך מ-1.46 הוא 92.80%
2.28	0.9887	0.0113		השכיחות המצטברת מימין לציון התקן היא 0.0113

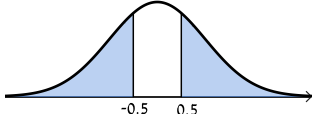
3) א. ציון התקן הוא -0.84, הערך המתאים הוא 10.8 והוא נמצא משמאל לממוצע.

ב. הערך נמצא משמאל לשכיח, וההסתברות קטנה מחצי. ההסתברות המדויקת היא 0.1090.

ג. השטח הוא 0.8080. בכל ההתפלגויות נמצא שטח זה מתחת לציון תקן זה.

ד. ציון התקן המתאים הוא 1.44 מימין לממוצע. ישנם 3 תלמידים שציונם גבוה מציון 88.



נימוק	נכונה / שגויה	טענה
	נכון	מכיוון שהתפלגות נורמלית היא סימטרית אז השטח שנמוך מציון תקן 0.5- שווה לשטח הגבוה מציון תקן 0.5.
יש לחפש את ציון התקן (Z) בטבלה ואותו להציב במקום המספר 0.67. ציון התקן המתאים לשטח 0.67 הוא 0.44	לא נכון	בהתפלגות נורמלית של משקלים, נתון ממוצע 72 ק"ג וסטיית תקן 6 ק"ג. נתון ש- 67% מהאוכלוסייה נמוכה ממשקל מסוים. כדי למצוא משקל זה יש להציב: $0.67 = \frac{x - 72}{6}$
החציון הוא 105	נכון	בהתפלגות נורמלית שבה 90% מהערכים נמוכים מ- 150, ו- 90% מהערכים גבוהים מ- 60 ניתן למצוא את החציון.
הממוצע משתנה עם הוספת ערך לכל האיברים אך סטיית התקן לא משתנה.	לא נכון	בהתפלגות נורמלית שבה הממוצע 20 וסטיית התקן 4 הוסיפו לכל הערכים 2 וכעת הממוצע 22 וסטיית התקן 6.

חלק ד'

- (1) א. משקל של 3.52 ק"ג משקף ציון תקן של 0.74-. נציב בנוסחה ונמצא שסטיית התקן היא 2. משיקולי סימטריה משקל האבטיח ש- 23% מהאבטיחים גדולים ממנו הוא 6.48 ק"ג.
 ב. מספר האבטיחים האיכותיים ביותר הוא 66 אבטיחים $= 1200 \cdot 0.055$. ציון התקן של אבטיח ש- 5.5% מהאבטיחים גדולים ממנו (כלומר 94.5% מהאבטיחים קטנים ממנו) הוא 1.6. נציב בנוסחה ונקבל שמשקלו: 8.2 ק"ג.
 ג. גם הממוצע וגם סטיית התקן גדלים כאשר מכפילים את כל הערכים פי 1.2 ולכן הממוצע החדש יהיה 6 וסטיית התקן 2.4.
- (2) א. ציון התקן של החטיפים שמשקלם 120 גרם הוא 2- והשטח משמאל לציון תקן זה 0.0227, כלומר 2.27% מהחטיפים נמוכים ממשקל זה. משיקול סימטריה ישנם 2.27% חטיפים שמשקלם גבוה מ- 140 גרם ולכן התשובה היא: **4.54% מהחטיפים**.
 ב. ציון התקן המתאים לשטח של 10% משמאל הוא 1.28-. נציב בנוסחה ונקבל שהממוצע הוא 66.4 גרם. בהתפלגות נורמלית הממוצע הוא גם השכיח וגם החציון ולכן התשובה **66.4 גרם**.
 ג. הגדלת כל קופסאות המסטיקים ב- 8 גרם משנה את הממוצע אך לא משנה את סטיית התקן. הממוצע החדש: 74.4 גרם, ולכן כל קופסת מסטיקים שמשקלה גבוה או נמוך בסטיית תקן אחת (5 גרם) נחשבת פגומה. **הטווח התקין הוא בין 69.4 גרם ל- 79.4 גרם**.
- (3) א. המשקל 125.5 ק"ג מתאים לציון תקן 1.8. נציב בנוסחה ונקבל **סטיית תקן: 22.5 ק"ג**.
 ב. ציון התקן המתאים לשטח של 9% משמאל הוא 1.34-. נציב בנוסחה ונקבל **שמשקלה של ג'קי הוא 54.85**
 ג. פניי הפינגווין שוקל גם הוא 54.85 ק"ג. ציון התקן של משקלו זהה לזה של ג'קי כלומר 1.34- וסטיית התקן היא 20 ק"ג. נציב בנוסחה ונקבל כי המשקל הממוצע של הפינגווינים בקוטב הדרומי הוא **81.65 ק"ג**.