

התפלגות נורמלית 2

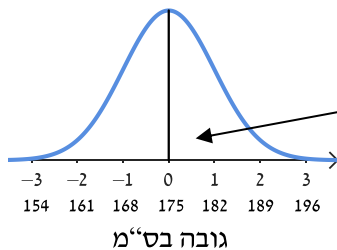
דף עבודה – שאלון 471

לאחר שתתחברו לחשבון GOOL שלכם, צפו בסרטון וענו על השאלות הבאות:



חלק א' – שימוש בעקומת ההתפלגות הנורמלית

סטיית התקן מתארת את הפיזור של הערכים סביב לממוצע הנמצא במרכז ההתפלגות. בכל ההתפלגויות נסמן 3 סטיות תקן מימין לממוצע המתארים ערכים הגבוהים מהממוצע ומשיקולי סימטריה גם 3 סטיות תקן משמאל – המתארים ערכים הנמוכים מהממוצע.

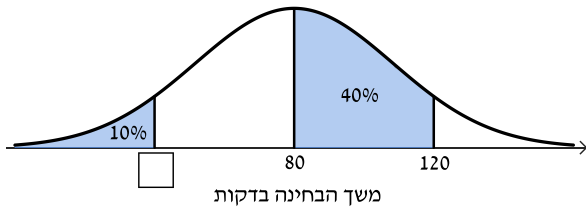


השטח מתחת לעקומה מתאר את השכיחות היחסית של הערכים מתוך השכיחות השלמה (השווה ל-1)

בדוגמה שלפניכם מתוארת התפלגות נורמלית של גבהים בה הגובה הממוצע 175 ס"מ וסטיות התקן 7 ס"מ. ניתן לראות שאנשים שגובהם 189 ס"מ נמצאים 2 סטיות תקן מימין לממוצע (כלומר גבוהים מהממוצע ב-14 ס"מ) ובאופן סימטרי – אנשים שגובהם 161 ס"מ נמצאים 2 סטיות תקן משמאל לממוצע (כלומר נמוכים מהממוצע ב-14 ס"מ).

1 בספרייה העירונית ספרים רבים, אשר מספר העמודים בהם מתפלג נורמלית. מספר העמודים השכיח מבין ספרי הספרייה הוא 150 עמודים, ובנוסף ידוע שרק ב-12% מהספרים ישנם יותר מ-240 עמודים.

- סרטוט גרף התפלגות נורמלית מתאים וסמנו עליו את הנתונים שלעיל.
- מהו חציון מספר העמודים בספרי הספרייה?
- היעזרו בתכונת הסימטריה של ההתפלגות וכתבו מה אחוז הספרים בספרייה בהם פחות מ-60 עמודים?
- ידוע שבספרייה 8,600 ספרים. כמה ספרים בספרייה בעלי פחות מ-150 עמודים?
- מהי השכיחות היחסית של מספר הספרים שבהם בין 60 ל-240 עמודים?



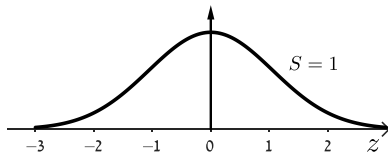
(2) משך הבחינה במתמטיקה של תלמידי כיתה י' 4 יחידות מתפלג נורמלית. מחצית מהתלמידים סיימו את הבחינה ב-80 דקות. היעזרו בסרטוט ההתפלגות וענו על השאלות הבאות:

- מהו משך הבחינה הממוצע במתמטיקה בכיתה זו?
- בוחרים באקראי תלמיד, חשבו את ההסתברות שפתר את הבחינה בזמן הארוך מ-120 דקות.
- השלימו את המספר החסר בריבוע. נמקו כיצד מצאתם אותו.
- ידוע כי 27 תלמידים פתרו את הבחינה בזמן הקצר מ-120 דקות. כמה תלמידים נבחנו?

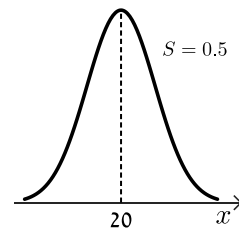
חלק ב' - ציון תקן

קיימות התפלגויות נורמליות רבות השונות זו מזו בממוצע ובסטיית התקן. כאשר נרצה להשוות בין התפלגויות שונות נצטרך להביא את כולן **לצורה אחידה**: צורת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית, שבה **הממוצע אפס וסטיית התקן היא 1**. פעולה זו נקראת נרמול או סטנדרטיזציה.

נזיז את ההתפלגות 20 יחידות שמאלה ונחלק ב-0.5 (שימו לב שמכיוון שסטיית התקן גדלה הגרף רחב יותר)

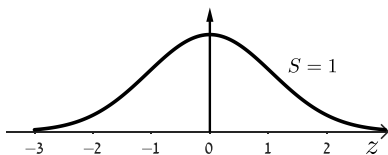


$$z = \frac{x - \bar{x}}{S}$$

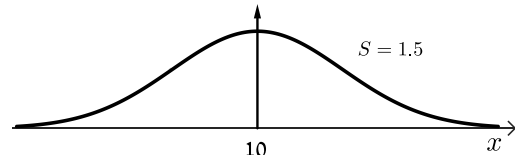


(ממוצע 20, סטיית תקן 0.5)

נזיז את ההתפלגות 10 יחידות שמאלה ונחלק ב-1.5 (שימו לב שמכיוון שסטיית התקן קטנה הגרף צר יותר)



$$z = \frac{x - \bar{x}}{S}$$



(ממוצע 10, סטיית תקן 1.5)

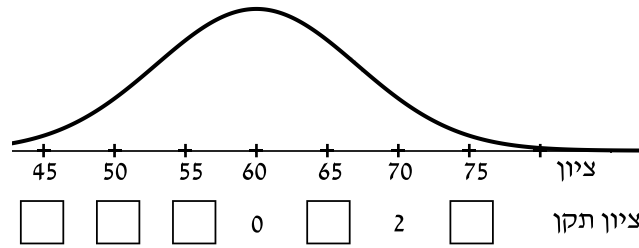
מבחינה אלגברית פעולת הנרמול מתקבלת מהנוסחה: $Z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ ומשמעותה הפחתה של הממוצע מכל ערכי ההתפלגות וחילוק בסטיית התקן. התוצאה המתקבלת היא **ציון תקן** - מספר המתאר את **גודל החריגה של כל ערך בהתפלגות מהממוצע**. למשל ציון תקן 2 משמעותו שהערך נמצא 2 סטיות תקן מעל הממוצע, או ציון תקן (-1) משמעותו שערך ההתפלגות נמצא סטיית תקן אחת נמוך מהממוצע.

לסיכום: ציון תקן (z) הוא מספר סטיות התקן מהממוצע.



(3) היעזרו ביישומון וענו על השאלה הבאה:

לפניכם התפלגות ציוני בחינה באנגלית בכיתה י'3, שבה הממוצע 60 וסטיית התקן 5.



א. הסבירו במילים:

(1) מדוע ציון התקן המתאים לממוצע הוא אפס?

(2) מדוע ציון התקן המתאים לציון הבחינה 70 הוא 2?

ב. השלימו את התאים החסרים בטבלה, ודאו שאתם מבינים את משמעותם.

ג. האם ייתכן שציון התקן המתאים לציון בחינה 48 יהיה חיובי? נמקו.

ד. השלימו את המשפט: ציוני התקן של ערכים הגדולים מהממוצע _____ ואולם ציוני התקן של ערכים הקטנים מהממוצע _____. ציון התקן של הממוצע הוא _____.

(4) בהמשך לשאלה 3:

א. שערנו מהו ציון הבחינה המתאים לציון התקן 2.3. חשבו את ציון הבחינה ובדקו אם צדקתם.

ב. דנה אמרה: "ציון הבחינה המתאים לציון התקן $z = \frac{1}{2}$ הוא 62.5 מכיוון שזהו ציון הנמצא

חצי סטיית תקן מעל הממוצע, ומכיוון שסטיית התקן 5 אז חצי סטייה היא 2.5 נקודות". האם דנה צודקת?

ג. בחרו ציון תקן (z) כרצונכם ונסו למצוא את הציון המתאים לו ללא שימוש בנוסחה,

לאחר מכן היעזרו בנוסחה $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ ובדקו עם המורה האם צדקתם.

(5) משקל הנמרים בספארי מתפלג נורמלית, עם ממוצע 250 ק"ג וסטיית תקן 20 ק"ג.

א. סרטטו את גרף ההתפלגות וציינו עליו את הממוצע ואת המשקלים 3 סטיות מימין ומשמאל לממוצע.

ב. השלימו את הטבלה הבאה:

190	295	310	215	250	280	200	משקל הנמרים (בק"ג)
							ציון התקן המתאים (z)
							מיקום ביחס לממוצע

ג. אלה חישה את ציוני התקן של הנמרים במשקל 290 ק"ג ו-210 ק"ג וקיבלה מספרים נגדיים. האם זוהי מקריות? אם לא הסבירו מה משמעות התוצאה של אלה.

6) גובהם של העצים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם ממוצע 8 מטרים וסטיית תקן 2 מטרים.

- סרטטו גרף התפלגות נורמלית וסמנו עליו את הממוצע.
- קבעו, ללא חישוב אלגברי, מה ציון התקן המתאים לעצים שגובהם 12 מטרים?
- קבעו, ללא חישוב אלגברי, מה גובהם של עצים שציון התקן שלהם $-\frac{1}{2}$.
- יוני חישוב את ציון התקן של עצים שגובהם 9.5 מטרים וקיבל ערך שלילי. גלית טענה מיד שהוא טועה. האם גלית צודקת? על סמך מה ביססה את טענתה?
- מה גובהם של עצים שציון התקן שלהם:

$$z = 2.1 \quad (1) \quad z = -0.8 \quad (2) \quad z = 0 \quad (3)$$

7) מרחק הקפיצה של קנגורו אדום בוגר מתפלג נורמלית, עם סטיית תקן של 2 מטרים.

- נתון שמרחק הקפיצה המתאים לציון התקן $z = 1.5$ הוא 11 מטרים. מצאו את מרחק הקפיצה הממוצע של קנגורו אדום בוגר.
- מהו מרחק הקפיצה המתאים לציון התקן $z = 0$?
- בחרו 2 ציוני תקן כרצונכם, אחד חיובי ואחד שלילי, וחשבו את מרחק הקפיצה המתאים להם באמצעות הנוסחה $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$. וודאו שאתם מבינים את משמעות התוצאה שהתקבלה ושאתם יודעים להציג אותה באמצעות גרף ההתפלגות הנורמלית.
- האם ניתן לומר שקבוצת קנגורו בעלת ציון תקן $z = 2.1$ בעלת מרחק קפיצה גבוה מקבוצת קנגורו בעלת ציון תקן $z = 1.8$? נמקו באופן מילולי.

8) קוטר תפוחי אדמה מזן מסוים מתפלגים נורמלית עם ממוצע 6 ס"מ.

ידוע שציון התקן המתאים לתפוחי אדמה בקוטר 4.5 ס"מ הוא: $z = -3$.

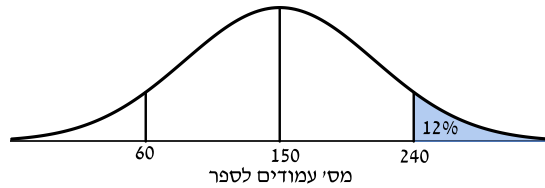
- סרטטו את גרף ההתפלגות הנורמלית וסמנו עליו את הנתונים שלעיל.
- נסו לחשב את סטיית התקן בשתי דרכים שונות: קודם באופן גרפי על ידי גרף ההתפלגות

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} \quad \text{הנורמלית ולאחר מכן על ידי השימוש בנוסחה:}$$

ג. השלימו את הטבלה הבאה (באמצעות הגרף, הנוסחה או שניהם גם יחד):

ציון תקן			0	1.5		3
קוטר תפוח אדמה	6.25	5			5.5	

תשובות סופיות:



(1) א. להלן הגרף:

ב. 150 עמודים

ג. 12%

ד. $4300 = 8600 \cdot \frac{1}{2}$. בספרייה 4,300 ספרים בהם פחות מ-150 עמודים.

ה. $100\% - 12\% - 12\% = 76\%$

(2) א. 80 דקות ב. 10%

ג. המספר החסר: 40. ההסבר: משך הבחינה החציוני 80 דקות, לפי תכונות סימטריה 40% מהתלמידים פתרו את הבחינה בזמן של 40-80 דקות ולכן אחוז זה פתרו אותה בין 40 ל-80 דקות.

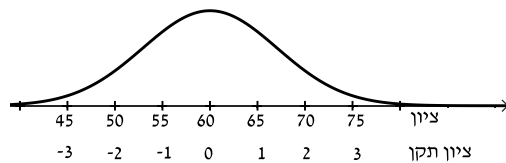
ד. 90% מהתלמידים פתרו את הבחינה בזמן הקצר מ-120 דקות הם 27 תלמידים

ולכן: $30 = 27 : 0.9$

(3) א. (1) ציון תקן מונה את מספר סטיות התקן מהממוצע. המספר 60 הוא הממוצע ולכן הסטייה

היא אפס. (2) הציון 70 נמצא 2 סטיות תקן מימין לממוצע ולכן ציון התקן הוא 2.

ב. להלן הגרף עם ציוני התקן:



ג. לא ייתכן. הציון 48 נמצא משמאל לממוצע ציון התקן הוא שלילי בהכרח.

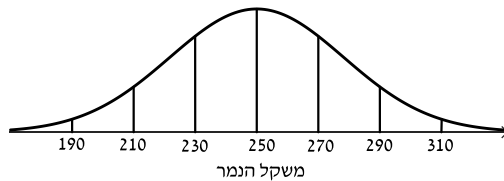
ד. חיוביים, שליליים, אפס.

(4) א. ציון תקן 2.3 משמעותו 2.3 סטיות תקן מימין לממוצע.

מכיוון שסטיית התקן היא 5 והממוצע 60 אז נקבל: $60 + 5 \cdot 2.3 = 71.5$.

ב. דנה צודקת, וחשוב להבין את ההסבר שלה ולזהות אותו על גבי הגרף.

(5) א. להלן הגרף:



ב. הטבלה המלאה:

משקל הנמרים (בק"ג)	190	295	310	215	250	280	200
ציון התקן המתאים (z)	-3	2.25	3	-1.75	0	1.5	-2.5
מיקום ביחס לממוצע	3 סטיות תקן משמאל לממוצע	2.25 סטיות תקן מימין לממוצע	3 סטיות תקן מימין לממוצע	1.75 סטיות תקן משמאל לממוצע	0 סטיות מהממוצע	2.5 סטיות תקן מימין לממוצע	2.5 סטיות תקן משמאל לממוצע

6 א. לא. המשקלים 210 ו-290 ק"ג סימטריים ביחס לממוצע ולכן ציוני התקן (z) המודדים את גודל

הסטייה מהממוצע יהיו בגודל זהה אך בסימנים הפוכים – החיובי מימין לממוצע והשלילי משמאל.

ב. עצים בגובה 12 מטר נמצאים 2 סטיות תקן מימין לממוצע. מכיוון שגודל סטיית התקן 2 מטרים

אז: $12 = 2 + 2 \cdot 2$ ולכן ציון התקן הוא $z = 2$.

ג. חצי סטיית תקן מהממוצע משמעותו מטר אחד נמוך מהממוצע כלומר 7 מטרים.

ד. גלית צודקת. הערך 9.5 מטרים גבוה מהממוצע ולכן סטיית התקן חייבת להיות חיובית.

$$\text{ה. (1)} \quad 2.1 = \frac{x-8}{2} \rightarrow 4.2 = x-8 \rightarrow x = 12.2$$

$$\text{(2)} \quad -0.8 = \frac{x-8}{2} \rightarrow -1.6 = x-8 \rightarrow x = 6.4$$

$$\text{(3)} \quad 0 = \frac{x-8}{2} \rightarrow 0 = x-8 \rightarrow x = 8$$

הערה: ניתן לומר מיד שאם ציון התקן אפס אז גובה העצים שווה לממוצע.

7 א. מרחק קפיצה של 11 מטרים משקף 1.5 סטיות תקן מימין לממוצע. סטיית התקן היא 2 ולכן

$$8 = 11 - 2 \cdot 1.5$$

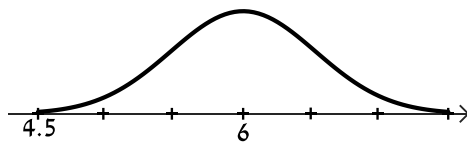
ב. המרחק הממוצע $z = 8$

ג. בדקו עם המורה בכיתה.

ד. כן. ככל שציון התקן גבוה יותר המשמעות היא שערך המשתנה נמצא ימינה יותר מהממוצע

ולכן גבוה יותר.

8 א. להלן גרף התפלגות נורמלית עם הנתונים:



ב. להלן שני דרכים לפתרון:

מציאת סטיית תקן על ידי חישוב אלגברי	מציאת סטיית תקן ללא חישוב אלגברי
$3 = \frac{4.5-6}{s} \rightarrow -3s = -1\frac{1}{2} \rightarrow s = \frac{1}{2}$	ציון תקן (-3) משמעותו 3 סטיות תקן משמאל לממוצע. מכיוון שההפרש הוא: $6 - 4.5 = 1.5$ נחלק ב-3 ונקבל שסטיית התקן היא $\frac{1}{2}$ ס"מ.

ג. להלן טבלה מלאה:

ציון תקן	0.5	-2	0	1.5	-1	3
קוטר תפוח אדמה	6.25	5	6	6.75	5.5	7.5