

מתמטיקה 5 יחידות שאלון 806

GOOL

בשביל התירגול

קורסים ברשת שבאמת עובדים!



בואו לגלות את
סודות ההצלחה בלימודים

תלמידים יקרים

ספר תרגילים זה הוא פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכינות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד על פי תכנית הלימודים של משרד החינוך. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.

יוחאי טוויג



תוכן עניינים כללי:

4	אלגברה
100	גיאומטריה אוקלידית
211	טריגונומטריה
259	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
365	תרגול נוסף בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
479	נספחים

הערות כלליות:

1. בכל נושא מופיע תוכן העניינים המפורט.
2. הסקיצות בשאלות החקירה מופיעות בצורה מרוכזת בסוף דפי התשובות.
3. כל פרק מורכב מחלק תיאורטי ותרגול אשר מופיעים בצורה מלאה ומפורטת באתר, למעט החלקים הקרויים 'תירגול נוסף' ושאלות החזרה מבחינות.
4. קישור לחוברת מתכונות: http://www.gool.co.il/Misc/806_exams_gool.pdf

תוכן העניינים – פרקי אלגברה:

7	פרק 1 – טכניקה אלגברית:
7	פירוק הטרינום:
8	משוואות:
8	משוואה ממעלה ראשונה:
9	מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:
10	משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:
10	משוואה ממעלה שנייה:
11	משוואות ממעלה שלישית ומשוואות דו-ריבועיות:
11	משוואות עם פרמטרים:
12	משוואות עם שורשים:
12	משוואות עם ערך מוחלט:
12	מערכת משוואות ממעלה שנייה:
13	תשובות סופיות:
15	אי שוויונים:
15	אי-שוויונים ממעלה ראשונה:
15	אי-שוויונים ממעלה שנייה:
16	אי-שוויונים ממעלה שלישית:
16	אי-שוויונים עם מנה:
16	אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:
17	שאלות מסכמות – אי-שוויונים:
17	תשובות סופיות:
18	תחום הגדרה:
18	תשובות סופיות:
19	אי שוויונים עם ערך מוחלט:
19	תשובות סופיות:
20	פרק 2 – חקירת משוואות ממעלה ראשונה ושנייה:
20	חקירת משוואות ממעלה ראשונה:
21	תשובות סופיות:
22	חקירת משוואות ממעלה שנייה:
22	תשובות סופיות:
23	פרק 3 – בעיות מילוליות:
23	הקדמה כללית:
23	שאלות יסודיות:
23	תשובות סופיות:

24	בעיות תנועה :
24	בעיות ללא אחוזים עם נעלם אחד ושניים :
25	בעיות תנועה עם אחוזים :
26	בעיות תנועה עם משפט פיתגורס :
26	מהירות מושפעת מזרמים :
26	מהירות ממוצעת :
27	שאלות מסכמות :
29	תשובות סופיות :
30	בעיות הספק :
30	שאלות שונות :
31	תשובות סופיות :
32	שאלות שונות :
32	בעיות תנועה :
36	בעיות הספק :
37	תשובות סופיות :
38	תירגול נוסף :
38	בעיות תנועה שונות :
43	תשובות סופיות :
44	פרק 4 – סדרות :
44	סדרה חשבונית :
44	שאלות :
47	תשובות סופיות :
48	סדרה הנדסית :
48	שאלות :
51	תשובות סופיות :
52	סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת :
53	שאלות :
56	תשובות סופיות :
57	סדרת נסיגה :
57	שאלות :
59	תשובות סופיות :
60	פרק 5 - הסתברות קלאסית :
60	הגדרות כלליות :
61	שאלות יסודיות :
61	שאלות עם שני ניסויים :
62	שאלות עם הסתברות מותנית :
63	שאלות עם נעלמים :

- 64.....: שאלות הנפתרות באמצעות טבלה דו-מימדית :
- 65.....: התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי - שאלות יסודיות :
- 66.....: התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי - שאלות עם הסתברות מותנית :
- 67.....: התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי - שאלות עם נעלמים :
- 68.....: שאלות מסכמות :
- 74.....: תשובות סופיות :
- 75: שאלות שונות לפי נושאים:**
- 75.....: כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות בלתי תלויים :
- 76.....: כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות תלויים :
- 78.....: תרגילים הכוללים שימוש בדיאגרמת עץ :
- 80.....: תרגילים עם נעלמים – כפל וחיבור הסתברויות, דיאגרמת עץ :
- 83.....: התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי :
- 89.....: טבלה דו מימדית :
- 93.....: תרגילים בהסתברות מותנה ונוסחת בייס עם נעלם אחד :
- 94.....: תרגילים בהסתברות מותנה ונוסחת בייס עם שני נעלמים :
- 94.....: תרגילים הכוללים טבלה עם שלוש עמודות :
- 94.....: תרגילי חישוב הכוללים שימוש בנוסחאות בהסתברות :
- 96.....: תרגילי הוכחה בעזרת נוסחאות ההסתברות :
- 98.....: תשובות סופיות :

פרק 1 – טכניקה אלגברית:

פירוק הטרינום:

פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

$$2x^2 + 7x - 15 \quad (2) \qquad 4x^2 + 8x + 3 \quad (1)$$

$$6x^2 + 5x + 1 \quad (4) \qquad 3x^2 - 11x + 6 \quad (3)$$

$$x^2 + 5x + 4 \quad (6) \qquad 2x^2 + x - 6 \quad (5)$$

$$x^2 - 33x + 62 \quad (8) \qquad x^2 - 8x + 15 \quad (7)$$

פרק את הביטויים הבאים:

$$4x^2 + 8x + 3 \quad (9)$$

$$6x^2 + 5x + 1 \quad (10)$$

$$x^2 + 5x + 4 \quad (11)$$

תשובות סופיות:

$$(3x - 2)(x - 3) \quad (3) \quad (2x - 3)(x + 5) \quad (2) \quad (2x + 1)(2x + 3) \quad (1)$$

$$(x + 1)(x + 4) \quad (6) \quad (x + 2)(2x - 3) \quad (5) \quad (3x + 1)(2x + 1) \quad (4)$$

$$(2x + 1)(2x + 3) \quad (9) \quad (x - 2)(x - 31) \quad (8) \quad (x - 3)(x - 5) \quad (7)$$

$$.(x + 1)(x + 4) \quad (11) \quad (3x + 1)(2x + 1) \quad (10)$$

משוואות:

משוואה ממעלה ראשונה:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{llll} \text{א.} & 6x+2=8 & \text{ב.} & 7-2x=7 \\ \text{ג.} & 2x+x=24 & \text{ד.} & 2x+6=8+x \\ \text{ה.} & -7x+5+2x=4x-13 & \text{ו.} & 6x-3+5-7x=x-5x-7 \\ \text{ז.} & 2-5x+7=-3x+8 & & \end{array}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 3(x-1)-4=2 \\ \text{ב.} & 7x-4(3-4x)=-x \\ \text{ג.} & 6(4-x)-(6-x)=3x \\ \text{ד.} & 5x-(3x-7)4=21 \\ \text{ה.} & x(x-5)=x^2-7x+8 \\ \text{ו.} & (7-x)(1-x)-(x-3)^2=0 \end{array}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4 \\ \text{ב.} & \frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1 \\ \text{ג.} & \frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15} \\ \text{ד.} & \frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1 \\ \text{ה.} & \frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2 \\ \text{ו.} & 5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0 \\ \text{ב.} & \frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0 \\ \text{ג.} & \frac{3}{x}=\frac{1}{x+2} \\ \text{ד.} & \frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2} \\ \text{ה.} & \frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x} \end{array}$$

5 פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12 \quad \text{ד.}$$

$$\frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} \quad \text{א.}$$

$$\frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 \quad \text{ג.}$$

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

6 פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 5x+2y=14 \\ 5x+3y=23 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ x-3y=3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

7 פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 5x-2y=-2 \\ x+4y=4 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} -3x+2y=-16 \\ x=5y+14 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3x+y=11 \\ y=5 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} y=x-3 \\ y=2x+4 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x+7y=11 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

8 פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

9 פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

10) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

11) פתור את המשוואות הבאות:

$$5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \quad \text{ב.}$$

$$6(x-2) = 2x + 5 + 4x \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 2(x-y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x-y) \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

משוואה ממעלה שנייה:

12) פתור את המשוואות הבאות:

$$-x^2 + 10x - 16 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \text{א.}$$

$$2x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \text{ד.}$$

$$25x^2 - 20x + 4 = 0 \quad \text{ג.}$$

13) פתור את המשוואות הבאות:

$$-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4 \quad \text{ב.}$$

$$4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 3 \quad \text{א.}$$

$$2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21 \quad \text{ג.}$$

14) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

$$32x^2 - 18 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 - 36 = 0 \quad \text{א.}$$

15) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

$$5x^2 - x = 0 \quad \text{ב.}$$

$$-7x^2 - 14x = 0 \quad \text{א.}$$

16) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $\frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18$

א. $\frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x}$

ג. $\frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0$

משוואות ממעלה שלישית ומשוואות דו-ריבועיות:

17) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

א. $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$

ד. $2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0$

ג. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

משוואות עם פרמטרים:

18) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $\frac{1}{3}(a-3x) = \frac{1}{a}(ax-3)$

א. $mx - 3m = 5x + 1$

ד. $\frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$

ג. $(x-2a)(x-2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2)$

ה. $\frac{x}{a^2-a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a} - \frac{2}{a^3-2a^2+a}$

19) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

ב. $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$

א. $\begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$

ד. $\begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2y = 1 \end{cases}$

ה. $\begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$

(20) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

ב. $x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$

א. $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$

ד. $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$

ג. $x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x$

ו. $\frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$

ה. $(m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0$

ז. $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$

משוואות עם שורשים:

(21) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $\sqrt{x+2} = x$

א. $\sqrt{4x-3} = 5$

ד. $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$

ג. $\sqrt{3x+1} + x = 13$

ו. $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$

ה. $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$

ח. $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$

ז. $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$

י. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$

ט. $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$

יב. $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$

יא. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$

יג. $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$

משוואות עם ערך מוחלט:

(22) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $|3x-24| = x$

א. $|2x-11| = 7$

ד. $2x - |8-x| = 10$

ג. $|12-x| = 3x$

ו. $|14-3x| = 2|x+5|$

ה. $|4x-5| = |2x+13|$

ח. $|x+2| + 6 = |2x-4|$

ז. $|x| + 7 = |2x|$

י. $|10-3x| - |x+4| = |2x-6|$

ט. $|x+2| + |2x-6| = |4x+8|$

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

ד. אינסוף פתרונות.

(12) א. $x_1 = 2, x_2 = -5$. ב. $x_1 = 2, x_2 = 8$. ג. $x = \frac{2}{5}$. ד. אין פתרון למשוואה.

(13) א. $x_1 = 0, x_2 = 1$. ב. $x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4}$. ג. $x_1 = 1, x_2 = -10$.

(14) א. $x = \pm 6$. ב. $x = \pm \frac{3}{4}$. **(15)** א. $x_1 = 0, x_2 = -2$. ב. $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5}$.

(16) א. $x_1 = 2, x_2 = -1.2$. ב. $x = 5, x \neq -3$. ג. $x_1 = 0, x_2 = -5$.

(17) א. $x = \pm 1, \pm \sqrt{2}$. ב. $x = \pm 1$. ג. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2}$. ד.

$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2\frac{1}{2}$

(18) א. $m \neq 5, x = \frac{3m+1}{m-5}$. ב. $x = \frac{a^2+9}{6a}$. ג. $x = a+b$. ד. $x = -m$. ה. $x = a+1$.

(19) א. $(m+1, -1)$. ב. $(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1})$. ג. $(m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m})$. ד. $(2m+1, m-2)$.

(20) א. $x = m+1, m-1$. ב. $x = a-1, 3-a$. ג. $x = m-5, -2m$. ה. $(2a+b, 2a-b)$.

ד. $x = \pm a\sqrt{3}$. ה. $x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$. ו. $x = \frac{a}{b}, -ab$. ז. $b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab$. ח. $x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$.

(21) א. $x = 7$. ב. $x = 2$. ג. $x = 8$. ד. $x = 5$. ה. $x = 6$. ו. $x = 4, -3$. ז. $x = 3$. ח. $x = 5$.

ט. $x = 12$. י. $x = 2, 2\frac{8}{9}$. יא. $x = 6$. יב. $x = 1$. יג. $x = 2$.

(22) א. $x = 2, 9$. ב. $x = 6, 12$. ג. $x = 3$. ד. $x = 6$. ה. $x = 9, -1\frac{1}{3}$. ו. $x = 24, \frac{4}{5}$. ז. $x = \pm 7$.

ח. $x = 12, -1\frac{1}{3}$. ט. $x = 0, -12$. י. $x = 0$.

(23) א. $(2, 4), (4, 2)$. ב. $(\pm 4, -2)$. ג. $(\pm 2, \pm 1)$. ד. $(5, -2), (-5, 2)$.

ה. $(-\frac{5}{11}, \frac{1}{11}), (\frac{5}{11}, \frac{1}{11})$. ו. $(-2, \frac{1}{2}), (2, 1), (-2, -1)$. ז. $(-3, -\frac{1}{2}), (3, \frac{1}{2})$. ח. $(7, 4), (5, -3)$.

ט. $(3, 6), (6, 3)$. י. $(6, 5), (-5, -6)$. יא. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

יב. $(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$.

יג. $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$.

יד. $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$.

אי שוויוניים:

מה מותר?

1. לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
2. לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
3. לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
4. להעלות בחזקה אי זוגית.
5. להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

מה אסור?

1. לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
2. להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$6x > 2(3x-1)$	(2)	$45x - 26 > 109$	(1)
$(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20$	(4)	$2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6)$	(3)
$4(6x-8) < 8(3x-4)$	(6)	$\frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3}$	(5)
$\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7$	(8)	$\frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x$	(7)

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$x^2 - 12x > -32$	(10)	$x^2 < 144$	(9)
$(x+2)(x+4) < 35$	(12)	$(x+2)(x+5) < 0$	(11)
$(x-3)(x-7) \geq 8x-56$	(14)	$-x^2 + 13x + 30 < 0$	(13)
$(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$	(16)	$(x-5)^2 + x(x+2) < 89$	(15)
$x^2 - 10x + 25 > 0$	(18)	$-3x^2 + 12x > 0$	(17)
$2x^2 + 2x + 24 \geq 0$	(20)	$(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$	(19)

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x(x^2 + x + 1) > 0 \quad (22)$$

$$x^3 - 25x \geq 0 \quad (24)$$

$$(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0 \quad (26)$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0 \quad (28)$$

$$(x - 2)(x - 4)(x - 1) < 0 \quad (30)$$

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0 \quad (21)$$

$$(-2x^2 - 3x + 2)(x + 1) \leq 0 \quad (23)$$

$$(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0 \quad (25)$$

$$(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0 \quad (27)$$

$$(x^2 + 6)(x + 3) > 0 \quad (29)$$

אי-שוויונים עם מנה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3 \quad (32)$$

$$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0 \quad (34)$$

$$\frac{1}{-3(x-1)} < 0 \quad (36)$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0 \quad (38)$$

$$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0 \quad (40)$$

$$\frac{x-1}{x^2-9} > 0 \quad (31)$$

$$\frac{1}{x^2-16} > 0 \quad (33)$$

$$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0 \quad (35)$$

$$\frac{x-1}{x+2} \leq 1 \quad (37)$$

$$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0 \quad (39)$$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (42)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (44)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (46)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (48)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (41)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (43)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (45)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (47)$$

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (50)$$

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (49)$$

$$\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (52)$$

$$\frac{(x-4)(x+2)}{x-1} < 0 \quad (51)$$

$$x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (54)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (53)$$

$$\frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (56)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (55)$$

$$\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (58)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (57)$$

$$\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (60)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (59)$$

$$\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (62)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (61)$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (64)$$

$$x^2 > 3x + 10 \cap 6 < 5x - x^2 \quad (63)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (65)$$

66) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

1) $x > 3$ (2) כל x (3) אף x (4) $x > -2$ (5) $x < 5$ (6) אף x (7) $x \geq 12$ (8) $x > -13$

9) $-12 < x < 12$ (10) $x < 4, x > 8$ (11) $-5 < x < -2$ (12) $-9 < x < 3$

13) $x < -2, x > 15$ (14) $x \leq 7, x \geq 11$ (15) $-4 < x < 8$ (16) $-4 \leq x \leq 0$

17) $0 < x < 4$ (18) $x > 5, x < 5$ (19) $x < 3, x > 5$ (20) כל x

21) $x > 3$ או $1 < x < 2$ (22) $x > 0$ (23) $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (24) $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$

25) $x > 2$ (26) $x \leq 1\frac{2}{3}$ (27) $x < -2, 1 < x < 3$ (28) $x \leq 0, x = 3$ (29) $x > -3$

30) $x < 1, 2 < x < 4$ (31) $-3 < x < 1, x > 3$ (32) $x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2}$

33) $x < -4, x > 4$ (34) $2 < x < 3, x > 3$ (35) $\frac{1}{2} \leq x < 5$ (36) $x > 1$ (37) $x > -2$

- (38) $2 < x < 3$ (39) $1 \leq x \leq 6$ (40) $x < 2, x > 6$ (41) $x < 2$ (42) $2 < x < 4$ (43) $x > 0$ (44) $x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3}$ (45) $-2.5 \leq x \leq 7$ (46) $x \geq 10$ (47) $1 \leq x < 13$ (48) \emptyset (49) $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (50) $x \leq -4$ (51) $x < -2, 1 < x < 4$ (52) $x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, 5 < x$ (53) $-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12$ (54) $x < -3, 0 < x < 2.5$ (55) $2 < x < 6, 6 < x$ (56) $8 < x, 2.5 \leq x < 8, 3 < x$ (57) $3 < x$ (58) $x < -3, 0 < x < 1, x > 4$ (59) $3 < x, -1 < x < 0, 1 < x < 3, 7 < x$ (60) $7 < x$ (61) $2 < x < 4, x < -2$ (62) $4 < x, x \leq 0, 1 \leq x < 2, x \neq 1$ (63) $x \neq 1$ (64) $x \geq 7$ (65) $3 < x, -3 < x < -\frac{3}{5}$ (66)

תחום הגדרה:

1 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

- א. $f(x) = \sqrt{x}$ ב. $f(x) = 2\sqrt{x-3}$
 ג. $f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$ ד. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$
 ה. $f(x) = \sqrt{x^2+3x-10}$ ו. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$
 ז. $f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$

2 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

- א. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3}$ ב. $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$
 ג. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$ ד. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

תשובות סופיות:

- 1 א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \leq \frac{1}{2}$ ד. $x > -4$ ה. $x \leq -5, x \geq 2$
 ו. $x > 3, -3 < x < 0$ ז. $1 < x \leq 2, -2 < x < 1, x < -2$
- 2 א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \geq 1, x \leq -1\frac{1}{2}$ ד. $-2 \leq x \neq 1, x \leq -3$

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

(1) פתור את אי השוויונים הבאים:

א. $|x+2| < 3$ ב. $|2x+1| > 7$
ג. $|6-2x| < x$ ד. $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי השוויונים הבאים:

א. $1 < |4-3x| < 7$ ב. $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי השוויונים הבאים:

א. $|x^2+6x-4| < 12$ ב. $|x^2+x-10| > 3x-2$
ג. $x^2-6|x|+5 \leq 0$

(4) פתור את אי השוויונים הבאים:

א. $|x-3|+|2x+2| > 7$ ב. $|x+8| < 11-|1-3x|$
ג. $|3-2x|-11 > 4-|6+x|$ ד. $|2x-6|+|x+5| > 14-|1-x|$
ה. $|5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right| \leq 22$

תשובות סופיות:

(1) א. $-5 < x < 1$ ב. $3 < x$ או $x < -4$ ג. $2 < x < 6$ ד. $x < -1$

(2) א. $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$ או $-1 < x < 1$ ב. $-5\frac{1}{2} < x < -3$

(3) א. $-2 < x < 2$ או $-8 < x < -4$ ב. $4 < x$ או $x < 2$
ג. $1 \leq x \leq 5$ או $-5 \leq x \leq -1$

(4) א. $2 < x$ או $x < -2$ ב. $-1 < x < 1$
ג. $4 < x$ או $x < -6$ ד. $4 < x$ או $x < -1$

ה. $-\frac{3}{7} \leq x \leq 4$

פרק 2 – חקירת משוואות ממעלה ראשונה ושנייה:

חקירת משוואות ממעלה ראשונה:

שלבי עבודה:

1. נפתור את המשוואה.
2. נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
3. נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למשוואה על ידי הצבתו במשוואה המקורית.

שאלות:

- 1) פתור את המשוואה: $kx + 6k = 2x + 3k^2$.
- 2) פתור את המשוואה: $a^2(x-1) = 3ax + 4(x-a)$.
- 3) פתור את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} 2kx + 5y = 2k^2 \\ 2x - y = -10 \end{cases}$$
- 4) נתונה המשוואה: $m(mx-2) = 3(2+3x)$. מצא אלו ערכי m למשוואה:
 - א. פתרון יחיד.
 - ב. אף פתרון.
 - ג. אינסוף פתרונות.
- 5) נתונה המשוואה: $k^2(5-2x) = 3(15-2kx)$
 - א. מצא לאלו ערכי k למשוואה:
 1. פתרון יחיד.
 2. אף פתרון.
 3. אינסוף פתרונות.
 - ב. מצא לאלו ערכי k פתרון המשוואה:
 1. חיובי.
 2. מקיים את אי-השוויון: $2x-3 > x$

6) נתונה המשוואה: $\frac{mx}{m-2} = \frac{2m}{m-5} - \frac{6x}{m^2-7m+10}$. מצא לאלו ערכי m למשוואה:

- א. פתרון יחיד.
 ב. אף פתרון.
 ג. אינסוף פתרונות.

7) נתונה מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} (4-a)x + 3(2a-1)y = 3 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

- א. מצא לאלו ערכי a למערכת המשוואות:
 1. פתרון יחיד.
 2. אף פתרון.
 3. אינסוף פתרונות.

ב. מצא לאלו ערכי a פתרון מערכת המשוואות מקיים את אי-השוויון: $2x + y > -1$.

8) נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} x + 3ay = a \\ ax + 3y = 4a - 3 \end{cases}$$

- א. מצא לאלו ערכי a למערכת המשוואות:
 1. פתרון יחיד.
 2. אף פתרון.
 3. אינסוף פתרונות.

ב. מצא לאלו ערכי a נקודת החיתוך בין הישרים (המיוצגים על ידי המשוואות) נמצאת ברביע השלישי.

תשובות סופיות:

- 1) $x = 3k$ (2) $x = \frac{a}{a+1}$ (3) $(k-5, 2k)$ (4) א. $m \neq \pm 3$ ב. $m = 3$ ג. $m = -3$.
 5) א. 1. $k \neq 0, k \neq 3$ 2. $k = 0$ 3. $k = 3$ ב. 1. $0 < k$ או $k < -3$ וגם $k \neq 3$ 2. $0 < k < 15$ וגם $k \neq 3$.
 6) א. $m \neq 3, m \neq 2, m \neq 5$ ב. $m = 3, m = 2, m = 5$ ג. אף m .
 7) א. 1. $a \neq -3, a \neq 1$ 2. $a = -3$ 3. $a = 1$ ב. $-3 < a$ או $a < -10$ וגם $a \neq 1$.
 8) א. 1. $a \neq -1, a \neq 1$ 2. $a = -1$ 3. $a = 1$ ב. $-1 < a < 0$.

חקירת משוואות ממעלה שנייה:

שאלות:

(1) פתור את המשוואה: $x^2 + mx - 12m^2 = 0$.

(2) פתור את המשוואה: $2x^2 + 5m^2 = (11m + 1)x - 5m$.

(3) נתונה המשוואה: $x^2 + mx + 9 = 0$. מצא לאלו ערכי m למשוואה:

א. שני פתרונות ממשיים שונים.

ב. פתרון ממשי אחד.

ג. אין פתרונות ממשיים כלל.

(4) נתונה המשוואה: $(m \neq 3)$ $(3 - m)x^2 + 4mx - 2m = 0$. מצא לאלו ערכי m למשוואה:

א. שני פתרונות ממשיים שונים.

ב. פתרון ממשי אחד.

ג. אין פתרונות ממשיים כלל.

(5) נתונה הפונקציה: $y = 2mx^2 + mx - 1$.

מצא לאלו ערכי m הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- x .

(6) נתונה הפונקציה: $(m \neq \pm 3)$ $y = (m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x + 4$

מצא לאלו ערכי m הפונקציה נמצאת מעל ציר ה- x לכל ערך של x .

(7) נתון אי השוויון: $mx^2 > (m + 4)(x - 1) - x^2$.

מצא לאלו ערכי m אי השוויון מתקיים לכל ערך של x .

תשובות סופיות:

(1) $x_1 = 5m$, $x_2 = \frac{m+1}{2}$ (2) $x_1 = 3m$, $x_2 = -4m$

(3) א. $6 < m$ או $m < -6$ ב. $m = \pm 6$ ג. $-6 < m < 6$

(4) א. $0 < m$ או $m < -3$ וגם $m \neq 3$ ב. $m = 0, m = -3$ ג. $-3 < m < 0$

(5) $-8 < m \leq 0$ (6) $m > 3\frac{2}{5}$ או $m < -3$ (7) $m > 0$

פרק 3 – בעיות מילוליות:

הקדמה כללית:

הגדרה:	אחוז אחד הוא מאית השלם.
בעית תנועה:	זמן X מהירות = דרך.
בעית הספק:	הספק X זמן = עבודה.

הערות:

1. אם לא צוין אחרת, המהירויות בכל שאלה קבועות.
2. אם לא צוין אחרת, ההספקים בכל שאלה קבועים.

שאלות יסודיות:

- (1) א. כמה הם 20% מ-300?
ב. כמה הם 120% מ-300?
ג. מהו המספר הגדול מ-300 ב-20%?
- (2) א. חולצה עלתה 240 ₪ והתייקרה ב-30%. מה מחירה כעת?
ב. נעליים עלו 450 ₪ והוזלו ב-40%. מה מחירם כעת?
- (3) מכונית נסעה במהירות 80 קמ"ש ואז הורידה את מהירותה ב-20%. מה מהירותה כעת?
- (4) אופנוע נסע במהירות x והעלה את מהירותו ב-30%. בטא באמצעות x את מהירותו כעת.
- (5) צינור מילא בריכה בקצב של x ליטר בשעה. לאחר מכן ירד הספק המילוי שלו ב-20% ולבסוף עלה הספק המילוי שלו ב-30%. בטא באמצעות x את הספק המילוי שלו כעת.

תשובות סופיות:

- (1) א. 60 ב. 360 ג. 360 (2) א. 312 ₪ ב. 270 ₪ (3) 64 קמ"ש (4) $1.3x$ (5) $1.04x$

בעיות תנועה:

בעיות ללא אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

1) מכונית נוסעת מ-A ל-B במהירות של 90 קמ"ש. בדרך חזרה נסעה המכונית במהירות של 60 קמ"ש. בסה"כ נמשכה הנסיעה הלוך וחזור 20 שעות.
א. כמה שעות נסעה המכונית לכל כיוון?
ב. מהי הדרך שעברה המכונית?

2) אוטובוס ומשאית יוצאים בו זמנית משני יישובים A ו-B בהתאמה. מהירות האוטובוס היא 60 קמ"ש ומהירות המשאית היא 80 קמ"ש. האוטובוס הגיע ליישוב B שעה ו-40 דקות מאוחר יותר מהזמן שלקח למשאית להגיע ליישוב A.
א. כמה זמן נסע האוטובוס וכמה זמן נסעה המשאית?
ב. מהו המרחק בין שתי הערים?

3) הולכת רגל יצאה לטיול במהירות מסוימת. לאחר שעה וחצי יצא בעקבותיה מאותו מקום הולך רגל נוסף במהירות הגדולה ממהירותה ב-4.5 קמ"ש. הולך הרגל השיג את הולכת הרגל שעה לאחר שיצא לדרכו.
א. מהי מהירות ההליכה של הולכת הרגל?
ב. מהו המרחק שעברו עד שנפגשו?

4) שני רוכבי אופניים יוצאים בו זמנית מעיר א' לעיר ב'. הרוכב הראשון נוסע במהירות קבועה ומגיע לעיר ב' לאחר 5 שעות. הרוכב השני נוסע במשך השעתיים הראשונות במהירות הקטנה ב-2 קמ"ש ממהירות הרוכב הראשון. לאחר מכן הוא מגביר את מהירותו ב-14 קמ"ש ומגיע לעיר ב' שעה ו-20 דקות לפני הרוכב הראשון.
א. באיזו מהירות נסע הרוכב הראשון?
ב. איזו דרך עבר הרוכב השני בכל חלק?

5) משאית נוסעת מרחק של 245 ק"מ בכל יום במהירות קבועה. יום אחד נסעה המשאית במשך שעתיים וחצי במהירות הרגילה, לאחר מכן עצרה לתדלוק במשך 24 דקות ואז המשיכה בנסיעה במהירות הגדולה ב-70 קמ"ש ממהירותה הקודמת. המשאית הגיעה ליעדה שעה לפני השעה שהיא מגיעה בכל יום.
א. באיזו מהירות נוסעת המשאית בכל יום?
ב. כמה זמן לוקח למשאית להגיע ליעדה בכל יום?

6) רוכב אופניים יצא בשעה 06:00 לרכיבה במהירות 24 קמ"ש. בשעה 07:00 יצא מאותו מקום רוכב אופנוע באותו כיוון ובמהירות של 40 קמ"ש.
באיזו שעה ובאיזה מרחק מנקודת היציאה ישיג רוכב האופנוע את רוכב האופניים?
7) אוטובוס נוסע מעיר א' לעיר ב' הרחוקה ממנה ב-800 ק"מ.

לאחר שעבר האוטובוס 135 ק"מ במהירות קבועה הוא עצר להתרעננות במשך חצי שעה.
לאחר מכן המשיך האוטובוס את נסיעתו במהירות הגדולה ב-43 קמ"ש ממהירותו
הקודמת עד לעיר ב'. סך כל הזמן שהיה האוטובוס בדרך הוא 7 שעות.
א. מה הייתה המהירות ההתחלתית של האוטובוס?
ב. מה היה המרחק שעבר האוטובוס אחרי ההתרעננות עד לעיר ב'?

8) המרחק בין ת"א לנצרת הוא 103 ק"מ. בשעה 08:00 יצאה מכונית מנצרת לת"א
במהירות 90 קמ"ש. בשעה 08:20 יצאה משאית מת"א לנצרת במהירות 56 קמ"ש.
באיזו שעה ייפגשו המכונית והמשאית?

9) משאית נסעה מדימונה לאילת, מרחק של 200 ק"מ. 50 דקות אחריה יצאה מכונית
מדימונה לאילת במהירות הגבוהה ב-30 קמ"ש והגיעה לאילת 40 דקות לפני המשאית.
מצא את מהירות המכונית.

בעיות תנועה עם אחוזים:

10) מכונית נסעה במהירות מסוימת במשך שתיים. אחר כך העלתה את מהירותה ב-25%
ונסעה עוד שעה וחצי. בסך הכול עברה המכונית 310 ק"מ.
מה הייתה מהירותה ההתחלתית של המכונית?

11) מכונית נוסעת מעיר א' לעיר ב' מרחק של 480 ק"מ במהירות קבועה.
בדרכה חזרה נסעה המכונית במשך שעה במהירות הקבועה.
לאחר מכן עצרה להתרעננות של 36 דקות ואז הגבירה את מהירותה ב-25% ממהירותה
הקודמת והגיעה בחזרה לעיר א' 24 דקות פחות מהזמן שלקח לה להגיע לעיר ב'.
באיזו מהירות נסעה המכונית מעיר א' לעיר ב'?

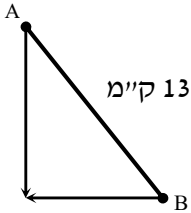
12) רכבת משא ורכבת נוסעים יוצאות מעיר א' לעיר ב' מרחק של 360 ק"מ.
מהירות רכבת הנוסעים גדולה ב-20% ממהירות רכבת המשא.
רכבת הנוסעים התעכבה 40 דקות בתחנה, ולכן יצאה באיחור מהתחנה של עיר א'.
עם זאת היא הגיעה לעיר ב' 20 דקות לפני רכבת המשא.
א. מה הן המהירויות של שתי הרכבות?
ב. כמה זמן נסעה רכבת הנוסעים מעיר א' לעיר ב'?

13) מכונית ומונית נוסעות מנקודה A לנקודה B. המכונית נוסעת במהירות קבועה ומגיעה
לנקודה B כעבור 4 שעות. המונית נוסעת במשך 3 שעות המהירות הקטנה ב-10 קמ"ש
ממהירות המכונית ולאחר מכן מגבירה את מהירותה ב-50% ומגיעה לנקודה B יחד עם
המכונית.
א. מהי מהירות המכונית?
ב. מהו המרחק בין נקודה A לנקודה B?

בעיות תנועה עם משפט פיתגורס:

14) שתי מכוניות יצאו מהעיר, האחת לכיוון מזרח והשנייה לכיוון צפון. לאחר שלוש שעות המרחק בין שתי המכוניות היה 300 ק"מ. מהירות מכונית אחת גדולה ב-20 קמ"ש ממהירות המכונית השנייה.

- א. מהן המהירויות של שתי המכוניות?
- ב. מה היה המרחק של כל מכונית מהעיר לאחר שלוש שעות?



15) שני הולכי רגל יוצאים משני יישובים A ו-B המרוחקים זה מזה 13 ק"מ. היישוב A ממוקם בצפון מערב ביחס ליישוב B כמתואר באיור ממול. הולך הרגל מיישוב A הולך דרומה והולך הרגל מיישוב B הולך מערבה. הולך הרגל מיישוב A יוצא שעתיים לפני הולך הרגל השני. לאחר שלוש שעות מיציאתו נפגשו שני הולכי הרגל. מהירות הולך הרגל מיישוב B גדולה ב-25% ממהירות הולך הרגל השני. באיזו מהירות הלך כל אחד משני הולכי הרגל?

16) רוכב אופנוע יצא מביתו מזרחה במהירות מסוימת ונסע במשך חצי שעה. לאחר מכן, פנה צפונה, הגדיל את מהירותו ב-20% ונסע כך שעה נוספת. לאחר שעה זו פנה חזרה לכיוון ביתו, העלה את מהירותו ל-65 קמ"ש ונסע (בקו ישר) עד שהגיע חזרה לביתו.

- א. מצא את מהירותו של רוכב האופנוע ביציאה מביתו אם ידוע שעבר בסך הכול 150 ק"מ.
- ב. מה הייתה הממוצעת של רוכב האופנוע (בכל חלקי הדרך)?

מהירות מושפעת מזרמים:

17) סירה שטה בנהר שבו מהירות הזרם היא 3 קמ"ש עם כיוון זרם המים. לאחר חצי שעה החליטו אנשי הסירה לשנות את כיוונם וחזרו במשך שעתיים לנקודת המוצא שלהם. מהירות הסירה במים עומדים קבועה במשך כל השייט.

- א. מצא את מהירות הסירה.
- ב. מהו המרחק הכולל ששטה הסירה?

מהירות ממוצעת:

18) אופנוע עובר מרחק של 200 ק"מ במהירות מסוימת. לאחר מכן מאיץ האופנוע ומגדיל את מהירותו ב-40%. הוא נוסע במהירות זו ועובר מרחק של 280 ק"מ. המהירות הממוצעת של האופנוע היא 96 קמ"ש.

- א. כמה זמן נסע האופנוע?
- ב. באיזו מהירות התחיל האופנוע את נסיעתו?

שאלות מסכמות:

19 המרחק בין ת"א לקריית שמונה הוא 180 ק"מ. שני רוכבי אופנוע יצאו בו זמנית, האחד מת"א לקריית שמונה והשני מקריית שמונה לת"א. כעבור 45 דקות הרוכבים עדיין לא נפגשו והמרחק ביניהם היה 52.5 ק"מ. רוכב האופנוע שיצא מת"א הגיע ליעדו 15 דקות לפני שהרוכב השני הגיע ליעדו.
מצא את מהירויות רוכבי האופנוע.

20 רכבת נוסעת בקו ת"א – ב"ש במשך שעה ורבע.
יום אחד, לאחר חצי שעת נסיעה, הייתה תקלה ברכבת והיא נאלצה לעצור ל-10 דקות עד שהתקלה תוקנה. כדי לנסות ולהגיע ליעדה בזמן העלתה את מהירותה ב-10 קמ"ש בהמשך הדרך והגיעה ליעדה באיחור קל של 5 דקות בלבד. מצא את מהירות הרכבת.

21 אדם הולך ברגל מביתו למקום העבודה שלו במהירות מסוימת.
יום אחד יצא מביתו מאוחר מאוד ולכן נאלץ להגביר את מהירות ההליכה שלו ב-3 קמ"ש. הוא הגיע לעבודה בזמן והדרך ארכה מחצית מהזמן שבדרך כלל היא אורכת.
מצא את מהירות ההליכה של האדם (בשגרה).

22 שני הולכי רגל הולכים זה לקראת זה, האחד מנקודה A לנקודה B והשני מנקודה B לנקודה A הם נפגשים כעבור חצי שעה וממשיכים ליעדם. הולך הרגל הראשון הגיע לנקודה B 25 דקות לפני שהולך הרגל השני הגיע לנקודה A.
מצא את היחס בין מהירויות הולכי הרגל.

23 היישובים A ו-B נמצאים על גדת נהר בעל זרם קבוע.
יום אחד, יצאה ספינה מיישוב A ליישוב B במהירות מסוימת.
שעה לאחר מכן יצאה ספינה שנייה מיישוב B ליישוב A וכעבור שעתיים פגשה את הספינה הראשונה. הספינות המשיכו ליעדן וחזרו חזרה ליישוב המוצא באותו יום.
למחרת, שוב יצאה הספינה מיישוב A ליישוב B אך במהירות כפולה מביום הקודם.
הספינה מיישוב B יצאה גם היא במהירות כפולה לכיוון היישוב A אך הפעם רק חצי שעה אחרי שיצאה הספינה הראשונה. כעבור שעה עוד לא פגשה את הספינה הראשונה אך הייתה במרחק של שני ק"מ ממנה.
מצא את עוצמת הזרם אם ידוע שכיוונו מיישוב A ליישוב B.

24 שלושה רוכבי אופנוע יצאו מירושלים לאילת ונסעו דרך עין גדי.
המרחק בין עין גדי לאילת הוא 240 ק"מ. שלושת הרוכבים יצאו מירושלים בהפרשי זמן קבועים והגיעו לעין גדי באותו זמן. הרוכב שיצא ראשון הגיע לאילת שעה אחרי שהגיע לשם הרוכב שיצא שני. הרוכב שלישי הגיע לאילת ומיד פנה חזרה ופגש את הרוכב שיצא ראשון במרחק 80 ק"מ מאילת. מצא את מהירויות רוכבי האופנוע.

25) מכונית ואופנוע יצאו באותו זמן מנקודה A לנקודה B.

כשהאופנוע היה באמצע הדרך הייתה המכונית במרחק 16 ק"מ מנקודה B.

כשהאופנוע היה במרחק 6 ק"מ מנקודה B המכונית הייתה במרחק 12 ק"מ מנקודה B.

א. מצא את המרחק בין הנקודה A לנקודה B.

ב. פי כמה גדולה מהירות האופנוע ממהירות המכונית?

26) דן ורן עורכים מרוץ לאורך מסלול של 10 ק"מ. מהירותו של דן גדולה ב-5 קמ"ש

ממהירותו של רן. שניהם יצאו למרוץ באותו זמן ודן הגיע לקו הסיום יותר מ-20

דקות לפני רן. מהו תחום המספרים בו נמצאת מהירותו של רן?

27) רכבת נוסעת בקו ת"א – ב"ש במשך שעה ורבע. יום אחד, לאחר חצי שעת נסיעה, הייתה

תקלה ברכבת והיא נאלצה לעצור ל-10 דקות עד שהתקלה תוקנה. כדי לנסות ולהגיע

ליעדה בזמן העלתה את מהירותה ב-10 קמ"ש בהמשך הדרך והגיעה ליעדה באיחור קל

שלא עלה על 5 דקות (שים לב – הרכבת הגיעה באיחור, אך איחור זה לא עלה על 5 דקות).

מצא את תחום המספרים בו נמצאת מהירות הרכבת.

28) שלושה חברים הלכו מבית הספר לספורטק בהליכה מהירה.

מהירותו של הראשון הייתה גדולה ב-8 קמ"ש ממהירותו של השני וב- m קמ"ש

ממהירותו של השלישי, לכן, הגיע הראשון m שעות לפני השני ושעתיים לפני השלישי.

א. הבע באמצעות m את מהירותו וזמן הליכתו של החבר הראשון.

ב. לאלו ערכים של m יש לבעיה פתרון?

תשובות סופיות:

- (1) א. 8 שעות הלוך ו-12 שעות חזור. ב. 720 ק"מ.
- (2) א. אוטובוס – 6 שעות ו-40 דקות. משאית – 5 שעות. ב. 400 ק"מ.
- (3) א. 3 קמ"ש. ב. 7.5 קמ"ש.
- (4) א. 12 קמ"ש. ב. 20 ק"מ ו-40 ק"מ.
- (5) א. 50 קמ"ש. ב. 4 שעות ו-54 דקות.
- (6) 30, 8: 60 ק"מ.
- (7) א. 90 קמ"ש. ב. 665 ק"מ.
- (8) 8: 50.
- (9) 80 קמ"ש.
- (10) 80 קמ"ש.
- (11) 80 קמ"ש.
- (12) א. 60 קמ"ש 72 קמ"ש. ב. 5 שעות.
- (13) א. 90 קמ"ש. ב. 360 ק"מ.
- (14) א. 60 קמ"ש ו-80 קמ"ש. ב. 180 ק"מ ו-240 ק"מ.
- (15) 4 קמ"ש ו-5 קמ"ש.
- (16) א. 50 קמ"ש. ב. 60 קמ"ש.
- (17) א. 5 קמ"ש. ב. 8 ק"מ.
- (18) א. 5 שעות. ב. 80 קמ"ש.
- (19) 90 קמ"ש, 80 קמ"ש.
- (20) 80 קמ"ש.
- (21) 3 קמ"ש.
- (22) 1.5.
- (23) 4 קמ"ש.
- (24) 60 קמ"ש, 80 קמ"ש, 120 קמ"ש.
- (25) א. 24 ק"מ. ב. 1.5.
- (26) 10 קמ"ש $< x < 0$ קמ"ש.
- (27) 80 קמ"ש $< x < 35$ קמ"ש.
- (28) א. $t = \frac{2m(8-m)}{m^2-16}$, $v = \frac{8m(m-2)}{m^2-16}$. ב. $4 < m < 8$.

בעיות הספק:

שאלות שונות:

- 1) טבח הכין פנקייקים בקצב קבוע במשך שעתיים. אחר כך העלה את קצב עבודתו ב-25% והכין פנקייקים עוד שעה וחצי בקצב החדש. בסך הכול הכין הטבח 310 פנקייקים. כמה פנקייקים בשעה הכין הטבח בשעתיים הראשונות לעבודתו?
- 2) צינור ממלא בריכה בקצב קבוע. לאחר שעתיים נפתח צינור נוסף הממלא את הבריכה בקצב של 25% מהצינור הראשון. לאחר עוד שעה וחצי התמלאה הבריכה לאחר שנכנסו אליה בסה"כ 310 ליטר מים. כמה ליטרים לשעה מכניס הצינור הראשון לבריכה?
- 3) צינור א' ממלא בריכה בשלוש שעות. צינור ב' ממלא את אותה בריכה בשעתיים. שני הצינורות נפתחו יחדיו בשעה 10:00. באיזו שעה תהיה הבריכה מלאה?
- 4) קבוצת פועלים סללה כביש. את השליש הראשון של הכביש סללו בקצב של 10 מטר ביום. את השליש השני של הכביש סללו בקצב הגדול ב-15 מטר ביום מהקצב בו סללו את השליש השלישי של הכביש. זמן סלילת השליש הראשון היה שווה לזמן סלילת שאר הכביש. מצא את קצב סלילת השליש האחרון של הכביש.
- 5) למיכל שני ברזים, ברז א' ממלא אותו וברז ב' מרוקן אותו. יום אחד כאשר במיכל היו 20% מנפח הקיבול שלו, פתחו בטעות את שני הברזים בו זמנית והמיכל התרוקן תוך 6 דקות. מצא בכמה זמן ממלא ברז א' לבדו את המיכל כשהוא ריק אם ידוע שזמן זה ארוך ב-5 דקות מהזמן הדרוש לברז ב' לרוקן את המיכל כשהוא מלא.
- 6) שתי קבוצות של חקלאים אספו מלונים משדה. תחילה, עבדה רק הקבוצה המהירה יותר ואספה מלונים משליש מהשדה. אחר כך, עבדה רק הקבוצה האיטית יותר ואספה מלונים מעוד שישית מהשדה. לבסוף, הצטרפה הקבוצה המהירה לעבודה ויחד אספו מלונים במשך 9 ימים נוספים. מתחילת איסוף המלונים ועד סיומו עברו 29 ימים. מצא בכמה ימים יכולה הייתה הקבוצה המהירה לאסוף את המלונים מכל השדה לו עבדה לבדה.
- 7) מורה שברשותו היו מבחני המתמטיקה של כל השכבה, 224 במספר, תכנן לבדוק אותם תוך מספר ימים מסוים. הוא התחיל בעבודתו ואחרי 6 ימי עבודה, קיבל לידיו עוד 7 מבחנים שנשכחו בבית הספר וקיבל הודעה כי עליו להחזיר את הבחינות 3 ימים לפני המועד שתכנן. הוא חישב וגילה שכדי לעמוד ביעד עליו לבדוק עוד 11 מבחנים בכל יום. בכמה ימים תכנן המורה לסיים את בדיקת המבחנים?

8) למיכל שנפחו 300 ליטר יש שני ברזים: ברז אחד למילוי והשני להרקה. מילוי המיכל (כשהוא ריק) אורך 8 דקות יותר מריקון המיכל (כשהוא מלא). יום אחד, כשהמיכל היה מלא, פתחו בטעות את שני הברזים והמיכל התרוקן בפחות מחצי שעה. באיזה תחום מספרי נמצאת כמות המים הנכנסת למיכל בדקה מברז המילוי?

9) שני פועלים תכננו לבצע עבודה מסוימת כך שהראשון יעבוד 8 ימים ואחריו השני יעבוד 6 ימים. ואולם, 4 ימים אחרי תחילת העבודה חלה הפועל הראשון והפסיק לעבוד והפועל השני נאלץ לעבוד m ימים לבדו וגם אז הסתיימה רק 75% מהעבודה. א. הבע באמצעות m את הזמן שבו כל פועל היה מסיים את העבודה לו עבד לבדו. ב. לאלו ערכים של m יש לבעיה פתרון?

תשובות סופיות:

- 1) 80 פנקייקים.
- 2) 80 ליטרים בשנה.
- 3) 11:12.
- 4) 15 מטרים ליום.
- 5) 15 דקות.
- 6) 24 ימים.
- 7) 14 ימים.
- 8) בין 15 ליטרים ל-37.5 ליטרים.
- 9) א. $4m - 12$, $\frac{16(m-3)}{2m-9}$. ב. $m > 3$.

שאלות שונות:

בעיות תנועה:

- (1) בשעה 8:00 בבוקר יצא הולך רגל מקיבוץ לכיוון חיפה. באותה שעה יצא רוכב קטנוע מחיפה לאותו הקיבוץ. שניהם נעו באותו כביש ומהירויותיהם לא השתנו בזמן התנועה. מהירות רוכב הקטנוע הייתה גדולה ב-12 קמ"ש מזו של הולך הרגל. 50 דקות לאחר השעה 8:00 הולך הרגל ורוכב הקטנוע טרם נפגשו וידוע כי המרחק ביניהם היה 16 ק"מ. 30 דקות לאחר פגישתם הגיע רוכב הקטנוע לקיבוץ. מצא את מהירות הולך הרגל ואת המרחק בין הקיבוץ לעיר חיפה.
- (2) סירת מנוע נעה בין שתי נקודות ציון. הסירה עוברת את המרחק שבין הנקודות הלוך ושוב במשך 14 שעות. המרחק בין שתי נקודות הציון הוא 48 ק"מ. ידוע כי באותו הזמן שעוברת הסירה מרחק של 4 ק"מ עם הזרם היא עוברת רק 3 ק"מ נגד הזרם. מהי מהירות זרם המים בנהר ומהי מהירות הסירה במים עומדים?
- (3) אוטובוס יוצר לדרך שאורכה 500 ק"מ, ומהירותו קבועה. אחרי נסיעה של שעתיים, הקטין נהג האוטובוס את המהירות, ולכן איחר בשעה אחת בדיוק. לו היה נוסע הנהג במהירות הנמוכה לאורך כל הדרך היה מאחר ליעדו בשעה וארבעים דקות. מצא את מהירותו הרגילה של האוטובוס.
- (4) שני רוכבי אופניים יצאו בבת אחת זה לקראת זה ממקומות A ו- B , האחד מ- A ל- B והשני מ- B ל- A . הם נפגשו בדרך וכל אחד מהם המשיך לנוע ליעד בלי להתעכב. רוכב האופניים מ- A הגיע ל- B 4 שעות לאחר הפגישה, ואילו רוכב האופניים מ- B הגיע ל- A 9 שעות לאחר הפגישה. מהירויות רוכבי האופניים לא השתנו בשעות התנועה. בכמה שעות עבר כל אחד מרוכבי האופניים את המרחק בין המקומות A ו- B .
- (5) במגרש ספורט מדדו שני ספורטאים את אורכו של מסלול ריצה. כשהם יוצאים משני קצותיו, זה לקראת זה. לאחר שצעדו כל אחד 50 צעדים, נשאר ביניהם מרחק של 17 מטרים. כל צעד של הספורטאי הראשון היה קצר ב-10 ס"מ מצעדו של הספורטאי השני. את המסלול כולו עובר הספורטאי הראשון ב-24 מטרים יותר מאשר הספורטאי השני. הצעדים של כל אחד מהספורטאים לא השתנו באורכם במשך המדידה. מהו אורך מסלול הריצה?
- (6) המרחק מקיבוץ לחיפה הוא 40 ק"מ. בשעה 7 בבוקר יצא טנדר ובו דברי דואר מן הקיבוץ לחיפה. כעבור 20 דקות יצאה אחריו מכונית מן הקיבוץ במהירות של 45 קמ"ש כדי להוסיף את החבילה על דברי הדואר. היא הדביקה את הטנדר וחזרה מיד לקיבוץ. ברגע שעברה את מחצית הדרך ממקום הפגישה עם הטנדר

לקיבוץ, הגיע הטנדר לחיפה. מהירות הטנדר ומהירות המכונית לא השתנו בזמן הנסיעה. מצא את מהירות הטנדר.

(7) שני תיירים יצאו ביחד מ- A ל- B . התייר הראשון לא התעכב בדרכו והגיע ל- B

לאחר $2\frac{1}{4}$ שעות. התייר השני, לאחר שעבר $\frac{1}{6}$ מהדרך, חזר ל- A שהה שם 15 דקות ואחר-כך הלך ל- B . שני התיירים הגיעו ל- B באותו זמן. התייר השני עבר כל קילומטר 4 דקות פחות מהתייר הראשון. מהירות ההליכה של שני התיירים לא השתנתה בעת ההליכה. מצא את מהירותו (בקמ"ש) של כל אחד מהתיירים.

(8) על שפת הנהר נמצאות שלוש תחנות של ספינות דיג: A , B ו- C . התחנה B נמצאת בין A ל- C , במרחק 12 ק"מ מ- C . כיוון זרם המים בנהר הוא מ- A ל- C . ספינת דיג שלה מנוע קטן עוברת את הדרך מ- A ל- C ב- 6 שעות. ספינת הדיג שלה מנוע גדול, שמהירותה גדולה פי 3 ממהירות הספינה עם המנוע הקטן, עוברת את הדרך מ- B ל- C ב- 45 דקות. מצא את מהירות זרם המים בנהר.

(9) שלושה כלי רכב יצאו זה אחר זה בבוקר אחד מתל אביב לאילת. אופנוע יצא בשעה 7:00, מכונית משא ב- 8:00 ומונית ב- 8:24 (24 דקות אחרי השעה 8:00). מהירויותיהם היו קבועות והן היו סדרה חשבונית. המונית הדביקה את רוכב האופנוע חצי שעה לאחר שהדביקה את מכונית המשא, ומכונית המשא הדביקה את רוכב האופנוע במרחק 180 ק"מ מתל אביב. שלושת כלי הרכב נעו כולם באותו מסלול. מצא את מהירויות כלי הרכב.

(10) משאית יצאה מתל אביב למחנה צבאי בדרום. אחריה יצא אוטובוס במהירות הגדולה ב- 12 קמ"ש ממהירותה, והוא הגיע למחנה באותו הזמן שהיא הגיעה. שעתיים וחצי לפני שהגיעו למחנה, וכשהאוטובוס היה כבר בנסיעה, יצא לקראתם מן המחנה רוכב אופנוע שמהירותו גדולה פי 2 ממהירות המשאית. הוא פגש את המשאית 10 דקות לפני שפגש את האוטובוס. כל כלי הרכב נסעו באותו כביש, ומהירויותיהם לא השתנו בזמן הנסיעה. מצא את מהירותה של המשאית.

(11) המרחק בין עיר A לעיר B הוא 300 ק"מ. משאית יצאה מעיר A ונסעה במהירות קבוע של V קמ"ש לכיוון עיר B . בדרכה חזרה הגדילה המשאית את מהירותה ב- U קמ"ש, כלומר נסעה במהירות של $U + V$ קמ"ש. ידוע שהמהירות הממוצעת של המשאית בכל דרכה (הלוך וחזור), הייתה 60 קמ"ש. אילו המשאית הייתה חוזרת מעיר B לעיר A במהירות $V - U$ קמ"ש, אזי המהירות הממוצעת בכל הדרך (הלוך וחזור) הייתה רק $\frac{100}{3}$ קמ"ש. חשב את המהירויות V ו- U .

12 המרחק בין הנקודות A ו- B הוא 64 ק"מ. רוכב אופניים יצא מנקודה A לכיוון נקודה B ונסע במהירות קבועה. 40 דקות לאחר שיצא לדרכו, יצא מנקודה A לכיוון נקודה B רוכב קטנוע שנסע במהירות קבועה של 36 קמ"ש. רוכב הקטנוע הדביק את רוכב האופניים בנקודה C ומיד הסתובב וחזר על עקבותיו באותה מהירות לנקודה A . רוכב האופניים שהמשיך בנסיעתו בלי עיכובים, הגיע לנקודה B ברגע שהקטנוע עבר את מחצית הדרך מ- C ל- A . מצא את מהירות רוכב האופניים.

13 הזמן הדרוש לגוף ראשון לעבור 160 ק"מ ארוך ב-5 שעות מן הזמן הדרוש לגוף שני לעבור 90 ק"מ. מהירות הגוף הראשון גדולה ב- m קמ"ש ממהירות הגוף השני ($m > 0$).

א. בטא באמצעות m את מהירות הגוף השני.

ב. מצא לאלו ערכים של m יקבלו מהירויות הגופים ערכים חיוביים בלבד.

14 שני כלי רכב יצאו מנקודה A בו זמנית בשעה 07:00 בבוקר ונסעו לנקודה B , לפגישה שתוכננה להתקיים בשעה 10:00 בבוקר. הרכב הראשון הגיע לפגישה בזמן והרכב השני שנסע במהירות הקטנה ב-16 קמ"ש ממהירות הרכב הראשון הגיע לפגישה 48 דקות מאוחר יותר. מצא את המרחק בין הנקודות A ו- B וחשב את המהירות של כל אחד מכלי הרכב.

15 המרחק בין A ל- B הוא 360 ק"מ. נהג משאית תכנן לעבור את כל הדרך מ- A

ל- B במהירות קבועה של x קמ"ש. לאחר שעבר $\frac{1}{4}$ מהדרך הגביר הנהג את

מהירותו ל- $(x+15)$ קמ"ש, ולכן הגיע לנקודה B שעה וחצי לפני המועד

המתוכנן. חשב את x .

16 המרחק בין הנקודות A ל- B בנהר הוא x ק"מ. הנהר זורם מ- A ל- B

במהירות של 6 קמ"ש. אדם שט מ- A ל- B וחוזר חזרה מ- B ל- A . סך כל הזמן

שארך השיט היה 8 שעות. אלו לא היה זרם בנהר, האדם היה שט את הדרך

הלוך ושוב בזמן של 6 שעות. מה המרחק בין שתי הנקודות A ו- $(x=?)$, B ,

ומה הייתה מהירותו בלי מהירות זרם הנהר?

17 המרחק בין שתי ערים הוא 450 ק"מ. משאית יצאה לדרכה מעיר אחת לשנייה.

לאחר שנסעה במהירות קבועה במשך שעתיים, נאלצה להתעכב במשך 40 דקות

בגלל תקלה. לאחר תיקון התקלה המשיכה המשאית מיד בדרכה, אך במהירות

קבועה הגדולה ב-5 ק"מ לשעה ממהירותה הקודמת. המשאית הגיעה לעיר

השנייה 25 דקות לאחר הזמן שתוכנן מראש. מה הייתה מהירות המשאית לפני

התקלה?

18 רכבת משא נוסעת מידי יום במהירות קבועה מתחנה A לתחנה B . המרחק בין A ל- B הוא 180 ק"מ. יום אחד, אחרי שעברה $\frac{1}{3}$ מהדרך, עצרה הרכבת עצירה לא מתוכננת מראש למשך 30 דקות. כדי שהרכבת תספיק להגיע ל- B על פי לוח הזמנים הרגיל, היה צריך להגביר את מהירותה לאחר העצירה ב-20 קמ"ש. מצא את המהירות הרגילה של הרכבת.

19 בין הנקודות A ו- B מובילות שתי דרכים. הדרך הראשונה אורכה 60 ק"מ, והדרך השנייה ארוכה ממנה ב-20%. רוכב קטנוע נסע מ- A ל- B בדרך הקצרה במהירות קבועה, וחזר בדרך הארוכה במהירות קבועה, הגדולה ב-6 קמ"ש ממהירותו הראשונה. זמן הנסיעה בחזרה (מ- B ל- A) היה ארוך ב-5 דקות מזמן הנסיעה מ- A ל- B . מצא את המהירות שבה נסע רוכב הקטנוע בכל כיוון ואת זמן הנסיעה (הלוך ושוב).

20 רוכב אופניים עובר בדרך כלל את המרחק בין A ל- B במהירות קבועה במשך 5 שעות ו-20 דקות. באחד הימים יצא רוכב האופניים מ- A ועבר $\frac{3}{4}$ של הדרך במהירות הגדולה ב-10 קמ"ש ממהירותו הרגילה, ולכך התעייף ואת שאר הדרך עבר במהירות קטנה ב-15 קמ"ש ממהירותו הרגילה. ביום זה הוא הגיע ל- B לאחר 5 שעות ו-40 דקות לאחר שיצא מ- A .
 א. מהי מהירותו הרגילה של רוכב האופניים?
 ב. מהו המרחק בין A ל- B ?

21 המרחק בין שתי ערים א' ו-ב' הוא 126 ק"מ. שני רוכבי אופניים, שיצאו בו זמנית, האחד מעיר א' והשני מעיר ב', ונסעו זה לקראת זה במהירויות קבועות, נפגשו אחרי שלוש שעות. הרוכב שיצא מעיר א' עבר את כל הדרך עד לעיר ב' בשעה ו-45 דקות פחות מהרוכב שיצא מעיר ב' לעיר א'. מצא את המהירות של כל אחד מרוכבים האופניים.

22 מ- A ל- C יש שתי דרכים. הדרך הראשונה היא הדרך המישורית AC , שאורכה 24 ק"מ. הדרך השנייה מתחילה בעלייה AB של 8 ק"מ, ואח"כ ירידה BC של 18 ק"מ. מהירותו של רוכב אופניים במישור היא x קמ"ש, בעלייה מהירותו $(x-4)$ קמ"ש, ובירידה מהירותו $(x+6)$ קמ"ש. ידוע שאם רוכב האופניים יבחר לנסוע מ- A ל- C בדרך הראשונה או בדרך השנייה, זמן הנסיעה יהיה זהה. חשב את x (כמה פתרונות לבעיה?).

- 23) מונית נסעה מעיר א' לעיר ב' בכביש ראשי במהירות קבועה. בדרך חזרה נסעה המונית בדרך עפר הקצרה ב-40% מהכביש, אך מהירותה פחתה ב-20%.
- א. בכמה אחוזים התקצר או התארך זמן הנסיעה בדרך חזרה (לעומת הנסיעה בכיוון הראשון)?
- ב. מה הייתה מהירות המונית בכיוון השעון, אם ידוע שאורך הכביש היה 360 ק"מ, וזמן הנסיעה בחזרה התקצר בשעה?

בעיות הספק:

- 24) כתב יד נמסר להדפסה לשתי כתבניות. הכתבנית השנייה ניגשה לעבודה שתיים אחרי הראשונה. 6 שעות לאחר שהכתבנית הראשונה ניגשה לעבודה סיימו שתיהן יחד את ההדפסה של 60% מכתב היד. הן המשיכו בהדפסה וסיימו אותה יחד. לאחר סיום העבודה התברר שהכתבנית הראשונה ביצעה $\frac{3}{10}$ מן העבודה. קצב העבודה של הכתבניות לא השתנה במשך העבודה. בכמה שעות הייתה כל אחת מהכתבניות יכולה לבצע את העבודה לבדה?
- 25) בבריכה שני פתחים: פתח אחד גדול ופתח שני קטן יותר. אם מכניסים לבריכה הריקה מים רק דרך הפתח הקטן במשך 6 שעות, ולאחר מכן במשך שעה ו-12 דקות מכניסים מים דרך שני הפתחים יחד, הבריכה מתמלאת כולה. כמו כן ידוע, שאם מכניסים לבריכה הריקה מים רק דרך הפתח הגדול במשך 3 שעות ולאחר מכן ממשיכים להכניס מים דרך פתח זה במשך 9 שעות, אך בו בזמן מוציאים מים דרך הפתח הקטן, הבריכה כולה מתמלאת במים. מצא בכמה שעות תתמלא הבריכה, אם יכניסו מים רק דרך הפתח הקטן.
- 26) שני פועלים קיבלו על עצמם לבצע עבודה מסוימת. ביום הראשון התחיל הפועל הראשון לעבוד לבדו. הפועל הראשון עבד במשך 3 שעות, ואז הצטרף אליו הפועל השני. כעבור 6 שעות נוספות של עבודה משותפת של שני הפועלים, התברר שהם סיימו 55% מהעבודה. ביום השני עבדו הפועלים יחדיו עד שסיימו את כל העבודה. לאחר סיום העבודה, התברר שכל אחד מהפועלים ביצע בדיוק מחצית מהעבודה. בכמה שעות היו שני הפועלים מסיימים את העבודה אלו עבדו כל הזמן ביחד?
- 27) שני צינורות ממלאים מיכל כשהם פתוחים ביחד במשך 6 שעות. יום אחד, כשהמיכל היה ריק, פתחו רק את הצינור הראשון למשך הזמן שלוקח לצינור השני למלא מחצית מיכל. סגרו את הצינור הראשון ופתחו רק את הצינור השני למשך הזמן שלוקח לצינור הראשון למלא שלישי מיכל. כתוצאה מכך התמלאו בסך הכול $\frac{5}{6}$ מיכל. מצא בכמה שעות יכול כל אחד מהצינורות למלא לבד מיכל ריק.

28 על שתי קבוצות פועלים הוטל לסלול כביש בין הערים A ו- B . במשך 36 הימים הראשונים עבדו הקבוצות בנפרד. תחילה עבדה רק הקבוצה הראשונה וסללה $1/4$ מהכביש. לאחר מכן הפסיקה הקבוצה הראשונה את עבודתה, ורק הקבוצה השנייה עבדה. קבוצה זו סללה, עד לגמר היום ה-36, $1/3$ מהכביש. ביום ה-37 החלו שתי הקבוצות לעבוד במשותף, וסיימו את סלילת הכביש תוך 12 ימים. הספק הקבוצות לא השתנה במשך כל ימי עבודתן. בכמה ימים הייתה יכולה כל קבוצה לסלול את הכביש לבדה? כמה פתרונות לבעיה?

29 שתי קבוצות פועלים עבדו בסלילת כביש משני קצותיו. הקבוצה השנייה סללה בכל יום 5 מטר יותר מאשר הקבוצה הראשונה, ועבדה בסך הכול 2 ימים יותר. ידוע שהקבוצה השנייה סללה בסך הכול רק $16a$ מטרים (a פרמטר חיובי). קצב העבודה של שתי הקבוצות נשאר קבוע בכל זמן הסלילה. סמן ב- x את מספר המטרים שסללה הקבוצה הראשונה בכל יום, ומצא לאלו ערכים של הפרמטר a יקבל x ערכים חיוביים בלבד.

תשובות סופיות:

- 1) מהירות הולך הרגל היא 6 קמ"ש. המרחק בין הקיבוץ לעיר חיפה הוא 36 ק"מ.
- 2) מהירות הזרם היא 1 קמ"ש. מהירות הסירה במים עומדים היא 7 קמ"ש.
- 3) 100 קמ"ש.
- 4) הרוכב הראשון ב-10 שעות והרוכב השני ב-15 שעות. (5) 72 מטרים.
- 6) 30 קמ"ש.
- 7) מהירות התייר הראשון: 5 קמ"ש, מהירות התייר השני: 7.5 קמ"ש.
- 8) 1 קמ"ש.
- 9) 45 קמ"ש, 60 קמ"ש, 75 קמ"ש. (10) 36 קמ"ש.
- 11) 25 קמ"ש $U =$, 50 קמ"ש $U =$. (12) 24 קמ"ש.
- 13) א. $\frac{14 - m \pm \sqrt{m^2 - 100m + 196}}{2}$. ב. $0 < m \leq 2$.
- 14) 228 ק"מ, 76 קמ"ש, 60 קמ"ש. (15) 45 קמ"ש. (16) 36 ק"מ, 12 קמ"ש.
- 17) 75 קמ"ש. (18) קמ"ש.
- 19) הלוך 90 קמ"ש וחזור 96 קמ"ש. זמן כולל 85 דקות.
או: הלוך: 48 קמ"ש וחזור 54 קמ"ש. זמן כולל 155 דקות.
- 20) א. 30 קמ"ש. ב. 160 ק"מ. (21) 24 קמ"ש, 18 קמ"ש.
- 22) 24 או 12 קמ"ש. (23) א. 25%. ב. 90 קמ"ש.
- 24) הכתבנית הראשונה ב-30 שעות, הכתבנית השנייה ב-10 שעות. (25) 9 שעות.
- 26) $13\frac{1}{3}$ שעות. (27) הצינור הראשון ב-15 שעות והצינור השני ב-10 שעות או
הצינור הראשון ב-12 שעות והצינור השני ב-12 שעות.
- 28) הקבוצה הראשונה: 48 ימים והקבוצה השנייה: 72 ימים
או הקבוצה הראשונה: 86.4 והקבוצה השנייה: 43.2 ימים.
- 29) $a \geq 2.5$.

תירגול נוסף:

בעיות תנועה שונות:

- 1) רוכב אופניים נוסע מעיר א' לעיר ב' במהירות של 20 קמ"ש. שלוש שעות אחריו יוצא מאותו מקום רוכב אופנוע במהירות של 80 קמ"ש. רוכב האופנוע הגיע לעיר ב' שלוש שעות לפני רוכב האופניים.
- א. כמה שעות נסע רוכב האופניים?
ב. מהו המרחק בין שתי הערים?
- 2) גלעד ורוני יוצאים בו זמנית משני ישובים A ו-B בהתאמה והולכים זה לקראת זה במהירות קבועה. מהירות ההליכה של גלעד היא 4 קמ"ש ומהירותו של רוני היא 6 קמ"ש. ידוע כי רוני הגיעה ליישוב A 4 שעות לפני שגלעד הגיע ליישוב B.
- א. מהו המרחק בין שני היישובים?
ב. כמה זמן הלך כל אחד מהם?
- 3) שני רוכבי אופניים יוצאים בו זמנית משני ישובים A ו-B זה לקראת זה. מהירות רוכב אחד גדולה ב-10 קמ"ש ממהירותו של הרוכב השני. הרוכב המהיר הגיע ליעדו לאחר 3 שעות בעוד הרוכב השני הגיע רק אחרי 5 שעות.
- א. מה המהירויות של שני רוכבי האופניים?
ב. מהו המרחק שנסעו?
- 4) שתי מכוניות נסעו יחד לטיול מהעיר לכפר. המכונית הראשונה נסעה במהירות קבועה והגיעה לכפר לאחר 8 שעות. המכונית השנייה נסעה במשך שעתיים במהירות הקטנה ממהירות המכונית הראשונה ב-10 קמ"ש, לאחר מכן היא עצרה להתרעננות במשך 40 דקות וחזרה לנסיעה במהירות הגדולה ב-54 קמ"ש ממהירות המכונית הראשונה. המכונית השנייה הגיעה לכפר שעתיים לפני המכונית הראשונה.
- א. באיזו מהירות נסעה המכונית הראשונה?
ב. מהו המרחק בין העיר לכפר?
- 5) שני רוכבי אופניים המרוחקים זה מזה במרחק של 80 ק"מ יצאו בו זמנית זה לקראת זה. מהירות רוכב אחד גדולה ב-2 קמ"ש ממהירות הרוכב השני. לאחר שעתיים של רכיבה המרחק בניהם היה 12 ק"מ.
- א. באיזו מהירות רכב כל רוכב?
ב. האם לאחר עוד 20 דקות הם ייפגשו?

6) שתי מכוניות הנמצאות במרחק של 700 ק"מ יצאו בו זמנית זו לקראת זו. מכונית אחת מהירה מהשנייה ב-15 קמ"ש. לאחר שלוש שעות היה מרחק בניהן 325 ק"מ.
א. באיזו מהירות נסעו שתי המכוניות?
ב. האם לאחר עוד 20 דקות שתי המכוניות תפגשנה?

7) רוכב אופניים והולך רגל יצאו ב-10:00 מנקודה A לנקודה B. מהירות ההליכה של הולך הרגל היא 7 קמ"ש ומהירותו של רוכב האופניים היא 16 קמ"ש. רוכב האופניים הגיע לנקודה B לאחר שלוש וחצי שעות מזמן יציאתם.
א. באיזה שעה היה המרחק בניהם 27 ק"מ?
ב. מהו המרחק בין A ל-B.
ג. לאחר כמה זמן הגיע הולך הרגל לנקודה B?

8) אופנוע יוצא מעיר א' לכיוון מערב במהירות של 50 קמ"ש. לאחר שעתיים יוצאת מכונית מעיר ב' הממוקמת מזרחה מעיר א' במרחק של 40 ק"מ אחרי האופנוע. מהירות המכונית היא 120 קמ"ש.
א. לאחר כמה זמן השיגה המכונית את רוכב האופנוע מזמן יציאתה?
ב. איזה מרחק נסע רוכב האופנוע עד שהשיגה אותו המכונית?

9) מטוס טס מידי שבוע מיעד א' ליעד ב' המרוחק ממנו 5,000 ק"מ במהירות קבועה. שבוע אחד טס המטוס במשך שעתיים במהירות הרגילה. לאחר מכן האט את מהירותו ב-300 קמ"ש ולאחר כשעתיים האיץ בחזרה והגביר את מהירותו ב-700 קמ"ש. המטוס הגיע ליעד ב' 15 דקות מוקדם יותר מאשר הגיע בכל שבוע. באיזו מהירות טס המטוס בכל שבוע?

10) שתי מכוניות יוצאות מעיר א' לכיוון עיר ב' הנמצאת במרחק של 560 ק"מ ממנה. מכונית אחת נסעה במהירות קבועה במשך כל הדרך. המכונית השנייה נסעה במהירות הגדולה ב-10 קמ"ש ממהירות המכונית הראשונה במשך שעתיים וחצי. לאחר מכן היא עצרה למשך חצי שעה ואז המשיכה בנסיעתה במהירות הגדולה ב-10 קמ"ש ממהירותה הקודמת. בסה"כ הגיעה המכונית השנייה לעיר ב' שעה לפני שהגיעה המכונית הראשונה.
א. באיזו מהירות נסעה המכונית הראשונה?
ב. כמה זמן נסעה המכונית השנייה מעיר א' לעיר ב'?

11) מכונית נסעה מעיר א' לעיר ב' המרוחקת ממנה 760 ק"מ במהירות מסוימת. בדרכה חזור היא נסעה במשך שעתיים במהירות זו, לאחר מכן עצרה לתדלוק וארוחת צהריים במשך שעה ואז המשיכה בדרכה במהירות הגדולה ממהירותה הקודמת ב-19 קמ"ש. בסה"כ המכונית הגיעה לעיר א' באותו הזמן שהגיעה לעיר ב'.
א. באיזו מהירות נסעה המכונית מעיר א' לעיר ב'?
ב. כמה זמן נסעה המכונית מעיר לעיר?

12 רוכב אופניים יצא לדרך במהירות קבועה. לאחר שעה וחצי יצא בעקבותיו ומאותה הנקודה רוכב אופניים נוסף שמהירותו גדולה ממהירות הרוכב הראשון ב-6 קמ"ש. הרוכב השני השיג את הראשון במרחק של 70 ק"מ מנקודת המוצא שלהם.

א. באיזו מהירות נסעו שני רוכבי האופניים?

ב. כמה זמן היה הרוכב הראשון על הדרך עד שהשיגו הרוכב השני?

13 מכונית יוצאת מעיר א' לעיר ב' המרוחקת ממנה 360 ק"מ. לאחר שעתיים יוצאת מכונית נוספת בעקבותיה. מהירות המכונית השנייה גדולה ב-30 קמ"ש ממהירות המכונית הראשונה. שתי המכוניות הגיעו לעיר ב' יחד.

א. באיזו מהירות נסעה המכונית הראשונה?

ב. כמה זמן נסעה המכונית השנייה?

14 המרחק בין שתי ערים הוא 800 ק"מ. בשעה 8:00 יצאה מכונית מעיר אחת לכיוון השנייה. לאחר כשעה יצאה מהעיר השנייה מכונית נוספת כלפי המכונית הראשונה במהירות הגדולה ב-20 קמ"ש ממהירותה. המכוניות נפגשו באמצע הדרך.

א. באיזה שעה נפגשו המכוניות?

ב. באיזו מהירות נסעה כל מכונית?

15 המרחק בין שתי ערים הוא 920 ק"מ. בשעה 6:00 יוצאת משאית סחורה מעיר א' לכיוון עיר ב'. לאחר 46 דקות יוצא אוטובוס מעיר ב' לכיוון עיר א'. מהירות האוטובוס גדולה ב-20 קמ"ש ממהירות המשאית. שני הרכבים נפגשו באמצע הדרך.

א. באיזו שעה נפגשו האוטובוס והמשאית?

ב. באיזו מהירות נסע האוטובוס?

16 מכונית ומשאית יוצאות בו זמנית משני מקומות שהמרחק בניהם הוא 570 ק"מ. המכונית והמשאית נפגשו לאחר 3 שעות. ידוע כי בזמן שהמכונית עוברת מרחק של 300 ק"מ, המשאית עוברת מרחק של 270 ק"מ.

א. באיזו מהירות נסעה המכונית?

ב. איזה מרחק נסעה המשאית עד לנקודת פגישתן?

17 שתי מכוניות נוסעות זו לקראת זו משני קצוות של כביש שאורכו הוא 880 ק"מ. ידוע כי בזמן שמכונית אחת עוברת מרחק של 264 ק"מ, המכונית השנייה עוברת 528 ק"מ. המכונית המהירה הגיעה לקצה הכביש 5 שעות לפני שהמכונית השנייה הגיעה לקצה הכביש השני.

א. באילו מהירויות נסעו שתי המכוניות?

ב. כמה זמן נסעה המכונית האיטית עד שהגיעה לקצה הכביש?

18 מכונית נוסעת מעיר A לעיר C מרחק של 360 ק"מ ועוברת דרך עיר B הנמצאת בין שתי הערים. המכונית נוסעת במהירות קבועה מעיר A עד לעיר B ולאחר מכן מגבירה את מהירותה ב-20% וממשיכה עד שמגיעה לעיר C. ידוע כי זמן הנסיעה של המכונית מעיר A ל-B הוא 3 שעות וזמן הנסיעה מעיר B ל-C הוא שעתיים וחצי.

- א. מצא את המהירות של המכונית בשני חלקי הדרך.
- ב. הראה כי העיר B נמצאת בדיוק באמצע הדרך בין שתי הערים A ו-C.

19 משאית מביאה סחורה מידי יום מיישוב א' ליישוב ב' המרוחק ממנו 630 ק"מ. המשאית נוסעת במהירות קבועה בכל יום. יום אחד נסעה המשאית במהירות הנמוכה ממהירותה הרגילה ב-20%. לאחר 3 שעות ראה נהג המשאית כי הוא עומד לאחור, ולכן הגביר את מהירותו ב-21 קמ"ש ממהירותו הנוכחית. המשאית הגיעה ליעדה בדיוק באותו הזמן שהיא מגיעה בכל יום. באיזו מהירות נוסעת המשאית בכל יום?

20 רוכב אופניים הנמצא במרחק של 140 ק"מ מזרחה מהעיר יוצא בשעה 9:00 לכיוון העיר. לאחר 45 דקות יוצא מהעיר רוכב אופניים נוסף שמהירותו קטנה ממהירות הרוכב הראשון ב-20 קמ"ש ונוסע לכיוון דרום. לאחר שעתיים נוספות היה המרחק בין שני רוכבי האופניים 50 ק"מ.

- א. מצא את מהירות הרוכב האופניים הראשון אם ידוע כי היא קטנה מ-40.1 קמ"ש.
- ב. באיזה מרחק היה הרוכב האופניים השני מהעיר כאשר הגיע הרוכב הראשון לעיר?

21 אופנוע יוצא מהעיר בשעה 7:00 דרומה. לאחר שעה יוצאת מכונית מהעיר לכיוון מזרח. מהירות האופנוע היא 50 קמ"ש ומהירות המכונית היא 100 קמ"ש. לאחר פרק זמן מסוים המרחק בין המכונית לאופנוע הוא 250 ק"מ.

- א. באיזו שעה המרחק בין המכונית והאופנוע הוא 250 ק"מ?
- ב. באיזה מרחק הייתה המכונית מהעיר כאשר היא הייתה במרחק של 250 ק"מ מהאופנוע?

22 מהירות סירה במים עומדים גדולה פי 4 ממהירות זרם הנהר. סירה שטה בנהר שאורכו 30 ק"מ מתחילתו ועד סופו. הסירה שטה את כל הנהר הלך וחזור במשך 8 שעות.

- א. באיזו מהירות תשוט הסירה במים עומדים?
- ב. כמה זמן שטה הסירה בכל כיוון?

23) שתי סירות שמהירותן במים עומדים זהה יוצאות מאותה נקודה בנהר, האחת לכיוון צפון והשנייה לכיוון דרום. מהירות הזרם בנהר היא 20 קמ"ש לכיוון צפון. לאחר 4 שעות היה המרחק בין שתי הסירות 240 ק"מ.

א. באיזו מהירות שטות הסירות במים עומדים?

ב. לאחר 4 שעות, פי כמה היה גדול המרחק של הסירה ששטה צפונה מהמרחק של הסירה השנייה?

24) שלושה נערים יצאו לשייט בסירת מנוע בעלת מהירות קבועה. במשך שעה הם שטו בנהר שקט. לאחר מכן עקב רוחות חזקות נוצר זרם בנהר שמהירותו היא 2 קמ"ש לכיוון המסלול של הנערים. לאחר שעה נוספת השתנו הרוחות ומהירות הזרם נשארה 2 קמ"ש, אך נגד כיוון השייט שלהם. הנערים שטו בתנאים אלו במשך שעה. בסה"כ עברו הנערים בשלוש שעות אלו מרחק של 18 ק"מ.

א. באיזו מהירות משיט המנוע את הסירה במים עומדים?

ב. מהו המרחק שעברה הסירה בכל שעה?

25) מכונית נוסעת במהירות ממוצעת של 84 קמ"ש. את נסיעתה התחילה במהירות מסוימת ולאחר שלוש שעות האיצה ב-20 קמ"ש והמשיכה כך עוד 7 שעות.

א. באיזו מהירות נסעה המכונית בהתחלה?

ב. איזה מרחק עברה המכונית?

26) מכונית נוסעת במהירות ממוצעת של 80 קמ"ש מרחק של 480 ק"מ. את החלק הראשון של הנסיעה היא נסעה במהירות מסוימת ולאחר 4 שעות האטה את מהירותה ב-30 קמ"ש.

א. באיזו מהירות נסעה המכונית בכל חלק של הנסיעה?

ב. פי כמה גדולה הדרך שעברה המכונית ב-4 השעות הראשונות לעומת שאר הדרך הנוותרת?

27) אופנוע עובר במשך 5 שעות מרחק של 350 ק"מ. לאחר מכן מגביר נהג האופנוע את מהירותו ונוסע במשך פרק זמן מסוים מרחק של 450 ק"מ. המהירות הממוצעת של האופנוע בכל זמן נסיעתו היא 80 קמ"ש.

א. כמה זמן נסע האופנוע לאחר שהגביר את מהירותו?

ב. בכמה קמ"ש הגביר נהג האופנוע את מהירותו?

28) אופנוע ומשאית יצאו יחד מעיר א' לכיוון עיר ב' הרחוקה ממנה ב-240 ק"מ.

מהירות האופנוע גדולה ב-15 קמ"ש ממהירות המשאית.

במהלך הדרך האופנוע עצר ל-48 דקות של התרעננות ולכן הגיע יחד עם המשאית לעיר ב'.

א. באיזו מהירות נסע האופנוע?

ב. כמה זמן לקח למשאית להגיע לעיר ב'?

תשובות סופיות:

- 1) א. 8 שעות. ב. 160 ק"מ.
- 2) א. 48 ק"מ. ב. גלעד- 12 שעות ורוני-8 שעות.
- 3) א. 15 קמ"ש ו-25 קמ"ש. ב. 75 ק"מ.
- 4) א. 60 קמ"ש. ב. 480 ק"מ.
- 5) א. 16 קמ"ש, 18 קמ"ש. ב. לא.
- 6) א. 55 קמ"ש ו-70 קמ"ש. ב. לא.
- 7) א. 13:00. ב. 56 ק"מ ג. 8 שעות.
- 8) א. שעתיים. ב. 200 ק"מ.
- 9) 800 קמ"ש.
- 10) א. 70 קמ"ש. ב. 7 שעות.
- 11) א. 95 קמ"ש. ב. 8 שעות.
- 12) א. 14 קמ"ש ו-20 קמ"ש. ב. 5 שעות.
- 13) א. 60 קמ"ש. ב. 4 שעות.
- 14) א. 13:00. ב. 80 קמ"ש ו-100 קמ"ש.
- 15) א. 10:36. ב. 120 קמ"ש.
- 16) א. 100 קמ"ש. ב. 270 ק"מ.
- 17) א. 88 קמ"ש ו-176 קמ"ש. ב. 10 שעות.
- 18) א. 60 קמ"ש ו-72 קמ"ש.
- 19) 70 קמ"ש.
- 20) א. 40 קמ"ש. ב. 55 ק"מ.
- 21) א. 10:00. ב. 200 ק"מ.
- 22) א. 8 קמ"ש. ב. 3 שעות ו-5 שעות.
- 23) א. 30 קמ"ש. ב. פי 5.
- 24) א. 6 קמ"ש. ב. 6 ק"מ, 8 ק"מ ו-4 ק"מ.
- 25) א. 70 קמ"ש. ב. 840 ק"מ.
- 26) א. 90 קמ"ש ו-60 קמ"ש. ב. פי 3.
- 27) א. 5 שעות. ב. 20 קמ"ש.
- 28) א. 75 קמ"ש. ב. 4 שעות.

פרק 4 – סדרות:

סדרה חשבונית:

1. נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

2. כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

3. נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה

הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$.

שאלות:

- 1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7, \dots$. מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
- 2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
- 3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4\frac{1}{2}, 7, 9\frac{1}{2}, 12, 14\frac{1}{2}, \dots, 49\frac{1}{2}$.
- 4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24. מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
- 5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?

- 6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?
- 7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \dots$.
- 8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$.
- 9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.
- 10) בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.
 א. הוכח: $a_5 = 0$.
 ב. נתון: $a_3 - a_{11} = 24$. מצא את: a_1 ואת d .
 ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n = 2a_n - 3$. מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.
- 11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \dots$.
- 12) נתונה הסדרה החשבונית: $-13, -7, -1, 5, \dots$. כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?
- 13) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?
- 14) נתונה הסדרה החשבונית: $-71, -67, -63, \dots$. כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?
- 15) נתונה הסדרה החשבונית: $4, 13, 22, 31, \dots$. בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.
- 16) נתונה הסדרה החשבונית: $4, 9, 14, 19, \dots, 599$. מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.
- 17) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב-1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.
 א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d .
 ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

18) נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

- א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.
ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

- 19) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7 וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.
א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
ב. מצא את האיבר השלישי הראשון בסדרה.
ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

20) נתונים שני טורים חשבוניים: $150, 144, 138, \dots$ ו- $90, 93, 96, \dots$.

- לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.
א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.
ב. מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480.
מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

21) נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה הוא d_2 .

$$d_1 = -2d_2 \text{ ידוע כי}$$

- סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n .
א. מצא את הפרש הסדרה $d_1 - a_n$.

- ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50} . מצא את a_1 ואת b_1 .

22) נתונה הסדרה החשבונית: $-21, -17, -13, \dots$.

- בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

23) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות

- האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.
הוכח כי $nd = 60$.

24) בסדרה חשבונית, שבה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה

- פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

כמה איברים יש בסדרה?

- 25** לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.
- מצא את x .
 - מצא את הפרש הסדרה.
 - ידוע כי: $a_{12} = 0$. מצא את a_1 .
 - האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 308$.
- מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

- 26** בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6. האיבר הראשון אינו אפס.
- הוכח את הטענות הבאות:
 - $a_1 = -4d$
 - $S_9 = 0$
 - האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5. מצא את a_1 ואת d .
 - מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

- 27** בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- הוכח כי $dn = 66$.
 - ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.
 - סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

תשובות סופיות:

- 1** $a_{43} = -235$ **2** $d = 4, a_1 = -5$ **3** 20 איברים **4** 48 איברים **5** 15 קפיצות.
6 58 מספרים **7** 31 איברים חיוביים **8** $x = 1, x = 4$ **9** $a_{10} = 59$
10 ב. $d = -3, a_1 = 12$ ג. $b_5 = -3$ **11** $S_{14} = 413$ **12** 21 איברים. **13** 16 דקות.
14 37 איברים. **15** 3647 **16** 23920 **17** א. $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.
18 א. $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$ ב. $d = 4$
19 א. $d = -6, a_1 = 50$ ב. $a_{10} = -4$ ג. $n = 6$ **20** א. $n = 81$ ב. $n = 16$
21 א. $d_1 = 4$ ב. $a_1 = -52, b_1 = 95$ **22** זוגיים: $S = 135$ זוגיים: $S = 99$
24 29 איברים. **25** א. 1. $d = 11$ 2. $x = -50$ ב. $a_1 = -121$ ג. $S = 2156$
26 ב. $d = 2, a_1 = -8, n = 36$ **27** ב. $S = 22a_1 + 693$ ג. $a_9 = 1$

סדרה הנדסית:

1. נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

2. כלל נסיגה של סדרה הנדסית:

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

3. נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ : הראשון הוא } a_1 \text{ נתון ע"י:}$$

שאלות:

(1) נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$

מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

(2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{64}{81}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \dots$

(3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

(4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

(5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6, x+4, 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.

8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5, 10, 20, 40, \dots$

10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

14) המספרים: $x-13, x-9, 2x-3$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.
א. מצא את x .

ב. 1. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.

2. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.

ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 5^{11}$. מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

15) נתונה הסדרה הבאה: $4, 12, 36, \dots, a_n$. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישיית

מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}, \quad b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}, \quad b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}, \quad \dots, \quad b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n ובין

סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- a_8 .

16) נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28, \dots$.

בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

17) בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

18) נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים. בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

19) בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

20) א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.

ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

(22) באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה: תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת, כנגד השנייה - שתי אבנים, כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...

- המלך הסכים להצעה.
- א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?
- ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.
- ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים, כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

תשובות סופיות:

- (1) $a_9 = 729$ (2) $n = 7$ (3) $q = \pm 2$, $a_1 = \pm \frac{1}{4}$ (4) $a_1 = \frac{2}{3}$, $q = \pm 3$.
- (5) $a_1 = \frac{1}{25}$, $q = 5$ (6) 5 דקות. (7) $q = 3 \rightarrow x = 11$, $q = -\frac{1}{2} \rightarrow x = -\frac{2}{3}$.
- (8) $a_8 = 384$ (9) $S_9 = 2555$ (10) 5 דקות. (11) $n = 12$ (12) $q = 2$ (13) $n = 6$.
- (14) א. $x = 14$ ב. 1. $a_n = 5^{n-1}$ 2. ג. a_6, a_7 ג. $S_7^* = 61,034,375$.
- (15) א. $q = 3$ ג. b_5, b_6 (16) אי-זוגיים: $S = 595$ זוגיים: $S = 1190$ (17) $q = 4$.
- (18) $\frac{q+1}{q}$ (19) $a_1 = \frac{3}{8}$ (20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. a_5, a_6 .
- (21) א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$.
- (22) א. $a_{25} = 16,777,216$ ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו לו 20,000,000 אבנים ג. $4, 16, 64, \dots, 2^{24}$, $S_n = 22,369,620$.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

1. הגדרה:

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q| < 1$, $(q \neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

2. נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש

בכלל: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

$$. S = \frac{a_1}{1-q} \text{ : מתקבל הכלל הבא}$$

3. סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

• כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית

$$. S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ : אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה}$$

• כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית

מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה באופן

$$. S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1} \text{ : הבא}$$

שאלות:

1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $\dots, 1\frac{1}{3}, 4, 12$.

2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

*הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.

5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n שמנתה q , $(q \neq 0, |q| < 1)$. מגדירים שלוש סדרות חדשות: b_n, c_n ו- d_n באופן הבא:

d_n	c_n	b_n	הסדרה:
$d_1 = S_a + a_1$	$c_1 = a_2^2 - a_1^2$	$b_1 = a_1$	הכלל:
$d_2 = S_a + a_2$	$c_2 = a_3^2 - a_2^2$	$b_2 = a_1 + a_2$	
$d_3 = S_a + a_3$	$c_3 = a_4^2 - a_3^2$	$b_3 = a_1 + a_2 + a_3$	
\vdots	\vdots	\vdots	
$d_n = S_a + a_n$	$c_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$	$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_{a(n)}$	

הסכום S_a הוא סכום הסדרה a_n , והסכום $S_{a(n)}$ הוא סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n .

- א. קבע אלו מבין הסדרות b_n, c_n ו- d_n הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י q .
- ב. הבע באמצעות a_1 בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.
- ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(s)}$. הוכח כי לא קיים ערך של q עבורו סכום ריבועי האיברים $S_{(s)}$ שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

6 נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_n שמנתה q . מגדירים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q}, b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q}, b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q}, \dots, b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q}, \dots$$

כאשר: S_n^* מייצג את סכום הסדרה a_n החל מהאיבר a_n (ועד אינסוף).

- א. הוכח כי הסדרה b_n היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות a_1 ו- q .
- ב. ידוע כי סכום הסדרה b_n הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה a_n גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה b_n . מצא את a_1 ו- q .
- ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = 42$.
- ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n .
- ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n .
- ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^* . חשב את סכום הסדרה b_n^* .
- ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^{**} . חשב את סכום הסדרה b_n^{**} .
- ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה b_n . מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(s)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית ב- S_b . הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(s)}$.
- ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה a_n וסכום איברי הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

*הערה: השאלות הבאות הינן שאלות מסכמות ברמת בגרות:

7 נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$

- א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
- ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32. מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

8 בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות

האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

- א. מצא את מנת הסדרה.
- ב. מחברים כל שני איברים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n .
- ג. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.
- ד. הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n .
- ה. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n .

- 9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q , $(0 < q < 1)$.
 נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10} + \dots$, $V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$.
 נתון כי: $T = 6V$.
 א. מצא את מנת הסדרה q .
 ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?
 ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $\frac{1}{3} \cdot 1365$.

- 10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ שמנתה היא q .
 בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא:
 $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$.
 א. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
 בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
 ב. מצא את מנת הסדרה.
 ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו. ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n .

- 11) נתונה סדרה הנדסית אינסופית a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q , $(q \neq 0, |q| < 1)$.
 נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13} + \dots$, $V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots$.
 נתון כי: $V = 0.3T$.
 א. מצא את מנת הסדרה q .
 מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.
 ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.
 ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

$$S = 18 \frac{2}{3} \quad (4) \quad q = \frac{4}{5}, a_1 = 12 \frac{1}{2} \quad \text{או} \quad q = \frac{1}{5}, a_1 = 50 \quad (3) \quad a_1 = 24 \quad (2) \quad S = 18 \quad (1)$$

(5) א. הסדרה b_n :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{q-1}}{\frac{a_n(q^n-1)}{q-1}} = \frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{a_n(q^n-1)} = q \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q^n-1}$$

היות והיא תלויה ב- n היא אינה הנדסית.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^4 - a_n^2 q^2}{a_n^2 q^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^2 (q^2 - 1)}{a_n^2 (q^2 - 1)} = q^2$$

הסדרה c_n הנדסית: q^2

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S + a_{n+1}}{S + a_n} = \frac{\frac{a_1}{1-q} + a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q} + a_n} = \frac{a_1 + (1-q)a_{n+1}}{a_1 + (1-q)a_n} = \frac{a_1(1+(1-q)q^n)}{a_1(1+(1-q)q^{n-1})} = \frac{q^n - q^{n+1} + 1}{q^{n-1} - q^n + 1}$$

היות והיא תלויה ב- n היא אינה הנדסית.

$$S_{(c_n)} = \frac{c_1}{1-q_c} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^2 (q^2 - 1)}{1-q^2} = -a_1^2$$

ג. מההשוואה: $S_{(s)} = S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא: $q = 0, \pm 1$.

כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה a_n היא שבר.

עבור $|q| > 1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של q עבורו

השיוויון יתקיים. מש"ל.

$$(6) \text{ א. } b_n = \frac{a_1}{1-q} q^{n-1}, q = \frac{1}{3}, a_1 = 56, \text{ ד. } 31.5, \text{ ה. } 94.5, \text{ ו. } 63, \text{ ז. } 63$$

$$\text{ח. } 7938 \text{ ט. הסכום: } S^2 \text{ משמעו: } (b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots)^2$$

הסכום: $S_{(s)}$ משמעו: $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + \dots$. ברור כי הביטויים אינם שווים.

$$(7) \text{ ב. } a_1 = 16, q = \frac{1}{3} \text{ א. } q = 0.6 \text{ ב. } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{a_{2n-1} + a_{2n}} = q^2 \text{ ד. } a_1 = 200$$

$$(9) \text{ א. } q = \frac{1}{2} \text{ ב. פי 5 ג. } a_1 = 1024 \text{ (10) ב. } q = 0.5 \text{ ג. } a_5 = 20$$

$$(11) \text{ א. } q = \frac{1}{3} \text{ ב. } a_1 = -16 \text{ ג. } S = 288$$

סדרת נסיגה:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

- א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.
ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{12} ו- a_{14} .
ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k . הבע באמצעות k את a_{30} ו- a_{32} .
ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 113.
ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

$$(2) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

נתון כי $a_k = 72$. הבע באמצעות k את a_{k+2} .

$$(3) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

מצא את ערכו של t שבעבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

$$(4) \quad \text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = a_n + 6n - 2$$

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_{n+1} - a_n$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את b_1 .

$$(5) \quad \text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = 3a_n + 4$$

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_n + 2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5 = 162$. חשב את a_1 .

$$(6) \quad \text{סדרה מוגדרת ע"י הכלל: } a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 10n - 5$$

מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n = a_n + 5n$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את האיבר b_5 .

ג. חשב את הסכום: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{12}$.

7) סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1 = k, a_{n+1} = 8n - a_n + 3$.

- הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
- הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.
- חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

8) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 3}$.

מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n = \frac{4 - 7a_n}{a_n}$.

- הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.
- חשב את הסכום הבא: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{22}$.

9) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.

ההצעה הראשונה:

לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.

ההצעה השנייה:

לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.

ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.

- כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.
- מה מחיר הרכב?

10) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3n - a_n - 7$.

- חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.
- הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2} = a_n + 3$.
- כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
- חשב את הסכום הבא: $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{17}$.

11) סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^n + 2$.

- א. 1. הבע את a_{n+2} באמצעות a_n .
 2. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.
 ב. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא: $S_n = 1.5 \cdot 3^n + n^2 + n - 1.5$.
 חשב את הסכום הבא: $a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{11}$.
 ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

12) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 5}$.

- מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = \frac{a_n + 3}{a_n}$.
 א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.
 ב. כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.
 ג. חשב את הסכום הבא: $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots - b_{10}$.

תשובות סופיות:

- 1) א. $a_3 = -22$ ב. $a_{12} = 5, a_{14} = 33$ ג. $a_{32} = k + 51, a_{30} = k - 49$ ד. a_{62}, a_{63} .
- 2) $a_{k+2} = 74 + 4k$ (3) $t = -33$ (4) $d = 6$ א. $b_1 = 4$ ב. (5) $q = 3$ ב. $a_1 = 0$.
- 6) א. $b_{n+1} = 3b_n$ ב. $b_5 = 648$ ג. $S = 1594320$.
- 7) א. $a_1 = k, a_2 = 11 - k, a_3 = k + 8, a_4 = 19 - k$ ב. 8 ג. 830.
- 8) א. $S_{11(p)} = 267 \frac{2}{3}$ (9) א. 12 לפני הראשונה ו-8 לפני השנייה ב. 45,000 שח.
- 10) א. $a_1 = 1, a_2 = -5, a_3 = 4, a_4 = -2, a_5 = 7$ ג. $S_{9(o)} = 117$ ד. $S_{n(o)} = 1.5n^2 - 0.5n$.
- 11) א. 1. $a_{n+2} = a_n + 8 \cdot 3^n + 4$ 2. a_4 ב. $S_{6-11} = 265458$ ג. $a_1 = 5$.
- 12) א. $q = 2.5$ ב. $b_n = 1.5 \cdot 2.5^{n-1}$ ג. $S_{10}^* = -4086.74$.

פרק 5 - הסתברות קלאסית:

הגדרות כלליות:

1. ההסתברות להתרחשות מאורע A : $P(A) = \frac{\text{מספר האפשרויות הרצוה}}{\text{מספר האפשרויות הכולל}}$.
2. המאורע המשלים למאורע A : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
3. חיתוך ואיחוד מאורעות A ו-B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. מאורעות זרים הם מאורעות שלא יכולים להתקיים בו זמנית.
5. מאורעות נקראים בלתי תלויים אם קיום האחד מהם לא משפיע על ההסתברות לקיומו של השני.
6. עבור מאורעות בלתי תלויים A ו-B מתקיים : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
7. אם מתקיים : $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ המאורעות תלויים.
8. הסתברות מותנית של מאורע A בהינתן מאורע B מוגדרת : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
9. צורה כללית של טבלת הסתברויות עבור מאורעות A ו-B :

	\bar{A}	A	
$P(B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	B
$P(\bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	\bar{B}
1	$P(\bar{A})$	$P(A)$	

קשרים מידיים מהטבלה :

- א. $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$
 - ב. $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B})$
 - ג. $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$
 - ד. $P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$
9. התפלגות בינומית : חישוב k הצלחות מתוך n ניסיונות בלתי תלויים כאשר ההסתברות להצלחה בניסיון בודד היא p נתונה ע"י : $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

שאלות יסודיות:

- (1) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים לבנים. מה ההסתברות להוצאת כדור כחול בהוצאה אקראית של כדור מהכד?
- (2) בכד 2 כדורים כחולים, 3 כדורים אדומים ו-7 כדורים לבנים. מה ההסתברות שבהוצאה אקראית של כדור מהכד לא ייצא כדור אדום?
- (3) מהי ההסתברות שבסיבוב סביבון לא יתקבל "נס"?
- (4) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A) = 0.6$, $P(\bar{B}) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.4$. מצא את $P(A \cup B)$.
- (5) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(\bar{A}) = 0.2$, $P(\bar{B}) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.95$. מצא את $P(A \cap B)$.
- (6) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.65$. קבע האם המאורעות זרים והאם הם תלויים.
- (7) נתון כי שני מאורעות, A ו-B בלתי תלויים. בנוסף נתון: $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.4$. מצא את $P(A \cup B)$.

שאלות עם שני ניסויים:

- (8) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?
- (9) בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?
- (10) בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה). מה ההסתברות שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים?

11 נתונים שני כדים : בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?

12 ליואב יש בכיסו הימני 3 גולות כחולות ו-5 שחורות ובכיסו השמאלי 4 גולות כחולות ו-4 שחורות. יואב מוציא גולה מכיסו הימני. אם היא כחולה הוא מחזיר אותה לכיס הימני ואם היא שחורה הוא מעביר אותה לכיס השמאלי. אחר כך הוא מוציא גולה מכיסו השמאלי. מה ההסתברות ששתי הגולות שהוציא באותו צבע?

שאלות עם הסתברות מותנית:

13 בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

14 בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

15 בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה). ידוע שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים. מה ההסתברות שכולם גברים?

16 נתונים שני כדים : בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.
א. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?
ב. ידוע שללואיזה לא יצא אף כדור לבן, מה ההסתברות שבהטלת המטבע יצא "עץ"?

17 במשחק מזל הסיכוי להרוויח 10 ₪ הוא 0.3 והסיכוי להרוויח 20 ₪ הוא 0.2. ישנו סיכוי של 0.5 לא להרוויח כלל. אדם שיחק במשחק פעמיים וידוע שהרוויח יותר מ-20 ₪. מה הסיכוי שהרוויח 40 ₪?

18) כדי להתקבל לעבודה בחברת "קוקה-קולה" יש לעבור שלושה ראיונות ע"י שלושה בעלי תפקידים בסדר הבא:

אחראי משמרת, מנהל ראשי ומנכ"ל החברה.

כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד.

כדי שמועמד יקבל עבודה בחברה עליו לעבור בהצלחה לפחות את אחד מהראיונות עם אחראי המשמרת והמנהל הראשי אך הראיון עם המנכ"ל חייב לעבור בהצלחה (כדי שמועמד יקבל עבודה המנכ"ל צריך לתת לו חוות דעת חיובית). ידוע כי אחראי המשמרת נותן חוות דעת חיובית ל-1/6 מהמועמדים. המנהל הראשי קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב-2/3 מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה מזו של אחראי המשמרת. מנכ"ל החברה נותן חוות דעת חיובית ל-80% מהמועמדים ללא קשר לחוות הדעת הקודמות.

א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנהל הראשי?

ב. ידוע כי המנהל הראשי נתן חוות דעת חיובית, מה ההסתברות שגם אחראי המשמרת נתן חוות דעת חיובית?

ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?

שאלות עם נעלמים:

19) בכד מספר מסוים של כדורים. 3 כחולים והשאר אדומים.

הסיכוי להוציא שני כדורים אדומים מהכד (בלי החזרה) הוא 5/14. כמה כדורים בכד?

20) ההסתברות של צלף לפגוע במטרה בירייה הראשונה היא p והיא גדולה

מההסתברות שלו להחטיא. אם הוא פוגע, עולה ההסתברות שלו לפגוע בירייה הבאה ב-0.1 ואם הוא מחטיא היא יורדת ב-0.1. הצלף ירה למטרה פעמיים. ההסתברות שפגע במטרה בדיוק בירייה אחת היא 0.38.

א. מצא את p .

ב. מה ההסתברות שהצלף פגע פעמיים במטרה אם ידוע שהוא פגע בה לפחות פעם אחת?

21) רפי קנה במכולת חבילה של מסטיק "מנטוס". ידוע כי יש בחבילה 10 סוכריות, חלקן ורודות וחלקן צהובות.

רפי מוציא באקראי (ללא החזרה) שתי סוכריות מהחבילה שקנה.

ידוע כי ההסתברות ששתי הסוכריות תהיינה ורודות קטנה פי 4 מההסתברות להוציא סוכריות בצבעים שונים.

א. כמה סוכריות מכל צבע יש בכל חבילה?

ב. רפי מחזיר את הסוכריות לחבילה ומוציא באקראי 3 סוכריות (ללא החזרה). מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציא רפי הן צהובות?

שלומי, חברו הטוב של רפי, קנה 3 חבילות "מנטוס".

- ג. שלומי מוציא באקראי סוכרייה מכל חבילה. האם ההסתברות של שלומי להוציא 3 סוכריות צהובות גבוהה או נמוכה מזו של רפי?
- ד. שלומי מוציא מכל חבילה שתי סוכריות. מה ההסתברות שלו להוציא מכל חבילה סוכרייה ורודה ואחר כך צהובה?

(22) בתוך כד ישנם 8 כדורים, חלקם אדומים וחלקם לבנים. מוציאים באקראי כדור, מניחים אותו בצד ומוציאים כדור נוסף.

- א. מצא כמה כדורים יש בכד מכל צבע אם ידוע כי ההסתברות שהכדור השני שהוצא הוא לבן היא $3/8$.
- ב. ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא לבן, מה ההסתברות שהכדור הראשון שיצא הוא אדום?

(23) בכד ישנם 12 כדורים, חלקם לבנים וחלקם שחורים. אם מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד ההסתברות ששניהם יהיו בעלי אותו הצבע היא $13/18$.

- א. מה ההסתברות להוציא כדור שחור אם ידוע כי יש יותר כדורים שחורים?
- על 40% מהכדורים השחורים רשום מספר ועל מחצית הכדורים הלבנים רשום מספר.
- ב. מה ההסתברות להוציא מהכד כדור שחור שרשום עליו מספר?
- ג. איזה חלק מבין הכדורים שרשום עליהם מספר מהווים הכדורים הלבנים?

שאלות הנפתרות באמצעות טבלה דו-מימדית:

(24) 70% מאוהדי מכבי ת"א הם גברים והשאר נשים. 40% מהאוהדים מעשנים. נתון כי 45% מהאוהדים הם גברים שאינם מעשנים.

- א. מהו אחוז הנשים המעשנות מבין אוהדי מכבי?
- ב. בוחרים באקראי אוהד מכבי. מה ההסתברות שהוא גבר או שהוא מעשן?
- ג. בוחרים באקראי אישה שאוהדת מכבי. מה ההסתברות שהיא מעשנת?
- ד. האם מין האוהד והעובדה שהוא מעשן הם מאורעות תלויים?

(25) 65% מהפחיות המיוצרות במפעל משקאות הן רגילות והשאר דיאט. 80% מהפחיות המיוצרות תקינות והשאר פגומות. נתון כי 7% מהפחיות הן פחיות דיאט פגומות.

- א. בוחרים באקראי פחית. מה ההסתברות שהיא פחית רגילה ותקינה?
- ב. בוחרים באקראי פחית דיאט. מה ההסתברות שהיא פגומה?
- ג. בוחרים באקראי פחית פגומה. מה ההסתברות שהיא דיאט?
- ד. האם סוג הפחית ותקינותה הם מאורעות תלויים?

26) 80% מהתלמידים בכיתה עברו את המבחן בתנ"ך ו-70% עברו את המבחן בהיסטוריה. 75% מבין התלמידים שעברו את המבחן בתנ"ך עברו גם את המבחן בהיסטוריה.

- א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא נכשל בשתי הבחינות?
- ב. תלמיד נכשל במבחן בהיסטוריה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן בתנ"ך?
- ג. ידוע שתלמיד עבר בדיוק מבחן אחד. מה ההסתברות שזה המבחן בתנ"ך?

27) בעיר גדולה ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. מבין בעלי רישיון הנהיגה 30% הם גברים. 60% מהגברים הם בעלי רישיון נהיגה. בחרו באקראי שתי נשים מהעיר. מה ההסתברות שלשתיהן אין רישיון נהיגה?

28) 10% מהאנשים באוכלוסייה עיוורי צבעים. קיימת בדיקה הבוחנת אם אדם הוא עיוור צבעים. אם עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 80% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. אם אדם שאינו עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 5% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. מהם אחוזי האמינות של הבדיקה (אחוז המקרים בהם הבדיקה מאבחנת נכונה את הנבדק)?

29) בסניף "תנו לחיות לחיות" בירושלים יש כלבים וחתולים בלבד, בעלי פרווה כהה או פרווה בהירה. 55% מהחיות בסניף הם כלבים. אחוז החתולים בעלי הפרווה הכהה גדול פי 3 מאחוז הכלבים בעלי הפרווה הבהירה. מבין בעלי הפרווה הכהה 60% הם כלבים. בוחרים באקראי חתול מהסניף. מה ההסתברות שהוא בהיר פרווה?

30) בית ספר תיכון מציע לתלמידיו 3 מגמות ריאליות לבחירה: פיזיקה, כימיה ומחשבים. 40% מתלמידי מגמות אלה הם בנים. הבנים מהווים $\frac{2}{5}$ מתלמידי הפיזיקה, $\frac{5}{12}$ מתלמידי הכימיה ו- $\frac{1}{3}$ מתלמידי המחשבים. $\frac{1}{4}$ מהבנים הם תלמידי פיזיקה.

- א. האם יש תלות בין העובדה שתלמיד לומד פיזיקה למין התלמיד?
- ב. מהו אחוז לומדי המחשבים מקרב הבנים?

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי - שאלות יסודיות:

31) אדם מסובב חמש פעמים סביבון. מה ההסתברות שיקבל פעמיים "נס"?

32) מה ההסתברות לקבלת 5 פעמים "נס" בשמונה סיבובי סביבון?

33) הסיכוי לעבור את מבחן התיאוריה הוא 0.7. עשרה אנשים ניגשים למבחן התיאוריה. מהי ההסתברות שבדיוק שישה מהם יעברו?

34) בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. מה ההסתברות שמתוך חמשת הכדורים הוציא:

- א. בדיוק ארבע יהיו כחולים?
- ב. חמישה יהיו כחולים?
- ג. לפחות ארבעה יהיו כחולים?
- ד. הרוב יהיו כחולים?
- ה. לפחות אחד יהיה כחול?
- ו. הראשון והאחרון בלבד יהיו כחולים?

35) בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. ידוע שרוב הכדורים שהוציא כחולים. מה ההסתברות שכולם כחולים?

36) יערה מצליחה לקלוע לסל בשלושה מכל ארבעה ניסיונות. כדי להתקבל לנבחרת הכדורסל של בית הספר עליה להצליח לקלוע ברוב הפעמים מתוך 6 ניסיונות קליעה לסל. ידוע שיערה התקבלה לנבחרת הכדורסל. מה ההסתברות שהצליחה לקלוע את כל הקליעות?

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי - שאלות עם הסתברות מותנית:

37) בכד יש 9 כדורים, חלקם כחולים והשאר לבנים. מוציאים כדור מהכד, אם הוא כחול אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים לבנים ואם הוא לבן אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים כחולים. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף. ידוע כי ההסתברות שהכדור הראשון שיצא הוא כחול אם ידוע כי הכדור השני כחול היא $6/11$.

- א. מצא כמה כדורים כחולים יש בכד.
- ב. חוזרים על התהליך 6 פעמים, כלומר בכל פעם מחזירים את המצב לקדמותו, מוציאים באקראי כדור ופועלים בהתאם לחוקים. מצא את ההסתברות שלפחות פעם אחת יבחרו שני כדורים כחולים בזה אחר זה.

38) בסיטונאות מזון ידוע כי 40% מתוך הסכו"ם החד-פעמי הוא תוצרת חו"ל והשאר תוצרת הארץ. 40% מבין הסכו"ם המיובא מחו"ל הם צבעוניים והשאר שקופים.

- א. מה ההסתברות לבחור בסיטונאות המזון סכו"ם שקוף המיובא מחו"ל?
- ב. 1. בוחרים 5 כלים בחנות באופן אקראי. מה ההסתברות שלכל היותר כלי אחד הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל?
2. מה ההסתברות שבדיוק אחד מחמשת הכלים הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל אם ידוע כי לכל היותר כלי אחד הוא שקוף תוצרת חו"ל?

ג. בוחרים שני כלים באופן אקראי וידוע כי ההסתברות ששניהם שקופים היא 0.4096. איזה חלק מהווים כלי הסכו"ם השקופים מבין כלי הסכו"ם תוצרת הארץ?

- (39) בחדר יש x גברים ו- $3x$ נשים. משחקים את המשחק הבא:
- א. מצא כמה נשים יש בחדר.
 - ב. ידוע כי האדם השני שנבחר הוא גבר, מה ההסתברות שגם הראשון שנבחר הוא גבר?
 - ג. משחקים את המשחק 4 פעמים. ידוע כי בכל הפעמים נבחר גבר בפעם השנייה, מה ההסתברות שבדיוק ב-3 פעמים יבחר גבר גם בפעם הראשונה.

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי - שאלות עם נעלמים:

- (40) בוחרים שלושה גברים באקראי מעיר גדולה. ההסתברות שכולם מעשנים היא 0.027. מה ההסתברות שרובם מעשנים?
- (41) בוחרים שלוש נשים מעיר גדולה. ההסתברות ששתיים מהן מעשנות קטנה פי 4 מההסתברות ששתיים מהן לא מעשנות. מה ההסתברות שכולן מעשנות?
- (42) בכד 10 כדורים, חלקם לבנים והשאר שחורים. נמרוד מוציא 9 פעמים כדור מהכד (עם החזרה). הסיכוי שיצאו פי 2 כדורים שחורים מלבנים גדול פי $3\frac{3}{8}$ מהסיכוי שיצאו פי 2 כדורים לבנים משחורים. מצא כמה כדורים מכל צבע בכד.
- (43) מפעל מייצר שולחנות וכיסאות. בוחרים 4 רהיטים. ידוע כי ההסתברות שכולם יהיו כיסאות זהה להסתברות שיהיה שולחן אחד בדיוק בניהם.
- א. מצא את ההסתברות לבחור כיסא.
 - ב. במפעל צובעים את הרהיטים בשחור או לבן. רבע מהשולחנות נצבעים בשחור ורבע מהכיסאות נצבעים בלבן.
 - ג. מה ההסתברות לבחור כיסא שחור?
 - ד. איזה חלק מבין הרהיטים הלבנים מהווים השולחנות?
- (44) בחדר x גברים ו- $3x$ נשים. מוציאים באקראי שני אנשים מהחדר. ההסתברות שהם יהיו מאותו מין היא 0.6. מצא את גודלו של x . חוזרים על התהליך 4 פעמים. מה הסיכוי שבשלוש מתוך 4 הפעמים ייצאו מהחדר שתי נשים?

(45) במבחן רב ברירה עם 5 שאלות שוות ניקוד, לכל שאלה יש n תשובות מהן רק אחת נכונה. ישנו סיכוי של 50% ששי יידע את התשובה הנכונה לשאלה במבחן.

אם שי לא יודע את התשובה לשאלה הוא מנחש.
 ההסתברות ששי יקבל במבחן 60 גדולה פי $1\frac{1}{3}$ מההסתברות שיקבל 80.
 מצא את ערכו של n .

46 כדי להתקבל לקורס טיס יש לעבור גיבוש וראיון. כל המועמדים ניגשים גם לראיון וגם לגיבוש. 40% מהניגשים לגיבוש עוברים אותו ו-35% מהניגשים לראיון עוברים אותו. 5/17 מאלה שלא התקבלו לקורס טיס לא התקבלו בגלל הריאיון בלבד. 3 חברים ניסו להתקבל לקורס טיס. ידוע שרובם התקבלו. מה ההסתברות שכולם התקבלו?

שאלות מסכמות:

47 כדי להתקבל לחברת היי-טק יש לעבור ראיונות משלושה בעלי תפקידים בסדר הבא: מהנדס ראשי, אחראי משמרת ומנכ"ל החברה. כל אחד מבעלי התפקידים נותן חוות דעת חיובית או שלילית על המועמד לעבודה. מועמד שמתקבל לחברה חייב לקבל חוות דעת חיובית משלושת בעלי התפקידים. ידוע כי המנהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ל-3/5 מהמועמדים. אחראי המשמרת קורא את חוות הדעת של המנהנדס הראשי וב-1/6 מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה מזו של המנהנדס הראשי. מנכ"ל החברה קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב-7/10 נותן חוות דעת זהה לשלו.

א. 1. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת חיובית מאחראי המשמרת?
 2. ידוע כי אחראי המשמרת נתן חוות חיובית. מה ההסתברות שהמנהנדס הראשי נתן חוות דעת שלילית.
 ב. מה ההסתברות שמועמד יקבל עבודה בחברה?
 ג. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת שלילית מהמנכ"ל?

לאחר העדר עובדים שינתה החברה את מדיניותה וקבעה כי כדי להתקבל לעבודה יש לעבור לפחות שני ראיונות בהצלחה, אך חוות הדעת של המנכ"ל חייבת להיות חיובית.
 ד. מה ההסתברות כעת לקבל עבודה בחברה?

48 במדינה מסוימת 19/60 מהאזרחים הם גברים ו-41/60 הן נשים. 30% מבין מרכיבי המשקפיים במדינה זו הם גברים ו-40% מבין אלו שלא מרכיבים משקפיים הם גברים.

א. מה ההסתברות למצוא אישה במדינה זו שלא מרכיבה משקפיים?
 ב. בוחרים 4 אנשים. מה ההסתברות שבדיוק שניים מהם הם נשים שלא מרכיבות משקפיים?
 ג. בוחרים אזרח. ידוע כי הוא גבר. מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?

49 בעיר מסוימת ההסתברות לבחור אדם מעשן גדולה פי 3 מההסתברות לבחור אדם המרכיב משקפיים. ידוע כי החלק של התושבים שמרכיבים משקפיים מבין כל התושבים המעשנים הוא $1/12$.

- א. מצא מהי ההסתברות לבחור מעשן מתוך כל מרכיבי המשקפיים.
- ב. ידוע כי 15% מהתושבים הם מרכיבים משקפיים בלבד. מצא את ההסתברות לבחור תושב שלא מרכיב משקפיים.
- ג. בוחרים 6 תושבים באופן אקראי. מה ההסתברות שמחצית מהם אינם מרכיבים משקפיים ואינם מעשנים?

50 בבית ספר מסוים ישנם תלמידים המרכיבים משקפיים. ידוע כי אם בוחרים 3 תלמידים אז ההסתברות ששלושתם מרכיבים משקפיים היא 0.027.

א. מצא את אחוז מרכיבי המשקפיים בבית הספר.

בבית הספר ההסתברות להיתקל בתלמיד גדולה ב-0.1 מההסתברות להיתקל בתלמידה ואחוז הבנים שמרכיבים משקפיים זהה לאחוז הבנות שמרכיבות משקפיים.

- ב. מה ההסתברות להיתקל בחצר בית הספר בתלמיד שאינו מרכיב משקפיים?
- ג. איזה חלק מכלל הבנות בבית הספר מהוות הבנות שמרכיבות משקפיים?
- ד. בוחרים 4 תלמידים. ידוע כי כולן בנות. מה ההסתברות כי אחת מהן תרכיב משקפיים?

51 כדי להתקבל לעבוד בחברת ההיי-טק Techno יש לעבור שני ראיונות משני בעלי מקצוע, תחילה ע"י המהנדס הראשי ואחריו ע"י מנכ"ל החברה.

כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית, שלילית או שנמנע מלקבוע. כדי שמועמד יתקבל לחברה עליו לעבור לפחות ראיון אחד עם חוות דעת חיובית. ידוע כי המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ל- $1/5$ מהמועמדים ו- $2/7$ מהם הוא משאיר ללא קביעה. המנכ"ל קורא את חוות הדעת של המהנדס הראשי וקובע את חוות הדעת שלו בצורה הבאה:

אם המהנדס נתן חוות דעת חיובית אז המנכ"ל ייתן גם חוות דעת חיובית ב-60% מהמקרים. אם המהנדס נתן חוות דעת שלילית אז המנכ"ל נמנע מלקבוע ב-60% מהמקרים ובשאר המקרים הוא נותן חוות דעת חיובית. אם המהנדס נמנע מלקבוע אז המנכ"ל ייתן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד. הסיכוי שהמנכ"ל ייתן במקרה זה חוות דעת חיובית גדול פי 3 מהסיכוי שייתן חוות דעת שלילית.

- א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנכ"ל?
- ב. ידוע כי המנכ"ל נתן חוות דעת חיובית, מה ההסתברות שגם המהנדס נתן חוות דעת חיובית?
- ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?
- ד. ביום מסוים הגיעו 5 מועמדים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם קיבלו עבודה באותו היום?

52) בכד יש 12 כדורים חלקם אדומים וחלקם שחורים.
מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד.

- א. מצא את מספר הכדורים האדומים שבכד אם ידוע כי ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים היא $\frac{4}{9}$.
- ב. חלק מהכדורים עשויים מעץ והשאר עשויים מפלסטיק. ידוע כי 25% מהכדורים האדומים עשויים מעץ וכי 50% מהכדורים העשויים מעץ הם אדומים. מצא את ההסתברות לבחור כדור שחור העשוי מפלסטיק.
- ג. מוציאים מהכד 5 כדורים בזה אחר זה עם החזרה. מה ההסתברות להוציא 4 כדורים אדומים העשויים מפלסטיק?
- ד. מוציאים מהכד 5 כדורים בזה אחר זה עם החזרה. ידוע כי כולם עשויים מפלסטיק, מה ההסתברות ש-3 מהם בצבע אדום?

53) בבית ספר בעיר מסוימת נערכו שני מבחנים. 80% מהתלמידים עברו את המבחן הראשון. $\frac{1}{4}$ מבין התלמידים שעברו את המבחן הראשון עברו גם את השני ו- $\frac{1}{2}$ מהתלמידים שנכשלו במבחן הראשון נכשלו גם בשני.

- א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא עבר את אחד המבחנים בלבד?
- ב. בוחרים באקראי 4 תלמידים. מה ההסתברות שבדיוק אחד מהם עבר את אחד המבחנים בלבד?
- ג. איזה חלק מבין התלמידים שנכשלו במבחן השני מהווה קבוצת התלמידים שנכשלו גם במבחן הראשון?

54) במפעל גדול ההסתברות שמתוך 4 עובדים לפחות אחד ירכיב משקפיים היא 0.5904.
א. מה ההסתברות לבחור עובד שלא מרכיב משקפיים?

- ידוע כי 40% מהפועלים שמרכיבים משקפיים הם מעשנים ו-20% מבין העובדים המעשנים הם מרכיבים משקפיים.
- ב. מה ההסתברות לבחור עובד שמרכיב משקפיים בלבד או מעשן בלבד?
- ג. בוחרים באקראי 5 עובדים. מה ההסתברות שרוב העובדים שנבחרו הם מעשנים?

55) במפעל לייצור ברגים פועלים שני פסי ייצור – פס ייצור א' ופס ייצור ב'.

ידוע כי אם בוחרים 5 ברגים אז ההסתברות ש-3 מהם מיוצרים ע"י פס הייצור השני גדולה פי 4.5 מההסתברות שאחד מהם מיוצר ע"י פס הייצור הנ"ל.

- א. מצא את ההסתברות לבחור בורג המיוצר ע"י פס הייצור הראשון. מתוך כל 100 ברגים שהמפעל מייצר 7 פגומים. ומתוך כל 10 ברגים היוצאים מפס הייצור הראשון אחד הוא פגום.
- ב. מהו אחוז הברגים התקינים שמיוצרים ע"י פס הייצור השני?
- ג. איזה חלק מבין הברגים הפגומים מהווים אלו שיוצאים מפס הייצור הראשון?

- 56** בכד יש פי 5 כדורים כחולים מאדומים. מוציאים מהכד כדור.
אם הוא כחול אז משאירים אותו בחוץ ואם הוא אדום אז מחזירים אותו לכד.
לאחר מכן מוציאים כדור נוסף מהכד.
ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא: 175/612.
- כמה כדורים מכל צבע יש בכד?
 - ידוע כי הכדור השני שנבחר הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון שנבחר היה אדום?
 - חוזרים על התהליך 5 פעמים. ידוע כי בכל הפעמים הכדור השני שהוצא הוא כחול. מה ההסתברות שברוב הפעמים הכדור הראשון שיצא הוא אדום?

- 57** בחדר יש פי 4 נשים מגברים. משחקים את המשחק הבא: בוחרים באקראי אדם מהחדר. אם נבחר גבר אז הוא יוצא מהחדר ואם נבחרה אישה אז היא נשארת. לאחר מכן בוחרים אדם נוסף.
- מצא כמה גברים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות שייבחרו שני אנשים שונים היא: 236/725.
 - ידוע כי בפעם השנייה נבחר גבר, מה ההסתברות שגם בפעם הראשונה יבחר גבר?
 - משחקים את המשחק 4 פעמים. ידוע כי בכל ארבעת הפעמים נבחר גבר בפעם השנייה. מה ההסתברות שברוב המקרים יצא גבר גם בפעם הראשונה?

- 58** בעיר מסוימת נערכות בחירות. ידוע כי אם בוחרים 4 תושבים אז ההסתברות שלפחות אחד מהם יצביע למועמד ב' היא 65/81.
- איזה חלק מהתושבים הצביעו למועמד א'?
- בעיר יש תושבים מבוגרים וצעירים.
- ידוע כי 2/3 מהצעירים הצביעו למועמד א' וכי ההסתברות לבחור מבוגר שהצביע למועמד ב' היא 2/15.
- מהו אחוז התושבים הצעירים שהצביעו למועמד ב'?
 - איזה אחוז מהווים התושבים הצעירים מבין אלו שהצביעו למועמד א'?

- 59** לכבוד חנוכה קנתה סבתא תקווה לשתי נכדותיה, שני ושרון, סביבונים עם סוכריות בתוכם. בכל סביבון יש 7 סוכריות שוקולד ו-4 סוכריות מנטה.
- שרון לקחה סביבון אחד והוציאה ממנו באקראי (ללא החזרה) 4 סוכריות.
- מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציאה שרון הן סוכריות מנטה?
 - שני לקחה 4 סביבונים (אחרים) והוציאה באקראי מכל סביבון סוכרייה אחת.
 - האם ההסתברות ששני תוציא 4 סוכריות מנטה גבוהה יותר או נמוכה יותר מההסתברות שחשבת בסעיף א'? נמק.

ג. שני הוציאה באקראי סוכרייה אחת מכל סביבון מתוך ארבעת הסביבונים שברשותה. ידוע שבין הסוכריות שבידה יש יותר סוכריות מנטה. מה ההסתברות שכל הסוכריות שיש לשני ביד יהיו בטעם מנטה?

60 כדי לקבל עבודה בחברת Makido יש לעבור ראיונות משני בעלי מקצוע: מהנדס ראשי ומנכ"ל החברה. המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ברבע מהמקרים, בשליש מהמקרים הוא נמנע מלתת חוות דעת ובשאר המקרים הוא נותן חוות דעת שלילית. מנכ"ל החברה קורא את חוות הדעת של המהנדס וקובע את חוות דעתו באופן הבא:

אם המהנדס נתן חוות דעת חיובית אז הוא נותן חוות דעת חיובית ב-90% מהמקרים וב-10% מהמקרים הוא נמנע מלתת חוות דעת. אם המהנדס נמנע מלקבוע אז המנכ"ל נותן חוות דעת שלילית במחצית המקרים או חיובית במחצית המקרים.

אם המהנדס נותן חוות דעת שלילית אז ההסתברות שהמנכ"ל ייתן חוות דעת חיובית גדולה פי 2 מההסתברות שימנע מלתת דעת וההסתברות שימנע מלתת חוות דעת גדולה פי 2 מההסתברות שייתן חוות דעת שלילית.

א. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת חיובית לפחות באחד הראיונות?
 ב. אם ידוע כי מועמד קיבל חוות דעת חיובית אחת לפחות מה ההסתברות שהמהנדס ימנע מלתת חוות דעת?
 ג. 1. מה ההסתברות שמתוך 5 מועמדים לפחות אחד יקבל עבודה אם ידוע כי כדי להתקבל לעבודה יש לקבל שתי חוות דעת חיוביות?
 2. כיצד תשתנה התוצאה של חלק 1 אם כדי לקבל עבודה יש לקבל לפחות חוות דעת חיובית אחת ואף חוות דעת שלילית?

61 בעיר מסוימת נערכו בחירות מקומיות. ידוע כי אם בוחרים באקראי 4 אזרחים ההסתברות שתמצא אישה אחת ביניהם קטנה פי 16 מההסתברות להיתקל באישה באופן אקראי.

א. מה הוא אחוז הגברים בעיר?
 בעיר שלושה מועמדים. $\frac{1}{11}$ מהמצביעים למועמד א' הם גברים, 60% מהמצביעים למועמד ב' הם גברים ו-25% מהמצביעים למועמד ג' הם גברים. אחוז המצביעים למועמד ג' הוא 20%.

ב. איזה מועמד קיבל את רוב הקולות?
 ג. איזה חלק מבין כל הנשים מהווה קבוצת הנשים שהצביעו למועמד המנצח?

62 בחדר x גברים ו- $x+2$ נשים. זורקים קוביית משחק מאוזנת. אם מתקבל מספר הגדול מ-4 אז מוסיפים לחדר x גברים ואם מתקבל מספר הקטן או שווה ל-4 אז מוסיפים לחדר x נשים. לאחר מכן מוציאים אדם מהחדר.

א. מצא כמה נשים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות לבחור אישה היא $\frac{21}{33}$.
 ב. מה ההסתברות שתצא אישה מהחדר לאחר שנוספו לחדר נשים אם ידוע כי וודאי יצאה אישה מהחדר?

אנשי החדר לובשים חולצות אדומות או לבנות בלבד. ידוע כי החלק היחסי של האנשים הלובשים חולצות לבנות בחדר גדול פי 16 מהחלק היחסי של הגברים הלובשים חולצות אדומות. כמו כן ההסתברות של הגברים מבין כל אלו שלובשים חולצות אדומות היא 0.25.

ג. מצא מה ההסתברות לבחור גבר הלובש חולצה אדומה בחדר.

- ד. 1. בוחרים 5 אנשים מהחדר (ללא הוצאה) וידוע כי כולם לובשים חולצות אדומות. מה ההסתברות שרובם נשים?
2. מה ההסתברות שכל הנשים לובשות חולצות אדומות אם ידוע כי רוב הנשים לובשות חולצות אדומות?

63) באוניברסיטה מסוימת ידוע כי חלק מהסטודנטים נעזרים בספרי לימוד חיצוניים להעשרת הידע שלהם, וכי ההסתברות לבחור 2 סטודנטים הנעזרים בספרי לימוד חיצוניים קטנה ב-0.1 מההסתברות לבחור שני סטודנטים שלא נעזרים בספרי לימוד חיצוניים.

א. מהו אחוז הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים?

האוניברסיטה מוכרת ספרי לימוד ב-3 מקצועות לכלל הסטודנטים: ספר א', ספר ב' וספר ג'. כל סטודנט יכול לקנות רק ספר אחד. ידוע כי כמות הסטודנטים שקנו את ספר א' וכמות הסטודנטים שקנו את ספר ג' זהות.

כמוכן, $\frac{6}{7}$ מאלו שקנו את ספר ג' נעזרים גם בספרים חיצוניים. $\frac{1}{3}$

מהסטודנטים שקנו את ספר ב' נעזרים בספרי לימוד חיצוניים וכמות

הסטודנטים שקנו את ספר א' ונעזרים בספרי לימוד חיצוניים מהווים $\frac{1}{9}$ מכלל

הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים.

ב. מהו אחוז הסטודנטים שקנו את ספר ב' ולא נעזרים בספרי לימוד חיצוניים?

ג. איזה חלק מהווים הסטודנטים שקנו את ספר ג' מכלל הסטודנטים שלא נעזרים בספרי לימוד חיצוניים?

ד. בוחרים 4 סטודנטים שלא נעזרים בספרי לימוד חיצוניים. מה ההסתברות שאחד מהם קנה את ספר ג'?

תשובות סופיות:

1. $P(A \cap B) = 0.35$ (5) $P(A \cup B) = 0.9$ (4) 0.75 (3) 0.75 (2) 0.3 (1)
- 6) לא זרים ותלויים. (7) $P(A \cup B) = 0.85$ (8) א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{7}{15}$
- 9) א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{19}{50}$ ג. $\frac{31}{50}$ (10) $\frac{17}{42}$ (11) $\frac{8}{15}$ (12) $\frac{77}{144}$ (13) א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{1}{8}$
- 14) א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{38}{100}$ ג. $\frac{9}{38}$ (15) $\frac{2}{17}$ (16) א. $\frac{8}{15}$ ב. $\frac{15}{16}$ (17) $\frac{1}{4}$
- 18) א. $\frac{11}{18}$ ב. $\frac{1}{11}$ ג. $\frac{26}{45}$ (19) 8 כדורים. (20) א. $p = 0.6$ ב. $\frac{21}{40}$
- 21) א. 4 ורודות ו-6 צהובות ב. $\frac{1}{6}$ ג. גבוהה $\left(\frac{27}{125} > \frac{1}{6}\right)$ ד. $P = 0.0189$
- 22) א. 5 אדומים ו-3 לבנים ב. $\frac{5}{7}$ (23) א. $P = \frac{5}{6}$ ב. $P = \frac{1}{3}$ ג. $P = \frac{1}{5}$
- 24) א. 15% ב. 0.85 ג. 0.5 ד. כן. (25) א. 0.52 ב. 0.2 ג. 0.35 ד. בלתי תלויים.
- 26) א. 0.1 ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{2}{3}$ (27) $\frac{1}{225}$ (28) 93.5% (29) $\frac{1}{3}$
- 30) א. בלתי תלויים. ב. 12.5% (31) 0.264 (32) 0.023 (33) 0.2001
- 34) א. 0.259 ב. 0.078 ג. 0.337 ד. 0.683 ה. 0.98976 ו. 0.023 (35) 0.114
- 36) 0.214 (37) א. 6 כדורים כחולים ב. 0.88989
- 38) א. 0.24 ב. 1. 0.65389 2. $0.61224 \sim \frac{30}{49}$ ג. $\frac{2}{3}$ (39) א. 9 נשים ב. $\frac{2}{11}$ ג. 0.0196
- 40) 0.216 (41) 0.008 (42) 4 לבנים, 6 שחורים. (43) א. $P = 0.8$ ב. $P = 0.6$ ג. $\frac{3}{7}$
- 44) א. $x = 4$ ב. 0.299 (45) $n = 5$ (46) $\frac{5}{90}$ (47) א. 1. $\frac{17}{30}$ 2. $\frac{2}{17}$ ב. $\frac{7}{20}$ ג. $\frac{71}{150}$ ד. $\frac{32}{75}$
- 48) א. $P = 0.1$ ב. $P = 0.0486$ ג. $\frac{15}{19}$ (49) א. $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{4}$ ב. $P(\bar{A}) = 0.8$ ג. $P_6(3) = 0.1318$
- 50) א. 30% ב. $P = 0.4$ ג. $\frac{1}{3}$ ד. $P = \frac{32}{81}$ (51) א. $\frac{27}{50}$ ב. $\frac{2}{9}$ ג. $\frac{31}{50}$ ד. $P = 0.34414$
- 52) א. 4 כדורים ב. $\frac{7}{12}$ ג. $\frac{15}{1024} = 0.0146$ ד. 0.1323 (53) א. $P = 0.7$ ב. $P = \frac{189}{2500}$ ג. $\frac{1}{7}$
- 54) א. $P = 0.8$ ב. $P = 0.44$ ג. $P = 0.31744$ (55) א. $P = 0.4$ ב. 95% ג. $\frac{4}{7}$
- 56) א. 15 כחולים ו-3 אדומים ב. $\frac{17}{101}$ ג. 0.03645
- 57) א. 6 גברים ו-24 נשים ב. הסתברות לגבר בפעם הראשונה: $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{141}$ ג. 0.0193
- 58) א. $\frac{2}{3}$ ב. 20% ג. 60% (59) א. $\frac{1}{330}$ ב. גבוהה יותר $\left(\frac{256}{14641} > \frac{1}{330}\right)$ ג. $\frac{1}{8}$
- 60) א. $\frac{55}{84}$ ב. $\frac{14}{55}$ ג. 1. 0.7204 2. 0.9324 (61) א. 25% ב. מועמד אי' ג. $\frac{2}{3}$
- 62) א. 5 נשים. ב. $\frac{16}{21}$ ג. 0.05 ד. 1. $\frac{459}{512}$ 2. $\frac{9}{34}$ (63) א. 45% ב. 20% ג. $\frac{1}{11}$ ד. $P = 0.2732$

שאלות שונות לפי נושאים:

כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות בלתי תלויים:

- (1) בבניין העירייה יש שני מתקני הבטחה נגד פורצים. ההסתברות שהמתקן הראשון יפעל בזמן אמת היא 0.92 וההסתברות שהמתקן השני יפעל בזמן אמת היא 0.86.
- מה ההסתברות שהמתקן הראשון יפעל והשני לא?
 - מה ההסתברות ששני המתקנים יפעלו?
 - מה ההסתברות שאף מתקן לא יפעל?
- (2) צובעים את הפאות של קובייה בת 8 פאות כך: 3 פאות כחולות, 2 פאות אדומות, 2 פאות צהובות ופאה אחת ירוקה. זורקים את הקובייה פעמיים. חשב את ההסתברויות הבאות:
- שתי הפאות הן בצבע ירוק.
 - שתי הפאות הן בצבע כחול.
 - שתי הפאות באותו הצבע.
- (3) בכד יש 6 כדורים שחורים ו-4 לבנים. מוציאים כדור מהכד ולאחר הסתכלות בצבעו מחזירים אותו לכד ומוציאים כדור נוסף. חשב את ההסתברויות הבאות:
- ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים.
 - ששני הכדורים הם מאותו הצבע.
 - שהכדור השני הוא לבן.
- (4) בכד יש 4 כדורים אדומים, 3 כדורים לבנים ו-2 כדורים כחולים. מוציאים שני כדורים מהכד עם החזרה, דהיינו, לאחר הוצאת הכדור הראשון, מחזירים אותו בחזרה לכד ורק אז מוציאים את הכדור השני. חשב את ההסתברויות הבאות:
- ששני הכדורים שהוצאו הם לבנים.
 - ששני הכדורים שהוצאו הם מאותו הצבע.
 - ששני הכדורים שהוצאו לא כחולים.
 - שהכדור השני הוא כחול.
- (5) כדי לקבל תואר במכללת חולון יש לעבור לפחות שניים מתוך שלושה מבחנים. ההסתברות שדורון יעבור את המבחן הראשון היא 0.9. ההסתברות שיעבור את המבחן השני היא 0.6 וההסתברות שיעבור את המבחן השלישי היא 0.8.
- מה ההסתברות שדורון יעבור רק מבחן אחד?
 - מה ההסתברות שדורון יעבור את שלושת המבחנים?
 - מה ההסתברות שדורון יעבור לכל היותר שני מבחנים?
 - מה ההסתברות שדורון יקבל תואר?

6) בתוך שקית ישנם 4 קלפים אדומים, 3 קלפים צהובים וקלף אחד ירוק. מוציאים עם החזרה שלושה קלפים מהשקית.

- א. מה ההסתברות שבכל שלושת הפעמים יצא הקלף הירוק?
- ב. מה ההסתברות שיצאו שני קלפים צהובים?
- ג. מה ההסתברות שכל הקלפים יהיו בעלי אותו הצבע?

כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות תלויים:

7) תלמיד הרוצה להוציא רישיון לרכב צריך לעבור בחינה עיונית ולאחר מכן בחינה מעשית. ההסתברות שיעבור את הבחינה העיונית היא 0.7. אם הוא עבר את הבחינה העיונית אז ההסתברות שיעבור את הבחינה המעשית היא 0.9 ואם הוא נכשל בבחינה העיונית אז ההסתברות שיעבור את הבחינה המעשית היא 0.5.

- א. מה ההסתברות שיעבור התלמיד רק את הבחינה המעשית?
- ב. מה ההסתברות שהתלמיד ייכשל בשתי הבחינות?
- ג. מה ההסתברות שתלמיד יעבור את שתי הבחינות?

8) בכד 5 כדורים אדומים ו-3 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי כדור מהכד, אם הוא אדום אז מחזירים אותו חזרה לכד ומוציאים כדור נוסף. אם הוא ירוק אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים כדור נוסף.

- א. מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם ירוקים?
- ב. מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא הוא אדום?
- ג. מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו בעלי אותו הצבע?

9) בתוך ארגז ישנם 7 ספלים הממוספרים מ-1 עד 7.

מוציאים ספל אחד, משאירים אותו בחוץ ומוציאים ספל נוסף.

- א. מה ההסתברות ששני הספלים שהוצאו הם בעלי מספרים זוגיים?
- ב. מה ההסתברות ששני הספלים שהוצאו הם בעלי מספרים המתחלקים ב-3?
- ג. מה ההסתברות ששני הספלים שהוצאו הם בעלי מספרים שסכומם גדול מ-10?

10) במעטפה יש 30 בולים, מתוכם 6 בולים פגומים.

מוציאים שני בולים בזה אחר זה מהמעטפה.

- א. מה ההסתברות ששני הבולים שהוצאו הם פגומים?
- ב. מה ההסתברות שהבול הראשון שהוצא אינו פגום אך הבול השני פגום?
- ג. מה ההסתברות שהבול השני פגום?
- ד. מה ההסתברות ששני הבולים או פגומים או אינם פגומים?

11) בכיתה ישנם 24 בנים ו-18 בנות. מוציאים באקראי 3 ילדים מהכיתה בזה אחר זה. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שכל שלושת הילדים יהיו בנים.
- ב. שכל שלושת הילדים יהיו מאותו המין.
- ג. שתהיה בקבוצה לפחות בת אחת.
- ד. שיהיה בקבוצה לכל היותר בן אחד.

12) בתוך שקית יש 6 חטיפי "מקופלת" ו-4 חטיפי "במבה". מוציאים באקראי 3 חטיפים מהשקית בזה אחר זה. חשב את:

- א. ההסתברות שיצאו 3 חטיפי במבה.
- ב. ההסתברות שיצאו לכל היותר שני חטיפי במבה.
- ג. ההסתברות שיצאו לפחות שני חטיפי מקופלת.

13) צלף יורה למטרה שלוש פעמים. ההסתברות שיקלע בפעם הראשונה היא 0.7. ההסתברות שיקלע לאחר מכן תלויה בקליעה הקודמת. אם קלע הצלף בירייה הקודמת אז ההסתברות שלו לקלוע שנית היא 0.8 אך אם הוא החטיא אז ההסתברות שלו לקלוע כעת היא 0.6.

- א. מה ההסתברות שיקלע בכל שלושת הפעמים?
- ב. מה ההסתברות שיקלע בירייה השלישית בלבד?
- ג. מה ההסתברות שיקלע הקלע בירייה אחת בלבד?
- ד. מה ההסתברות שיקלע לכל היותר פעם אחת?

14) שחקן כדורגל בועט לשער שלוש פעמים. ההסתברות שיבקיע בפעם הראשונה היא 0.6. ההסתברות שיבקיע לאחר מכן תלויה בבקיעה הקודמת. אם השחקן הבקיע אז ההסתברות שיבקיע שנית היא 0.8 אך אם הוא החמיץ אז ההסתברות שיחמיץ שנית היא 0.3. חשב את:

- א. ההסתברות שיבקיע השחקן בכל שלושת הפעמים.
- ב. ההסתברות שיבקיע השחקן בפעם השנייה בלבד.
- ג. ההסתברות שיבקיע השחקן פעם אחת בלבד.
- ד. ההסתברות שיבקיע השחקן לפחות פעם אחת.

תרגילים הכוללים שימוש בדיאגרמת עץ:

15) בעיר מסוימת 40% מהתושבים הם גברים והשאר נשים. ידוע כי 40% מהגברים מרכיבים משקפיים ו-60% מהנשים לא מרכיבות משקפיים. בוחרים באקראי תושב מהעיר. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שנבחר גבר שלא מרכיב משקפיים.
- ב. שנבחרה אישה שמרכיבה משקפיים.
- ג. שהתושב שנבחר מרכיב משקפיים.

16) צלף יורה למטרה שלוש פעמים. אם בירייה הקודמת הוא פגע אז ההסתברות שיפגע שוב בירייה הבאה היא 0.8 אך אם הוא החטיא בירייה הקודמת אז ההסתברות שיפגע בירייה שאחריה היא 0.6. הצלף החטיא בירייה הראשונה. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. הצלף יחטיא גם בשתי היריות הבאות.
- ב. הצלף יפגע בירייה השלישית.
- ג. הצלף יפגע בירייה אחת בלבד.
- ד. הצלף יחטיא בירייה השלישית.

17) אם ביום מסוים יורד גשם אז ההסתברות שביום שאחריו לא ירד גשם היא 0.4 אך אם ביום מסוים לא יורד גשם ההסתברות שירד גשם ביום שאחריו היא 0.9. ביום שלישי ירד גשם. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. ביום חמישי לא ירד גשם.
- ב. בימים: שלישי, רביעי וחמישי ירד גשם.
- ג. בימים רביעי וחמישי לא ירד גשם.

18) במפעל שמיכות שלושה פסי ייצור. פס הייצור הראשון מייצר 40% מהמוצרים, פס הייצור השני מייצר 30% מהמוצרים ופס הייצור השלישי מייצר את ה-30% הנותרים. 50% מהמוצרים של פס הייצור הראשון, 10% מהמוצרים של פס הייצור השני ו-80% ממוצרי הפס השלישי מיועדים ליצוא. בוחרים באקראי מוצר. חשב את:

- א. ההסתברות שהמוצר מיוצר על ידי פס הייצור השני ומיועד לייצוא.
- ב. ההסתברות שהמוצר מיועד ליצוא.
- ג. ההסתברות שהמוצר לא יוצר על ידי פס הייצור הראשון ואינו מיועד לייצוא.

19) במשחק "חיש-חש" אפשר לזכות ב-100 ₪, 50 ₪ או לא לזכות כלל. ההסתברות לזכות במשחק בודד ב-100 ₪ היא 0.2, ההסתברות לזכות ב-50 ₪ היא 0.35 וההסתברות לא לזכות כלל היא 0.45. רועי משחק פעמיים. חשב את:

- א. ההסתברות שרועי יזכה ב-50 ₪ בסה"כ.
- ב. ההסתברות שרועי יזכה לפחות ב-100 ₪.
- ג. ההסתברות שרועי לא יזכה במשחק השני.

20 בכד א' יש 5 כדורים אדומים ו-2 כדורים לבנים. בכד ב' יש 4 כדורים אדומים ו-6 כדורים לבנים. בוחרים באקראי כד ומוציאים ממנו בזה אחר זה שני כדורים בלי החזרה.

- א. מה ההסתברות שיצאו שני כדורים בעלי אותו הצבע?
- ב. מה ההסתברות שהכדור השני הוא אדום?
- ג. מבין כל האפשרויות בהן הכדור השני הוא אדום, מה ההסתברות שגם הכדור הראשון שיצא יהיה אדום?

21 זורקים קוביית משחק פעם אחת. אם היא מראה מספר המתחלק ב-3 בלי שארית רושמים אותו אך אם היא מראה מספר אחר זורקים אותה שנית. חוזרים על התהליך פעם שנייה ושלישית כאשר בפעם השלישית רושמים את המספר שהתקבל. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. המספר שנרשם הוא זוגי.
- ב. המספר שנרשם גדול מ-4.
- ג. המספר שנרשם מתחלק ב-3 בלי שארית.
- ד. המספר שנרשם לא מתחלק ב-3.

22 ישנם שני כדים. בכד א' יש 4 כדורים כחולים ו-2 כדורים צהובים ובכד ב' יש 3 כדורים כחולים ו-6 כדורים צהובים. זורקים קובייה. אם מתקבל מספר המתחלק ב-3 בלי שארית אז מוציאים כדור מכד א' ואם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב-3 אז מוציאים כדור מכד ב'. לאחר מכן זורקים את הקובייה שנית וחוזרים על התהליך ומוציאים כדור שני. (ההוצאות הן בלי החזרה).

- א. מה ההסתברות שיבחרו שני כדורים כחולים?
- ב. מה ההסתברות שיבחרו שני כדורים צהובים?
- ג. מה ההסתברות שיבחרו שני כדורים מאותו הצבע?

23 בכד יש 4 כדורים ירוקים ו-2 כדורים לבנים. מוציאים כדור מהכד, אם הוא ירוק אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים כדור נוסף ואם הוא לבן אז מחזירים אותו לכד ולאחר מכן מוציאים כדור נוסף. חוזרים על התהליך פעם שנייה ולאחר מכן מוציאים כדור שלישי. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. מה ההסתברויות ששלושת הכדורים שהוצאו יהיו ירוקים?
- ב. מה ההסתברות ששלושת הכדורים שהוצאו יהיו בעלי אותו הצבע?
- ג. מה ההסתברות שיצאו לפחות שני כדורים ירוקים?
- ד. מה ההסתברות שיצא בדיוק כדור לבן אחד?

24 בכד יש 8 כדורים שחורים ו-5 כדורים סגולים. מוציאים בלי החזרה 3 כדורים. מה ההסתברות שיצא לפחות כדור אחד סגול?

תרגילים עם נעלמים – כפל וחיבור הסתברויות, דיאגרמת עץ:

מציאת ההסתברות P:

- (25) קלע יורה למטרה פעמיים. ההסתברות שיקלע בירייה בודדת היא $P > 0.5$. מצא את P אם ידוע כי ההסתברות שיקלע פעם אחת בדיוק היא 0.48.
- (26) 44% מעובדי מפעל הם מנהלים והשאר הם פועלים. ההסתברות שפועל מעשן היא 0.7 וההסתברות שמנהל מעשן היא P . בוחרים באקראי עובד מהמפעל. מצא את P אם ידוע כי ההסתברות שהעובד שנבחר מעשן היא 0.48.
- (27) במפעל מסוים המונה 5000 עובדים, 1500 הם מנהלים והשאר הם פועלים פשוטים. ההסתברות שמנהל מעשן היא P וההסתברות שפועל מעשן היא $2P+0.1$. בוחרים באקראי עובד. מצא את ההסתברות P אם ידוע כי ההסתברות שהעובד שנבחר אינו מעשן היא 0.59.
- (28) ההסתברות שקלע יפגע במטרה בירייה בודדת היא P . הקלע יורה שתי יריות. מצא את P אם ידוע כי ההסתברות שיפגע בשתי הפעמים קטנה פי 16 מההסתברות שיחטיא בשתייהן.
- (29) שני צלפים יורים למטרה ירייה אחת. ידוע כי ההסתברות שהצלף הראשון יפגע גדולה פי 3 מההסתברות שהצלף השני יפגע. מצא את ההסתברות של כל צלף לפגוע בירייה בודדת אם ידוע כי ההסתברות שבדיוק אחד מהם יפגע היא 0.66.
- (30) במשחק "חיש חש" אפשר לזכות ב-200 ₪, 100 ₪ או בכלום. ידוע כי ההסתברות לזכות ב-200 ₪ היא 0.1 וההסתברות לזכות ב-100 ₪ היא P . שחקן משחק שני משחקים. ההסתברות שלא יזכה כלל גדולה פי 36 מההסתברות שיזכה ב-400 ₪.
א. מצא את P .
ב. חשב את ההסתברות של השחקן לזכות לפחות ב-200 ₪.
- (31) שני שחקני שחמט משחקים שני משחקים. ידוע כי ההסתברות של השחקן הראשון לנצח במשחק בודד היא 0.36 וההסתברות שינצח בתחרות כולה היא 0.2304.
א. מצא את ההסתברות שהשחקן השני ינצח במשחק בודד.
ב. חשב את ההסתברות שהתחרות כולה תסתיים בתיקו.

32 שני שחקני שחמט משחקים שני משחקים. ההסתברות של כל שחקן לנצח במשחק בודד היא זהה. ההסתברות שהשחקן הראשון ינצח לפחות במשחק אחד היא 0.64. מצא את ההסתברות של כל שחקן לנצח במשחק בודד.

33 צלף יורה שלוש יריות למטרה. אם הצלף פוגע בירייה מסוימת אז ההסתברות שיפגע גם בירייה הבאה היא Q . אם הצלף מחטיא בירייה מסוימת אז ההסתברות שיפגע בירייה הבאה היא P . הצלף מחטיא בירייה הראשונה. ידוע כי ההסתברות שהצלף יפגע בירייה השנייה והשלישית היא 0.12 וההסתברות שהצלף יפגע בירייה השנייה ויחטיא בשלישית היא 0.18.

א. מצא את P ו- Q .
ב. חשב את ההסתברות שהצלף יפגע בירייה השלישית.
ג. חשב את ההסתברות שהצלף יפגע בירייה אחת לפחות.

34 שני שחקני כדורסל זורקים זריקה אחת לסל. ההסתברות שהשחקן הראשון יקלע היא P וההסתברות שהשחקן השני יחטיא היא Q ($Q > 0.5$). ידוע כי ההסתברות ששני השחקנים יקלעו היא 0.28 וההסתברות ששני השחקנים יחטיאו היא 0.18. מצא את P ו- Q .

מציאת מספר x :

35 בכד יש x כדורים. 8 מהם ירוקים והשאר כחולים. מוציאים באקראי עם החזרה שני כדורים מהכד. מצא את x אם ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים ירוקים היא 0.64.

36 בכד יש 12 כדורים חלקם אדומים וחלקם שחורים. מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד. מצא את מספר הכדורים האדומים שבכד אם ידוע כי ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים היא $4/9$.

37 במעטפה יש 8 מכתבים. רובם מיועדים להישלח בתוך הארץ והשאר לחו"ל. מוציאים באופן אקראי מהמעטפה שני מכתבים בלי החזרה בזה אחר זה. מצא את מספר המכתבים המיועדים להישלח לחו"ל אם ידוע כי ההסתברות שהמכתב הראשון שהוצא מיועד לארץ והשני לחו"ל היא $3/14$.

38 בכד יש 8 כדורים ירוקים והשאר כחולים. מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד. מצא כמה כדורים יש בכד אם ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא $4/9$ ויש יותר כדורים ירוקים מכחולים.

39 בתוך קלמר יש 5 עפרונות ועוד x עטים. מוציאים כלי כתיבה מהקלמר, אם הוא עפרון אז מחזירים אותו לקלמר ומוציאים כלי כתיבה נוסף. אם הוא עט אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים כלי כתיבה נוסף. מצא כמה עטים יש בקלמר אם ידוע כי ההסתברות להוציא שני עטים היא $1/6$.

(40) בקופסא א' ישנם 5 זוגות נעליים ו-3 זוגות מגפיים.
בקופסא ב' יש 8 פריטים - x זוגות נעליים והשאר הם זוגות מגפיים.
מוציאים באקראי מקופסא א' זוג כלשהו ומעבירים אותו לקופסא ב'.
לאחר מכן מוציאים מקופסא ב' זוג. כמה זוגות נעליים יש בקופסא ב' אם ידוע
כי ההסתברות להוציא בפעם השנייה זוג מגפיים היא $17/24$.

(41) בקלמר יש 6 עפרונות ו-3 עטים. בתיק יש 9 כלי כתיבה - x עפרונות והשאר
עטים. מוציאים באקראי מהקלמר כלי כתיבה ומכניסים אותו לתיק. לאחר
מכן מוציאים מהתיק כלי כתיבה נוסף. מצא כמה עפרונות יש בתיק אם ידוע כי
ההסתברות שכלי הכתיבה שהוצא מהקלמר שונה מכלי הכתיבה שהוצא
מהתיק היא $13/30$.

(42) בתוך כד ישנם 8 כדורים, חלקם אדומים וחלקם לבנים. מוציאים באקראי
כדור, מניחים אותו בצד ומוציאים כדור נוסף. מצא כמה כדורים יש מכל צבע
אם ידוע כי ההסתברות שהכדור השני שהוצא הוא לבן היא $3/8$.

(43) בתוך כד ישנם 10 כדורים, חלקם צהובים וחלקם כחולים. מוציאים באקראי
כדור, מתבוננים בו ולאחר מכן מוציאים כדור נוסף. מצא כמה כדורים יש מכל
צבע בכד אם ידוע כי ההסתברות שיצא לפחות כדור אחד כחול היא $44/45$.

(44) בתוך שק ישנם 9 כדורים, חלקם סגולים וחלקם ירוקים. מוציאים באקראי
כדור, אם הוא סגול אז משאירים אותו בחוץ ואם הוא ירוק אז מחזירים אותו
חזרה לכד. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף. מצא כמה כדורים מכל צבע יש בשק
אם ידוע כי ההסתברות שהכדור השני שיבחר יהיה סגול היא $11/36$.

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי:

תרגילים יסודיים:

45 צלף יורה למטרה. ידוע כי מתוך 2000 יריות הוא פוגע ב-1200 מהן. הצלף יורה 4 יריות למטרה. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שהצלף יפגע בדיוק פעמיים במטרה.
- ב. שהצלף יפגע במטרה בכל ארבעת הפעמים.
- ג. שהצלף יפגע לפחות פעמיים במטרה.
- ד. שהצלף לא יפגע במטרה כלל.

46 ב-70% מהמכוניות יש רדיו. בוחרים באקראי 5 מכוניות. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. בדיוק ב-3 מתוך 5 המכוניות יהיה רדיו.
- ב. בכל 5 המכוניות יהיה רדיו.
- ג. ב-4 מתוך 5 המכוניות יהיה רדיו.
- ד. לפחות ב-3 מכוניות יהיה רדיו.

47 במכללה המונה 20,000 סטודנטים ישנם 6000 בנים והשאר בנות. בוחרים באקראי 5 סטודנטים. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. מתוך 5 הסטודנטים תהיה לכל היותר בת אחת.
- ב. מתוך 5 הסטודנטים יהיה לכל היותר בן אחד.
- ג. יבחרו 3 סטודנטים בנים מתוך החמישה.
- ד. יבחרו לכל היותר 3 סטודנטים בנים.

48 בבה"ס הספר 40% מהתלמידים הם בנים והשאר בנות. בוחרים באופן אקראי 4 תלמידים. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שנבחרו 2 בנים ו-2 בנות.
- ב. שתבחר בת אחת.
- ג. שיבחרו יותר בנים מבנות.
- ד. שמספר הבנים שנבחרו יהיה שונה ממספר הבנות שנבחרו.

49 רפי וגיל משחקים 4 משחקי ש-ש-בש. מתוך 60 משחקים בודדים ששיחקו השניים, ניצח רפי ב-48 פעמים. חשב את:

- א. ההסתברות שרפי ינצח במשחק אחד.
- ב. שגיל ינצח בתחרות.
- ג. שרפי ינצח בתחרות.
- ד. שהתחרות תסתיים בתיקו.

50) טנק יורה טיל על חומה. ההסתברות שהטיל יפגע בחומה היא 0.6. כדי להפיל את החומה יש לפגוע בה לפחות עם 3 טילים. הטנק יורה 4 טילים. מה ההסתברות שהטנק יפיל את החומה?

הוצאה עם החזרה:

51) בתוך סל קניות יש 6 תפוחים ו-4 תפוזים. מוציאים עם החזרה 4 פירות מהסל. חשב את ההסתברויות הבאות:

- להוציא שני תפוחים ושני תפוזים.
- להוציא 3 תפוחים ותפוז אחד.
- רוב הפירות שמוציאים יהיו תפוחים.
- לא להוציא תפוחים כלל.

52) בתוך קופסה יש 4 כדורים אדומים ו-2 כדורים ירוקים. מוציאים עם החזרה 4 כדורים מהקופסה. חשב את ההסתברויות הבאות:

- שכל הכדורים שהוצאו הם מאותו הצבע.
- שהוצאו לפחות שני כדורים ירוקים ולכל היותר 3 כדורים ירוקים.
- שהוצא לפחות כדור אחד אדום ולכל היותר 3 כדורים אדומים.

53) בתוך קלמר יש 8 עפרונות ו-2 עטים. מוציאים עם החזרה 5 כלי כתיבה מהקלמר.

- הראה כי ההסתברות להוציא 3 עפרונות ו-2 עטים גדולה פי 4 מההסתברות להוציא 2 עפרונות ו-3 עטים.
- חשב את ההסתברות להוציא 5 כלי כתיבה מאותו הסוג.
- חשב את ההסתברות להוציא כלי כתיבה שונים.

בעיות שונות – התפלגות בינומית אחת:

54) זורקים קובייה 4 פעמים. חשב את ההסתברויות הבאות:

- שיתקבל בכל פעם המספר 4.
- שיתקבל בדיוק פעמיים המספר 3.
- שיתקבל פעמיים מספר הקטן מ-4.
- שיתקבל בכל ארבעת הפעמים מספר המתחלק ב-3 בלי שארית.

55) במבחן יש 5 שאלות ולכל שאלה 3 תשובות שרק אחת מהן נכונה.

- מה ההסתברות לענות נכון בניחוש על כל השאלות?
- מה ההסתברות לקבל ציון של 60 במבחן?
- נניח שתלמיד יודע את התשובות הנכונות ל-2 מתוך 5 השאלות. מה ההסתברות שתלמיד זה יקבל 100 במבחן?
- מה ההסתברות שהתלמיד בסעיף הקודם יקבל ציון של 60 לפחות?

56) ההסתברות ששחקן כדורסל יקלע לסל בזריקה בודדת היא 0.7. השחקן זורק כדורים עד שהוא קולע 4 פעמים. מה ההסתברות שהשחקן יזרוק בדיוק 6 כדורים?

57) זורקים קובייה עד שהמספר 5 מתקבל בדיוק 4 פעמים. מה ההסתברות לזרוק את הקובייה בדיוק 5 פעמים?

תרגילים הכוללים שתי התפלגויות בינומיות:

58) בעיר מסוימת 40% מהגברים מרכיבים משקפיים ו-30% מהבנות מרכיבות משקפיים.

- א. בוחרים באקראי 4 גברים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם מרכיבים משקפיים?
- ב. בוחרים באקראי 5 נשים. מה ההסתברות שלכל היותר אישה אחת תרכיב משקפיים?
- ג. מה ההסתברות שמבין 4 הגברים ו-5 הנשים שנבחרו יהיו בדיוק 3 גברים שמרכיבים משקפיים ואישה אחת לכל היותר שמרכיבה משקפיים?

59) 2 קלעים יורים למטרה. ההסתברות שהקלע הראשון יפגע היא 0.9 וההסתברות שהקלע השני יפגע היא 0.6. הקלע הראשון יורה 5 יריות והקלע השני יורה 3 יריות. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שהקלע הראשון יפגע בדיוק ב-2 יריות והקלע השני יפגע רק בירייה אחת במטרה.
- ב. שני הקלעים יפגעו כל אחד 3 פעמים במטרה.
- ג. שני הקלעים לא יפגעו כלל במטרה.
- ד. שני הקלעים יפגעו אותו מספר פגיעות כל אחד במטרה.

60) בכד א' יש 4 כדורים לבנים ו-6 כדורים שחורים. בכד ב' יש 8 כדורים לבנים ו-2 כדורים שחורים. מוציאים באקראי 4 כדורים עם החזרה מכד א' ו-5 כדורים עם החזרה מכד ב'.

- א. הראה כי ההסתברות להוציא שני כדורים לבנים ושני כדורים שחורים מכד א' גדולה פי 54 מההסתברות להוציא כדור לבן אחד ו-4 כדורים שחורים מכד ב'.
- ב. חשב את ההסתברות להוציא 4 כדורים שחורים מכד א' וגם מכד ב'.
- ג. חשב את ההסתברות להוציא 3 כדורים שחורים מכד א' וגם מכד ב'.
- ד. מה היא ההסתברות להוציא לפחות 3 כדורים שחורים מכד א' וגם מכד ב'?

- 61) במשפחה מרובת ילדים 40% מהבנים ו-30% מהבנות היו בחופשה בחו"ל. בוחרים באקראי 5 בנים ו-5 בנות.
- חשב את ההסתברות שבדיוק בן אחד ובת אחת היו בחו"ל.
 - חשב את ההסתברות שבדיוק שני בנים היו בחו"ל ואף אחת מהבנות שנבחרו לא הייתה בחו"ל.
 - חשב את ההסתברות שכל הבנים שנבחרו לא היו בחו"ל ו-2 בנות היו בחו"ל.
 - חשב את ההסתברות שבדיוק 2 מתוך 10 הילדים שנבחרו היו בחו"ל.

- 62) זורקים שתי קוביות משחק – אחת ירוקה והשנייה כחולה, 4 פעמים כל אחת. חשב את ההסתברויות הבאות:
- שיתקבל מספר הגדול מ-4 פעם אחת בקובייה הירוקה ו-3 פעמים בקובייה הכחולה.
 - שיתקבל המספר 5 בשתי הקוביות בכל הזריקות שלהן.
 - שיתקבל מספר זוגי בקובייה הירוקה ב-3 מתוך 4 הזריקות שלה ומספר אי-זוגי בקובייה הכחולה ב-3 מתוך 4 הזריקות שלה.
 - שיתקבל מספר הגדול מ-3 לפחות 3 פעמים בקובייה הירוקה ולכל היותר 3 פעמים בקובייה הכחולה.

תרגילים מורכבים – מציאת ההסתברות להצלחה בניסיון בודד:

- 63) כדי להתקבל למגמת הנדסה במכללת חולון סטודנט צריך לעבור לפחות אחד משני מבחנים. ההסתברות להצליח במבחן הראשון היא 0.2 וההסתברות להצליח במבחן השני היא 0.5. בוחרים 5 סטודנטים שרוצים להתקבל למגמה הנ"ל.
- מה ההסתברות שסטודנט בודד יתקבל למגמה?
 - מה ההסתברות ששניים מתוך 5 הסטודנטים יתקבלו למגמה?
 - מה ההסתברות שלפחות 2 מתוך 5 הסטודנטים יתקבל למגמה?
- 64) בעיר מסוימת המונה 500,000 תושבים, ישנם 300,000 גברים והשאר נשים. ידוע כי 40% מהגברים מעשנים ו-90% מהנשים מעשנות.
- בוחרים תושב באופן אקראי. מה ההסתברות שהוא תושב מעשן?
 - בוחרים 5 מהתושבים הנ"ל.
 - מה ההסתברות שלכל היותר תושב אחד הוא מעשן?
 - מה ההסתברות שכל התושבים שנבחרו הם מעשנים?

- 65) א. מצא את ההסתברות שבמשפחה שבה 5 ילדים יהיו בדיוק 3 בנות אם ידוע כי ההסתברויות להולדת בן ובת זהים.
 ב. מבין כל המשפחות בעיר מסוימת בעלות 5 ילדים ומתוכן 3 בנות, בוחרים באקראי 4 משפחות.
 1. מה ההסתברות שבדיוק ל-3 מהמשפחות הנ"ל יהיו 3 בנות?
 2. מה ההסתברות שלפחות ל-3 משפחות מהמשפחות הנ"ל יהיו 3 בנות?

- 66) בכיתה שבה 45 תלמידים ישנם 18 בנים. בוחרים באקראי 3 תלמידים מהכיתה.
 א. מה ההסתברות שתבחרנה בדיוק שתי בנות?
 ב. חוזרים על התהליך הנ"ל כל חצי שנה.
 מה ההסתברות שבמשך שנתיים יבחרו רק פעם אחת שתי בנות ובן?

תרגילים המכילים התפלגות שבה יותר משתי אפשרויות בניסיון בודד:

- 67) 3 פאות של קובייה הן אדומות. פאה אחת היא כחולה ועוד שתי פאות הן צהובות. זורקים את הקובייה 4 פעמים.
 א. מה ההסתברות לקבל ב-3 מתוך 4 הזריקות צבע אדום?
 ב. מה ההסתברות לקבל לכל היותר פעם אחת צבע כחול?
 ג. מה ההסתברות לקבל בכל 4 הזריקות את הצבע הצהוב?
 ד. מה ההסתברות לקבל צבע זהה בכל 4 הזריקות?

- 68) שחקן שחמט מנוסה מנצח ב-70% מהמשחקים, ב-20% מהם הוא נשאר בתיקו ובשאר הוא מפסיד. השחקן משחק בטורניר 4 משחקים ברצף.
 א. מה ההסתברות שהשחקן ינצח ב-3 מתוך 4 המשחקים?
 ב. מה ההסתברות שהשחקן יסיים בתיקו בכל 4 המשחקים?
 ג. מה ההסתברות שהשחקן יפסיד לכל היותר במשחק אחד?
 ד. מה ההסתברות שהשחקן ינצח לפחות ב-3 משחקים?

- 69) בכד יש 4 כדורים שחורים, 3 כדורים לבנים ו-3 כדורים כחולים. מוציאים עם החזרה 5 כדורים מהכד.
 א. הראה כי ההסתברות שבדיוק 2 כדורים יהיו לבנים זהה להסתברות שבדיוק 2 כדורים יהיו כחולים.
 ב. מה ההסתברות שבדיוק 4 כדורים הם לבנים?
 ג. מה ההסתברות שבדיוק 4 כדורים הם שחורים?
 ד. מה ההסתברות שבדיוק 4 כדורים יהיו מאותו הצבע?

70) אדם מתקשר לחברו. ההסתברות שהחבר יענה לטלפון היא 0.6, ההסתברות שהקו יהיה תפוס היא 0.3 וההסתברות שלא יענה כלל היא 0.1. מתקשרים 4 פעמים. חשב את ההסתברויות הבאות:

- פעמיים בדיוק הקו יהיה תפוס.
- לכל היותר פעם אחת לא יענו.
- החבר יענה לטלפון בכל 4 הפעמים.
- החבר יענה לשיחה לכל היותר 3 פעמים.

71) צובעים את הפאות של סביבון בעל 8 פאות כך: 3 פאות באדום, 2 פאות בכחול, 2 פאות בירוק ופאה אחת בצהוב.

- מה ההסתברות שמתוך 4 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא לא ייפול אף פעם על פאה אדומה?
- מה ההסתברות שמתוך 5 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא ייפול 4 פעמים על פאה כחולה?
- מה ההסתברות שמתוך 3 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא ייפול לפחות פעמיים על פאה צהובה?
- מה ההסתברות שמתוך 4 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא ייפול פעם אחת לכל היותר על פאה ירוקה?

תרגילים הכוללים נעלמים – התפלגות בינומית:

72) אם מוציאים מתוך פס ייצור לקיסמי שיניים 4 קיסמי שיניים ההסתברות שכולם פגומים היא 0.0001.

- מה ההסתברות להוציא קיסם שיניים פגום מפס הייצור?
- מה ההסתברות שמתוך 4 הקיסמים כולם יהיו תקינים?
- מה ההסתברות שמתוך 4 הקיסמים שניים בדיוק יהיו פגומים?

73) מבדיקה של משרד הרישוי נמצא כי מתוך 2000 נבחנים שעשו טסט ראשון, 1400 עברו בהצלחה.

- חשב את ההסתברות להצליח לעבור את בחינת הנהיגה.
- חשב את ההסתברות לבחור 5 תלמידים שמתוכם 3 עברו את בחינת הנהיגה.
- חשב את ההסתברות לבחור 4 תלמידים שמתוכם אף אחד לא עבר את בחינת הנהיגה.

74) אם בוחרים 4 תושבים מעיר מסוימת אז ההסתברות שלפחות אחד מהם ירכיב משקפיים היא 0.8704.

- חשב את ההסתברות שתושב אחד ירכיב משקפיים.
- בוחרים 5 תושבים. מה ההסתברות שלפחות 4 מהם ירכיבו משקפיים?

75) ההסתברות להוציא עפרון מקלמר היא P והיא יותר גדולה מההסתברות להוציא כלי כתיבה אחר. ידוע שמבין שני כלי כתיבה שמוציאים מהקלמר עם החזרה ההסתברות שאחד מהם בדיוק יהיה עפרון היא 0.32.

- א. מצא את P .
- ב. חשב את ההסתברות שמתוך 5 כלי כתיבה שמוציאים מהקלמר אף אחד לא יהיה עפרון.

76) קלע יורה למטרה 4 פעמים. ההסתברות שלו לפגוע בירייה בודדת היא P .

- א. מצא את P אם ידוע כי ההסתברות של הקלע לפגוע פעמיים שווה להסתברות שלו לפגוע 3 פעמים.
- ב. מצא את ההסתברות של הקלע לפגוע פעם אחת במטרה.

77) בעיר מסוימת ההסתברות שלמשפחה יהיה מחשב בבית היא P . בוחרים באקראי 5 משפחות מעיר זו.

- א. מצא את P אם ידוע כי ההסתברות שלשתי משפחות בדיוק יהיה מחשב קטנה פי 4 מההסתברות של-3 משפחות יהיה מחשב.
- ב. הראה כי ההסתברות של-4 משפחות בדיוק יהיה מחשב גדולה פי 2 מההסתברות של-3 משפחות בדיוק יהיה מחשב.

78) ההסתברות להצליח במבחן מסוים היא P . ידוע שאם בוחרים 3 תלמידים אז ההסתברות שלושתם יעברו את המבחן קטנה פי 16 מ- P .

- א. מצא את P .
- ב. חשב את ההסתברות ששלושתם יכשלו במבחן.

טבלה זו מימדית:

תרגילים הכוללים הסתברות מותנה:

79) בעיר מסוימת 70% מהתושבים תומכים בקיום פעילויות אחה"צ לילדים. ל-60% מהתושבים יש ילדים בבית ול-40% אין ילדים כלל. ל-36% מהתושבים יש ילדים והם תומכים בקיום פעילויות אחה"צ.

- א. מה הוא אחוז התושבים שאינם תומכים בקיום פעילויות אחה"צ ויש להם ילדים?
- ב. מה הוא אחוז התומכים בקיום הפעילויות מבין התושבים שיש להם ילדים?
- ג. מה הוא אחוז התושבים שאינם תומכים בקיום פעילויות אחה"צ לילדים מבין התושבים שאין להם ילדים?

80 במכללה המונה 16,000 סטודנטים, נערכו שני מבחני סוף סמסטר. 9600 סטודנטים עברו את המבחן הראשון ו-20% מהם עברו את השני. 1920 סטודנטים עברו את שני המבחנים.

- א. מה הוא אחוז הסטודנטים שלא עברו אף מבחן?
- ב. מה הוא אחוז הסטודנטים שעברו את המבחן הראשון מבין אלו שעברו את המבחן השני?
- ג. מה הוא אחוז הסטודנטים שעברו את המבחן השני מבין אלו שעברו את המבחן הראשון?
- ד. מה הוא אחוז הסטודנטים שלא עברו אף מבחן מבין אלו שלא עברו את המבחן הראשון?

81 בחברה מסוימת מספר הנשים גדול פי 3 ממספר הגברים. ידוע כי ההסתברות לבחור עובד שהוא מרכיב משקפיים היא 0.4. 30% מבין העובדים שמרכיבים משקפיים הם גברים.

- א. מה ההסתברות לבחור עובד שהוא אישה שאינה מרכיבה משקפיים?
- ב. בוחרים עובד באקראי, ידוע שנבחר גבר. מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?
- ג. בוחרים עובד באקראי, ידוע שהעובד שנבחר מרכיב משקפיים. מה ההסתברות שזו אישה?

82 במדינה מסוימת 60% מהאזרחים בעד הממשלה ו-40% הם נגד. 48% מהאזרחים הם גמלאים ו-25% מהגמלאים בעד הממשלה.

- א. מה הוא אחוז האזרחים שאינם גמלאים מבין אלה שנגד הממשלה?
- ב. בוחרים אזרח באקראי. ידוע כי הוא בעד הממשלה. מה ההסתברות שהוא לא גמלאי?
- ג. בוחרים אזרח באקראי. ידוע כי הוא נגד פעולות הממשלה. מה ההסתברות שהוא גמלאי?

83 מחצית מתלמידי התיכון נעזרים במורים פרטיים.

בסוף השנה נערך מבחן מסכם והתברר כי 60% מבין התלמידים שנעזרו במורים פרטיים עברו את המבחן בהצלחה. 20% מהתלמידים שלא נעזרו במורים פרטיים נכשלו במבחן.

- א. איזה אחוז מתלמידי התיכון עברו את המבחן בהצלחה?
- ב. איזה אחוז מבין התלמידים שלא נעזרים במורים פרטיים עברו את המבחן?
- ג. בוחרים באופן אקראי תלמיד. ידוע כי הוא נכשל במבחן. מה ההסתברות שהוא לא נעזר במורים פרטיים?

- 84) מספר הבנות במכללה גדול פי 1.5 ממספר הבנים. 20% מהבנים לומדים מקצוע הומאני, ו-36% מכלל הסטודנטים לומדים מקצוע ריאלי.
- א. מה הוא אחוז הבנות שלומדות מקצוע ריאלי?
 ב. בוחרים באופן אקראי סטודנט. ידוע כי נבחרה בת.
 מה ההסתברות שהיא לומדת מקצוע הומאני?
 ג. מה הוא אחוז הבנים מבין כל אלו שלומדים מקצוע הומאני?

תרגילים הניתנים לפתירה גם על ידי דיאגרמת עץ:

- 85) במפעל מסוים $\frac{3}{7}$ מהעובדים הם נשים ו- $\frac{4}{7}$ הם גברים.
- 70% מהנשים הן מעשנות ו- $\frac{7}{8}$ מהגברים מעשנים.
- א. מה הוא אחוז העובדים שלא מעשנים במפעל?
 ב. בוחרים עובד וידוע כי נבחר עובד מעשן. מה ההסתברות שזו אישה?
 ג. מבין העובדים שלא מעשנים, מה ההסתברות לבחור גבר?
- 86) בכפר מסוים $\frac{2}{3}$ מהתושבים הם גברים ו- $\frac{1}{3}$ הם נשים.
- ידוע כי 60% מהגברים מרכיבים משקפיים ו-25% מהנשים לא מרכיבות משקפיים.
- א. מה ההסתברות להיתקל בגבר שלא מרכיב משקפיים בכפר?
 ב. בוחרים באקראי תושב. ידוע כי נבחרה אישה.
 מה ההסתברות שהיא מרכיבה משקפיים?
 ג. בוחרים באקראי תושב.
1. מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?
 2. פי כמה גדול אחוז הגברים שמרכיבים משקפיים מאחוז הנשים שמרכיבות משקפיים?

- 87) בכד יש 8 כדורים כחולים ו-4 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי בלי החזרה שני כדורים מהכד.
- א. מה ההסתברות להוציא שני כדורים כחולים?
 ב. מה ההסתברות שהכדור השני שיצא הוא כחול?
 ג. אם ידוע שהכדור השני שהוצא הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון גם יהיה כחול?

- 88) בכד יש 10 כדורים צהובים ו-4 כדורים שחורים.
- מוציאים באקראי בלי החזרה שני כדורים מהכד.
- א. מה ההסתברות להוציא שני כדורים צהובים?
 ב. מה ההסתברות שהכדור השני שיצא הוא צהוב?
 ג. אם ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא צהוב, מה ההסתברות שגם הראשון הוא צהוב?

89) בכד א' יש 5 כדורים לבנים ו-3 כדורים שחורים. בכד ב' יש 4 כדורים לבנים וכדור אחד שחור. מוציאים כדור מכד א'. אם הוא שחור אז מוציאים כדורים נוסף מכד א' ואם הוא לבן אז מוציאים כדור מכד ב'. ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא שחור. חשב את ההסתברות שהכדור הוצא מכד ב'.

90) בכד א' יש 3 כדורים ירוקים ו-2 כדורים אדומים. בכד ב' יש 4 כדורים ירוקים וכדור אחד אדום. מוציאים כדור מכד א'. אם הוא ירוק אז מוציאים כדור נוסף מכד א' ואם הוא אדום אז מוציאים כדור מכד ב'. ידוע שהכדור השני שהוצא הוא אדום. מה ההסתברות שהוא הוצא מכד א'?

91) בכד יש 5 כדורים אדומים, 3 כדורים כחולים ו-2 כדורים צהובים. מוציאים בלי החזרה שני כדורים מהכד.

- א. מה ההסתברות להוציא שני כדורים אדומים?
- ב. מה ההסתברות להוציא שני כדורים מאותו הצבע?
- ג. ידוע כי שני הכדורים שהוצאו הם מאותו הצבע, מה ההסתברות שהם אדומים?

92) בכד יש 6 כדורים אדומים, 3 כדורים לבנים ו-2 כדורים סגולים. מוציאים בלי החזרה שני כדורים מהכד. ידוע כי שני הכדורים שהוצאו הם בעלי אותו הצבע, מה ההסתברות ששניהם סגולים?

- 93)** קלע יורה שתי יריות למטרה. ההסתברות שיפגע בירייה הראשונה היא 0.6. אם הוא פגע בירייה הראשונה אז ההסתברות שיפגע גם בשנייה היא 0.8. אם הוא החטיא בירייה הראשונה אז ההסתברות שיפגע בשנייה היא 0.5.
- א. מה ההסתברות שהקלע יפגע בירייה אחת בדיוק?
 - ב. מה ההסתברות שהקלע יפגע בירייה השנייה?
 - ג. ידוע כי הקלע פגע בירייה השנייה, מה ההסתברות שהוא פגע גם בירייה הראשונה?
 - ד. ידוע כי הקלע פגע בירייה השנייה, מה ההסתברות שהוא פגע במטרה פעם אחת בדיוק?

- 94)** בארץ מסוימת כל יום הוא יום שמש או יום גשום. ההסתברות ליום שמש לאחר יום שמש היא 0.4 וההסתברות ליום גשום לאחר יום גשום היא 0.7. ביום ראשון היה גשום.
- א. מה ההסתברות שהיום השלישי יהיה גם גשום?
 - ב. ידוע כי היום השלישי הוא גשום, מה ההסתברות שהיום השני יהיה יום שמש?

תרגילים בהסתברות מותנה ונוסחת בייס עם נעלם אחד:

95) בעיר מסוימת המונה 200,000 תושבים ידוע כי 120,000 מהם מרכיבים משקפיים. מחצית מהתושבים שמעשנים הם מרכיבים משקפים ו-20% מהתושבים שמרכיבים משקפיים הם מעשנים.

- מהו אחוז התושבים שמעשנים?
- מהו אחוז התושבים שמעשנים ומרכיבים משקפיים?
- מהו אחוז התושבים שלא מעשנים ולא מרכיבים משקפיים?

96) 45% מהסטודנטים באוניברסיטה משתמשים במחשב נייד והשאר משתמשים

במחברות. $\frac{4}{9}$ מבין הסטודנטים שמתמשים במחשב נייד אינם מרכיבים

משקפיים והסטודנטים שמתמשים במחברות ולא מרכיבים משקפיים מהווים 60% מכלל הסטודנטים שלא מרכיבים משקפיים.

- מהו אחוז הסטודנטים שמתמשים במחשב נייד ולא מרכיבים משקפיים?
- מהו אחוז הסטודנטים שמתמשים במחברות מבין אלו שמרכיבים משקפיים?
- מה ההסתברות לבחור סטודנט שלא מרכיב משקפיים?

97) בחברה מסוימת עובדים פי 4 גברים מנשים.

ל-75% מהגברים אין תואר שני ו- $\frac{6}{7}$ מבין העובדים בלי תואר שני הם גברים.

- מהו אחוז הגברים בחברה בלי תואר שני?
- בוחרים באקראי עובד. ידוע כי יש לו תואר שני. מה ההסתברות שזו אישה?
- הראה כי ההסתברות להיתקל באקראי באישה העובדת בחברה זהה להסתברות להיתקל בגבר עם תואר שני.

98) במפעל מסוים יש פי 3 עובדים גברים מנשים. ל- $\frac{2}{7}$ מהנשים יש רישיון נהיגה

ומספר הגברים בעלי הרישיון במפעל מהווים $\frac{6}{7}$ מכלל העובדים עם רישיון.

- הראה כי למחצית מהעובדים יש רישיון נהיגה.
- מה ההסתברות לבחור גבר מבין העובדים בלי רישיון נהיגה?
- מה ההסתברות לבחור אישה בלי רישיון מבין כל הנשים העובדות במפעל?

תרגילים בהסתברות מותנה ונוסחת בייס עם שני נעלמים:

- 99) בעיר מסוימת 45% מהתושבים הם גברים ו-55% הם נשים. $\frac{3}{8}$ מבין מרכיבי המשקפים בעיר הם גברים ו-50% מהתושבים שאינם מרכיבים משקפיים הם נשים.
- מהו אחוז מרכיבי המשקפיים בעיר?
 - בוחרים באקראי תושב. ידוע כי הוא גבר. מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?
 - פי כמה גדולה ההסתברות לפגוש אישה שלא מרכיבה משקפיים מגבר שמרכיב משקפיים?

- 100) במשחק כדורגל 27% מהצופים הם ילדים והשאר מבוגרים. 40% מבין האוהדים של קבוצה א' הם ילדים ו-80% מבין האוהדים של קבוצה ב' הם מבוגרים. לאיזו קבוצה יש יותר אוהדים?

תרגילים הכוללים טבלה עם שלוש עמודות:

- 101) בארץ מסוימת יש 3 מפלגות – מפלגה א', ב' ו-ג'. בבחירות מצביעים גברים ונשים. ידוע כי 55% מהאזרחים הם גברים. 60% מהאזרחים הצביעו למפלגה א'. 15% הצביעו למפלגה ב' ו-25% הצביעו למפלגה ג'. 75% מבין המצביעים למפלגה א' הם גברים ו-80% מבין המצביעים למפלגה ג' הם נשים.
- מצא איזה חלק מהגברים הצביע למפלגה א'.
 - מצא איזה חלק מהנשים הצביע למפלגה ב'.

- 102) במפעל מסוים מייצרים שוקולד ווניל על ידי 3 מכונות. מכונה א' מייצרת 80% מהמוצרים. מכונה ב' מייצרת 6% מהמוצרים ומכונה ג' מייצרת 14%. ידוע כי מכונה א' מייצרת 80% ממוצרי הווייל ומכונה ב' מייצרת פי 5 יותר ממוצרי הווייל מאשר מוצרי השוקולד. סך כל מוצרי הווייל שהמפעל מייצר הם 76% מכלל המוצרים.
- מהו אחוז מוצרי השוקולד המיוצרים על ידי מכונה ב' ?
 - איזה חלק מבין מוצרי השוקולד מיוצרים על ידי מכונה א' ?
 - איזה חלק מבין המוצרים של מכונה ג' מהווים מוצרי הווייל ?

- 103) במשק יש תרנגולים, אפרוחים ואווזים מפותמים. עקב בצורת קשה 47% מהעופות איבדו משקל רב. אחוז האווזים במשק הוא 20%. ידוע כי 75% מהאפרוחים ומהאווזים ירדו במשקל ו-1/6 מהתרנגולות ירדו גם כן במשקל.
- מה הוא אחוז התרנגולים במשק?
 - מה ההסתברות לבחור תרנגול שלא איבד משקל כלל?
 - בוחרים עוף מהמשק. ידוע כי הוא לא איבד משקל כלל. מה ההסתברות שהוא אפרוח?

תרגילי חישוב הכוללים שימוש בנוסחאות בהסתברות:

104 A ו-B הם שני מאורעות בלתי תלויים בניסוי מקרי. נתון: $P(A) = 0.9$, $P(B) = 0.4$.
 חשב את: א. $P(A \cap B)$ ב. $P(A \cup B)$.

105 A ו-B הם שני מאורעות בלתי תלויים בניסוי מקרי.
 נתון: $P(A \cap B) = 0.3$, $P(B) = 0.5$. חשב את:

א. $P(A)$

ב. $P(A \cup B)$

ג. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

ד. $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ (רמז: אם A ו-B בלתי תלויים אז גם \bar{A} ו- \bar{B} בלתי תלויים).

106 A ו-B הם שני מאורעות בלתי תלויים בניסוי מקרי.
 נתון: $P(A) = 0.8$, $P(A \cup B) = 0.92$. חשב את:

א. $P(B)$

ב. $P(A \cap B)$

ג. הראה כי מתקיים התנאי: $P(A/B) = P(A)$.

107 A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(\bar{B}) = 0.75$, $P(A) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.1$.

א. הוכח כי המאורעות A ו-B הם בלתי תלויים.

ב. חשב את: $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

(הסתמך על הטענה כי אם A ו-B בלתי תלויים אז גם \bar{A} ו- \bar{B} בלתי תלויים).

108 A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(A/B) = \frac{3}{4}$, $P(B/A) = \frac{3}{8}$. חשב את:

א. $P(A)$

ב. $P(A \cap B)$

ג. $P(A \cup B)$

109 A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $\frac{P(A/B)}{P(B/A)} = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{14}{15}$, $P(A \cap B) = \frac{4}{15}$.

חשב את $P(A)$ ואת $P(B)$.

110 A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $\frac{P(A/B)}{P(B/A)} = \frac{2}{5}$, $P(A \cup B) = 0.55$, $P(A \cap B) = 0.15$.
חשב את $P(A)$ ואת $P(B)$.

111 A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(A \cup B) = 0.72$, $P(A \cap B) = 0.18$, $P(A) > P(B)$.
חשב את $P(A)$ ואת $P(B)$ אם ידוע כי המאורעות A ו-B הם בלתי תלויים.

112 A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(A \cup B) = 0.86$, $P(A \cap B) = 0.24$, $P(A) > P(B)$.
חשב את $P(A)$ ואת $P(B)$ אם ידוע כי המאורעות A ו-B הם בלתי תלויים.

תרגילי הוכחה בעזרת נוסחאות ההסתברות:

113 A ו-B הם מאורעות הניסוי מקרי. נתון: $A \subseteq B$.

א. הוכח: $P(A) = P(A/B) \cdot P(B)$.

ב. A ו-B הם מאורעות תלויים.

114 A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. הוכח:

א. $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$

ב. $P(A \cap \bar{B}) = P(A)(1 - P(B/A))$

115 A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. הוכח: $P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$.

116 A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. נתון: $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.9$. הוכח:

א. $0.9 \leq P(A \cup B) \leq 1$

ב. $0.6 \leq P(A \cap B) \leq 0.7$

117 A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. נתון: $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.7$. הוכח:

א. $0.1 \leq P(A \cap B) \leq 0.4$

ב. $0.7 \leq P(A \cup B) \leq 1$

(118) בניסוי מקרי ההסתברות למאורע A היא: $P(A) = 0.4$ וההסתברות

למאורע B היא: $P(B) = 0.2$. הוכח:

א. $0.4 \leq P(\bar{A} \cap \bar{B}) \leq 0.6$

ב. $0.8 \leq P(\bar{A} \cup \bar{B}) \leq 1$

(119) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. נתון: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.8$. הוכח:

א. $0.1 \leq P(A \cap B) \leq 0.3$

ב. $\frac{1}{3} \leq P\left(\frac{B}{A}\right) \leq 1$

ג. $\frac{1}{8} \leq P\left(\frac{A}{B}\right) \leq \frac{3}{8}$

(120) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי שמרחב המדגם שלו הוא Ω . הוכח:

א. $\bar{A} \cap \bar{B} = \Omega - A \cup B$

ב. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

ג. אם A ו-B הם מאורעות בלתי תלויים אז גם \bar{A} ו- \bar{B} יהיו בלתי תלויים.

(121) א. הוכח בעזרת דיאגרמת וון את הנוסחה:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ב. הוכח בעזרת דיאגרמת וון כי כאשר A ו-B הם קבוצות זרות

אז מתקיים: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(122) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

הוכח כי הנתונים הבאים הם בלתי אפשריים לקיום:

$$P(\bar{A}) = 0.6, P(B) = 0.8, P(\bar{A} \cap B) = 0.7$$

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.1288 ב. 0.7912 ג. 0.0112 (2) א. $\frac{1}{64}$ ב. $\frac{9}{64}$ ג. $\frac{9}{32}$ (3) א. $\frac{9}{25}$ ב. $\frac{13}{25}$ ג. $\frac{2}{5}$
- (4) א. $\frac{1}{9}$ ב. $\frac{29}{81}$ ג. $\frac{49}{81}$ ד. $\frac{2}{9}$ (5) א. 0.116 ב. 0.432 ג. 0.568 ד. 0.876
- (6) א. $\frac{1}{512}$ ב. $\frac{135}{512}$ ג. $\frac{23}{128}$ (7) א. 0.15 ב. 0.15 ג. 0.63 (8) א. $\frac{3}{28}$ ב. $\frac{295}{448}$ ג. $\frac{223}{448}$
- (9) א. $\frac{1}{7}$ ב. $\frac{1}{21}$ ג. $\frac{4}{21}$ (10) א. $\frac{1}{29}$ ב. $\frac{24}{145}$ ג. 0.2 ד. $\frac{97}{145}$ (11) א. $\frac{253}{1435}$ ב. $\frac{71}{287}$ ג. $\frac{1182}{1435}$ ד. $\frac{561}{1435}$
- (12) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{29}{30}$ ג. $\frac{2}{3}$ (13) א. 0.448 ב. 0.072 ג. 0.164 ד. 0.212
- (14) א. 0.384 ב. 0.056 ג. 0.176 ד. 0.964 (15) א. 0.24 ב. 0.24 ג. 0.4 ד. 0.4
- (16) א. 0.16 ב. 0.72 ג. 0.36 ד. 0.28 (17) א. 0.28 ב. 0.36 ג. 0.04
- (18) א. 0.03 ב. 0.47 ג. 0.33 (19) א. 0.315 ב. 0.4825 ג. 0.45 (20) א. $\frac{52}{105}$ ב. $\frac{39}{70}$ ג. $\frac{64}{117}$
- (21) א. $\frac{1}{2}$ ב. $\frac{23}{54}$ ג. $\frac{19}{27}$ ד. $\frac{8}{27}$ (22) א. $\frac{73}{405}$ ב. $\frac{118}{405}$ ג. $\frac{191}{405}$ (23) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{32}{135}$ ג. $\frac{52}{75}$ ד. $\frac{37}{75}$
- (24) $\frac{115}{143}$ (25) $P=0.6$ (26) $P=0.2$ (27) $P=0.2$ (28) $P=0.2$ (29) $P_1=0.9, P_2=0.3$
- (30) א. $P=0.3$ ב. 0.28 (31) א. $P=0.5$ ב. 0.3796 (32) $P=0.4$
- (33) א. $P=0.3, Q=0.4$ ב. 0.33 ג. 0.51 (34) $P=0.7, Q=0.6$ (35) $x=10$
- (36) 4 (37) 2 (38) 12 (39) $x=4$ (40) $x=2$ (41) $x=5$ (42) 5 אדומים ו-3 לבנים.
- (43) 8 כחולים ו-2 צהובים. (44) 3 סגולים ו-6 ירוקים.
- (45) א. 0.3456 ב. 0.1296 ג. 0.8208 ד. 0.0256
- (46) א. 0.3087 ב. 0.16807 ג. 0.36015 ד. 0.83692
- (47) א. 0.03078 ב. 0.52822 ג. 0.1323 ד. 0.96922
- (48) א. 0.3456 ב. 0.1536 ג. 0.1792 ד. 0.6544
- (49) א. 0.0256 ב. 0.0272 ג. 0.8192 ד. 0.1536 (50) 0.4752
- (51) א. 0.3456 ב. 0.3456 ג. 0.4752 ד. 0.0256 (52) א. $\frac{17}{81}$ ב. $\frac{32}{81}$ ג. $\frac{64}{81}$
- (53) א. $\frac{1}{1296}$ ב. $\frac{25}{216}$ ג. $\frac{3}{8}$ ד. $\frac{1}{81}$ (54) א. $\frac{1}{1296}$ ב. $\frac{25}{216}$ ג. $\frac{3}{8}$ ד. $\frac{1}{81}$ (55) א. $\frac{1}{243}$ ב. $\frac{40}{243}$ ג. $\frac{1}{27}$ ד. $\frac{19}{27}$
- (56) 0.21609 (57) $\frac{5}{1944}$ (58) א. 0.1536 ב. 0.52822 ג. 0.08113
- (59) א. 0.0023 ב. 0.0157 ג. $6.4 \cdot 10^{-7}$ ד. 0.0193 (60) א. 0.00082 ב. 0.0176 ג. 0.02752 ד. 0.017543
- (61) א. 0.09335 ב. 0.05808 ג. 0.024 ד. 0.17543
- (62) א. $\frac{256}{6561}$ ב. $5.95 \cdot 10^{-7}$ ג. 0.0625 ד. 0.2929 (63) א. $P=0.6$ ב. 0.2304 ג. 0.91296
- (64) א. $P=0.6$ ב. 0.08704 ג. 0.07776 ד. 0.09346 (65) א. $P=\frac{5}{16}$ ב. 0.08392 ג. 0.09346
- (66) א. $\frac{1053}{2365}$ ב. 0.304 (67) א. $\frac{1}{4}$ ב. 0.86805 ג. $\frac{1}{81}$ ד. 0.0756
- (68) א. 0.4116 ב. 0.0016 ג. 0.9477 ד. 0.6517

- 0.1335 .ט 0.0768 .ג 0.02835 .ב (69
- $\frac{189}{256}$.ט $\frac{11}{256}$.ג $\frac{15}{1024}$.ב $\frac{625}{4096}$.א (71 0.8074 .ט 0.1296 .ג 0.9477 .ב 0.2646 .א (70
- 0.0081 .ג 0.3087 .ב $P=0.7$.א (73 0.0486 .ג 0.6561 .ב $P=0.1$.א (72
- 0.1536 .ב $P=0.6$.א (76 0.00032 .ב $P=0.8$.א (75 0.08704 .ב $P=0.4$.א (74
- 0.15% .ג 60% .ב 24% .א (79 $\frac{27}{64}$.ב $P=\frac{1}{4}$.א (78 $P=0.8$.א (77
- 0.7 .ג 0.48 .ב 0.47 .א (81 80% .ט 20% .ג 60% .ב 32% .א (80
- 12.5% .ג $P=\frac{14}{15}$.ב 4% .א (84 $\frac{1}{3}$.ג 80% .ב 70% .א (83 0.9 .ג 0.8 .ב 10% .א (82
- 1.6 .2 $P=0.65$.1 .ג $P=0.75$.ב $P=\frac{4}{15}$.א (86 $P=\frac{5}{14}$.ג $P=0.375$.ב 20% .א (85
- $P=\frac{7}{13}$ (89 $P=\frac{9}{13}$.ג $P=\frac{5}{7}$.ב $P=\frac{45}{91}$.א (88 $P=\frac{7}{11}$.ג $P=\frac{2}{3}$.ב $P=\frac{14}{33}$.א (87
- $P=\frac{1}{19}$ (92 $P=\frac{5}{7}$.ג $P=\frac{14}{45}$.ב $P=\frac{2}{9}$.א (91 $P=\frac{15}{19}$ (90
- $P=\frac{18}{67}$.ב $P=0.67$.א (94 $P=\frac{5}{17}$.ט $P=\frac{12}{17}$.ג $P=0.68$.ב $P=0.32$.א (93
- $P=\frac{1}{3}$.ב 60% .א (97 $P=0.5$.ג 50% .ב 20% .א (96 28% .ג 12% .ב 24% .א (95
- 0.2 .ב (100 $P=\frac{1}{3}$.ג 40% .א (99 $P=\frac{5}{7}$.ג $P=\frac{9}{14}$.ב (98
- $\frac{8}{53}$.ג $P=0.4$.ב 48% .א (103 $\frac{51}{70}$.ג 0.8 .ב 1% .א (102 $P=\frac{2}{9}$.ב $P=\frac{9}{11}$.א (101
- 0.48 .ב 0.6 .א (106 0.7 .ט 0.2 .ג 0.8 .ב 0.6 .א (105 0.94 .ב 0.36 .א (104
- $P(A)=0.4$, $P(B)=0.8$ (109 0.88 .ג 0.32 .ב 0.8 .א (108 0.9 .ב (107
- $P(A)=0.8$, $P(B)=0.3$ (112 $P(A)=0.3$, $P(B)=0.6$ (111 $P(A)=0.2$, $P(B)=0.5$ (110

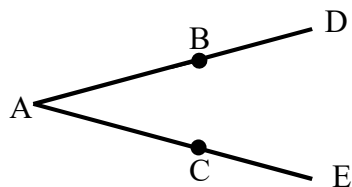
תוכן העניינים – גיאומטריה:

101	פרק 6 – מבוא לגיאומטריה של המישור:
101	ישרים וזוויות:
101	שאלות – חיבור וחסור קטעים:
101	שאלות – חישובי זוויות וחיבור וחסור זוויות:
102	שאלות – זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:
103	שאלות - זוויות בין ישרים מקבילים:
105	תשובות סופיות:

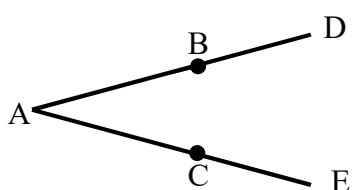
פרק 6 – מבוא לגיאומטריה של המישור:

ישרים וזוויות:

שאלות – חיבור וחסור קטעים:



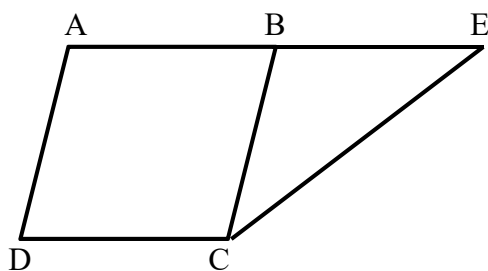
- (1) באיור שלפניך נתון: $AB = AC$, $BD = CE$.
הוכח: $AD = AE$.



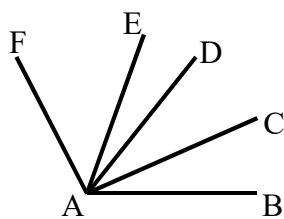
- (2) באיור שלפניך נתון: $AD = AE$, $AB = AC$.
הוכח: $BD = CE$.



- (3) הנקודות A, M, N, K, B נמצאות על ישר אחד.
נתון כי: $AM = KB$, $MN = NK$.
הוכח: $AN = BN$.

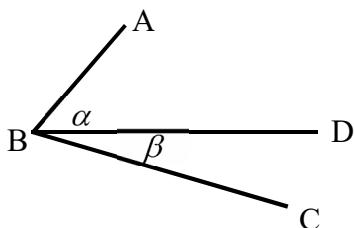


- (4) בסרטוט שלפניך נתון
כי: $BC = AB$, $BE + BC = 2AB$.
הוכח: $AB = BE$.

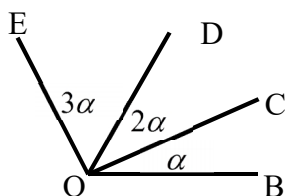


שאלות – חישובי זוויות וחיבור וחסור זוויות:

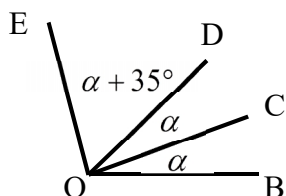
- (5) נתון: $\angle FAE = 2 \cdot \angle EAD$, $\angle CAB = \angle DAC$.
וכן: $\angle EAB = 80^\circ$, $\angle FAD = 60^\circ$.
חשב את הזוויות הבאות:
 $\angle FAB$, $\angle EAC$, $\angle CAB$.



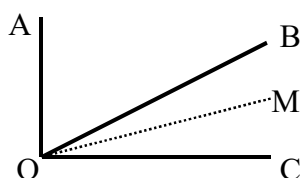
- (6) באיור שלפניך נתון: $\angle ABC = 69^\circ$.
נתון כי: $\alpha = 2\beta$ (זוויות סמוכות).
מצא את α ואת β .



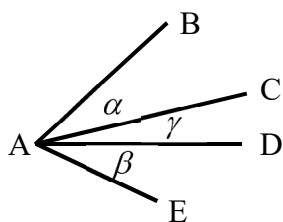
- 7) באיור שלפניך מספר קרניים היוצאים מהנקודה O.
 הנתונים הם: $\angle EOB = 138^\circ$.
 חשב את הזוויות הבאות:
 $\angle EOD$, $\angle DOC$, $\angle COB$



- 8) באיור שלפניך נתון: $\angle EOB = 110^\circ$.
 שאר הנתונים מופיעים בתרשים.
 חשב את הזוויות הבאות:
 $\angle EOC$, $\angle DOC$

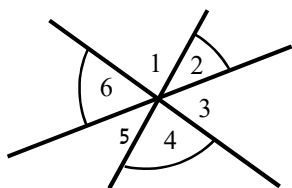


- 9) נתון האיור הבא ובו: $\angle AOC = 90^\circ$.
 OM חוצה את זווית BOC.
 מתקיים: $\angle AOB = 3\angle MOC$.
 חשב את: $\angle AOM$, $\angle BOM$

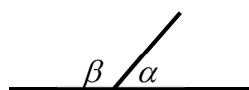


- 10) בסרטוט שלפניך נתון: $\alpha = \beta$.
 הוכח כי: $\angle BAD = \angle EAC$

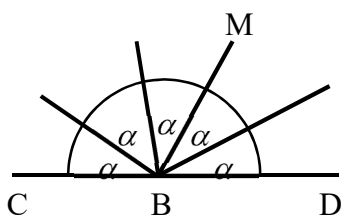
שאלות – זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:



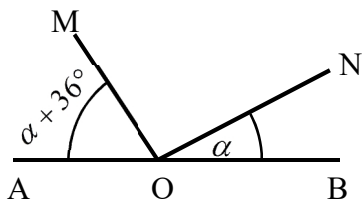
- 11) חשב את סכום הזוויות הבאות (נמק):
 $\angle 2 + \angle 4 + \angle 6$



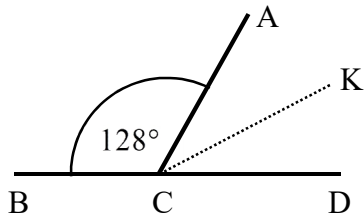
- 12) באיור שלפניך הזוויות α ו- β הן זוויות צמודות.
 ידוע כי: $\alpha = 63^\circ$. מצא את זווית β .



- 13) באיור שלפניך הזווית CBD היא שטוחה.
 כל הזוויות שוות ל- α .
 א. חשב את α .
 ב. חשב את זווית CBM.



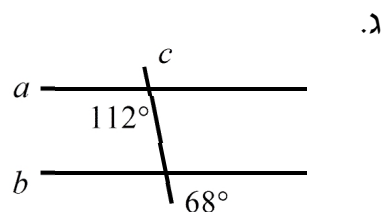
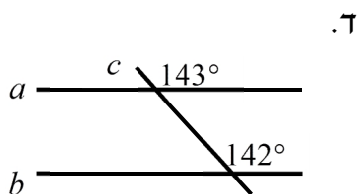
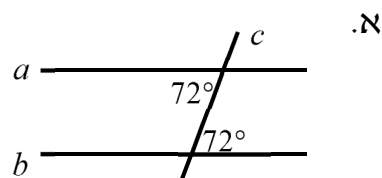
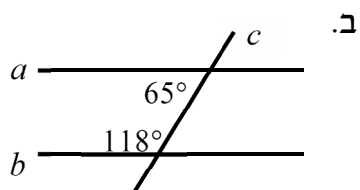
14) בסרטוט שלפניך ידוע:
 הזווית AOB היא שטוחה.
 נתון: $\alpha = 27^\circ$.
 הוכח כי: $MO \perp NO$.



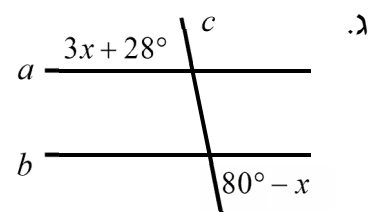
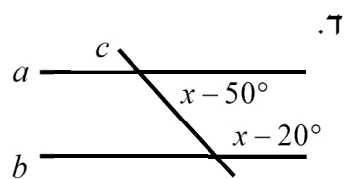
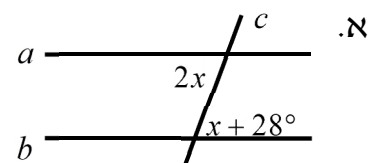
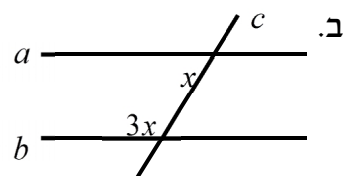
15) הזוויות $\sphericalangle ACB$ ו- $\sphericalangle ACD$ הן צמודות.
 ידוע כי CK חוצה זווית ACD.
 כמו כן: $\sphericalangle ACB = 128^\circ$.
 חשב את זווית BCK.

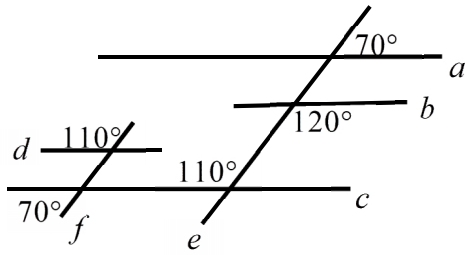
שאלות - זוויות בין ישרים מקבילים:

16) קבע בכל מקרה האם הישרים a ו-b מקבילים או שלא. נמק.



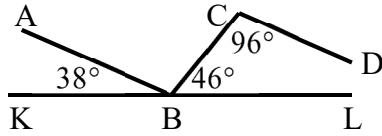
17) הישרים a ו-b מקבילים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:





18) מצא את זוגות הישרים המקבילים בסרטוט הבא. נמק.

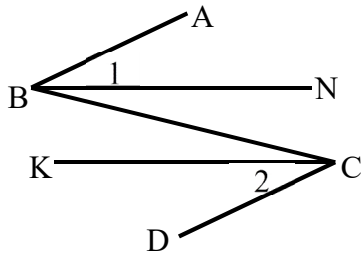
19) בסרטוט שלפניך נתון כי KL הוא קו ישר. שאר הזוויות מופיעות בתרשים. הוכח כי: $AB \parallel CD$.



20) באיור שלפניך נתון כי:

$$\angle B_1 = \angle C_2, \angle ABC = \angle BCD$$

הוכח כי: $BN \parallel CK$.



21) באיור שלפניך מופיע קטע ישר DE.

מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.

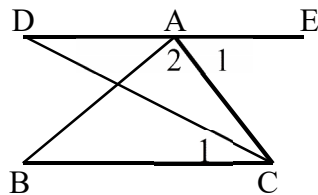
מחברים את BC וידוע כי: $BC \parallel DE$.

מעבירים את CD - חוצה זווית C.

$$\text{נתון: } \angle A_1 = 68^\circ, \angle A_2 = 85^\circ$$

א. חשב את הזווית $\angle C_1$.

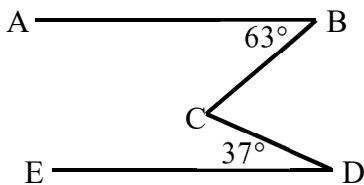
ב. חשב את הזווית $\angle B$.



22) בסרטוט שלפניך נתון:

$$\angle D = 37^\circ, \angle B = 63^\circ, AB \parallel DE$$

חשב את גודל הזווית BCD.



תשובות סופיות:

5 $\angle FAB = 120^\circ$, $\angle EAC = 50^\circ$, $\angle CAB = 30^\circ$

6 $\alpha = 46^\circ$, $\beta = 23^\circ$

7 $\angle BOC = 23^\circ$, $\angle COD = 46^\circ$, $\angle DOE = 69^\circ$

8 $\angle EOC = 85^\circ$, $\angle DOC = 25^\circ$

9 $\angle AOM = 72^\circ$, $\angle BOM = 18^\circ$

11 180°

12 $\beta = 117^\circ$

13 א. $\alpha = 36^\circ$. ב. $\angle CBM = 108^\circ$

15 $\angle BCK = 154^\circ$

16 א. כן . ב. לא . ג. כן . ד. לא.

17 א. 28° . ב. 45° . ג. 13° . ד. 125°

18 $a \parallel c \parallel d$, $e \parallel f$

21 א. 34° . ב. 27°

22 $\angle BCD = 100^\circ$

תוכן העניינים:

107	פרק 7 – גיאומטריה אוקלידית - משולשים:
107	משולש כללי, משולש שווה שוקיים ומשולש שווה צלעות:
108	שאלות – זוויות במשולשים:
111	שאלות – משולש שווה שוקיים:
112	חפיפת משולשים:
112	שאלות – חפיפת משולשים:
117	זווית חיצונית במשולש:
117	שאלות – זווית חיצונית במשולש:
117	משולש ישר זווית:
118	שאלות – משולש ישר זווית:
119	קטעים מיוחדים במשולש:
119	שאלות – קטע אמצעים במשולש:
121	שאלות – מפגש תיכונים במשולש:
122	תשובות סופיות:

פרק 7 – גיאומטריה אוקלידית - משולשים:

משולש כללי, משולש שווה שוקיים ומשולש שווה צלעות:

סוגי משולשים:

ניתן למיין את המשולשים לפי זוויות או לפי צלעות.
לפי זוויות:

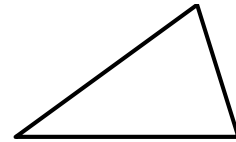
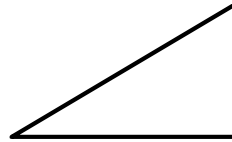
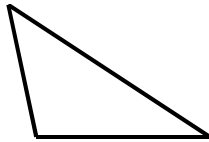
1. משולש חד זווית – משולש שכל זוויותיו חדות.
2. משולש ישר זווית – משולש בעל זווית ישרה.
3. משולש קהה זווית – משולש בעל זווית קהה.

לפי צלעות:

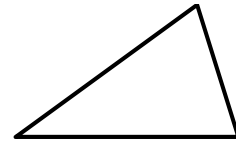
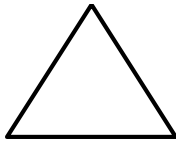
4. משולש שונה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שונות באורכן.
5. משולש שווה שוקיים – משולש שבו שתי צלעות שוות.
6. משולש שווה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שוות באורכן.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:

1. משולש חד זווית: 2. משולש ישר זווית: 3. משולש קהה זווית:



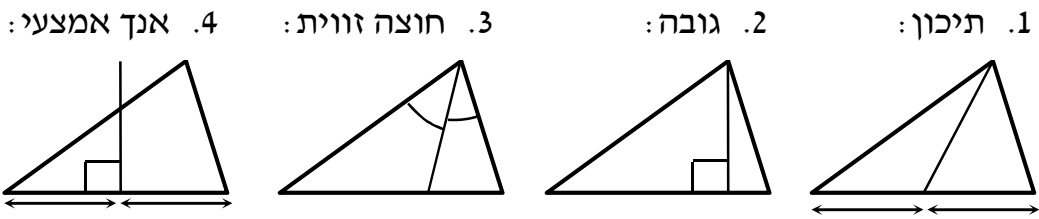
4. משולש שונה צלעות: 5. משולש שווה שוקיים: 6. משולש שווה צלעות:



קטעים מיוחדים במשולשים:

1. תיכון – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.
2. גובה – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו ומאונך לה.
3. חוצה זווית – קטע היוצא מקדקוד וחוצה את הזווית שממנה הוא יוצא.
4. אנך אמצעי – קטע היוצא מאמצע צלע ומאונך לה.

איורים לכל מקרה לפי המספרים :

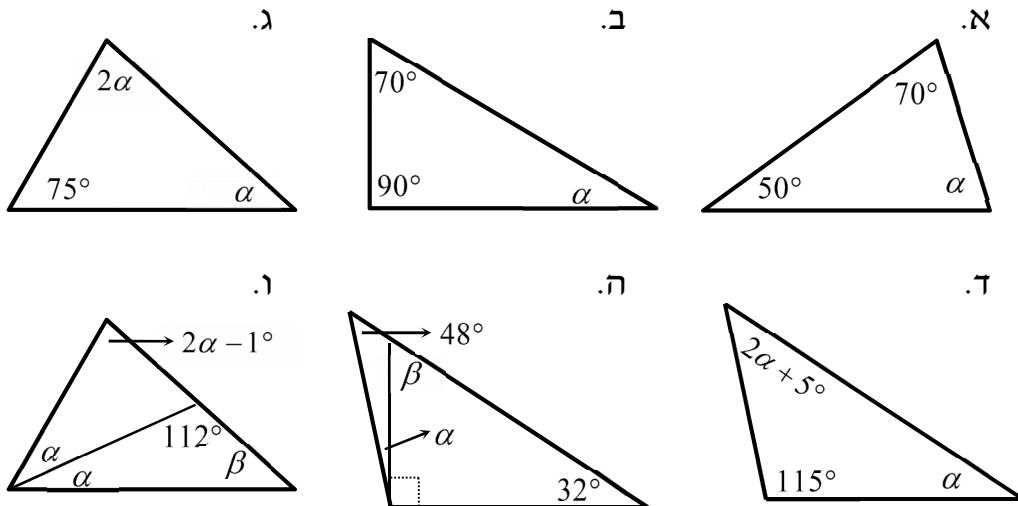


משפטים כלליים במשולשים :

1. סכום הזוויות במשולש הוא 180° .
2. סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
3. במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך.
במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך.
במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך.

שאלות – זוויות במשולשים :

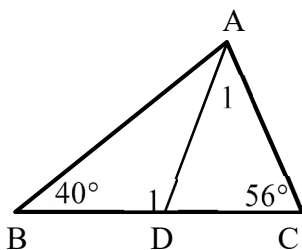
1) חשב את הזוויות בכל אחד מהמשולשים שלפניך :

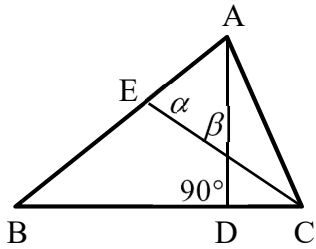


2) במשולש שלפניך נתון AD חוצה זווית A.

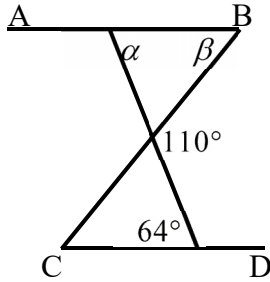
נתון : $\sphericalangle B = 40^\circ$, $\sphericalangle C = 56^\circ$.

חשב את הזוויות $\sphericalangle A_1$, $\sphericalangle D_1$.





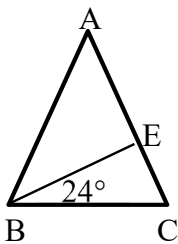
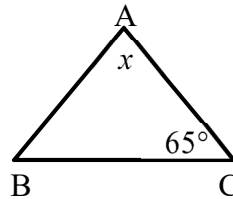
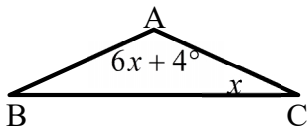
3 נתון משולש ABC ובו AD גובה לצלע BC $\angle D = 90^\circ$.
 הקטע CE חוצה זווית C.
 כמו כן: $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 63^\circ$.
 חשב את זוויות המשולש ABC.



4 בסרטוט שלפניך נתון: $AB \parallel CD$.
 מצא את הזוויות α ו- β .

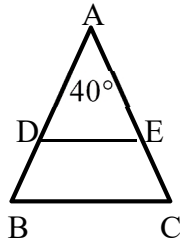
5 שלוש זוויות המשולש מתייחסות זו לזו כמו: 1: 2: 6.
 חשב את זוויות המשולש.

6 בסרטוטים שלפניך נתונים משולשים שווי שוקיים ($AB = AC$) שאחת מזוויותיהם נתונה. מצא את הגודל x בכל סרטוט.
 א. ב.

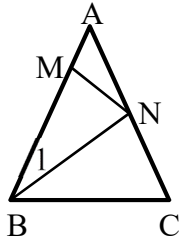


7 הגובה לשוק המשולש שווה השוקיים ABC, ($AB = AC$), יוצר זווית בת 24° עם הבסיס BC.
 מצא את זוויות המשולש ABC.

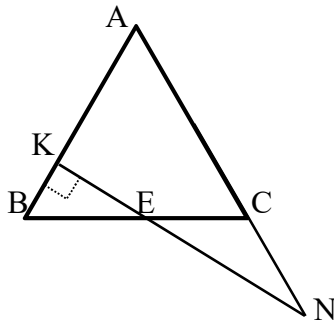
8 חשב את זוויות המשולשים בכל אחד מהמקרים הבאים:
 א. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה פי ארבעה מזווית הראש.
 מצא את זוויות המשולש.
 ב. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה ב- 12° מזווית הראש.
 מצא את זוויות המשולש.



- 9 באיור שלפניך נתון :
 $\angle A = 40^\circ$, $AD = AE$, $AB = AC$
 א. חשב את הזוויות : $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$
 ב. הוכח : $DE \parallel BC$.



- 10 באיור שלפניך נתון : $AB = AC$
 מעבירים את הקטעים MN ו- BN כך שמתקיים : $BM = BN = BC$
 נתון בנוסף : $\angle A = 32^\circ$
 חשב את זוויות : $\angle B_1$, $\angle ANM$.



- 11 משולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
 בנקודה K כלשהי על AB מעלים אנך ל- AB ($\angle K = 90^\circ$). אנך זה חותך את BC בנקודה E ואת המשך AC בנקודה N .
 מתקיים : $CE = CN$.
 חשב את זוויות המשולש ABC .

משפטים במשולש שווה שוקיים:

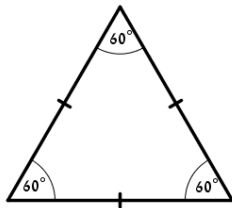
1. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
 (משפט הפוך) משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.
2. במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים.
 (משפט הפוך) משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה הוא גם תיכון הוא משולש שווה שוקיים.

משפטים במשולש שווה צלעות:

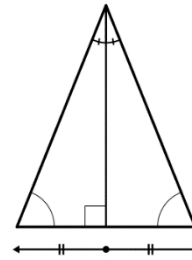
1. במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות 60° .
2. (משפט הפוך) משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

איורים :

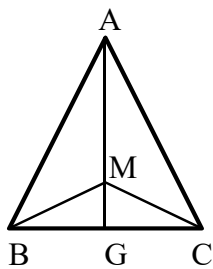
משפט במשולש שווה צלעות



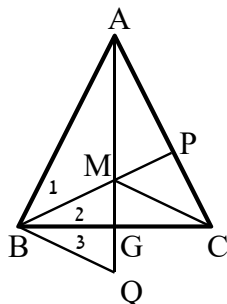
משפט במשולש שווה שוקיים



שאלות – משולש שווה שוקיים:



12 המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים ($AB=AC$).
AG חוצה את זווית $\sphericalangle A$.
M היא נקודה כלשהי על AG.
הוכח כי: $BM = CM$.



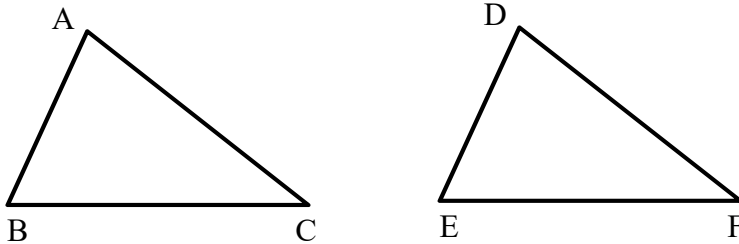
13 המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים ($AB=AC$).
AG ו-BP חוצים את הזוויות $\sphericalangle A$ ו- $\sphericalangle ABC$ בהתאמה.
הנקודה Q נמצאת על המשך AG.
נתון: $GM = GQ$.
הוכח: $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_3$.

חפיפת משולשים:

הגדרה:

משולשים חופפים הם משולשים ששוים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.

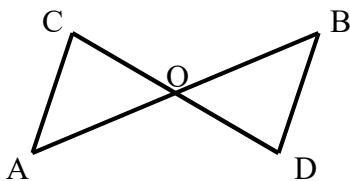
$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} AB = DE, AC = DF, BC = EF \\ \sphericalangle A = \sphericalangle D, \sphericalangle B = \sphericalangle E, \sphericalangle C = \sphericalangle F \end{cases} \text{ סימון מתמטי:}$$



משפטי החפיפה:

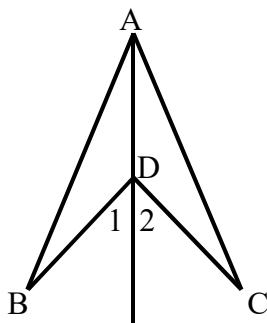
1. משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
2. משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
3. משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ): אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.
4. משפט חפיפה צלע-צלע-זווית הגדולה (צ.צ.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

שאלות – חפיפת משולשים:

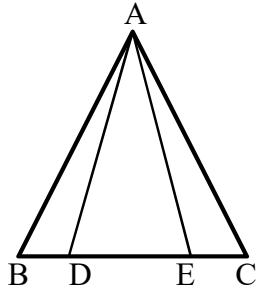


שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-זווית-צלע:

- 14) באיור שלפניך הקטעים AB ו-CD חוצים זה את זה בנקודה O.
הוכח: $\Delta ACO \cong \Delta BDO$.

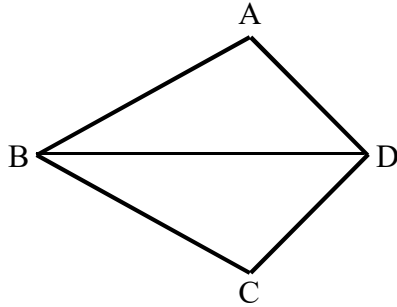


- 15) באיור שלפניך נתון: $BD = CD$.
כמו כן: $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

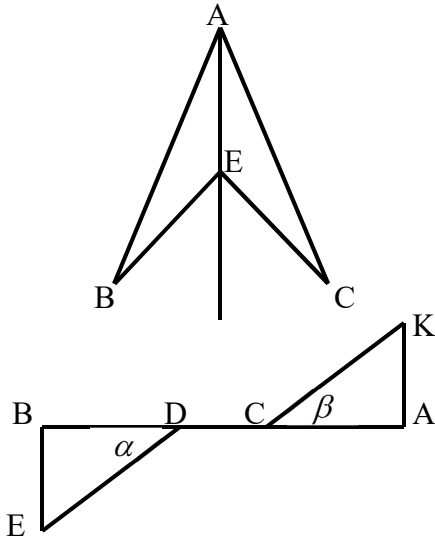


- 16) בסרטוט שלפניך נתון:
 $AB = AC$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, $BE = CD$
 הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$

שאלות העוסקות במשפט חפיפה זווית-צלע-זווית:



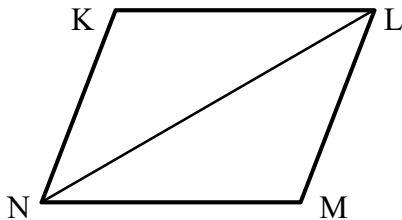
- 17) במרובע ABCD נתון:
 BD חוצה את זוויות B ו-D.
 הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



- 18) בסרטוט שלפניך נתון:
 AE חוצה את הזוויות $\sphericalangle BAC$ ו- $\sphericalangle BEC$.
 הוכח: $\triangle ABE \cong \triangle ACE$

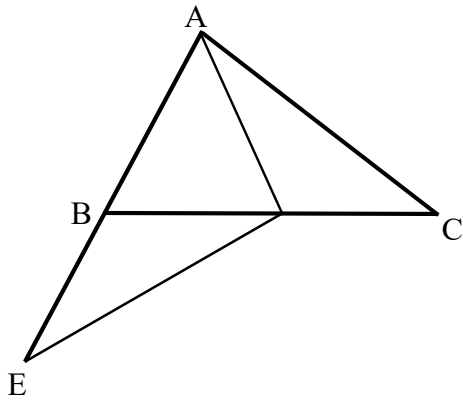
- 19) בציור שלפניך נתון:
 $AC = BD$, $\alpha = \beta$
 $AB \perp BE$, $AB \perp AK$
 הוכח: $\triangle AKD \cong \triangle BEC$

שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-צלע:



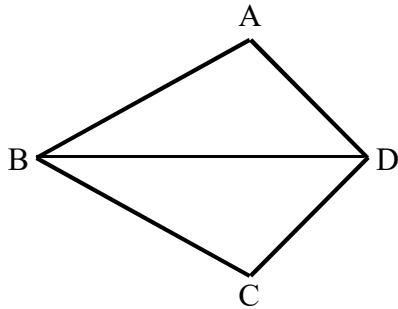
- 20) באיור שלפניך נתון:
 $KL = MN$, $KN = LM$
 הוכח: $\triangle KLN \cong \triangle MLN$

שאלות העוסקות במשפט חפיפה: צלע-צלע-זווית שמול הצלע הגדולה:

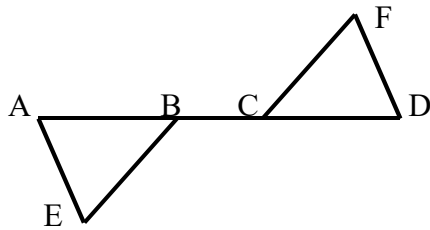


(21) בציור שלפניך נתון:
 $AC = DE$, $AB = BE = AD$
 הוכח כי הנקודה D היא אמצע BC.

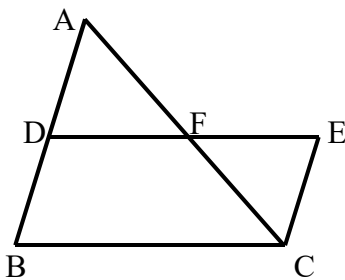
שאלות העוסקות בשלושת משפטי החפיפה יחדיו:



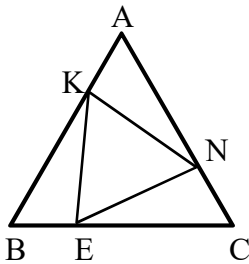
(22) במרובע ABCD נתון:
 $AB = BC$, $AD = CD$
 הוכח: $\angle A = \angle C$



(23) הקטע AD הוא קו ישר.
 נתון: $AE = DF$, $AC = BD$
 כמו כן מתקיים: $\angle A = \angle D$
 הוכח כי הקטעים BE ו-FC שווים.

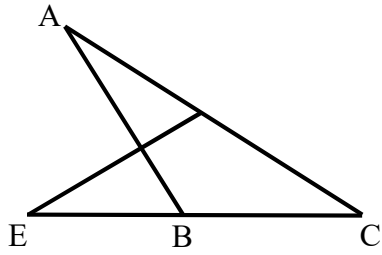


(24) באיור שלפניך נתון:
 הנקודה F היא אמצע הקטע AC.
 מתקיים: $\angle BAC = \angle ACE$
 הקטעים BD ו-CE שווים.
 הוכח את הטענות הבאות:
 א. F היא אמצע הקטע DE.
 ב. D היא אמצע הקטע AB.



(25) המשולש ABC הוא שווה צלעות.
 נתון: $AK = BE = CN$
 הוכח כי $\triangle KEN$ הוא גם משולש שווה צלעות.

שאלות העוסקות במשולשים המכסים חלקית זה את זה:



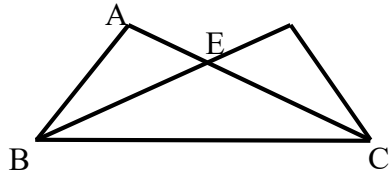
(26) בצויר שלפניך נתון:

$. AC = CE , DC = BC$

הוכח:

א. $\triangle CDE \cong \triangle CBA$

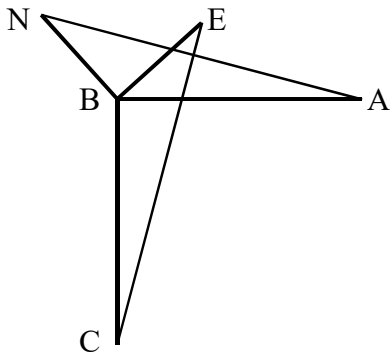
ב. $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABE$



(27) באיור שלפניך נתון:

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle ACB , \sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB$

הוכח: $AB = CD$



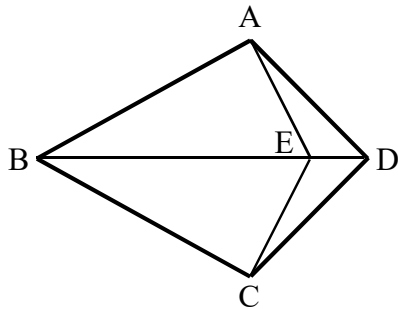
(28) בצויר שלפניך נתון:

$AB = BC , BE = BN$

$AB \perp BC , BE \perp BN$

הוכח: $AN = CE$

שאלות העוסקות בשתי חפיפות:

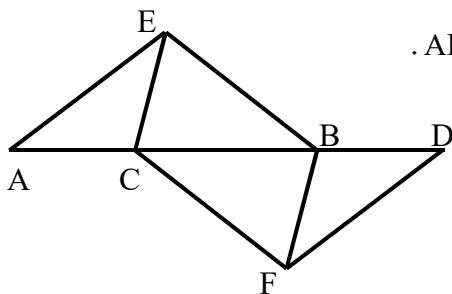


(29) בסרטוט שלפניך נתון כי BD הוא קו ישר.

מתקיים: $AD = CD , AB = BC$

הנקודה E נמצאת על BD.

הוכח כי: $AE = CE$



(30) בצויר שלפניך נתון כי AD הוא קו ישר.

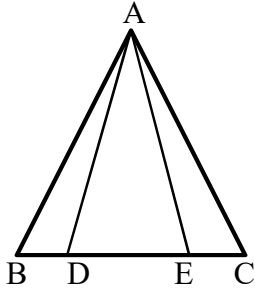
מתקיים: $\sphericalangle AEC = \sphericalangle DFB , \sphericalangle A = \sphericalangle D$

הוכח:

א. $CE = BF$

ב. $BE = CF$

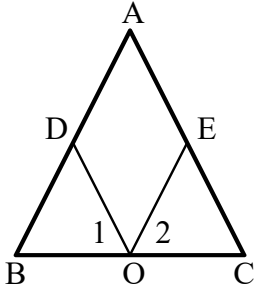
שאלות העוסקות בחפיפות עם משולש שווה שוקיים:



31 נתון משולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.

מתקיים: $BD = CE$.

הוכח: $AD = AE$.



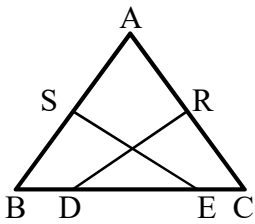
32 בסרטוט שלפניך נתון משולש שווה

שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.

הנקודה O היא אמצע BC.

מתקיים: $\angle O_1 = \angle O_2$.

הוכח: $AD = AE$.

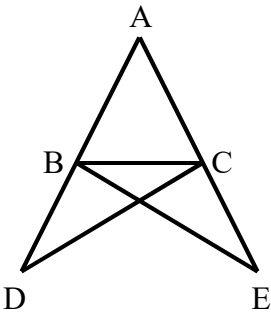


33 במשולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.

הנקודות S ו-R הן אמצעי השוקיים.

ידוע כי $BD = CE$.

הוכח כי: $SE = RD$.

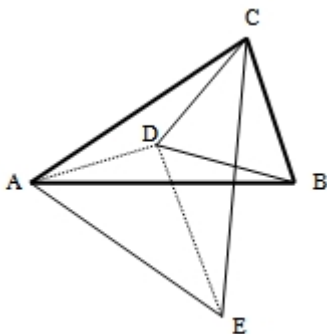


34 נתון משולש ABC.

הקטעים AD ו-AE ישרים ונתון

בנוסף כי: $DC = BE$, $BD = CE$.

הוכח: $AB = AC$.



35 המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$.

על השוק AC ועל הבסיס BC בונים משולשים שווי

צלעות ACE ו-BCD.

מחברים את הנקודה D עם הקדקודים A ו-E.

א. הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

ב. ידוע גם כי: $DE \parallel BC$.

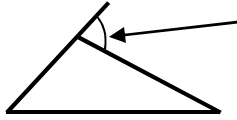
הוכח: $\angle ADE = 90^\circ$.

זווית חיצונית במשולש:

זווית חיצונית למשולש:

הגדרה:

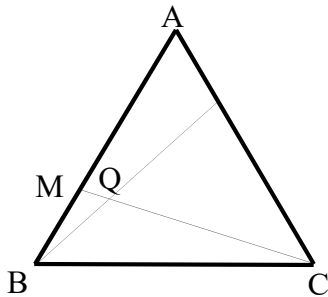
זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.



משפט: זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

שאלות – זווית חיצונית במשולש:

36 הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה."



37 המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה צלעות.

נתון: $AN = BM$.

הוכח: $\angle NQC = 60^\circ$.

משולש ישר זווית:

משפטים במשולש ישר זווית:

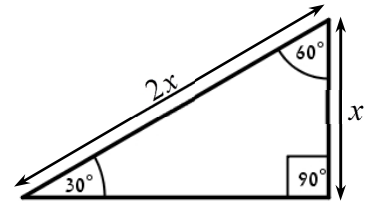
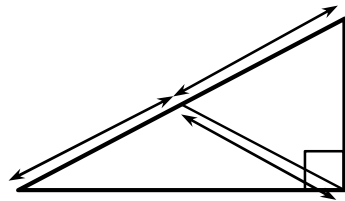
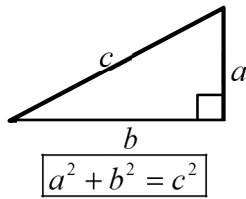
1. סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא 90° .
2. במשולש שזוויותיו 90° , 60° , 30° , הניצב שמול הזווית של ה- 30° שווה למחצית היתר. (משפט הפוך ל-2) אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה היא בת 30° .
3. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר. (משפט הפוך ל-4) אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית (כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).
4. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר. כלומר: $(\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$.
5. (משפט הפוך למשפט פיתגורס) אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש ישר זווית.

איורים:

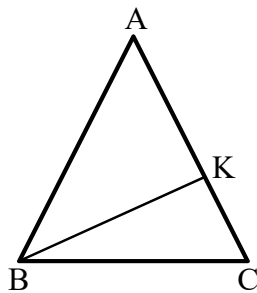
משולש $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$

תיכון ליתר

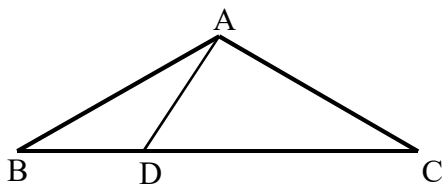
משפט פיתגורס



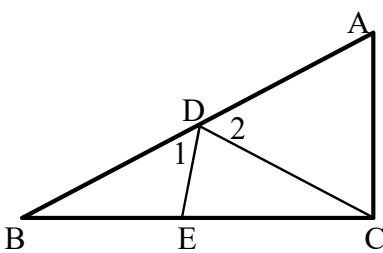
שאלות – משולש ישר זווית:



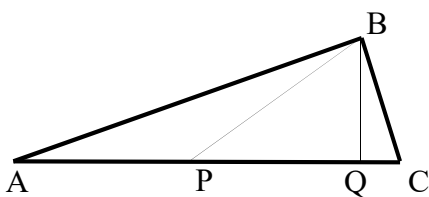
- (38) באיור שלפניך נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$).
 זווית הבסיס: $\sphericalangle C = 75^\circ$ וכן: 16 ס"מ $AC =$.
 מעבירים גובה לשוק BK .
 מצא את אורך השוק BK .



- (39) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).
 נתון: 18 ס"מ $BC =$, $\sphericalangle ABD = 30^\circ$, $\sphericalangle DAC = 90^\circ$.
 חשב את אורכו של הקטע BD .

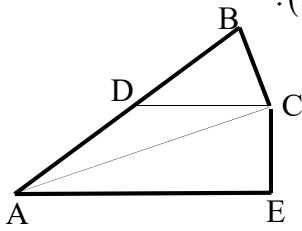


- (40) המשולש $\triangle ABC$ הוא ישר זווית ($\sphericalangle C = 90^\circ$).
 מעבירים תיכון CD ליתר AB במשולש.
 הנקודה E נמצאת על BC כך ש- $CD = CE$.
 ידוע כי: $\sphericalangle CED = 80^\circ$.
 מצא את הזוויות: $\sphericalangle D_1$, $\sphericalangle D_2$.



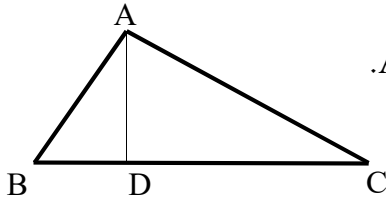
- (41) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$).
 BQ הוא הגובה ליתר AC ו- BP הוא התיכון ליתר AC .
 נתון: $BQ = \frac{1}{2} BP$.
 חשב את גודלה של הזווית C .

42) המשולש BDC שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($BD = DC$).
 א. חוצה את הזווית $\sphericalangle BAE$. נתון: $DC \parallel AE$.
 ב. חשב את גודלה של הזווית $\sphericalangle ACB$.



43) AD הוא גובה במשולש ABC.

נתון: $AB = 15$ ס"מ, $AC = 20$ ס"מ, $BC = 25$ ס"מ.
 א. מצא את אורכו של AD ואת שטח המשולש ABC.
 ב. האם המשולש ABC ישר זווית? נמק.

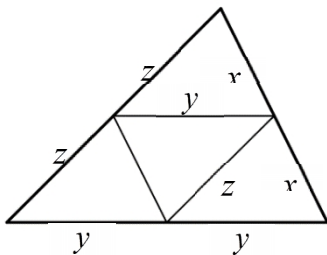


קטעים מיוחדים במשולש:

קטע אמצעים במשולש:

הגדרה: קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

1. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
2. (משפט הפוך 1): קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
3. (משפט הפוך 2): קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

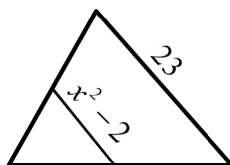


איור – קטע אמצעים במשולש:

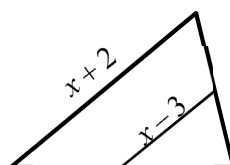
שאלות – קטע אמצעים במשולש:

44) לפניך משולשים עם קטע אמצעים בתוכם.
 מצא את x בכל אחד מהמקרים:

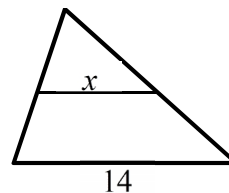
א.

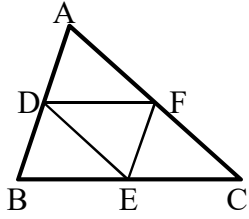


ב.

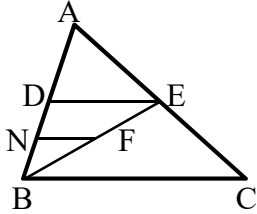


ג.

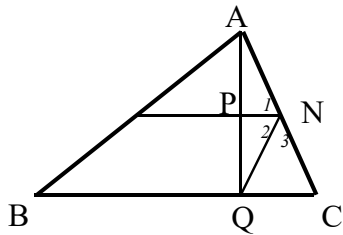




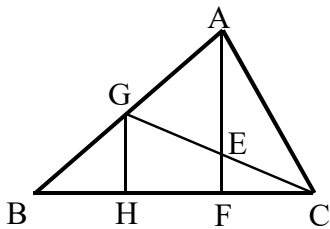
45) הנקודות D, E ו-F הם נקודות האמצע במשולש $\triangle ABC$. נתון: $DE = 9$ ס"מ, $EF = 12$ ס"מ, $DF = 10$ ס"מ. חשב את היקף המשולש $\triangle ABC$.



46) הקטע DE הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle ABC$. הקטע FN הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle BDE$. נתון: $NF = 3$ ס"מ. מצא את אורך הצלע BC.



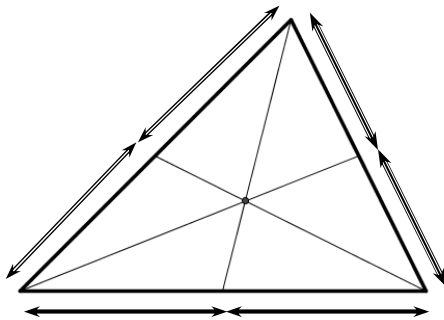
47) הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle ABC$. AQ הוא גובה לצלע BC. הוכח: $\angle N_1 = \angle N_2$.



48) AF הוא גובה לצלע BC ו-GC הוא תיכון לצלע AB במשולש $\triangle ABC$. הקטע GH מאונך לצלע BC. א. הוכח: $HF = BH$. ב. נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ. חשב את אורך הקטע EF.

מפגש התיכונים במשולש:

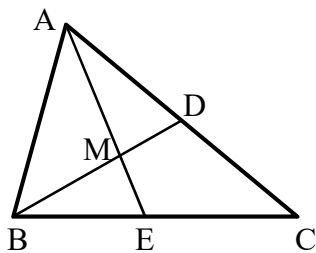
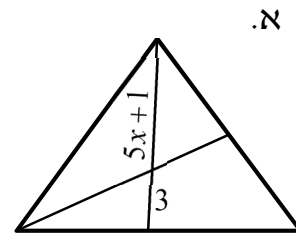
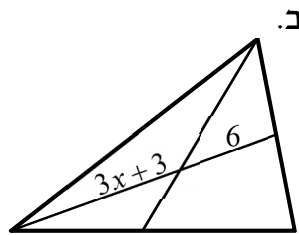
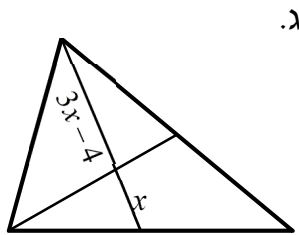
1. שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 2:1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
2. אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 2:1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.
3. נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.



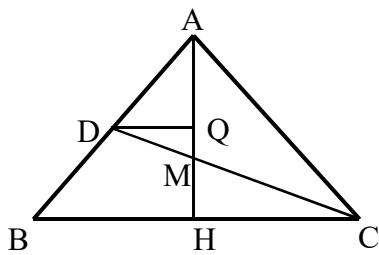
איור – מפגש תיכונים במשולש:

שאלות – מפגש תיכונים במשולש:

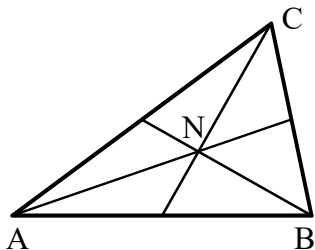
49) הקטעים שבמשולשים הם תיכונים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:



50) הקטעים AE ו-BD הם תיכונים במשולש ΔABC אשר נחתכים בנקודה M. נתון: $AD = AM$ וכן: $AC = 30$ ס"מ. חשב את AE.



51) המשולש ΔABC שבציור הוא משייש ($AB = AC$) שבו AH הוא הגובה לבסיס BC. התיכון CD לשוק AB, יוצר זווית של 30° עם הבסיס BC. נתון: $BC = 12\sqrt{3}$ ס"מ, $DQ \parallel BC$. חשב את אורך הקטע MQ.



52) במשולש ΔABC נחתכים התיכונים בנקודה N. נתון: $\angle CNB = 90^\circ$. הוכח: $BC = AN$.

תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 60^\circ$ ב. $\alpha = 20^\circ$ ג. $\alpha = 35^\circ$ ד. $\alpha = 20^\circ$ ה. $\alpha = 10^\circ, \beta = 58^\circ$

1. $\alpha = 75\frac{1}{3}^\circ, \beta = 30\frac{1}{3}^\circ$

2) $\sphericalangle A_1 = 42^\circ, \sphericalangle D_1 = 98^\circ$

3) $\sphericalangle A = 78^\circ, \sphericalangle B = 48^\circ, \sphericalangle C = 54^\circ$

4) $\alpha = 64^\circ, \beta = 46^\circ$

5) $20^\circ, 40^\circ, 120^\circ$

6) א. $x = 50^\circ$ ב. $x = 22^\circ$

7) $\sphericalangle A = 48^\circ, \sphericalangle B = \sphericalangle C = 66^\circ$

8) א. $20^\circ, 80^\circ, 80^\circ$ ב. $52^\circ, 64^\circ, 64^\circ$

9) א. $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = 70^\circ$

10) $\sphericalangle B_1 = 42^\circ, \sphericalangle ANM = 37^\circ$

11) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^\circ$

38) ס"מ 8

39) ס"מ 6

40) $\sphericalangle D_1 = 60^\circ, \sphericalangle D_2 = 40^\circ$

41) 75°

42) 90°

43) א. $AD = 12$ ס"מ, $S_{ABC} = 150$ סמ"ר

44) א. $x = 7$ ב. $x = 8$ ג. $x = \sqrt{13.5}$

45) ס"מ 62

46) ס"מ 12

48) ב. 3 ס"מ

49) א. $x = 1$ ב. $x = 3$ ג. $x = 4$

50) ס"מ 22.5

51) ס"מ 3

תוכן העניינים:

124	פרק 8 - גיאומטריה אוקלידית - מרובעים:
124	מרובע כללי:
124	שאלות יסודיות:
125	מקבילית
125	שאלות – תכונות המקבילית:
127	שאלות – הוכחת מקבילית:
129	מלבן:
129	שאלות – תכונות המלבן:
130	שאלות – הוכחת מלבן:
131	מעוין:
131	שאלות – תכונות המעוין:
132	שאלות – הוכחת מעוין:
133	ריבוע:
134	שאלות – תכונות הריבוע:
134	שאלות – הוכחת ריבוע:
135	טרפז כללי:
136	שאלות – תכונות הטרפז הכללי:
137	שאלות – הוכחת טרפז כללי:
137	שאלות – תכונות טרפז שווה שוקיים וישר זווית:
138	שאלות – הוכחת טרפז שווה-שוקיים וישר זווית:
138	שאלות – קטע אמצעים בטרפז:
140	דלתון:
140	שאלות – דלתון:
141	סיכום משפחת המרובעים:
142	תשובות סופיות:

פרק 8 - גיאומטריה אוקלידית - מרובעים:

מרובע כללי:

הגדרה: מרובע הוא מצולע בעל 4 צלעות.

משפט: סכום הזוויות במרובע הוא 360° .

שאלות יסודיות:

1) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.

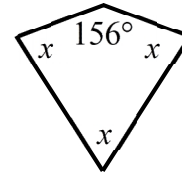
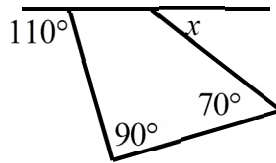
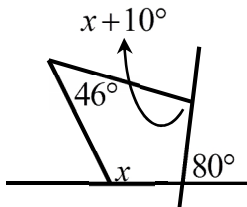
חלק מהזוויות מסומנות ב- x .

מצא את x ואת הזוויות של כל מרובע.

ג.

ב.

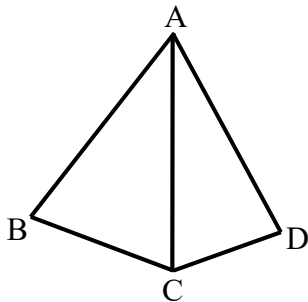
א.



2) מצא את זוויות המרובע בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. כל זווית במרובע (פרט לראשונה) גדולה ב- 10° מהזווית הקודמת לה.

ב. זוויות המרובע מתייחסות זו לזו כמו: 1:2:3:4.



3) המשולשים ABC ו-ACD שבצירוף הם

משולשים שווים שוקיים ($AB = AC = AD$).

נתון: $\angle BAD = 80^\circ$.

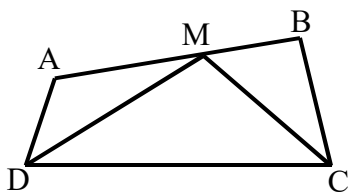
חשב את גודלה של הזווית BCD.

4) בסרטוט שלפניך נתון מרובע ABCD.

CM חוצה את זווית C ו-DM חוצה את זווית D.

ידוע כי: $\angle DMC = 110^\circ$, $\angle A = 130^\circ$, $CM = DM$.

מצא את שאר זוויות המרובע ABCD.



מקבילית

הגדרה : מקבילית היא מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.

תכונות המקבילית:

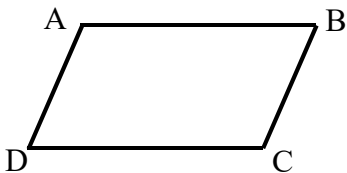


1. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
2. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות.
3. במקבילית סכום כל שתי זוויות סמוכות הוא 180° .
4. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
5. היקף מקבילית = סכום הצלעות, שטח מקבילית = צלע \cdot גובה לצלע.

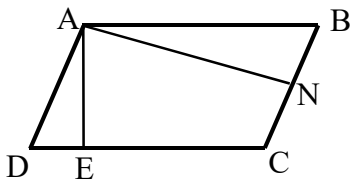
כדי להוכיח כי מרובע הוא מקבילית נשתמש באחת הדרכים הבאות :

1. מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית.
2. מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.
3. מרובע שבו זוג צלעות שוות ומקבילות הוא מקבילית.
4. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
5. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

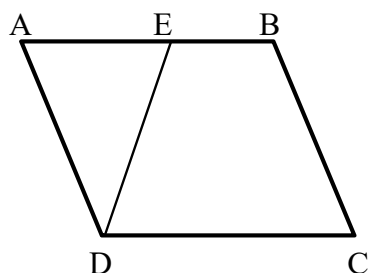
שאלות – תכונות המקבילית:



- 5 נתונה מקבילית ABCD. בכל אחד מהסעיפים הבאים הזוויות מיוצגות ע"י תבניות מספר שונות. מצא את הזוויות המקבילית בכל מקרה.
- א. $\angle A = x$, $\angle B = x - 70^\circ$.
 - ב. $\angle B = 3x - 130^\circ$, $\angle D = x + 10^\circ$.
 - ג. $\angle A = x + 20^\circ$, $\angle C = 100^\circ - x$.

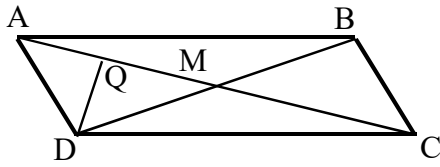


- 6 המרובע ABCD הוא מקבילית
 ובו : $AE \perp CD$, $AN \perp BC$
 הוכח כי : $\angle DAE = \angle BAN$.

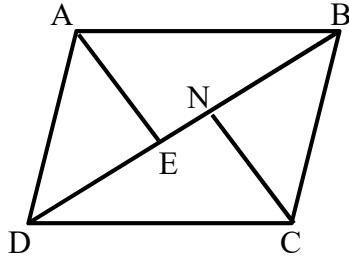


- 7 במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AB כך שמתקיים : $DE = BC$
 הוכח כי : $\angle EAD = \angle EDC$.

8 נתונה מקבילית ABCD שאלכסוניה נפגשים בנקודה M.



נתון: 20 ס"מ $AC =$, $BC = \frac{1}{2}BD$, $DQ \perp AC$.
חשב את אורך הקטע AQ.



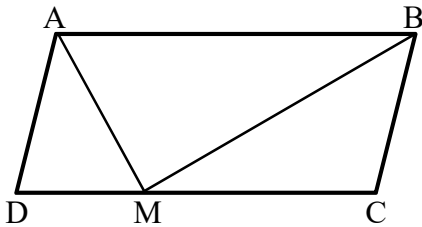
9 הוכח כי במקבילית הקדקודים הנגדיים נמצאים במרחקים שווים מאלכסון המקבילית שאינו עובר דרכם, כלומר הוכח: $AE = CN$.

10 במקבילית ABCD הקטעים AM ו-BM הם חוצי הזוויות של A ו-B בהתאמה

אשר נפגשים בנקודה M שעל הצלע DC.

א. הוכח כי: $AB = 2BC$.

ב. הוכח כי המשולש AMB הוא ישר זווית.

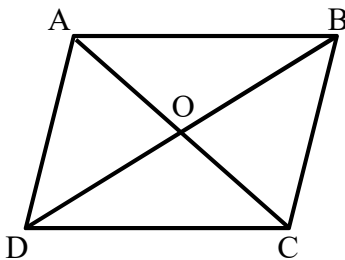


11 המרובע ABCD הוא מקבילית.

O – פגישת האלכסונים.

נתון: $AO = x + 1$, $BO = x + 8$, $DO = 3x - 10$.

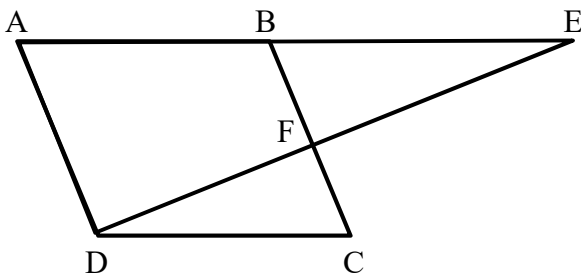
מצא את אורכי האלכסונים AC ו-BD.



12 נתונה מקבילית ABCD ובה:

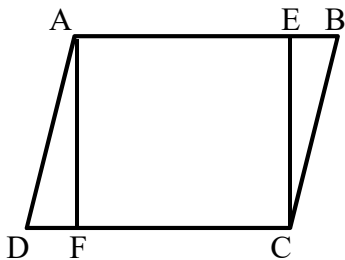
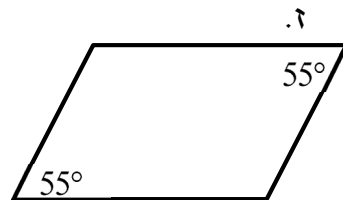
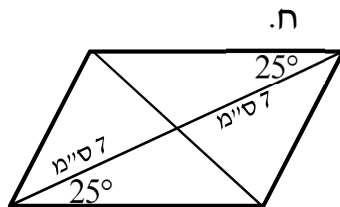
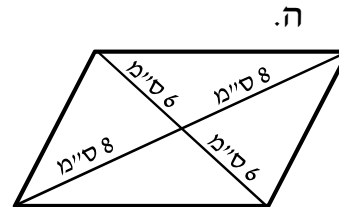
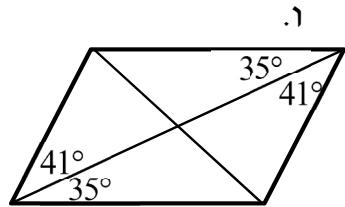
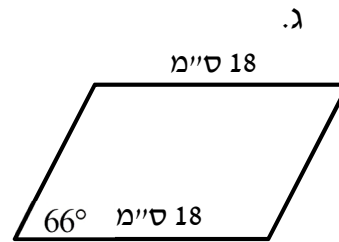
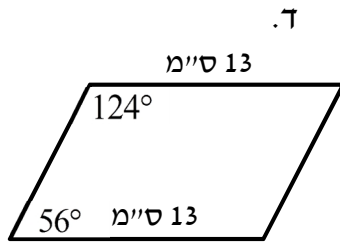
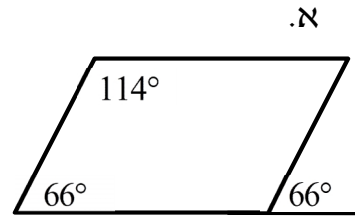
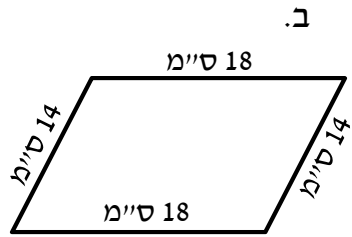
$\angle BEF = \frac{1}{2} \angle EAD$, $\angle ADC = 120^\circ$.

הוכח כי: $BC \perp ED$.

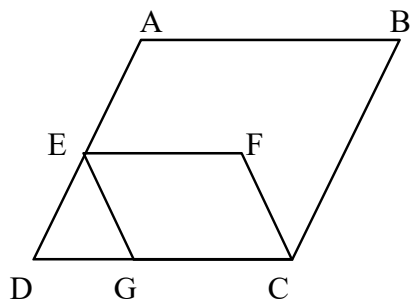


שאלות – הוכחת מקבילית:

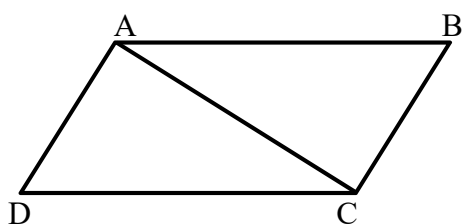
13) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים. קבע אלו מהם הם מקביליות וציין מדוע.



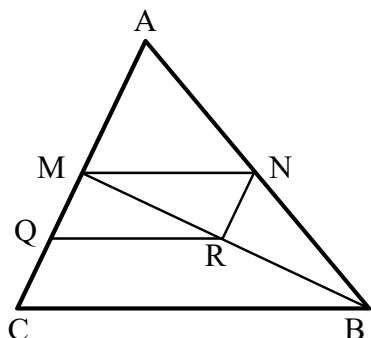
14) במקבילית ABCD הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-CD בהתאמה. נתון: $\angle DAF = \angle BCE$. הוכח כי המרובע AECF הוא מקבילית.



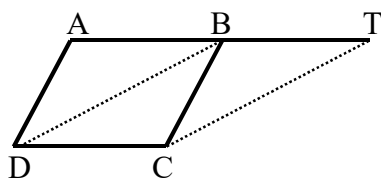
- 15) במקבילית ABCD הנקודות E ו-G נמצאות על הצלעות AD ו-DC בהתאמה כך שהמשולש DEG הוא שווה צלעות. הנקודה F נמצאת בתוך המקבילית כך שהקטע EF מקביל לצלע AB.
- א. הוכח: $\angle DAB = \angle EGC$.
- ב. נתון: $\angle GCF = \angle ABC$. הוכח כי EFCG מקבילית.



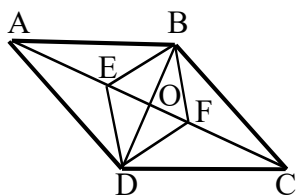
- 16) במרובע ABCD נתון כי הצלעות AB ו-DC שוות. כמו כן: $AD \perp AC$, $BC \perp AC$. הוכח כי המרובע ABCD הוא מקבילית.



- 17) נתון משולש ABC ובו הקטע MN הוא קטע אמצעים. הנקודות Q ו-R הן אמצעי הקטעים MC ו-BM בהתאמה.
- א. הוכח כי המרובע MNRQ הוא מקבילית.
- ב. ידוע כי הקטע AN שווה לקטע QR. איזה סוג משולש הוא AMB? נמק.



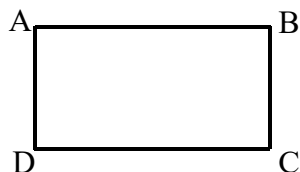
- 18) את הצלע AB במקבילית ABCD האריכו כאורכה עד לנקודה T. הוכח: BTCD מקבילית. הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



- 19) הנקודה O היא מפגש אלכסוני המקבילית ABCD. E ו-F הן נקודות על האלכסון AC. נתון: $AE = FC$. הוכח כי EBFD הוא מקבילית.

מלבן:

הגדרה: מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.
(מסקנה: מלבן הוא סוג של מקבילית).

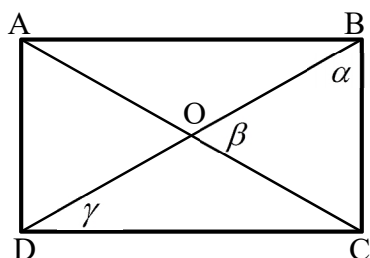


תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית):

1. ארבע זוויות המלבן שוות והן זוויות ישרות.
2. האלכסונים במלבן שווים זה לזה
3. היקף מלבן = סכום הצלעות, שטח מלבן = צלע · גובה לצלע.

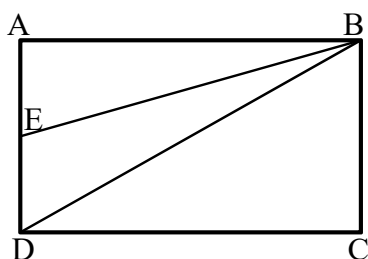
כדי להוכיח כי מרובע הוא מלבן נשתמש באחת הדרכים הבאות:

1. מרובע שבו שלוש זוויות ישרות הוא מלבן.
2. מקבילית שבה זווית ישרה היא מלבן.
3. מקבילית שבה האלכסונים שווים היא מלבן.

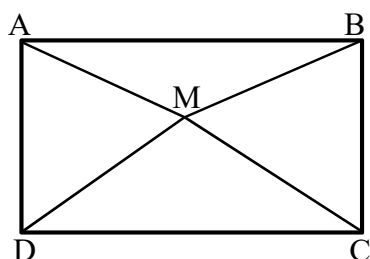


שאלות – תכונות המלבן:

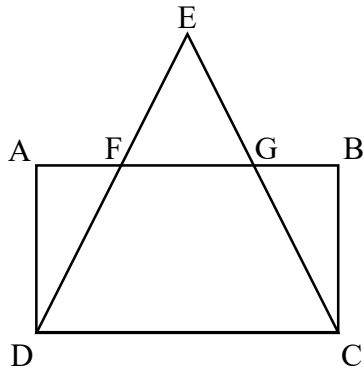
- 20) המרובע ABCD הוא מלבן.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
חשב את הזוויות α , β ו- γ במקרים הבאים:
א. β קטנה ב- 15° מ- α .
ב. $\alpha = 2\gamma$.
ג. $\gamma = 28^\circ$.



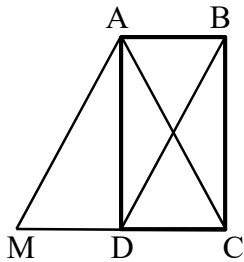
- 21) במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.
נתון: $BD = 2BC$, $\angle AEB = 70^\circ$.
חשב את גודלה של הזווית EBD.



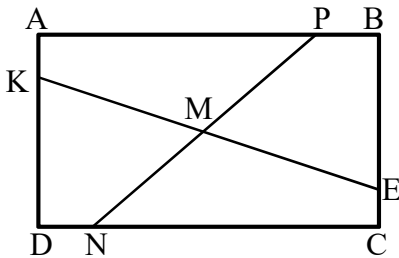
- 22) נתון מלבן ABCD שבו $DM = MC$.
הוכח: $\angle MAB = \angle MBA$.



23) המרובע ABCD הוא מלבן.
 המשכי הקטעים DF ו-CG נפגשים בנקודה E.
 נתון: $EF = EG$.
 הוכח: $FD = GC$.

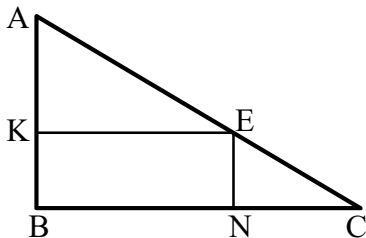


24) המרובע ABCD הוא מלבן.
 המרובע ABDM הוא מקבילית.
 הוכח כי המשולש ACM הוא שווה שוקיים.

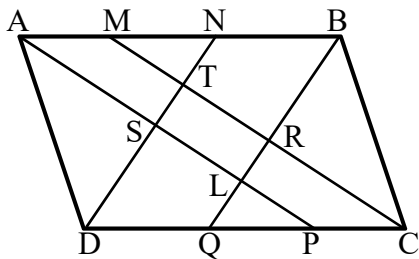


25) מרובע ABCD הוא מלבן.
 נתון: $AP = CN$, $AK = CE$.
 הוכח: $KM = EM$, $PM = NM$.

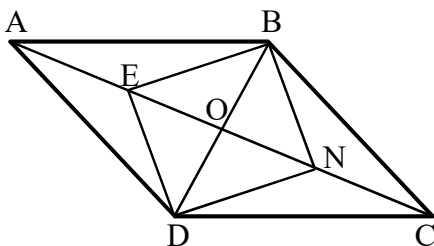
שאלות – הוכחת מלבן:



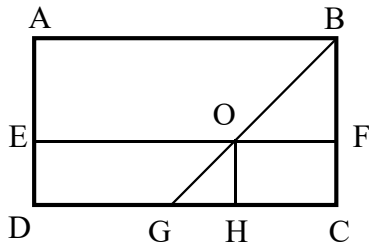
26) $\triangle ABC$ הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).
 המרובע KENB חסום במשולש זה.
 נתון כי: $\angle AEK = \angle C$, $\angle NEC = \angle A$.
 הוכח כי המרובע KENB הוא מלבן.



27) נתונה מקבילית ABCD ובה AP , BQ , CM ו- DN הם חוצי הזוויות $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ו- $\angle D$ בהתאמה.
 הוכח: $AP \parallel BQ \parallel CM \parallel DN$ מלבן.

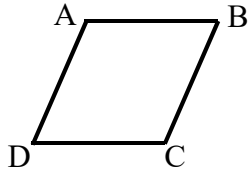


28) מרובע ABCD הוא מקבילית.
 מעבירים את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים בנקודה O.
 נתון: $2BD = AC$.
 E – אמצע AO.
 N – אמצע CO.
 הוכח כי המרובע BNDE הוא מלבן.



29) במלבן ABCD נתון :
 $OH \perp DC$, $\angle ABO = \angle BOF$
 הוכח : EOH הוא מלבן.

מעוין:



הגדרה : מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.
 (מסקנה : מעוין הוא סוג של מקבילית).

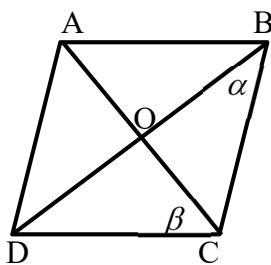
תכונות המעוין (בנוסף לתכונות המקבילית):

1. במעוין כל הצלעות שוות.
2. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
3. במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות.
4. היקף מעוין = צלע $\cdot 4$, שטח מעוין = צלע \cdot גובה לצלע = $(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון})/2$.

כדי להוכיח כי מרובע הוא מעוין נשתמש באחת הדרכים הבאות:

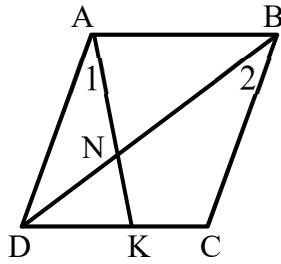
1. מרובע שבו כל הצלעות שוות הוא מעוין.
2. מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
3. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
4. מקבילית שבה אלכסון חוצה זווית היא מעוין (מספיק אחד).

שאלות – תכונות המעוין:

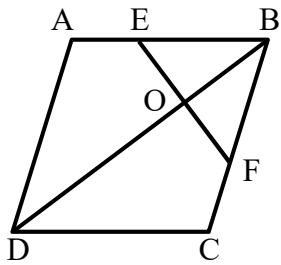


30) המרובע ABCD הוא מעוין.
 חשב בכל אחד מהמקרים הבאים את α ו- β .

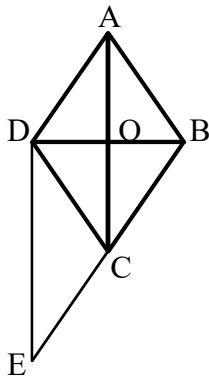
- א. $\angle A = 138^\circ$.
- ב. $\beta = 3.5\alpha$.
- ג. $\beta = \alpha + 20^\circ$.
- ד. $\angle B = \beta$.



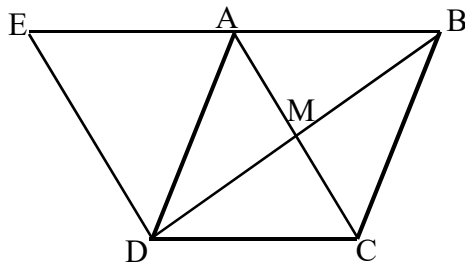
- 31) המרובע ABCD הוא מעוין.
 מעבירים את האלכסון BD ואת הקטע AK
 אשר נחתכים בנקודה N.
 ידוע כי: $\angle A_1 = \angle B_2$.
 א. הוכח כי המשולש ADN הוא שווה שוקיים.
 ב. הוכח כי: $\angle AND = \angle C$.



- 32) במעוין ABCD הנקודות E ו-F נמצאות
 על הצלעות AB ו-BC בהתאמה.
 נתון: $\angle DCB = 120^\circ$, $EF \perp BC$.
 חשב את גודלה של זווית $\angle EOD$.

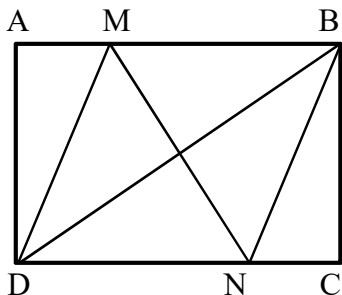


- 33) נתון מעוין ABCD. הנקודה E נמצאת על המשך הצלע BC.
 נתון: $\angle CDE = \angle BCA$.
 הוכח כי המשולש BDE הוא ישר זווית.

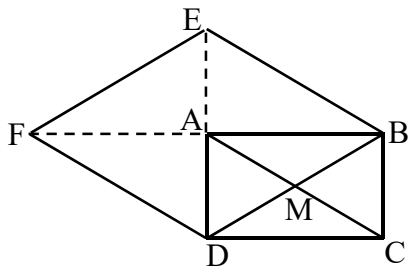


- 34) נתון מעוין ABCD שאלכסונו
 נפגשים בנקודה M.
 האריכו את הצלע AB עד
 לנקודה E כך שמתקיים: $DE \perp BD$.
 הוכח: $AD = AE$.

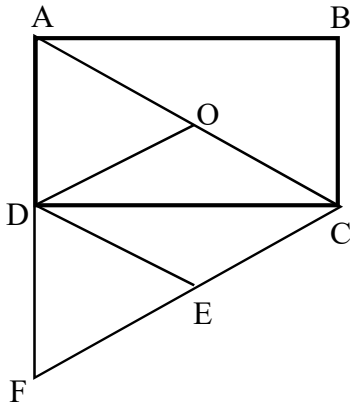
שאלות – הוכחת מעוין:



- 35) במלבן ABCD מעבירים את האלכסון BD.
 הנקודות M ו-N נמצאות על הצלעות AB
 ו-DC בהתאמה. נתון: $AM = CN$
 ו- $DM = DN$.
 הוכח כי הקטע MN חוצה את
 הזוויות BMD ו-BND.



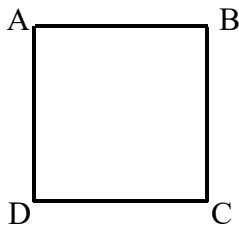
36) נתון מלבן ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M. האריכו את הצלע AB כאורכה עד לנקודה F ואת הצלע AD כאורכה עד לנקודה E כמתואר בשרטוט. הוכח: המרובע EBDF הוא מעוין.



37) ABCD הוא מלבן שאלכסוניו נחתכים בנקודה O. הנקודה F נמצאת על המשך הצלע AD כך שמתקיים: $AD = DF$. נתון: $FE = CE$. הוכח כי DOCE הוא מעוין.

ריבוע:

הגדרה: ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות. (מסקנה: ריבוע הוא סוג של מקבילית, סוג של מלבן וסוג של מעוין).

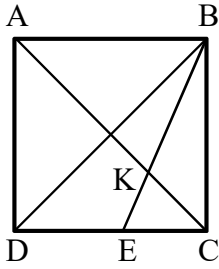


מכאן, שבנוסף לתכונות שבהגדרת הריבוע מתקיים כי אלכסוני הריבוע חוצים זה את זה, שווים זה לזה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע. היקף ריבוע = צלע $\cdot 4$, שטח ריבוע = $(צלע)^2 = \frac{(אלכסון)^2}{2}$

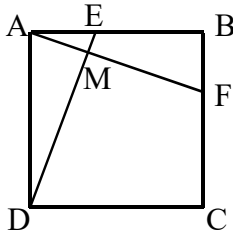
כדי להוכיח כי מרובע הוא ריבוע נשתמש באחת הדרכים הבאות:

1. מלבן שבו האלכסונים מאונכים הוא ריבוע.
2. מלבן שבו אלכסון חוצה זווית הוא ריבוע.
3. מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.
4. מעוין שבו האלכסונים שווים הוא ריבוע.
5. מעוין שבו זווית ישרה הוא ריבוע.

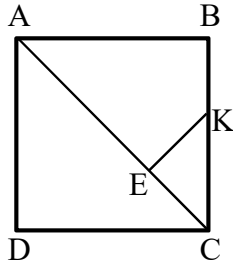
שאלות – תכונות הריבוע:



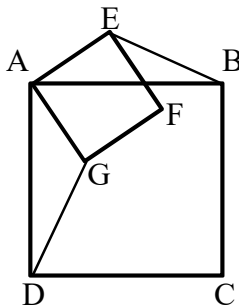
38) המרובע ABCD הוא ריבוע.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
BE חוצה זווית DBC וחותך את AC בנקודה K.
הוכח: $CE = CK$.



39) בריבוע ABCD מעבירים את הקטעים AF ו-DE.
נתון כי $AE = BF$.
הוכח: $DE \perp AF$.

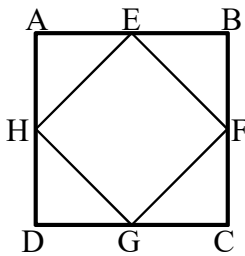


40) המרובע ABCD הוא ריבוע. מעבירים את האלכסון AC.
מהנקודה E שעל האלכסון מעבירים את
הקטע KE אשר מאונך לאלכסון.
נתון: $AE = AB$.
הוכח כי: $CE = KE = BK$.

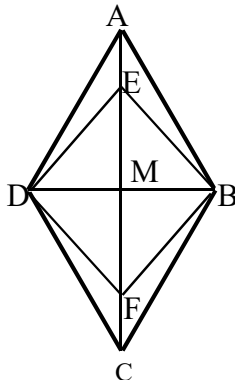


41) המרובעים ABCD ו-AEFG הם ריבועים.
הוכח: $BE = DG$.

שאלות – הוכחת ריבוע:



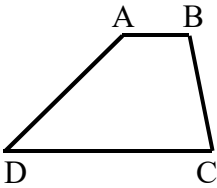
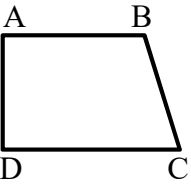
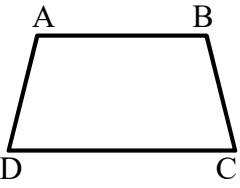
42) הנקודות E, F, G, H הן אמצעי צלעות
הריבוע ABCD.
הוכח כי EFGH הוא ריבוע.



43) נתון מעוין ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M.
נתון: $\angle EBA = 15^\circ$, $MB = \frac{1}{2}AB$, $AE = FC$.
הוכח: המרובע EBFM הוא ריבוע.

טרפז כללי:

הגדרה: טרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות.
 היקף טרפז = סכום הצלעות, שטח טרפז = $(\text{גובה} \cdot \text{סכום הבסיסים}) / 2$.

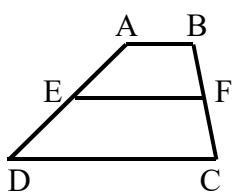
סוג הטרפז	טרפז כללי	טרפז ישר זווית	טרפז שווה שוקיים
איור מתאים			

משפטים הנוגעים לטרפז שווה שוקיים:

1. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
2. (משפט הפוך) טרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
3. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
4. (משפט הפוך) טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

קטע אמצעים בטרפז:

הגדרה: קטע אמצעים בטרפז הוא קטע המחבר את אמצעי השוקיים בטרפז.

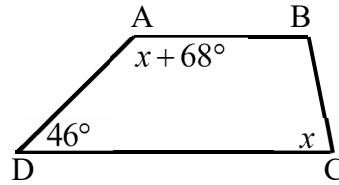
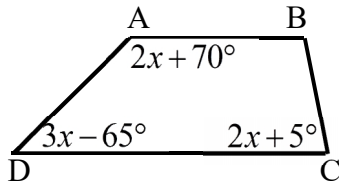


1. קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
2. (משפט הפוך) קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים בטרפז).

שאלות – תכונות הטרפז הכללי:

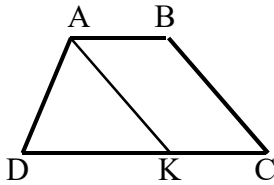
44) בסרטוטים שלפניך נתונים טרפזים כלליים ($AB \parallel CD$). מצא את x ואת זוויות הטרפז בכל מקרה.

א. ב.



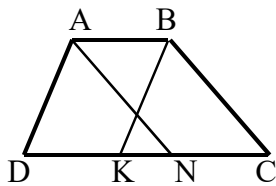
45) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

מעבירים את הקטע AK נתון: $AK = DK$, $AK \parallel BC$.
 $DC = 14$ ס"מ, $AB = 6$ ס"מ.
 חשב את אורך השוק BC.



46) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

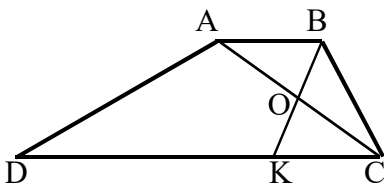
נתון כי: $AN \parallel BC$, $AD \parallel BK$.
 הוכח כי: $DK = CN$.



47) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע BK אשר חוצים זה את זה בנקודה O. ידוע כי: $\angle C = 60^\circ$, $\angle D = 30^\circ$.

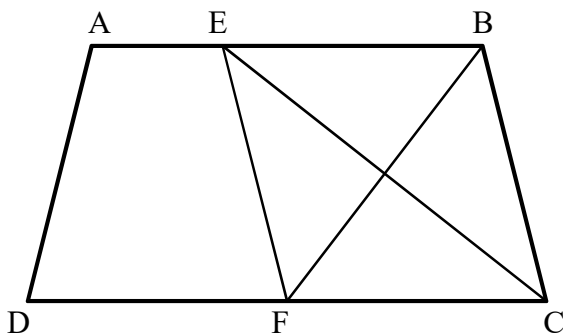
א. חשב את אורך DC , הבסיס הגדול,
 אם ידוע כי: $AB = 7$ ס"מ, $BC = 9$ ס"מ.
 ב. הוכח כי אם $AB = BC$ אז: $DC = 3AB$.



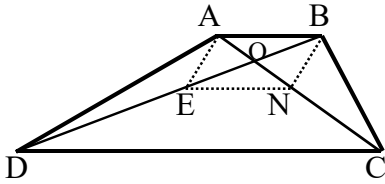
48) נתון טרפז ABCD, ($AB \parallel CD$) ובו

הקטעים CE ו-BF חוצים את זוויות הקדקודים C ו-B בהתאמה. הוכח:
 א. $BF \perp CE$.

ב. המשולש EBC הוא שווה שוקיים.
 ג. המרובע EBCF הוא מעוין.



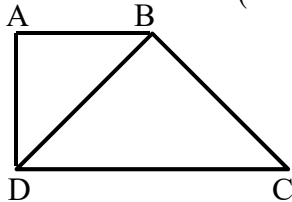
שאלות – הוכחת טרפז כללי:



- (49) מרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).
 O- היא נקודת פגישת האלכסונים.
 נתון: $BO = EO$, $AO = NO$.
 הוכח כי המרובע ENCD הוא טרפז.

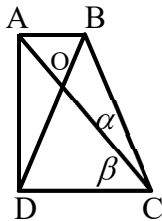
שאלות – תכונות טרפז שווה שוקיים וישר זווית:

- (50) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD$, $\angle D = 90^\circ$).



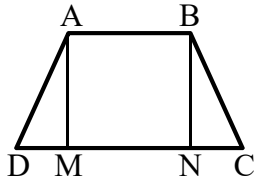
- האלכסון BD חוצה את זווית D
 ונתון בנוסף כי: $BD = BC$
 וכי: 15 ס"מ $AD =$
 חשב את אורכי בסיסי הטרפז.

- (51) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD$, $AD \perp DC$).



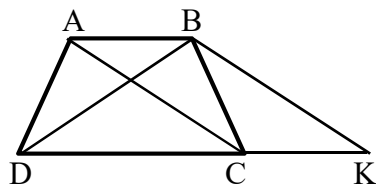
- נתון כי: $BD = BC$, $\beta = 2\alpha$
 ו- $\angle DOC = 80^\circ$.
 חשב את זוויות הטרפז.

- (52) מרובע ABCD הוא טרפז שווה



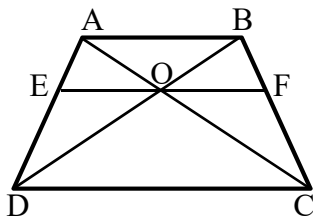
- שוקיים ($AB \parallel CD$, $AD = BC$).
 נתון כי: $AM \perp DC$, $BN \perp DC$.
 הוכח כי: $DM = CN$.

- (53) מרובע ABCD הוא טרפז שווה



- שוקיים ($AB \parallel CD$, $AD = BC$).
 דרך הנקודה B מעבירים מקביל ל-AC.
 הפוגש את המשך הבסיס DC בנקודה K.
 הוכח כי משולש BDK הוא שווה שוקיים.

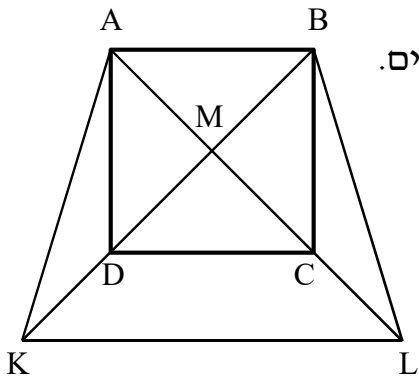
- (54) מרובע ABCD הוא טרפז שווה



- שוקיים ($AB \parallel CD$, $AD = BC$).
 O היא פגישת האלכסונים.
 נתון כי: $EF \parallel DC$ כאשר EF עובר דרך O.
 הוכח:

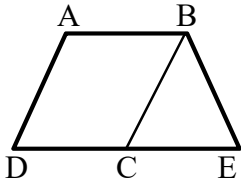
- א. $\angle BOF = \angle COF$.
 ב. $EO = FO$.

55) נתון ריבוע ABCD. הנקודה M היא מפגש האלכסונים AC ו-BD. ממשיכים את האלכסונים ויוצרים את הטרפז השווה שוקיים ABLK. ידוע גם כי DC הוא קטע אמצעים במשולש KML.

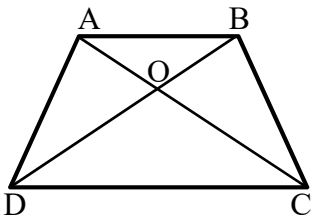


- א. קבע אלו מהטענות הבאות ניתן להוכיח:
- המשולש KML הוא ישר זווית ושווה שוקיים.
 - הקטעים BK ו-BL מאונכים זה לזה.
 - המרובע DCLK הוא טרפז שווה שוקיים.
 - הקטעים DK ו-AD שווים זה לזה.
- ב. הוכח כי: $3DK = AL$.
- ג. נתון כי $AD = 8\sqrt{2}$ ס"מ. חשב את היקף הטרפז ABLK.

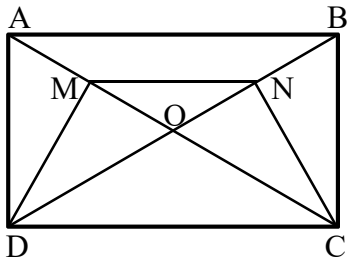
שאלות – הוכחת טרפז שווה-שוקיים וישר זווית:



56) המרובע ABCD הוא מקבילית. הקטע DE הוא קו ישר ונתון כי: $\angle A + \angle E = 180^\circ$. הוכח כי המרובע ABED הוא טרפז שווה שוקיים.

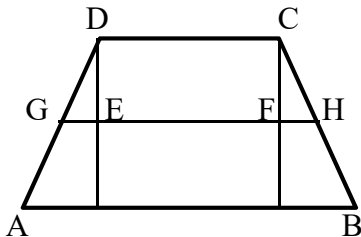


57) במרובע ABCD הנקודה O היא פגישת האלכסונים. נתון כי: $AO = BO$, $CO = DO$. הוכח כי מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

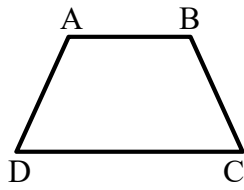


58) נתון מלבן ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה O. נתון: $MN \parallel DC$. הוכח: טרפז DMNC שווה שוקיים.

שאלות – קטע אמצעים בטרפז:



59) בטרפז ABCD ($AB \parallel CD$) הורדו מקצות הבסיס הקטן אנכים לבסיס הגדול. קטע האמצעים GH חותך גבהים אלה בנקודות E ו-F. נתון: $GE = 3$ ס"מ, $FH = 2$ ס"מ, $EF = 12$ ס"מ. חשב את בסיסי הטרפז.



60) סכום כל אורכי הצלעות של טרפז שווה שוקיים הוא 54 ס"מ.
 אורך קטע האמצעים הוא 13 ס"מ.
 מצא את אורך שוק הטרפז.

61) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

KE הוא קטע אמצעים בטרפז, החותך את אלכסוני הטרפז בנקודות N ו-O.

א. הוכח כי: $KN = EO$.

ב. בטרפז הנ"ל נתון:

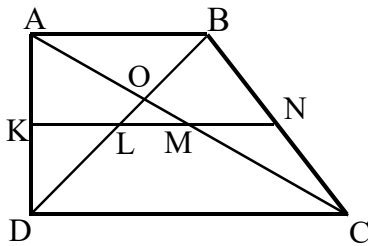
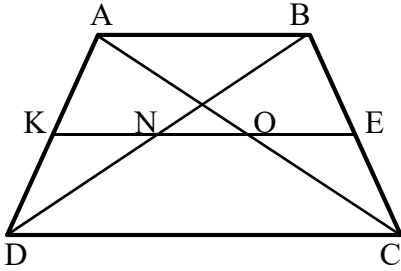
$DC = 26$ ס"מ, $AB = 14$ ס"מ.

חשב את אורכי הקטעים KN, NO ו-EO.

ג. בטרפז הנ"ל נתון:

$NO = 3$ ס"מ, $KE = 13$ ס"מ.

חשב את בסיסי הטרפז.



62) KN הוא קטע אמצעים בטרפז ישר זווית ABCD ($AB \parallel CD$, $AD \perp AB$) שאלכסוניו נפגשים בנקודה O.

נתון: $AD = 12$ ס"מ, $DC = 2AB$, $\angle ADB = 45^\circ$.

חשב את אורך הקטע LM

והוכח כי: $KL = LM = MN$.

63) מרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

EF הוא קטע אמצעים.

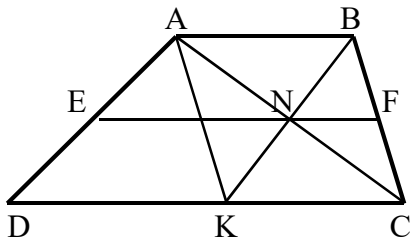
AC ו-BK נפגשים בנקודה N הנמצאת על EF.

א. הוכח כי מרובע ABCK הוא מקבילית.

ב. נתון: $EF = 13$ ס"מ, $EN = 9$ ס"מ.

חשב את בסיסי הטרפז AB ו-DC

ואת הקטע DK.



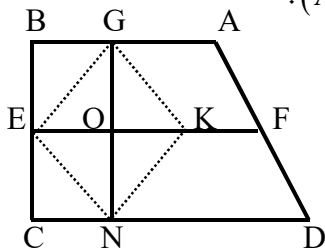
64) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD$, $\angle B = 90^\circ$).

EF קטע אמצעים בטרפז. G ו-N הן נקודות

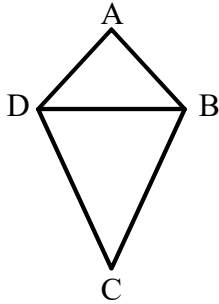
על AB ו-CD בהתאמה המקיימות: $GN \perp DC$.

בנוסף נתון: $KO = EO$.

הוכח כי מרובע GENK הוא מעוין.



דלתון:

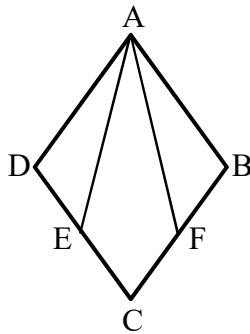


הגדרה: דלתון הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.
(מסקנה: דלתון הוא מרובע שניתן לפרק לשני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף).

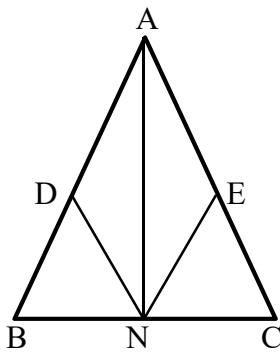
תכונות האלכסונים בדלתון:

1. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.
2. האלכסון הראשי אינו בהכרח גדול מהאלכסון המשני.
3. היקף דלתון = סכום הצלעות, שטח דלתון = $(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון}) / 2$.

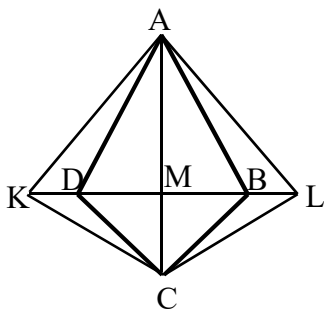
שאלות – דלתון:



65 נתון מעוין ABCD. הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות DC ב-BC בהתאמה כך שהמרובע AFCE הוא דלתון.
הוכח: $\angle DAE = \angle FAB$.

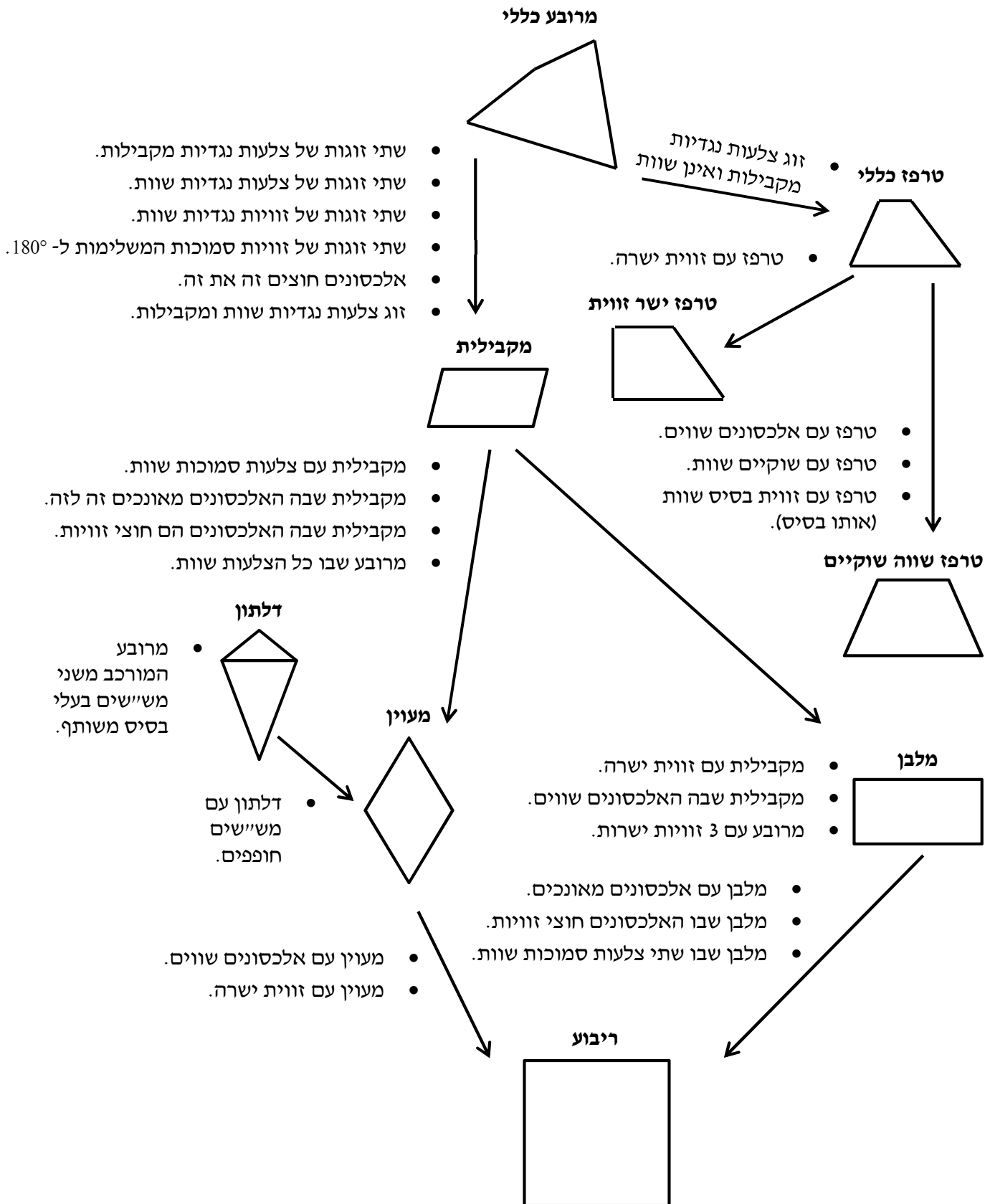


66 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) מקצים נקודות D ו-E על השוקיים. נתון כי: $AD = AE$. הנקודה N היא אמצע BC. הוכח כי ADNE הוא דלתון.



67 בדלתון ABCD האריכו את האלכסון המשני משני צדיו כמתואר בשרטוט כך שמתקיים: $KD = BL$. הוכח: המרובע ALCK הוא דלתון.

סיכום משפחת המרובעים:



תשובות סופיות:

- 1) א. $x = 68^\circ$ ב. $x = 50^\circ$ ג. $x = 102^\circ$
- 2) א. $75^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 105^\circ$ ב. $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$
- 3) 140°
- 4) $\sphericalangle B = 90^\circ, \sphericalangle C = \sphericalangle D = 70^\circ$
- 5) א. $125^\circ, 55^\circ$ ב. $100^\circ, 80^\circ$ ג. $120^\circ, 60^\circ$
- 8) 5 ס"מ
- 11) $BD = 34$ ס"מ, $AC = 20$ ס"מ
- 13) מקביליות: א', ב', ד', ה', ו'.
אינן מקביליות: ג', ז', ח'.
- 20) א. $\alpha = 65^\circ, \beta = 50^\circ, \gamma = 25^\circ$ ב. $\alpha = \beta = 60^\circ, \gamma = 30^\circ$
- ג. $\alpha = 62^\circ, \beta = 56^\circ$
- 21) 10°
- 30) א. $\alpha = 21^\circ, \beta = 69^\circ$ ב. $\alpha = 20^\circ, \beta = 70^\circ$ ג. $\alpha = 35^\circ, \beta = 55^\circ$
- ד. $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$
- 44) א. $x = 66^\circ; 46^\circ, 134^\circ, 66^\circ, 114^\circ$ ב. $x = 35^\circ; 40^\circ, 140^\circ, 75^\circ, 105^\circ$
- 45) 8 ס"מ
- 47) א. 25 ס"מ
- 50) א. 15 ס"מ, 30 ס"מ
- 51) $90^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 120^\circ$
- 55) א. ניתן להוכיח את טענות: i, iii, ii. ג. $P_{ABLK} = 16\sqrt{5} + 24\sqrt{2} \approx 69.71$ ס"מ
- 59) 22 ס"מ ו-12 ס"מ
- 60) 14 ס"מ
- 61) א. $DC = 16$ ס"מ, $AB = 10$ ס"מ, $NO = 6$ ס"מ, $KN = EO = 7$ ס"מ ב. 7 ס"מ, 6 ס"מ, 10 ס"מ, 16 ס"מ
- 62) 6 ס"מ
- 63) $DK = 10$ ס"מ, $DC = 18$ ס"מ, $AB = 8$ ס"מ

תוכן העניינים:

144	פרק 9 - גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים:
144	משולשים:
144	שאלות – שטחים והיקפים של משולשים:
145	מרובעים:
146	שאלות עם מקבילית:
147	שאלות עם מלבן:
148	שאלות עם מעוין:
149	שאלות עם ריבוע:
150	שאלות עם טרפז:
153	תשובות סופיות:

פרק 9 - גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים:

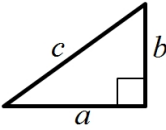
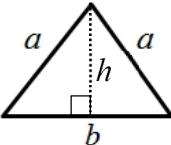
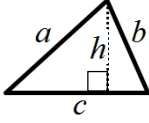
הגדרה - שטח: גודל של תחום מישורי בהשוואה ליחידת מידה קבועה.

שטח נמדד ביחידות מידה של אורך בריבוע כגון:

מטר ריבועי (m^2), סמ"ר ריבועי (סמ"ר cm^2).

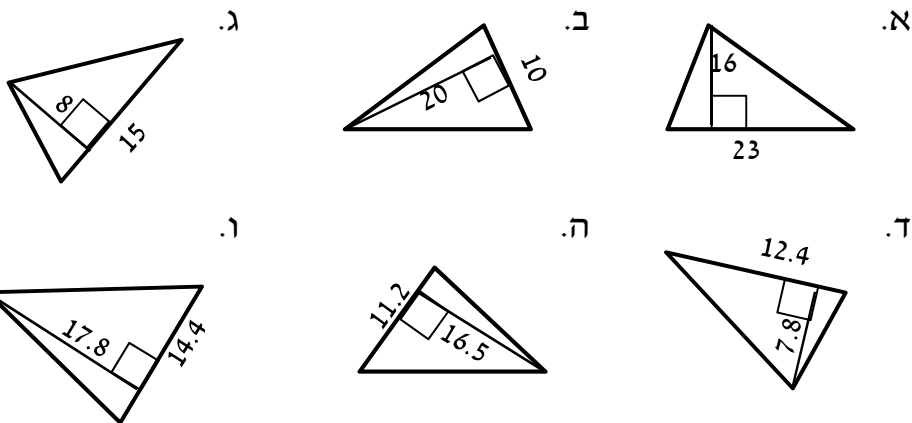
הגדרה - היקף: היקף מצולע הוא סכום כל צלעותיו.

משולשים:

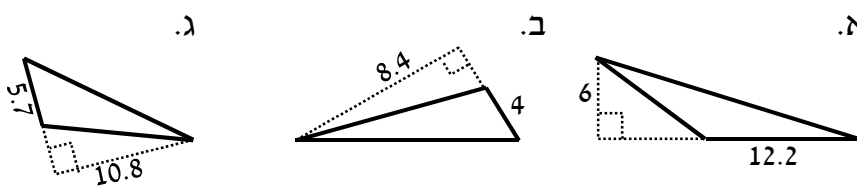
משולש ישר זווית	משולש שווה שוקיים	משולש כללי	סוג
			איור
$S = \frac{a \cdot b}{2}$	$S = \frac{b \cdot h}{2}$	$S = \frac{c \cdot h}{2}$	שטח
$P = a + b + c$	$P = 2a + b$	$P = a + b + c$	היקף

שאלות – שטחים והיקפים של משולשים:

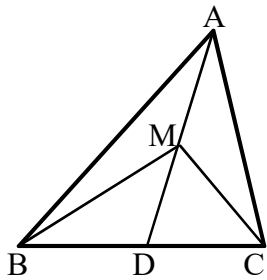
1) מצא את שטחם של המשולשים הבאים (כל המידות נתונות בס"מ):



2) מצא את שטחם של המשולשים קהי-הזווית הבאים (כל המידות בס"מ):



3) הוכח כי אם במשולש ABC, הקטע AD המחבר את הקדקוד A עם הצלע BC יוצר שני משולשים השווים בשטחם אז הוא תיכון ל-BC.



4) במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC. M היא אמצע AD. הוכח כי:

א. הקטעים AD, MC ו-BM מחלקים את המשולש ABC ל-4 משולשים שווי שטח.

ב. $S_{MBC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

מרובעים:

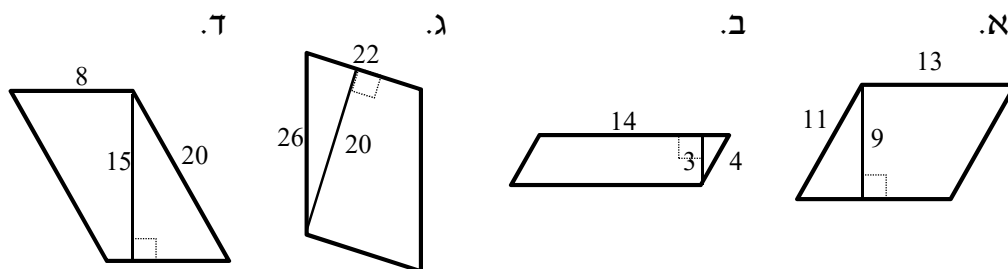
סוג	מקבילית	מלבן	מעוין	ריבוע	טרפז
איור					
שטח	$S = a \cdot h$	$S = a \cdot b$	$S = a \cdot h$ $S = \frac{m_1 \cdot m_2}{2}$	$S = a^2$	$S = \frac{(a+b)h}{2}$
היקף	$P = 2(a+b)$	$P = 2(a+b)$	$P = 4a$	$P = 4a$	$P = a+b+c+d$

הערות כלליות:

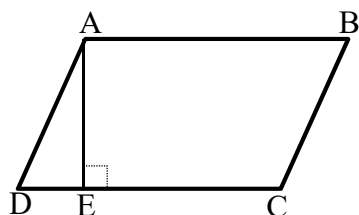
- שטח מקבילית ניתן לחישוב ע"י מכפלת כל צלע בגובה המתאים לה. כך ניתן לקבל את הנוסחה: $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ כאשר h_a ו- h_b הם הגבהים לצלעות a ו- b בהתאמה.
- ניתן לחשב שטח מעוין ע"י מחצית ממכפלת אלכסונים או ע"י מכפלת צלע בגובה שלה (שכן היא סוג של מקבילית).
- עבור טרפז ישר זווית, שבו $h = c$ נקבל: $S = \frac{(a+b)c}{2}$.
- ניתן לחשב שטח של טרפז ע"י הורדת גבהים, חלוקתו למלבן ושני משולשים, חישוב שטחם בנפרד ואיחודם.

שאלות עם מקבילית:

5) חשב את השטחים וההיקפים של המקבילות הבאות (כל המידות בס"מ):

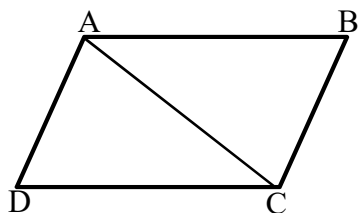


6) נתונה מקבילית ABCD.



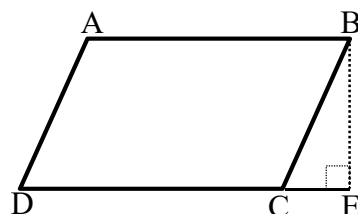
- מעבירים גובה AE לצלע CD שאורכו הוא 6 ס"מ.
ידוע כי שטח המקבילית הוא 60 סמ"ר.
א. מצא את אורך הצלע AB.
ב. ידוע כי היקף המקבילית הוא 36 ס"מ.
מצא את אורך הצלע BC.

7) נתונה מקבילית ABCD.



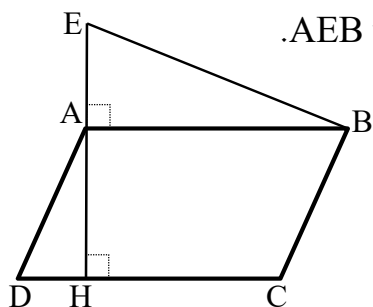
- מעבירים את האלכסון AC שאורכו 25 ס"מ.
ידוע כי היקף המשולש ACD הוא 66 ס"מ.
חשב את היקף המקבילית.

8) נתונה מקבילית ABCD.



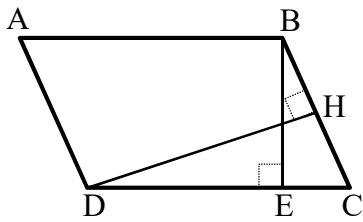
- מורידים גובה מהקדקוד B לצלע CD כך שנוצר המשולש BCE. שטח המשולש BCE הוא 24 סמ"ר ושטח המקבילית ABCD הוא 112 סמ"ר. נתון: $CE = 6$ ס"מ.
א. מצא את אורך הגובה BE.
ב. מצא את אורך הצלע AB של המקבילית.

9) נתונה מקבילית ABCD.



- מעלים אנך מהקדקוד A עד לנקודה E ויוצרים משולש AEB.
מורידים גובה AH לצלע CD שאורכו 12 ס"מ.
נתון: $AE = 8$ ס"מ, $AD = 13$ ס"מ.
שטח כל הצורה AEBCD הוא 256 סמ"ר.
א. מצא את אורך הצלע AB.
ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

10) במקבילית ABCD מעבירים את הגבהים BE ו-DH.



לצלעות CD ו-BC בהתאמה.

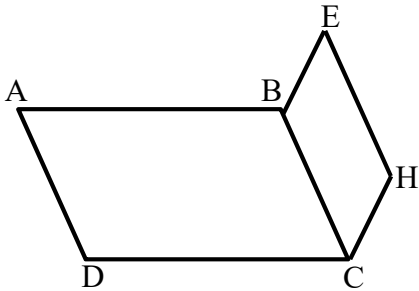
נתון: $BE = 12$ ס"מ, $BC = 14.4$ ס"מ, $DH = 15$ ס"מ.

א. חשב את שטח המקבילית ABCD.

ב. חשב את אורך הצלע AB.

ג. חשב את היקף המקבילית.

11) נתונה המקבילית ABCD. על הצלע BC בונים



מקבילית נוספת BCHE שהיקפה הוא 44 ס"מ.

ידוע כי היקף הצורה ABEHCD הוא 94 ס"מ.

נתון: $BC = 15$ ס"מ.

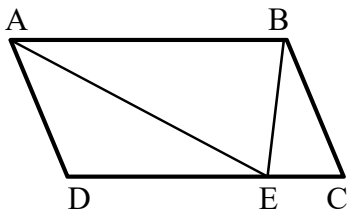
א. חשב את אורך הצלע AB.

ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

12) המרובע ABCD הוא מקבילים.

הנקודה R נמצאת על DC.

$$\text{הוכח כי: } S_{AEB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

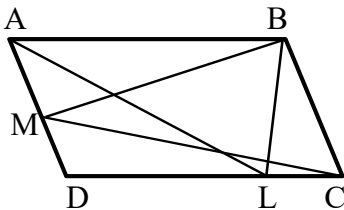


13) המרובע ABCD הוא מקבילית.

הנקודות M ו-L נמצאות על

הצלעות AD ו-DC בהתאמה.

$$\text{הוכח כי: } S_{BMC} = \frac{1}{2} S_{ALB}$$

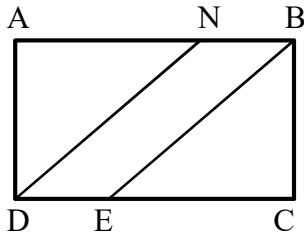


שאלות עם מלבן:

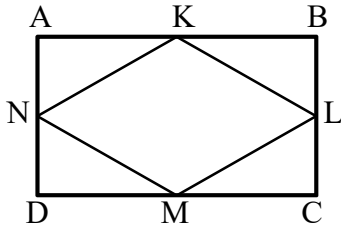
14) במלבן ABCD אורכי הצלעות הם: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ. מצאו את ההיקף של המלבן.

15) במלבן ABCD אורך הצלע AB הוא 10 ס"מ. היקף המלבן הוא 32 ס"מ. מצאו את שטח המלבן.

16) במלבן ABCD נתון: $AD = 9$ ס"מ, $DC = 11$ ס"מ. מצאו את האורך של האלכסון AC.



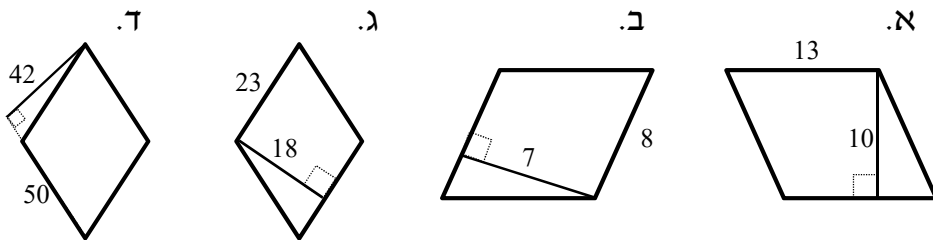
17) המרובע ABCD הוא מלבן.
 הישרים DN ו-BE מקבילים.
 נתון: $AB = 32$ ס"מ, $DN = 30$ ס"מ.
 ו- $BN = 8$ ס"מ. הוכח כי מרובע NBED
 הוא מקבילית וחשב את שטחה.



18) הנקודות K, L, M, ו-N הן אמצעי
 הצלעות AB, BC, CD, ו-AD בהתאמה
 במלבן ABCD. נתון כי היקף המלבן
 הוא 120 ס"מ וכי שטחו הוא 836 סמ"ר.
 חשב את שטחו של המרובע KLMN.

שאלות עם מעוין:

19) חשב את השטחים וההיקפים של המעוינים הבאים (כל המידות בס"מ):

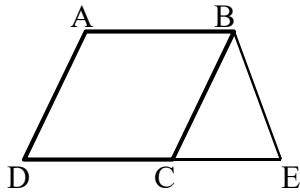


20) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O.
 נתון: $AO = 3$ ס"מ, $BO = 4$ ס"מ. מצא את אורך צלע המעוין.

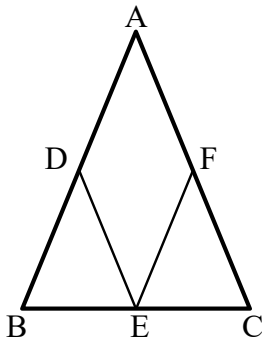
21) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O.
 נתון: $AB = 12$ ס"מ, $BO = 8$ ס"מ. מצא את AO.

22) במעוין ABCD האלכסון AC שווה באורכו לצלע המעוין.
 נתון: $AB = 20$ ס"מ.
 א. חשב את אורך האלכסון BD.
 ב. חשב את שטח המעוין.

23) נתון מעוין ABCD. אורך האלכסון הקצר הוא 7 ס"מ ושטח המעוין
 הוא 35 סמ"ר. חשב את היקף המעוין.

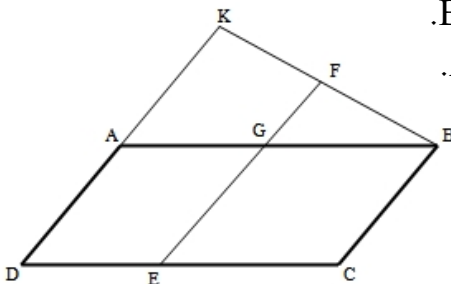


- 24) נתון מעוין ABCD בעל אורך צלע של 8 ס"מ. מעבירים את הקטע BE השווה באורכו לצלע המעוין כך שנוצר המשולש BCE. ידוע כי: $CE = 6$ ס"מ.
- א. איזה סוג משולש הוא המשולש BCE? נמק.
- ב. חשב את היקף הצורה ABCE.



- 25) נתון משולש שווה שוקיים ABC, $(AB = AC)$. מסמנים את אמצעי צלעות המשולש ב-D, E ו-F ומעבירים את הקטעים DE ו-EF כך שהמרובע ADEF הוא מעוין. נתון: $BC = 12$ ס"מ, וכי היקף המשולש ABC הוא 48 ס"מ.
- א. מצא את אורך צלע המעוין ADEF.
- ב. חשב את היקף המעוין ADEF.

- 26) המרובע ABCD הוא מקבילית שבה אורך הצלע AB גדולה פי 2 מהצלע AD. ממשיכים את הצלע AD עד לנקודה K ומחברים אותה לקודקוד B.

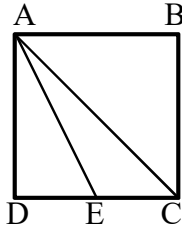


- מעבירים את הקטע FE כך ש-F היא אמצע הקטע BK. EF חותך את הצלע AB בנקודה G ומקביל לצלע AD.
- א. הוכח כי המרובע AGED הוא מעוין.
- ב. שטח המעוין AGED הוא 20 סמ"ר. חשב את שטח המרובע DCBK. אם ידוע כי A היא אמצע הקטע DK.

שאלות עם ריבוע:

- 27) נתון ריבוע ABCD בעל אורך צלע של 6 ס"מ.
- א. חשב את שטח הריבוע.
- ב. חשב את היקף הריבוע.
- ג. חשב את אורך האלכסון בריבוע.

- 28) שטחו של ריבוע ABCD הוא 49 סמ"ר.
- א. מהו אורך צלע הריבוע?
- ב. מהו אורך האלכסון בריבוע?
- ג. מהו היקף הריבוע?



29) בריבוע ABCD מעבירים את הקטע AE כך ש- E היא אמצע הצלע DC ואת האלכסון AC. שטח הריבוע הוא 40 סמ"ר.

- מצא את אורך צלע הריבוע.
- מצא את אורך אלכסון הריבוע.
- מצא את אורך הקטע AE.

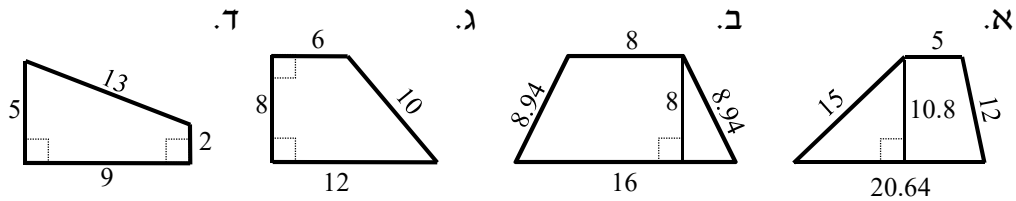
30) חשב את צלע הריבוע השווה בשטחו לשטח משולש שצלעו 25 ס"מ והגובה לצלע זו הוא 18 ס"מ.

31) נתונים מלבן וריבוע השווים בשטחם. אורכי צלעות המלבן הם 25 ס"מ ו-9 ס"מ. חשב את היקף הריבוע.

32) נתונים מלבן וריבוע השווים בהיקפם. שטח הריבוע הוא 36 ס"מ ואורך המלבן גדול ב-8 ס"מ מרוחבו. חשב את שטח המלבן.

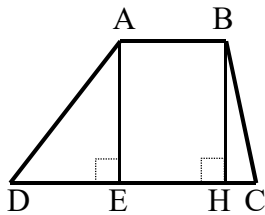
שאלות עם טרפז:

33) חשב את השטחים וההיקפים של הטרפזים הבאים (כל המידות בס"מ):



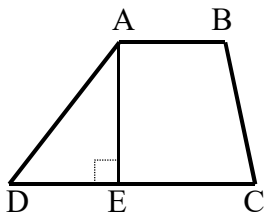
34) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$.

מורידים את הגבהים AE ו-BH שאורכם 8 ס"מ. ידוע כי: $DE = 6$ ס"מ, $HC = 2$ ס"מ. שטח הטרפז הוא 88 סמ"ר. מצא את אורך בסיס הטרפז AB.



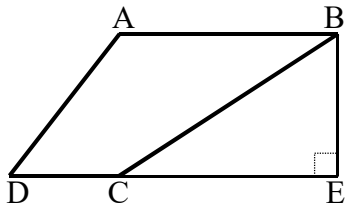
35) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$.

מורידים גובה AE מהקדקוד A. היקף הטרפז הוא 68 ס"מ ונתון כי: $AD = 18$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ, $AB = 12$ ס"מ. א. מצא את אורך הבסיס DC.



ב. מצא את הגובה AE אם ידוע כי שטח הטרפז הוא 255 סמ"ר.

36) נתון טרפז $ABCD$, $(AB \parallel CD)$.



מהקדקוד B מורידים גובה חיצוני לטרפז BE

כאשר E נמצאת על המשך הבסיס DC.

ידוע כי: $AB = 20$ ס"מ, $DC = 8$ ס"מ.

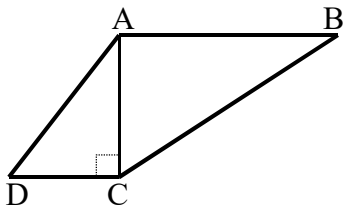
וכי שטח הטרפז הוא 196 סמ"ר.

א. מצא את הגובה BE.

ב. נתון כי: $\angle D = 60^\circ$, $\angle BCD = 130^\circ$.

חשב את זווית A ואת זוויות המשולש BCE.

37) נתון טרפז $ABCD$, $(AB \parallel CD)$.



האלכסון AC הוא גובה בטרפז ואורכו 12 ס"מ.

ידוע כי: $AD = AB = 13$ ס"מ, $BC = 17.7$ ס"מ.

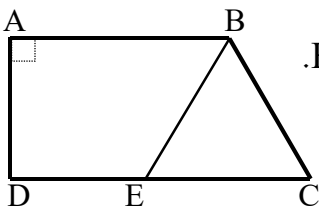
היקף הטרפז הוא 48.7 ס"מ ו- $\angle B = 42.71^\circ$.

א. מצא את אורך הבסיס DC.

ב. חשב את שטח הטרפז.

ג. חשב את זווית C.

38) הטרפז $ABCD$, $(AB \parallel CD)$ הוא ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$).



מהנקודה E שעל הבסיס DC מעבירים את הקטע BE

כך שהמשולש BCE הוא שווה צלעות עם: $BC = 14$ ס"מ.

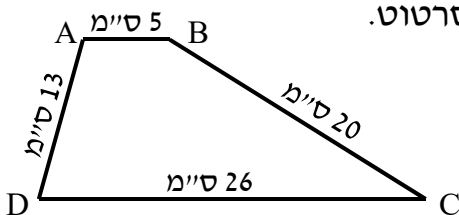
היקף הטרפז ABCD הוא 67 ס"מ ו-AD הוא 10 ס"מ.

א. מהו היקף הטרפז ABED?

ב. חשב את שטח הטרפז ABED.

39) נתון טרפז $ABCD$ שאורכי צלעותיו נתונים בסרטוט.

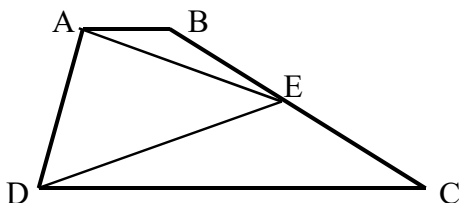
חשב את שטח הטרפז (פתור כתרגיל חישוב).



40) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.

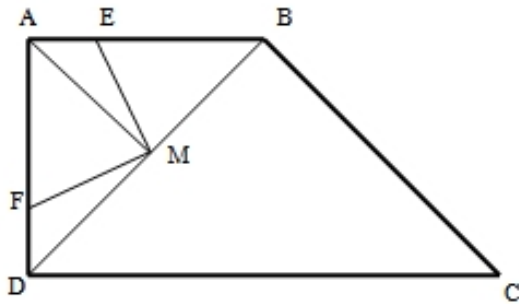
הנקודה E היא אמצע השוק BC.

הוכח כי: $S_{ADE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.



41) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$).

הנקודה M נמצאת על אמצע האלכסון BD של הטרפז וממנה מעבירים את הקטעים ME ו-MF השווים זה לזה ומתברים אותה עם הקדקוד A.



נתון כי: $ME \perp MF$ וכי: $\angle DFM > 90^\circ$.

א. הוכח: $\triangle AMF \cong \triangle BME$.

ב. נתון כי: $AE = FD = 1$, $BC = \sqrt{32}$.

כמו כן: $AM \parallel BC$.

1. מצא את אורך הקטע BE.
2. חשב את שטח הטרפז ABCD.

תשובות סופיות:

- (1) א. 184 סמ"ר ב. 100 סמ"ר ג. 60 סמ"ר ד. 48.36 סמ"ר
 ה. 92.4 סמ"ר ו. 128.16 סמ"ר.
- (2) א. 36.6 סמ"ר ב. 16.8 סמ"ר ג. 30.78 סמ"ר.
- (5) א. 48 ס"מ $P =$, 117 סמ"ר $S =$ ב. 36 ס"מ $P =$, 42 סמ"ר $S =$
 ג. 96 ס"מ $P =$, 440 סמ"ר $S =$ ד. 56 ס"מ $P =$, 120 סמ"ר $S =$.
- (6) א. 10 ס"מ $AB =$ ב. 8 ס"מ $BC =$
- (7) 82 ס"מ $P =$.
- (8) א. 8 ס"מ $BE =$ ב. 14 ס"מ $AB =$
- (9) א. 16 ס"מ $AB =$ ב. 58 ס"מ $P =$.
- (10) א. 216 סמ"ר $S =$ ב. 18 ס"מ $AB =$ ג. 64.8 ס"מ $P =$.
- (11) א. 25 ס"מ $AB =$ ב. 80 ס"מ $P =$.
- (14) 40 ס"מ.
- (15) 60 סמ"ר.
- (16) 14.21 ס"מ $\approx \sqrt{202}$.
- (17) 144 סמ"ר.
- (18) 418 סמ"ר.
- (19) א. 52 ס"מ $P =$, 130 סמ"ר $S =$ ב. 32 ס"מ $P =$, 56 סמ"ר $S =$
 ג. 92 ס"מ $P =$, 414 סמ"ר $S =$ ד. 200 ס"מ $P =$, 2100 סמ"ר $S =$.
- (20) 5 ס"מ.
- (21) 8.94 ס"מ $\approx \sqrt{80}$.
- (22) א. $20\sqrt{3}$ ס"מ $AB =$ ב. 173.2 סמ"ר.
- (23) 14.28 ס"מ.
- (24) א. משולש שווה שוקיים, מכיוון ש- $BE=BC$. ב. 38 ס"מ $P =$.
- (25) א. 9 ס"מ. ב. 36 ס"מ $P =$.
- (26) ב. 60 סמ"ר.
- (27) א. 36 סמ"ר ב. 24 ס"מ ג. 8.48 ס"מ.
- (28) א. 7 ס"מ ב. 9.89 ס"מ ג. 28 ס"מ.

29) א. 6.32 ס"מ ב. 8.94 ס"מ ג. 7.07 ס"מ.

30) 15 ס"מ.

31) 15 ס"מ.

32) 20 סמ"ר.

33) א. 52.64 ס"מ $P=$, 138.456 סמ"ר $S=$ ב. 41.88 ס"מ $P=$, 96 סמ"ר $S=$.

ג. 36 ס"מ $P=$, 72 סמ"ר $S=$ ד. 29 ס"מ $P=$, 31.5 סמ"ר $S=$.

34) $AB = 7$ ס"מ.

35) א. 22 ס"מ $DC =$ ב. 15 ס"מ $AE =$.

36) א. 14 ס"מ $BE =$ ב. $\sphericalangle A = 120^\circ$, $\sphericalangle CBE = 40^\circ$, $\sphericalangle BCE = 50^\circ$, $\sphericalangle E = 90^\circ$.

37) א. 5 ס"מ $DC =$ ב. 108 סמ"ר $S =$ ג. $\sphericalangle C = 137.29^\circ$.

38) א. 53 ס"מ $P =$ ב. 215 סמ"ר $S =$.

39) 186 סמ"ר.

41) א. 1. 3 ס"מ. ב. 2. 24 סמ"ר.

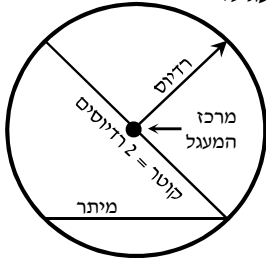
תוכן העניינים:

156	פרק 10 – גיאומטריה אוקלידית - המעגל:
156	הגדרות:
156	משפטים העוסקים במיתרים במעגל:
157	שאלות יסודיות – קשתות ומיתרים במעגל:
158	משפט אנך אמצעי למיתר:
159	שאלות – אנך אמצעי למיתר:
159	משפטים העוסקים בזוויות במעגל:
160	שאלות – זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל:
162	שאלות – זווית היקפית הנשענת על קוטר:
164	שאלות – זווית פנימית וזווית חיצונית במעגל:
164	משפטים העוסקים במשיק למעגל ושני משיקים למעגל:
165	שאלות – משיקים למעגל:
166	שאלות – משיק ומיתר:
167	משפטים העוסקים בשני מעגלים:
167	שאלות – שני מעגלים:
168	משפטים העוסקים במעגל חוסם ומעגל חסום:
169	שאלות – משולשים ומעגל:
169	שאלות – מרובעים ומעגל:
170	שטחים והיקפים עם מעגלים:
170	שאלות – שטחים והיקפים במעגל:
173	תשובות סופיות:
175	שאלות מסכמות ללא פרופורציה:
178	תשובות סופיות:

פרק 10 – גיאומטריה אוקלידית - המעגל:

הגדרות:

- מעגל – המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה קבועה קבוע. הנקודה הקבועה נקראת מרכז המעגל.
- רדיוס – קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.
- מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.
- קוטר – מיתר העובר במרכז המעגל.
- היקף מעגל $= 2\pi R$.
- שטח מעגל $= \pi R^2$.
- קשת – חלק מהיקף המעגל.
- גזרה – חלק משטח המעגל.
- זווית מרכזית – זווית שקדקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים.
- זווית היקפית – זווית שקדקודה על היקף המעגל ושוקיה מיתרים.

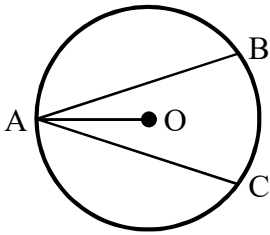


משפטים העוסקים במיתרים במעגל:

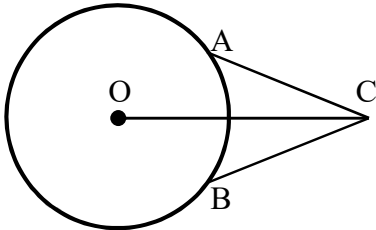
1. מיתרים שווים נשענים על קשתות שוות ולהפך.
2. על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות ולהפך.
3. מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל. (משפט הפוך ל-3) מיתרים הנמצאים במרחק שווה ממרכז המעגל שווים.

שאלות יסודיות – קשתות ומיתרים במעגל:

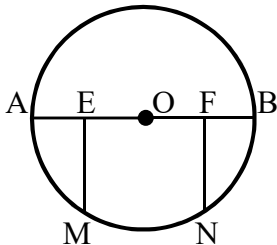
1) AB ו-AC הם שני מיתרים שווים במעגל שמרכזו O. הוכח כי AO חוצה את זווית BAC.



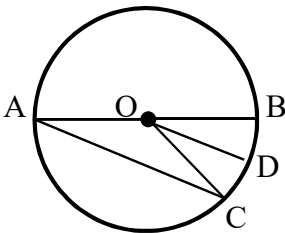
2) A ו-B הן שתי נקודות הנמצאות על היקף המעגל שמרכזו O. נקודה C הנמצאת מחוץ למעגל מקיימת כי: $AC = BC$. הוכח כי OC חוצה את זווית C.



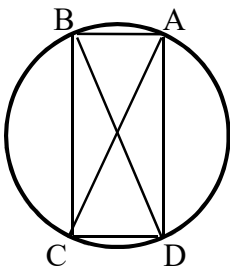
3) הקטע AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. נתון כי: $EM \perp AB$, $FN \perp AB$, $EO = FO$. הוכח כי $MN = EF$.



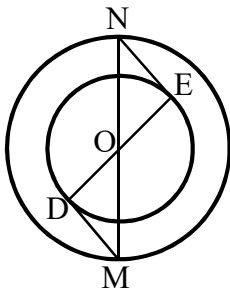
4) AB הוא קוטר במעגל שלפניך. AC הוא מיתר ו-O מרכז מעגל. המיתר OD חוצה את זווית BOC. הוכח כי DO מקביל ל-AC.

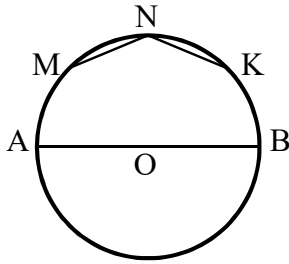


5) במעגל שלפניך AC ו-BD הם קטרים. הוכח כי המרובע ABCD הוא מלבן.

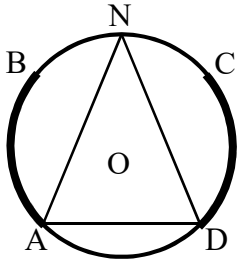


6) בסרטוט שלפניך שני מעגלים בעלי מרכז משותף O. הקטע MN הוא קוטר במעגל הגדול והקטע DE הוא קוטר במעגל הקטן. מעבירים את הקטעים MD ו-NE. הוכח כי MD שווה ל-NE.

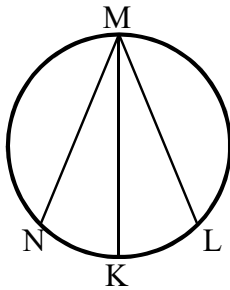




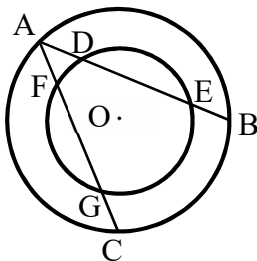
7) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
את הקשת העליונה של AB מחלקים ל-4
קשתות שוות, כלומר: $\widehat{AM} = \widehat{MN} = \widehat{NK} = \widehat{KB}$.
חשב את זווית KNM.



8) במעגל שלפניך נתון כי הקשתות המסומנות שוות
ז"א: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$. הנקודה N היא אמצע הקשת \widehat{BC} .
הוכח כי המשולש AND הוא שווה שוקיים.



9) המיתרים MN ו-ML שווים זה לזה.
המיתר MK חוצה את זווית NML.
א. הוכח כי $\triangle KNM \cong \triangle KLM$.
ב. הוכח כי MK הוא קוטר במעגל.

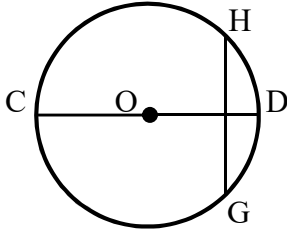


10) נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
מעבירים את המיתרים AB ו-AC במעגל הגדול.
ידוע כי שני המיתרים שווים זה לזה.
מסמנים את נקודות החיתוך של המיתרים עם המעגל
הקטן ב-D ו-E עבור המיתר AB, ו-F ו-G עבור
המיתר AC. הוכח: $DE = FG$.

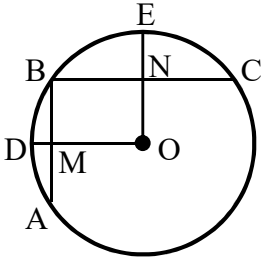
משפט אנך אמצעי למיתר:

4. אנך למיתר ממרכז המעגל חוצה את המיתר.
(משפט הפוך ל-4 (1)) רדיוס החוצה מיתר מאונך לו.
(משפט הפוך ל-4 (2)) קטע היוצא מאמצע מיתר ומאונך לו, עובר במרכז המעגל.

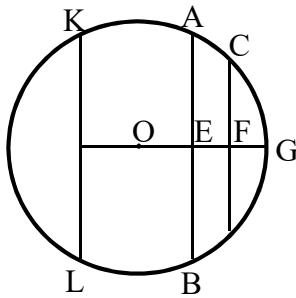
שאלות – אנך אמצעי למיתר:



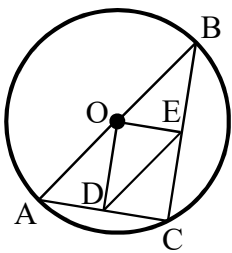
- 11) במעגל שמרכזו O המיתר GH מאונך לקוטר CD.
 א. הוכח כי $GC = HC$.
 ב. נתון כי: $\widehat{HDG} = 80^\circ$.
 בת כמה מעלות הקשת \widehat{CG} ?



- 12) AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O. מעבירים את הרדיוסים OD ו-OE אשר חותכים את המיתרים AB ו-BC בנקודות M ו-N בהתאמה. ידוע כי מרובע ONBM הוא מלבן. נתונות המידות הבאות: $R = 8$ ס"מ, $MD = 1.5$ ס"מ, $NE = 3.5$ ס"מ. חשב את אורך כל אחד מהמיתרים AB ו-BC.



- 13) AB ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O, והם חותכים את הקטע MG, העובר במרכז המעגל, בנקודות E ו-F בהתאמה. נתון $KL \parallel CD$, $CF = DF$.
 א. הוכח: $KL = LM$.
 ב. נתון בנוסף כי: $AB \perp MG$, $ML = BE$.
 הוכח: $MO = EO$.



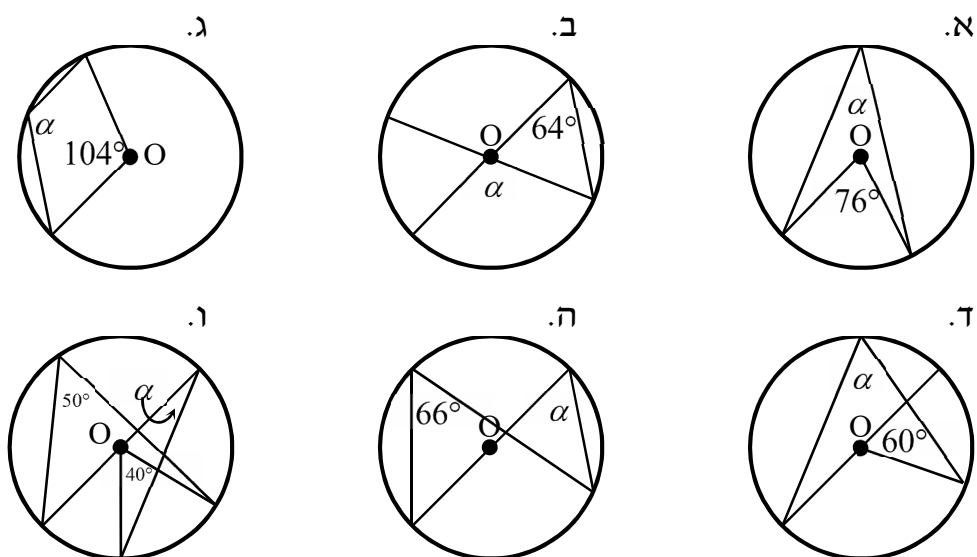
- 14) ABC הוא משולש החסום במעגל O. המיתר AB הוא קוטר במעגל. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AC ו-BC בהתאמה. מעבירים את הקטעים OD ו-OE וידוע כי: $OD \perp AC$, $OE \perp BC$.
 הוכח כי DE שווה באורכו לרדיוס המעגל.

משפטים העוסקים בזוויות במעגל:

5. שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת/קשתות שוות, שוות ביניהן. (משפט הפוך ל-5) זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות.
6. זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.
7. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה. (משפט הפוך ל-7) מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר.

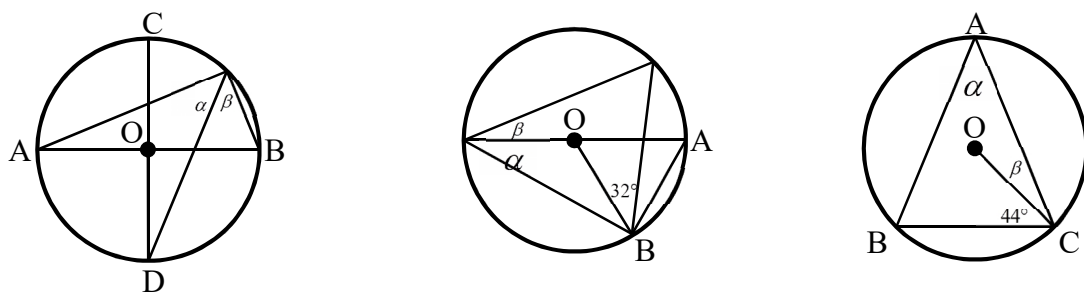
שאלות – זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל:

15) נתונים המעגלים הבאים שמרכזם הוא O. חשב את הזווית α בכל אחד מהמקרים.



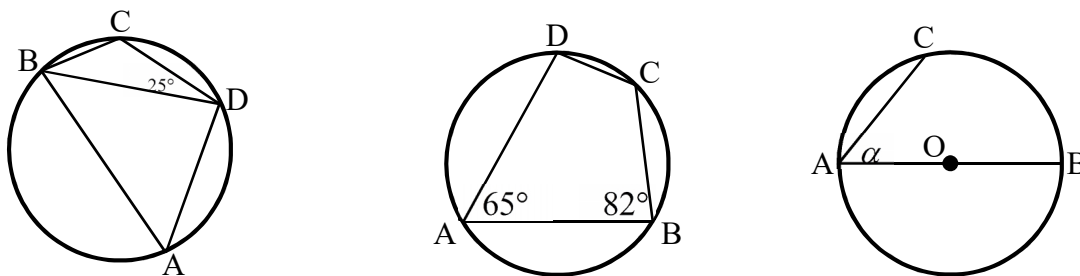
16) במעגלים הבאים שמרכזם O מופיעים הנתונים לידם. חשב את הזוויות α ו- β בכל אחד מהמקרים.

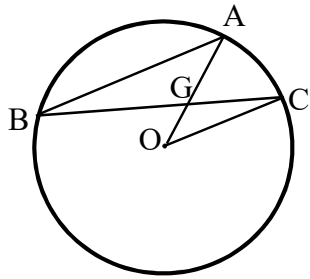
א. $AB = AC$ ב. $\triangle AOB$ - שווה צלעות ג. AB, CD קטרים מאונכים זה לזה.



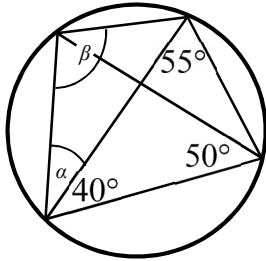
17) חשב את המבוקש בכל מקרה:

א. AB קוטר, $\widehat{AC} = 84^\circ$ ב. $\widehat{DC} = 52^\circ$. חשב: $\widehat{AD}, \widehat{BC}, \widehat{AB}$ ג. $\widehat{DC} = 60^\circ$. חשב $\angle BAD$.

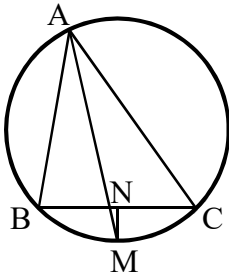




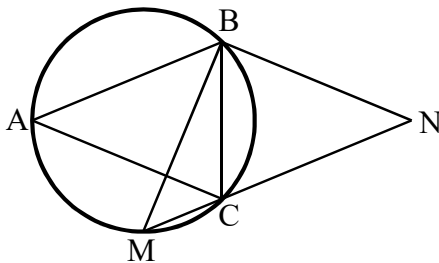
18) AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.
נתון: $AB \parallel CO$, $\angle AGC = 60^\circ$.
חשב את גודלה של הזווית $\angle AOC$.



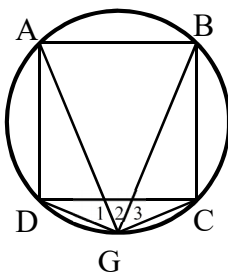
19) חשב את גודל הזוויות α ו- β במעגל הנתון.



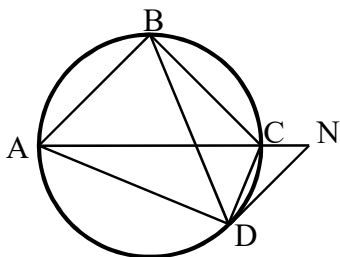
20) המשולש ABC חסום במעגל.
המיתר AM חוצה את זווית A.
מעבירים אנך מהנקודה M לצלע BC
החותך אותה בנקודה N.
הוכח: $BN = CN$.



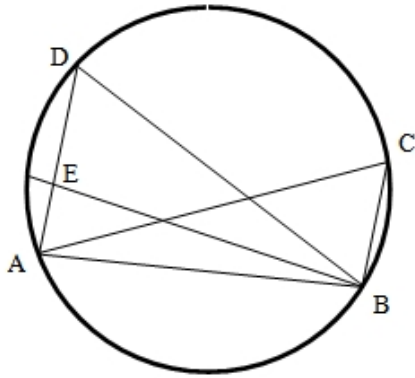
21) בסרטוט שלפניך נתון כי המשולשים ABC ו-BMN הם שווים שוקיים ($AB = AC$, $BM = BN$).
זווית הראש במשולש BMN היא 94° .
חשב את זווית ACB.



22) במעגל שלפניך חסום ריבוע ABCD.
הנקודה G נמצאת על היקף המעגל.
ממנה מעבירים מיתרים לכל קדקוד
כך שנוצרות הזוויות $\angle G_1$, $\angle G_2$, $\angle G_3$.
הוכח כי $\angle G_1 = \angle G_2 = \angle G_3$ ומצא אותן.

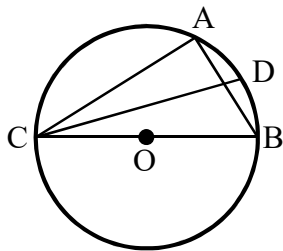


23) המרובע ABCD חסום במעגל. ממשיכים את האלכסון AC עד לנקודה N ומחברים אותה עם הקדקוד D כך שמתקיים: $AB \parallel DN$.
הוכח כי זוויות המשולשים $\triangle ADN$ ו- $\triangle BDC$ שוות.

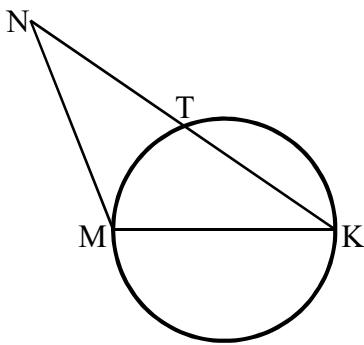


- 24) מהנקודה A שעל היקף המעגל מעבירים את המיתרים AB, AC ו-AD. הקטע BE חותך את המיתר AD בנקודה E כך שהקטעים DE ו-BC שווים. המיתרים AC ו-BD שווים זה לזה.
 א. הוכח: $\triangle ABC \cong \triangle BED$.
 ב. 1. הוכח כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים.
 2. הוכח כי: $\angle BAE + \angle CBA = 180^\circ$.

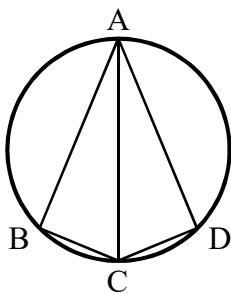
שאלות – זווית היקפית הנשענת על קוטר:



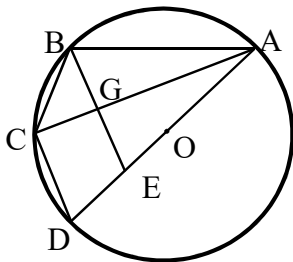
- 25) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-BC הוא קוטר. מעבירים את המיתר CD המקיים: $\angle DCB = 20^\circ$. מצא את זווית CAD.



- 26) MK הוא קוטר במעגל שלפניך. הקטע KN חותך את המעגל בנקודה T. מתקיים: $KT = NT$. הוכח כי: $MK = NM$.



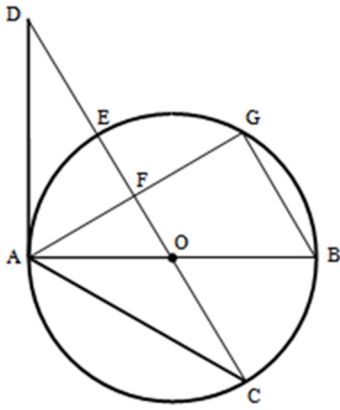
- 27) מרובע ABCD חסום במעגל כאשר האלכסון AC הוא קוטר וחוצה את זווית BCD. הוכח כי ABCD הוא דלתון.



- 28) AB, AC, AD, BC ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O (המיתר AD עובר ב-O). הקטע BE חותך את המיתר AC בנקודה G. נתון: $BE \parallel CD, BG = GE$. הוכח: $BC = CD$.

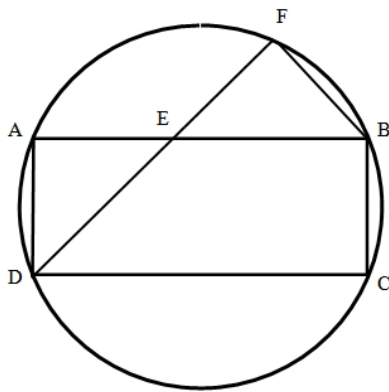
29) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.

- מהנקודה A מעבירים את המיתרים AC ו-AG ואת המשיק AD כך שהמשולש ACD שווה שוקיים. הישר CD חותך את היקף המעגל בנקודה E, את המיתר AG בנקודה F ועובר דרך מרכז המעגל O. המיתר BG מקביל לישר החותך CD.
- חשב את זוויות המשולש ACD.
 - הוכח כי: $AF = FG$.
 - רדיוס המעגל יסומן ב- R . הוכח כי: $DC = 3R$.



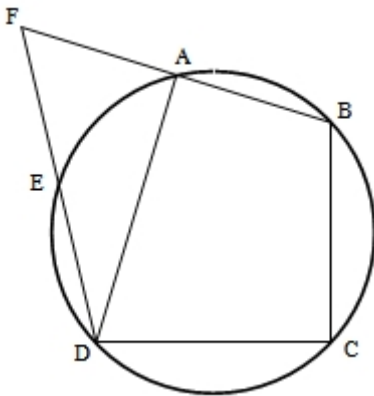
30) המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.

- מהקדקוד D מעבירים את המיתר DF החותך את הצלע AB בנקודה E. ידוע כי: $\widehat{AF} = \widehat{CF}$. הצלע AD של המלבן תסומן ב- a .
- הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.
 - נתון גם כי: $BC = BF$.
- הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.
 - חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות: \widehat{AB} ; \widehat{BC} (אין צורך לסרטט אותן).



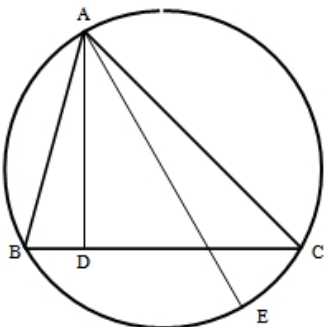
31) המרובע ABCD חסום במעגל.

- המשיכי המיתרים AB ו-ED נפגשים בנקודה F. הקטע FD חותך את היקף המעגל בנקודה E כך שמתקיים: $\widehat{AB} = \widehat{AE}$. נתון כי הזווית BCD היא ישרה.
- הוכח כי הקטע DF שווה לקוטר המעגל.
- נתון כי: $DF = BF$ וכי רדיוס המעגל הוא 12 ס"מ.
- הוכח כי המרובע AEDB הוא טרפז.
 - חשב את היקף הטרפז AEDB.

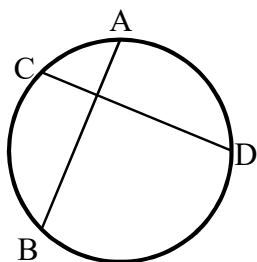


32) המשולש ABC חסום במעגל.

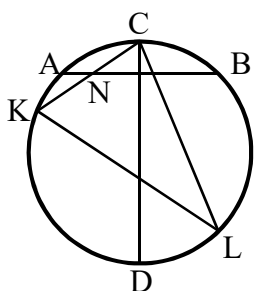
- AD גובה לצלע BC ו-AE קוטר במעגל.
- הוכח: $\angle BAD = \angle EAC$.
- נתון גם כי: $CE = \sqrt{21}$, $AD = 6$, $CD = 8$.
- חשב את רדיוס המעגל.



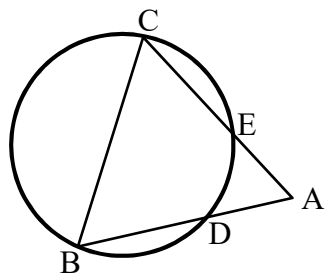
שאלות – זווית פנימית וזווית חיצונית במעגל:



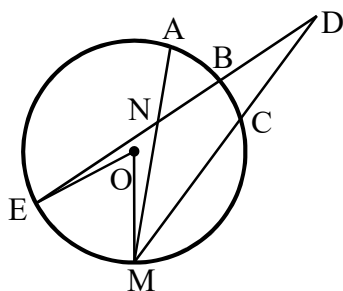
33) המיתרים AB ו-CD מקצים קשתות שזוויותיהן הן: $\widehat{AC} = 40^\circ$ ו- $\widehat{BD} = 140^\circ$. הוכח כי המיתרים מאונכים זה לזה.



34) AB ו-CD הם בהתאמה מיתר וקוטר במעגל אשר מאונכים זה לזה. יוצרים משולש KCL כך ש-N היא נקודת החיתוך של הצלע CK והמיתר AB. הוכח כי: $\sphericalangle CNB = \sphericalangle CLK$.



35) מהנקודה A יוצאים שני ישרים AB ו-AC החותכים מעגל בנקודות D ו-E בהתאמה. ידוע כי $\widehat{DE} = 45^\circ$, $\widehat{BC} = 165^\circ$, $AB = AC$. הוכח כי משולש ABC הוא שווה צלעות.



36) במעגל שלפניך נתון כי $\widehat{AB} = \widehat{BC}$. הוכח: $\sphericalangle EOM = \sphericalangle ENM + \sphericalangle EDM$.

משפטים העוסקים במשיק למעגל ושני משיקים למעגל:

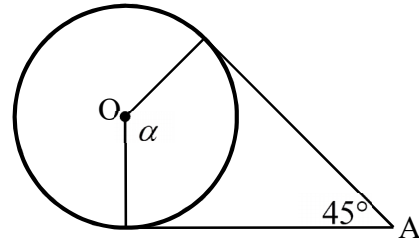
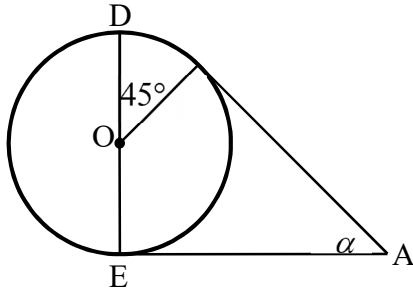
8. משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה. (משפט הפוך ל-8) קטע המאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל.
9. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
10. קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה יוצאים שני משיקים חוצה את הזווית בין המשיקים.
11. הזווית הכלואה בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני.

שאלות – משיקים למעגל:

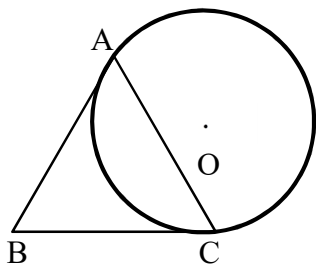
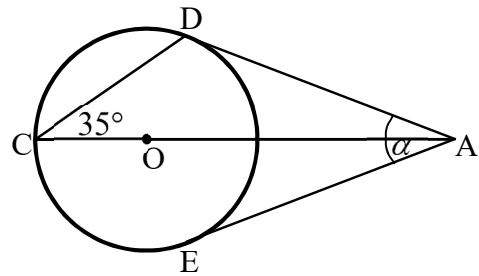
37 באיורים שלפניך נתונים שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה A שמחוץ למעגל. מרכזי המעגלים מסומן ב-O. מצא את α בכל מקרה.

א.

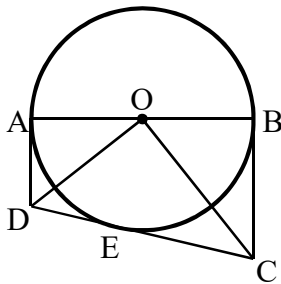
ב.



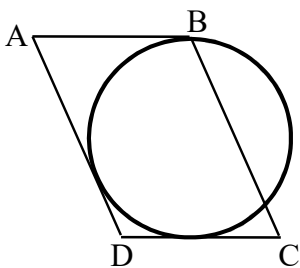
ג.



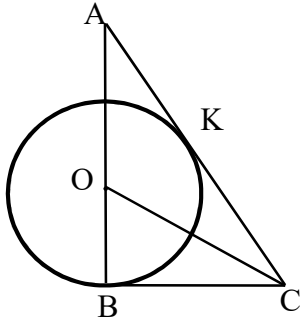
38 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). המעגל O משיק לצלעות AB ו-BC בנקודות A ו-C. הוכח כי ABC הוא שווה צלעות.



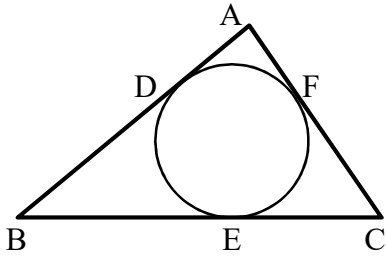
39 במעגל O מעבירים קוטר AB ושלושה משיקים AD, CD ו-BC. E היא נקודת ההשקה של CD עם המעגל. הוכח כי: $\angle COD = 90^\circ$.



40 הצלעות AB, AD ו-DC של המקבילית ABCD משיקות למעגל בנקודות B, L ו-K בהתאמה (ראה שרטוט). נתון: $BC = 14$ ס"מ, $CK = 6$ ס"מ. חשב את היקף המקבילית.



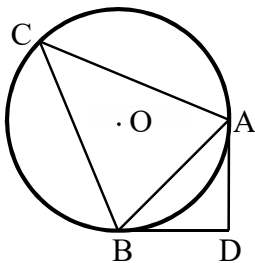
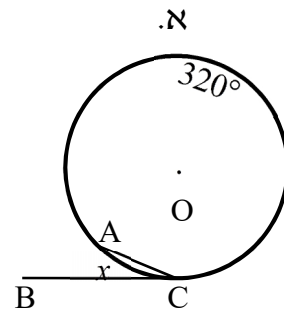
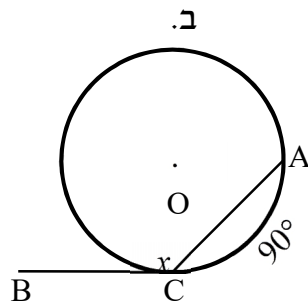
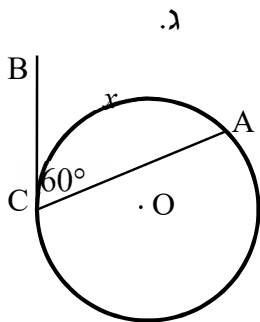
41) הצלעות AC ו-BC של המשולש ABC משיקות למעגל שמרכזו O, בנקודות K ו-B בהתאמה. הצלע AB עוברת בנקודה O. נתון: $AB = 15$ ס"מ, $AK = CK$.
 א. חשב את גודלה של זווית A.
 ב. חשב את אורכו של רדיוס המעגל.



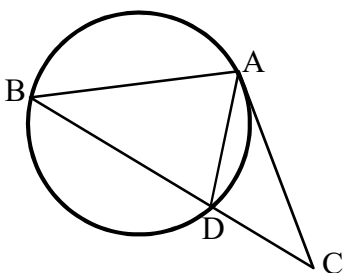
42) משולש ABC חוסם מעגל אשר משיק לצלעותיו בנקודות D, E, F כמתואר באיור. נתון כי: $AC = 18$ ס"מ, $CF = 12$ ס"מ ו- $BD = 14$ ס"מ. מצא את היקף המשולש ABC.

שאלות – משיק ומיתר:

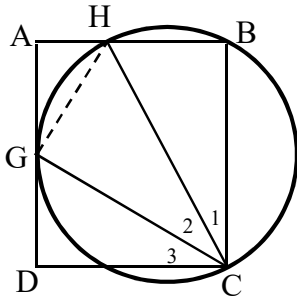
43) באיורים שלפניך נתון מעגל שמרכזו O, מיתר AC ומשיק BC בנקודה C. מצא את x.



44) ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$) החסום במעגל שמרכזו O. מהקדקודים A ו-B מעבירים משיקים אשר נחתכים בנקודה D. ידוע כי זווית הבסיס במשולש ABC היא 68° . חשב את זווית ADB.



45) AC הוא משיק למעגל בנקודה A. BC חותך את המעגל בנקודה D. נתון כי $AD = CD$, הוכח: $AB = AC$.

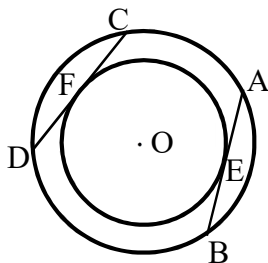


46) הקדקודים B ו-C של המלבן ABCD מונחים על מעגל. הצלע AD משיקה למעגל בנקודה G והצלע AB חותכת את המעגל בנקודה H. הוכח: $\angle C_2 = \angle C_3$. (הדרכה: סמן $\angle AGH = \alpha$.)

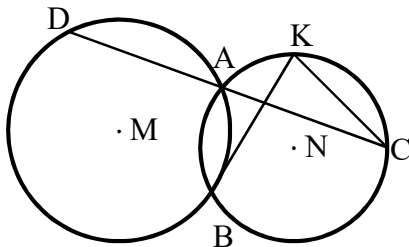
משפטים העוסקים בשני מעגלים:

12. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.
 13. קטע המרכזים (או המשכו) של שני מעגלים משיקים עובר בנקודת ההשקה.

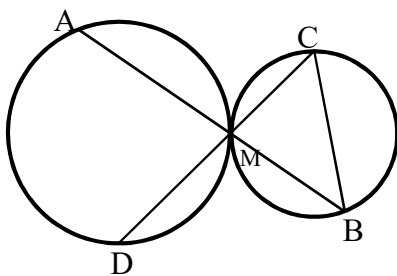
שאלות – שני מעגלים:



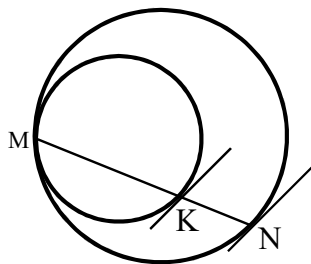
47) נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O. דרך שתי נקודות E ו-F שעל היקף המעגל הפנימי מעבירים משיקים אשר חותכים את המעגל החיצוני בנקודות A, B, C ו-D. הוכח כי המיתרים AB ו-CD הנוצרים באופן זה שווים.



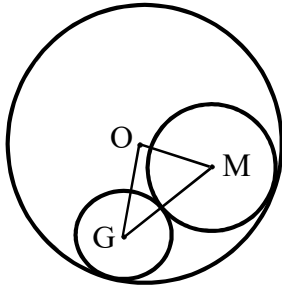
48) שני מעגלים M ו-N נחתכים בנקודות A ו-B. הישר CD עובר דרך הנקודה A. מעבירים משיק למעגל M החותך את המעגל N בנקודה K. הוכח כי: $CK \parallel BD$.



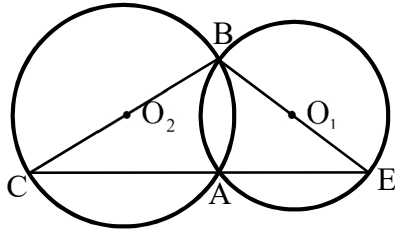
49) שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה M. דרך הנקודה M מעבירים שני ישרים חותכים. האחד חותך את המעגל השמאלי בנקודה A ואת הימני בנקודה B והאחר חותך את המעגל השמאלי בנקודה D ואת הימני בנקודה C. הוכח כי $AD \parallel BC$.



50) שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה M. מעבירים מיתר MN במעגל החיצוני אשר חותך את המעגל הפנימי בנקודה K. הוכח כי המשיקים לשני המעגלים בנקודות K ו-N מקבילים זה לזה.



51) המעגלים שמרכזיהם M ו-G משיקים מבחוץ זה לזה ומשיקים מבפנים למעגל שמרכזו O. נתון כי רדיוס המעגל שמרכזו O הוא 8 ס"מ. חשב את היקף המשולש OGM.



52) שני מעגלים שמרכזיהם O_1 ו- O_2 נחתכים בנקודות A ו-B. מעבירים את הקטרים BC ו-BE. א. הוכח כי הנקודות A, B, C נמצאות על ישר אחד. ב. הוכח כי O_1O_2 הוא קטע אמצעים במשולש BCE.

משפטים העוסקים במעגל חוסם ומעגל חסום:

14. מרכז מעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים במשולש.
15. מרכז מעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזווית במשולש.
16. במרובע החסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180° .
(משפט הפוך ל-16) אם במרובע סכום זוג זוויות נגדיות הוא 180° , המרובע בר חסימה במעגל.
17. במרובע החוסם מעגל סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.
(משפט הפוך ל-17) אם במרובע סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני אז ניתן לחסום בתוכו מעגל.
18. כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל וניתן לחסום בתוכו מעגל.

שאלות – משולשים ומעגל:

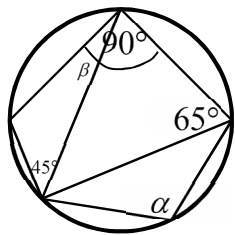
53) AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.

- א. הוכח: אם מרכז המעגל החסום במשולש ABC נמצא על AD אז המשולש ABC הוא שווה שוקיים.
 ב. בהמשך לסעיף א', האם מרכז המעגל החסום את משולש ABC נמצא על AD?

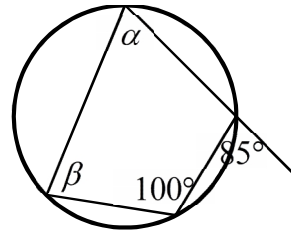
שאלות – מרובעים ומעגל:

54) מצא את הנעלמים בכל אחד מהסרטוטים שלפניך:

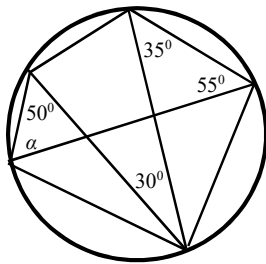
ב.



א.

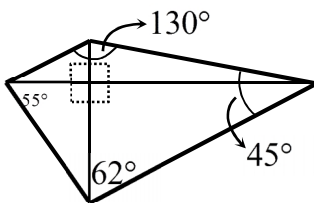


55) חשב את גודלה של הזווית α בסרטוט הבא:

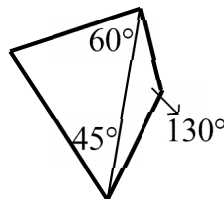


56) קבע אלו מהמרובעים הבאים ניתן לחסום במעגל:

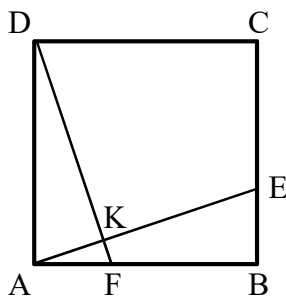
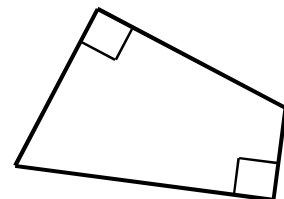
ג.



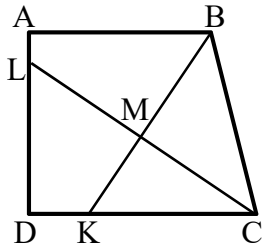
ב.



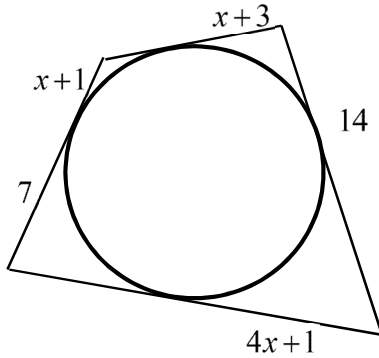
א.



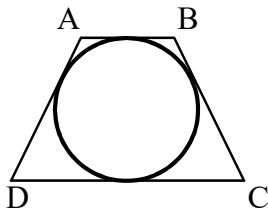
57) בריבוע ABCD נתון כי $AF = BE$. הנקודה K היא חיתוך של הקטעים AE ו-DF. הוכח כי את המרובע DKEC ניתן לחסום במעגל.



58) בטרפז ישר זווית ABCD שבו השוק AD מאונכת לבסיסים AB ו-DC הנקודות K ו-L נמצאות על הצלעות DC ו-AD בהתאמה, כך שהקטעים BK ו-CL הם חוצי הזוויות B ו-C בהתאמה. חוצי הזוויות נפגשים בנקודה M. הוכח: את המרובע DKML ניתן לחסום במעגל. הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



59) חשב את גודלו של x בשרטוט הבא:



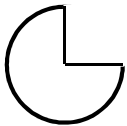
60) בטרפז שווה שוקיים ABCD ($AB \parallel CD$) שהיקפו 60 ס"מ וזוויות הבסיס החדות שלו הן 60° חסום מעגל. מצא את אורכי צלעות הטרפז.

שטחים והיקפים עם מעגלים:

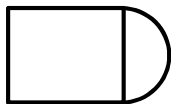
שאלות – שטחים והיקפים במעגל:

61) ענה על השאלות הבאות:

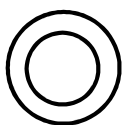
א. היקפו של עיגול הוא 44 ס"מ. חשב את שטחו.



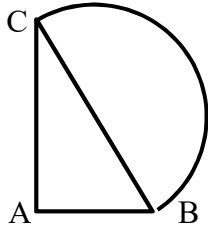
ב. הצורה שבאיור היא $3/4$ עיגול. היקף הצורה שווה ל-45 ס"מ. חשב את אורך הרדיוס של העיגול.



ג. שטח צורה המורכבת מריבוע וחצי עיגול הוא 30 סמ"ר. חשב את רדיוס חצי העיגול.



ד. שטח טבעת הוא 55π סמ"ר. הרדיוס הפנימי הוא 3 ס"מ. חשב את הרדיוס החיצוני של הטבעת.



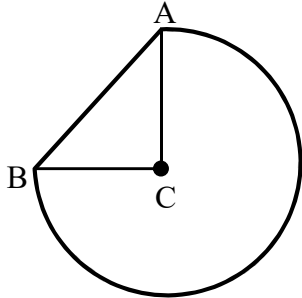
62) נתון משולש ישר זווית ABC , ($\angle A = 90^\circ$).

על היתר BC בונים חצי עיגול.

נתון: $AB = 10$ ס"מ, $AC = 24$ ס"מ, $BC = 26$ ס"מ.

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.



63) באיור שלפניך שלושה רבעי עיגול החסומים ע"י

הקטע AB ומשולש ישר זווית ABC (מרכז העיגול C).

ידוע כי רדיוס העיגול הוא 14 ס"מ וכי אורך

הקטע AB הוא 19.8 ס"מ.

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

64) באיור שלפניך נתון טרפז $ABCD$, ($AB \parallel CD$, $AD = BC$).

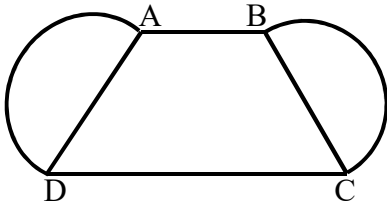
על שוקי הטרפז בונים חצאי עיגולים.

נתון: $AB = 10$ ס"מ, $CD = 16$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ.

אורך גובה הטרפז הוא 11.6 ס"מ.

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.



65) נתון טרפז $ABCD$, ($AB \parallel CD$).

מעבירים את האלכסון AC אשר

מאונך לבסיסים AB ו- DC של הטרפז.

על השוק BC בונים חצי עיגול.

נתון: $AB = 24$ ס"מ, $AC = 18$ ס"מ.

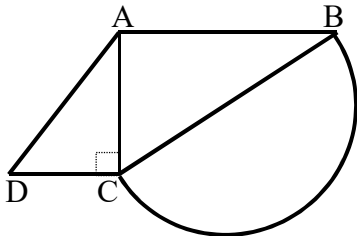
שטח הטרפז הוא 283.5 סמ"ר.

א. מצא את הבסיס DC .

ב. חשב את רדיוס העיגול.

ג. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ד. חשב את שטח הצורה המורכבת.



66) המרובע $ABCD$ הוא מקבילית.

על הצלעות BC ו- AD בונים שני רבעי

עיגול זהים. מעבירים את האלכסון AC .

ידוע כי האלכסון AC מאונך לשוק BC .

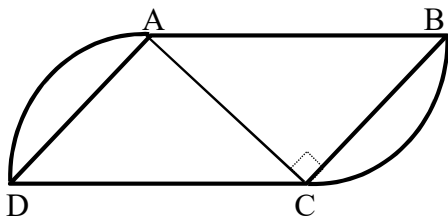
נתון: $AB = 17$ ס"מ, $AC = 15$ ס"מ.

א. מצא את הצלע BC .

ב. חשב את היקף המקבילית.

ג. מצא את רדיוס העיגול.

ד. חשב את היקף הצורה המורכבת.



67 נתון מעגל שאורך רדיוסו הוא 16 ס"מ. חשב את אורך הקשת ואת שטח הגזרה המתאימות לזווית מרכזית בכל אחד מהמקרים הבאים:

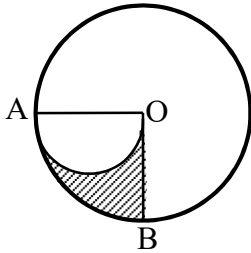
א. 60° .

ב. 45° .

ג. 270° .

ד. 17° .

68 על הרדיוס OA של מעגל O בונים חצי מעגל אשר קוטרו הוא OA. ידוע כי $\angle BOA = 90^\circ$.



א. חשב את השטח המקווקו OBA

אם ידוע כי $OA = 10$ ס"מ.

ב. הוכח באופן כללי כי שטח הגזרה OBA

שווה לשטח חצי מעגל אשר קוטרו הוא OA.

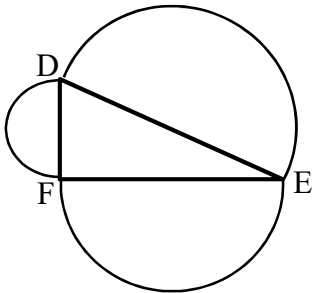
69 על הצלעות של משולש ישר זווית $\triangle DEF$ ($\angle F = 90^\circ$)

בונים חצאי מעגלים.

הוכח כי שטח חצי המעגל הבנוי על היתר

שווה לסכום שטחי חצאי המעגלים הבנויים

על הניצבים.



תשובות סופיות:

- (7) 135° .
- (11) ב. 140° .
- (12) $BC = 13$ ס"מ, $AB = 9$ ס"מ.
- (15) א. 38° ב. 128° ג. 128° ד. 60° ה. 66° ו. 30° .
- (16) א. $\alpha = 46^\circ, \beta = 23^\circ$ ב. $\alpha = 30^\circ, \beta = 28^\circ$ ג. $\alpha = \beta = 45^\circ$.
- (17) א. $\alpha = 48^\circ$ ב. $\widehat{AD} = 164^\circ, \widehat{BC} = 78^\circ, \widehat{AB} = 118^\circ$ ג. 55° .
- (18) 20° .
- (19) $\alpha = 35^\circ, \beta = 95^\circ$.
- (21) 68.5° .
- (22) $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle G_2 = \sphericalangle G_3 = 45^\circ$.
- (24) 110° .
- (29) א. $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$.
- (30) ב. 1. $R = a\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.3a$ 2. $\sphericalangle BC = 45^\circ; \sphericalangle AB = 135^\circ$.
- (31) ג. 60 ס"מ.
- (32) ב. 5.5 ס"מ.
- (37) א. $\alpha = 135^\circ$ ב. $\alpha = 30^\circ$ ג. $\alpha = 40^\circ$.
- (40) 48 ס"מ
- (41) א. 30° ב. 5 ס"מ.
- (42) 64 ס"מ.
- (43) א. $x = 20^\circ$ ב. $x = 135^\circ$ ג. $x = 120^\circ$.
- (44) 92° .
- (51) 16 ס"מ.
- (54) א. $\alpha = 80^\circ, \beta = 85^\circ$ ב. $\alpha = 110^\circ, \beta = 20^\circ$.
- (55) $\alpha = 70^\circ$.
- (56) ניתן לחסום את מרובע א' בלבד.
- (59) $x = 2$.
- (60) 15 ס"מ, 15 ס"מ, 24 ס"מ, 6 ס"מ.
- (61) א. $S = \frac{484}{\pi}$ סמ"ר ב. 6.706 ס"מ ג. 2.32 ס"מ ד. 8 ס"מ $R =$.
- (62) א. $P = 74.84$ ס"מ ב. $S = 385.46$ סמ"ר.
- (63) א. $P = 85.77$ ס"מ ב. $S = 559.814$ סמ"ר.
- (64) א. $P = 63.7$ ס"מ ב. $S = 263.89$ סמ"ר.

65) א. $DC = 7.5$ ס"מ . ב. $R = 15$ ס"מ . ג. $P = 98.12$ ס"מ .

ד. $S = 636.929$ סמ"ר .

66) א. $BC = 8$ ס"מ . ב. $P = 50$ ס"מ . ג. $R = 5.65$ ס"מ . ד. $P = 51.75$ ס"מ .

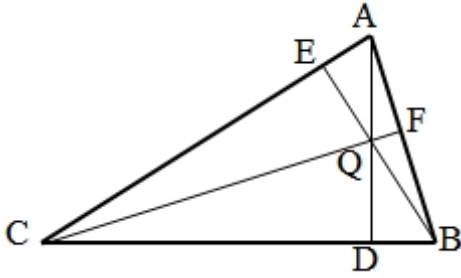
67) א. $l = 5\frac{1}{3}\pi$ ס"מ , $S = 42\frac{2}{3}\pi$ סמ"ר . ב. $l = 4\pi$ ס"מ , $S = 32\pi$ סמ"ר .

ג. $l = 24\pi$ ס"מ , $S = 192\pi$ סמ"ר . ד. $l = 1.51\pi$ ס"מ , $S = 12.08\pi$ סמ"ר .

68) א. 12.5π סמ"ר .

שאלות מסכמות ללא פרופורציה:

(1) במשולש $\triangle ABC$ מעבירים את שלושת הגבהים: AD , BE , CF .



הגבהים נפגשים בנקודה Q .

א. הוכח: $\angle ACF = \angle ABE$.

ב. הוכח כי מרובע $QDCE$ הוא מרובע בר-חסימה.

ג. הוכח: $\angle ADF = \angle ADE$.

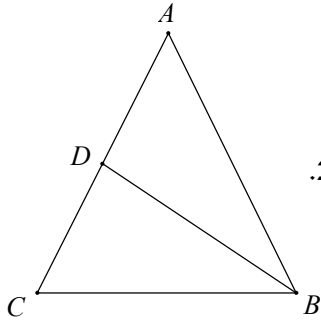
(2) במשולש $\triangle ABC$, E אמצע AB , F על BC ו EF מקביל ל- AC .

G על AC ו- EG מקביל ל- BC .

בלי להשתמש במשפטים על קו אמצעים במשולש הוכח:

א. המשולש $\triangle AEG$ והמשולש $\triangle EBF$ חופפים.

ב. על פי הסעיף הקודם, הוכח כי קטע במשולש החוצה צלע של המשולש ומקביל לצלע השלישית במשולש הוא קטע אמצעים.



(3) במשולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$),

BD הוא תיכון לשוק AC , $\angle CBD = 30^\circ$.

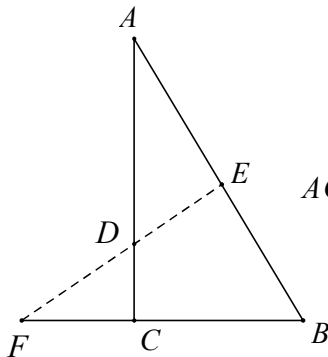
א. הוכח כי משולש $\triangle ABC$ הוא משולש שווה צלעות.

(הדרכה: הורד אנכים AF ו- DE לבסיס BC)

והוכח כי: $DE = \frac{1}{2} \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot BD$

ב. אם נתון כי אורך התיכון BD הוא a ס"מ,

חשב אם אורך צלע המשולש ואת שטחו.



(4) במשולש $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) הנקודה E מונחת

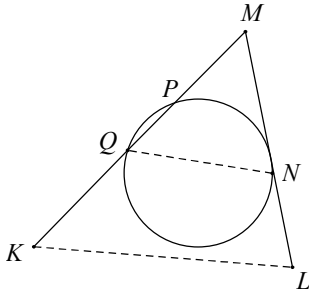
על היתר AB . מהנקודה E מעבירים אנך ליתר,

החותך את המשך הניצב BC בנקודה F ואת הניצב AC

בנקודה D . נתון כי: $AD = 10$ ס"מ,

$EB = 12$ ס"מ, $AE = 8$ ס"מ.

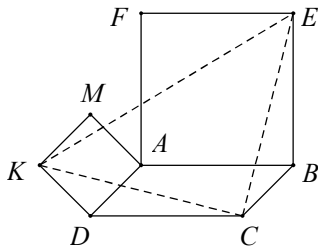
הוכח כי: $\triangle ADE \cong \triangle DFC$.



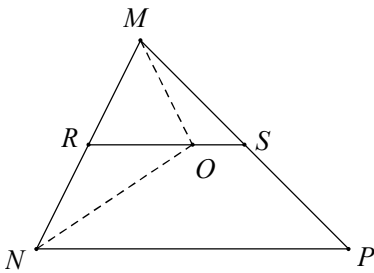
5) מנקודה M הנמצאת מחוץ למעגל מעבירים חותך MPQ ומשיק MN . מנקודה K הנמצאת בהמשך MPQ מעבירים ישר מקביל למיתר QN , החותך את המשך המשיק MN בנקודה L .

א. הוכח כי: $\sphericalangle QNL = \sphericalangle NPQ$.

ב. הוכח כי המרובע $KPNL$ הוא בר-חסימה.



6) נתונה מקבילית $ABCD$. על הצלע AB בנויים ריבוע $ABEF$ ועל הצלע AD ריבוע $ADKM$. הוכח כי המשולש $\triangle KCE$ הוא משולש שווה שוקיים וישר-זווית.



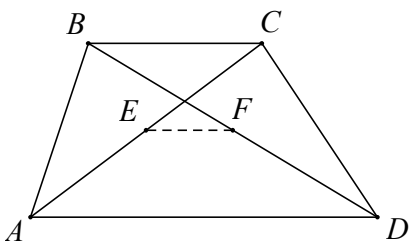
7) א. הוכח: אם במשולש התיכון לצלע שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אזי המשולש הוא משולש ישר זווית.

ב. בציור הנתון: RS הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle MNP$.

NO הוא חוצה זווית $\sphericalangle MNP$.

הוכח כי: $\sphericalangle MON = 90^\circ$.

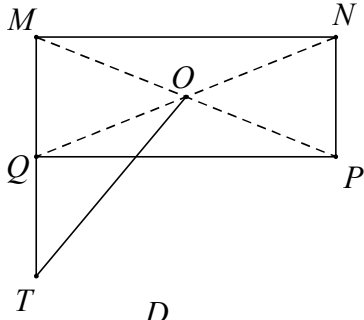
8) הוכח כי: במשולש ישר זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר. נסח והוכח את המשפט ההפוך למשפט שבסעיף א.



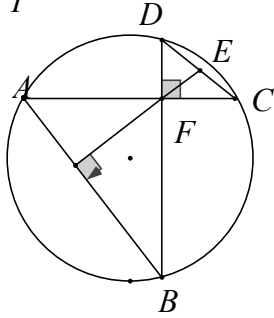
9) בטרפז $ABCD$ ($BC \parallel AD$). נתון כי: נקודה E נמצאת באמצע אלכסון AC ונקודה F נמצאת באמצע אלכסון BD .

א. הסבר מדוע קטע האמצעים של הטרפז $ABCD$ עובר דרך הנקודות E ו- F .

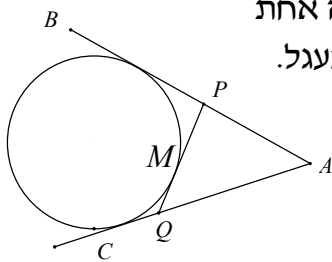
ב. נתון כי: $AD = 4 \cdot EF$. הוכח כי: $AD = 2 \cdot BC$.



- 10) נתון מלבן $MNPQ$ שבו $QN = 2 \cdot NP$.
 אלכסוני המלבן נפגשים בנקודה O .
 האריכו את הקטע MQ כאורכו $(MQ = QT)$.
 א. הוכח כי: $MO \perp OT$.
 ב. הוכח כי: $OT = PQ$.

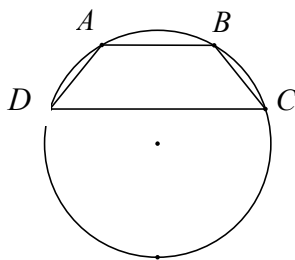


- 11) במעגל שבציר נתון כי המיתר AC מאונך למיתר BD .
 שני המיתרים נחתכים בנקודה F .
 דרך הנקודה F מורידים אנך למיתר AB .
 המשכו של האנך חותך את המיתר DC בנקודה E .
 הוכח כי: $DE = EC$.

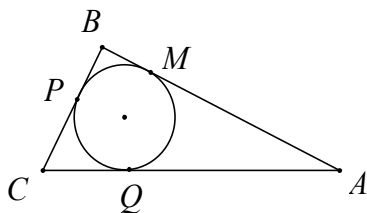


- 12) הוכח את המשפט: שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת חיצונית, שווים באורכם. AB ו- AC הם שני משיקים למעגל.
 נקודה M נמצאת על הקשת \widehat{CB} .
 $AC = a$.

- א. MP משיק למעגל בנקודה M .
 הוכח כי: היקף המשולש $\triangle APQ$ לא תלוי המקומה של הנקודה M על הקשת \widehat{CB} והוא גודל קבוע השווה ל- $2a$.



- 13) טרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$) חסום במעגל כך שמרכז המעגל O נמצא מחוץ לטרפז.
 נתון כי: $AB = 9$ ס"מ, $CD = 21$ ס"מ, גובה הטרפז הוא 8 ס"מ. רדיוס המעגל הוא R .
 א. הבע באמצעות R את המרחק ממרכז המעגל O :
 1. לבסיס הקטן של הטרפז AB .
 2. לבסיס הגדול של הטרפז CD .
 ב. חשב את גודלו של רדיוס המעגל R .



- 14) במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$), חוסמים מעגל כך שנקודות ההשקה הן: M , P ו- Q .
 כמו כן, נתון כי: $AQ = 2a$ ו- $QC = a$.
 הבע את היקף המשולש $\triangle ABC$ באמצעות a .

תשובות סופיות:

(3) ב. אורך צלע המשולש: $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a$, שטח המשולש: $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$

(13) א. 1. $\sqrt{R^2 - 4.5^2}$.2. $\sqrt{R^2 - 10.5^2}$ ב. 10.625 ס"מ $R =$

(14) $a \cdot (3 + \sqrt{17})$

תוכן העניינים:

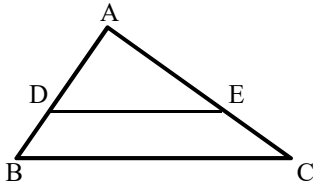
180	פרק 11 – גיאומטריה אוקלידית - פרופורציה ודמיון:
180	משפט תאלס:
180	שאלות יסודיות – משפט תלס:
182	שאלות יסודיות – הרחבות של משפט תלס:
185	משפט חוצה הזווית:
185	שאלות יסודיות – משפט חוצה זווית:
187	שאלות המשלבות את משפט תלס ומשפט חוצה זווית:
188	דמיון משולשים:
188	שאלות העוסקות במשפט דמיון ז.ז:
190	שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.ז.צ:
190	שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.צ.צ:
191	שאלות שונות – דמיון משולשים:
193	יחסים בין גדלים שונים ושטחים במשולשים דומים:
193	שאלות יסודיות – יחסי שטחים במשולשים דומים:
196	פרופורציה במשולש ישר זווית:
196	שאלות יסודיות:
196	פרופורציות במעגל:
197	שאלות יסודיות:
198	תשובות סופיות:
200	שאלות שונות – פרופורציה ודמיון:
210	תשובות סופיות:

פרק 11 – גיאומטריה אוקלידית - פרופורציה ודמיון:

משפט תאלס:

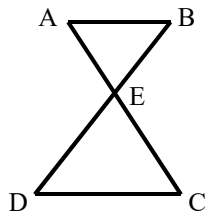
1. שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

2. משפט הפוך: אם שני ישרים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים הישרים מקבילים.



3. משפט תאלס + ההפוך: $DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

4. משפט תאלס המורחב + ההפוך: $DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

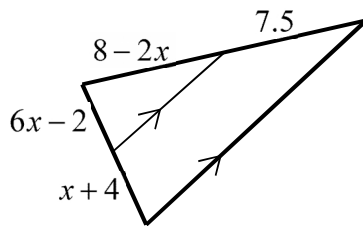


5. משפט תאלס "שעון חול" + ההפוך: $AB \parallel DC \Leftrightarrow \frac{BE}{ED} = \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{DC}$

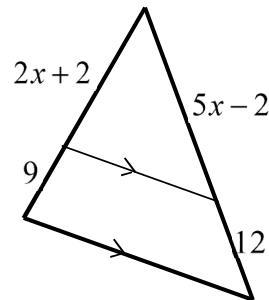
שאלות יסודיות – משפט תאלס:

1) מצא את ערכו של x בשרטוטים הבאים:

ב.



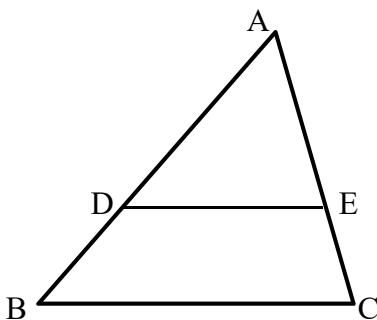
א.



2) בסרטוט שלפניך נתון $DE \parallel BC$.

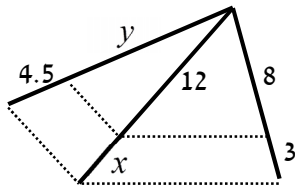
$BD = 12$ ס"מ, $AE = 20$ ס"מ, $AC = 30$ ס"מ.

מצא את אורך הקטע AD.

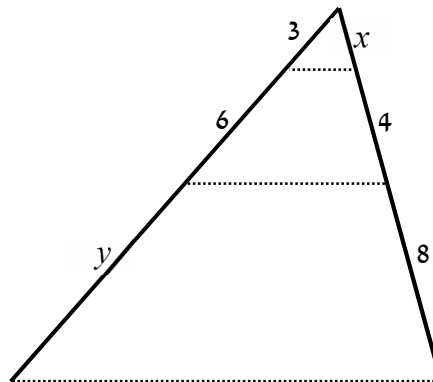


3) חשב את x ואת y בסרטוטים שלפניך (הקטעים המקווקוים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

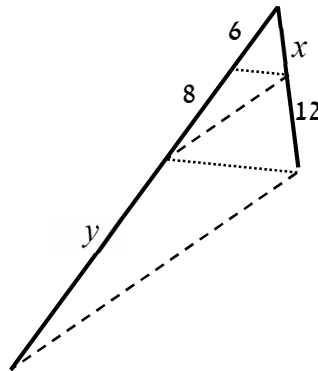
ב.



א.



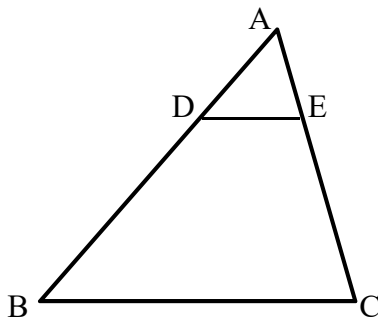
ג.



4) בסרטוט שלפניך נתון:

$$AC = 36 \text{ ס"מ}, \frac{AD}{BD} = \frac{2}{7}, DE \parallel BC$$

מצא את אורכי הקטעים AE ו- CE .

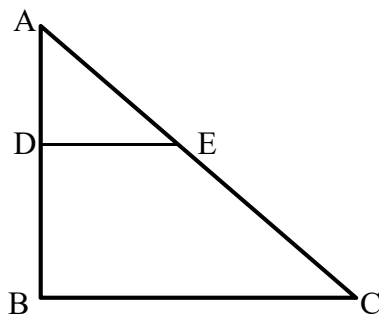


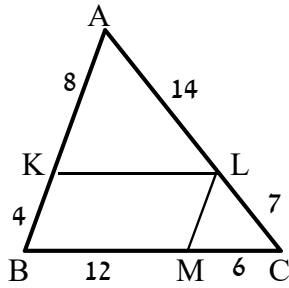
5) במשולש שלפניך נתון $DE \parallel BC$.

כמו כן: $\angle ADE = 90^\circ$ וכן: $AE = BD = 10$ ס"מ,

$DE = 8$ ס"מ. מצא את אורכי

הקטעים AD , CE ו- BC .



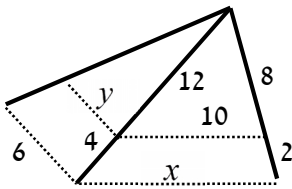


6) מרובע DEFB חסום במשולש ABC. הנתונים המספריים רשומים בסרטוט. כל המידות הן בס"מ. הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

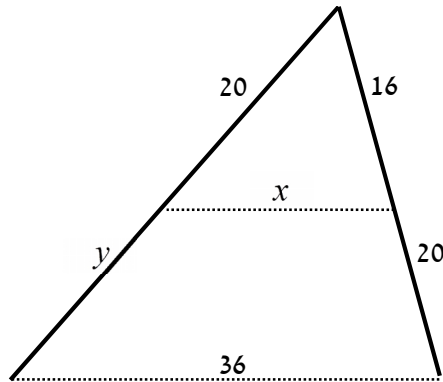
שאלות יסודיות – הרחבות של משפט תלס:

7) חשב את x ואת y בסרטוטים שלפניך (הקטעים המקווקים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

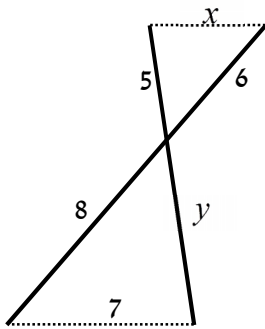
א.



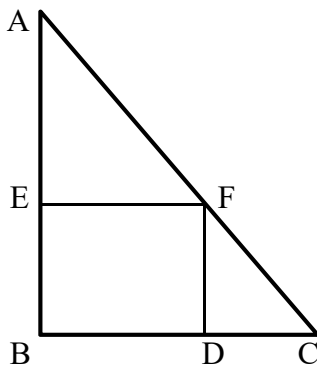
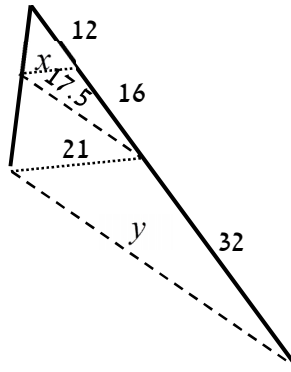
ב.



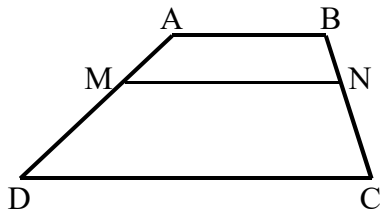
ג.



ד.

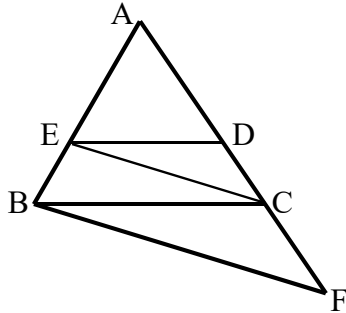


8) המרובע EFBD הוא מלבן החסום במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$). נתון כי: $AB = 20$ ס"מ, $BC = 15$ ס"מ, $AF = 18$ ס"מ. מצא את אורכי צלעות המלבן.



9) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).
מעבירים קטע MN אשר מקביל לבסיסים.

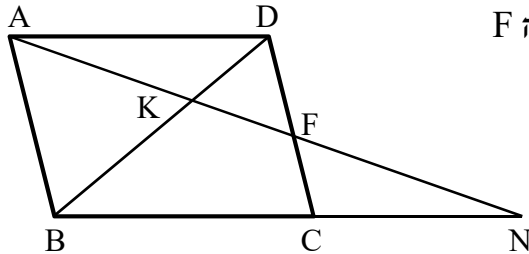
הוכח: $\frac{AM}{DM} = \frac{BN}{CN}$.



10) באיור שלפניך נתון: $DE \parallel BC$, $CE \parallel BF$.
הוכח את הטענות הבאות:

א. $\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{CF}$.

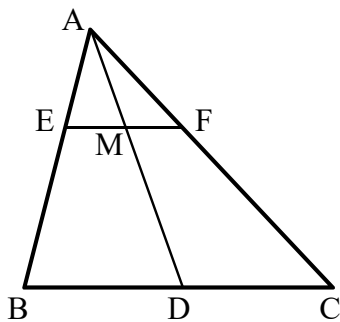
ב. $AC^2 = AD \cdot AF$.



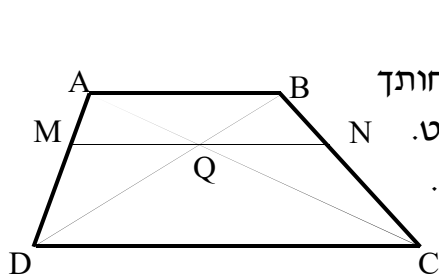
11) במקבילית ABCD מעבירים ישר דרך הנקודה A החותך את הצלע CD בנקודה F ונפגש עם המשך BC בנקודה N. הוכח את הטענות הבאות:

א. $\frac{NK}{AK} = \frac{AK}{KF}$.

ב. $\frac{BC}{CN} = \frac{DF}{CF}$.

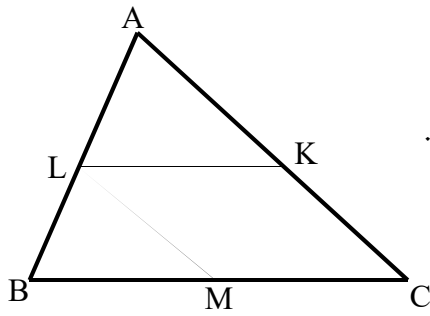


12) במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC. הקטע EF מקביל ל-BC וחותר את התיכון בנקודה M. הוכח כי: $EM = FM$.



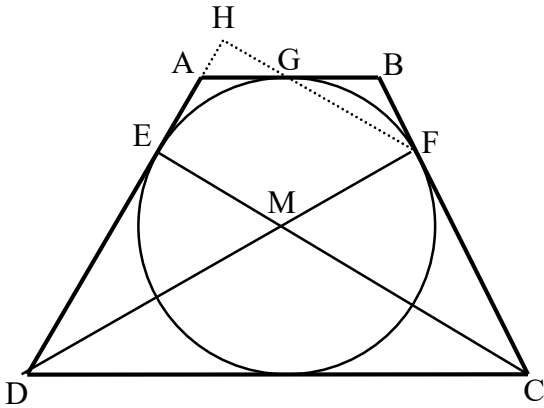
13) בטרפז ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה Q.

בנקודה Q העבירו קטע המקביל לבסיסי הטרפז וחותר את שוקי הטרפז בנקודות M ו-N כמתואר בשרטוט. נתון: $DC = 18$ ס"מ, $DQ = 9$ ס"מ, $BQ = 3$ ס"מ. חשב את גודל הקטע MQ.



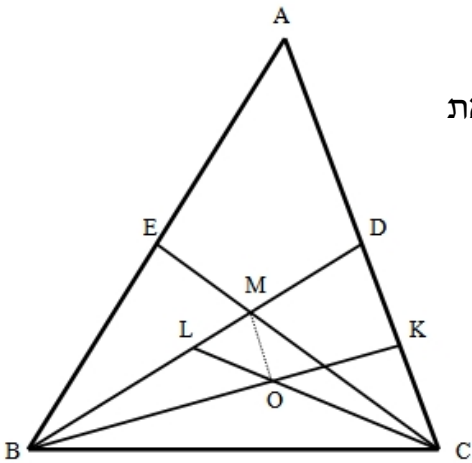
14) בשרטוט נתון: $\frac{AK}{CK} = \frac{CM}{BM} = \frac{AL}{BL}$

- א. הוכח: המרובע KLMC הוא מקבילית.
 ב. נתון: $AL = 1.5BL$, $BC = 10$ ס"מ.
 חשב את אורך הקטע LK.



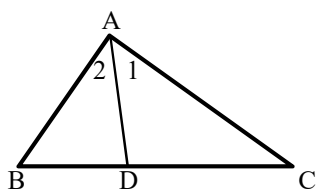
- 15) הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F ו-G, H כמתואר באיור. הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M.
 א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.
 ב. חשב את זוויות הטרפז.
 ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.

חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$.



- 16) במשולש ABC מעבירים את התיכונים BD ו-CE אשר נפגשים בנקודה M. במשולש BDC מעבירים את התיכונים CL ו-BK הנפגשים בנקודה O.
 א. הוכח כי: $3LM = BL$.
 ב. הוכח כי: $AC \parallel MO$.
 ג. נתון: $S_{BLC} = 27$.
 חשב את שטח המשולש MOL.

משפט חוצה הזווית:



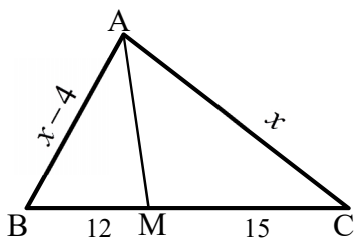
6. חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית ביחס הזהה ליחס בין הצלעות שביניהן הוא כלוא ולהפך.

אם: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ אז: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$ ולהיפך.

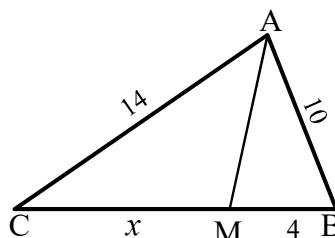
שאלות יסודיות – משפט חוצה זווית:

17) מצא את גודלו של x בסרטוטים הבאים אם נתון כי AM חוצה זווית A בכל המשולשים, כל הגדלים הם בס"מ:

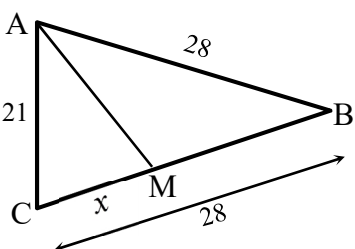
ב.



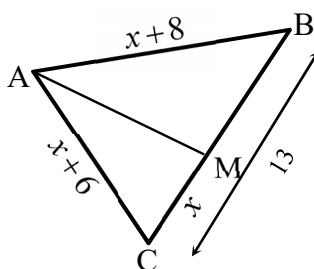
א.



ד.

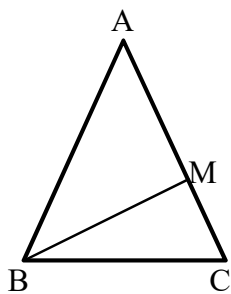


ג.



18) נתון משולש שווה שוקיים ABC , $(AB = AC)$.

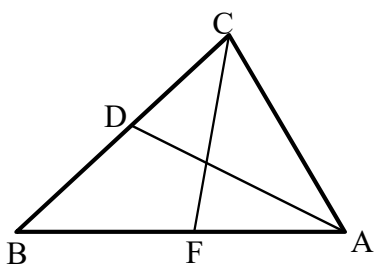
ידוע כי היקפו הוא 28 ס"מ. הקטע BM הוא חוצה זווית B . נתון כי הקטע AM גדול פי 3 מהקטע MC . חשב את אורך הקטע MC .



19) הקטעים AD ו- CF הם חוצי הזוויות A

ו- C בהתאמה במשולש ABC .

נתון: $AB = 18$ ס"מ, $AC = 12$ ס"מ, $CD = 6$ ס"מ. חשב את אורך הקטע AF .



20 נתון משולש ABC. הקטע AE חוצה את זווית A של המשולש.

ממשיכים את AE עד לנקודה D כך שנוצר המשולש BDC.

F היא נקודה על הצלע BC המקיימת: $DF = FE = DC$.

הצלע AB מקבילה לצלע DC.

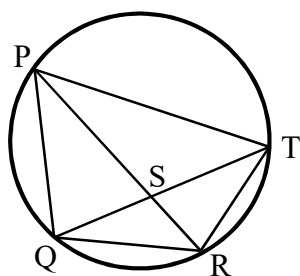
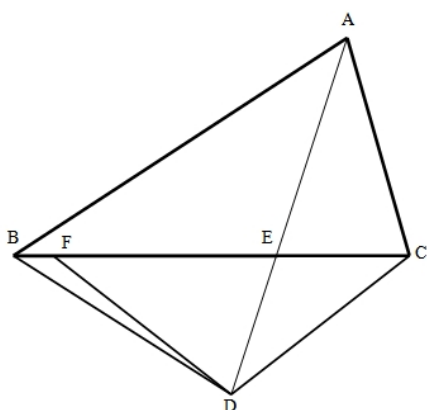
א. הוכח כי: $AC = EF$.

ב. הוכח: $\frac{AB}{BE} = \frac{FE}{CE}$.

ג. הקמשך את הקטע DF עד לנקודה H שעל הצלע AB.

ידוע כי המרובע ACDH הוא בר חסימה.

חשב את זוויות המשולש DEF.

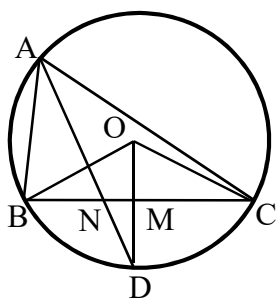


21 המרובע PQRT חסום במעגל.

נתון כי: $QR = RT$. ידוע כי: $PQ = 20$ ס"מ.

$PT = 28$ ס"מ, $QT = 24$ ס"מ.

חשב את אורך הקטע QS.



22 הנקודות A, B, C ו-D מונחות על היקפו של מעגל

שמרכזו O. הרדיוס DO חוצה את הזווית BOC.

נתון: $AB = 8$ ס"מ, $AC = 12$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ.

חשב את אורכו של הקטע MN.

23 במעגל שרדיוסו הוא 10 ס"מ המיתרים AB ו-BC מאונכים זה לזה.

הנקודה D היא אמצע הקשת \widehat{BC} .

הקטע AD חותך את המיתר BC בנקודה E.

אורך המיתר AB הוא 12 ס"מ.

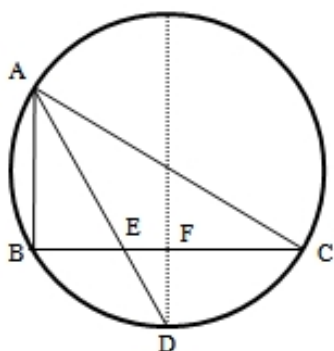
א. חשב את אורך הקטע BE.

מהנקודה D מעבירים מיתר החותך את המיתר BC

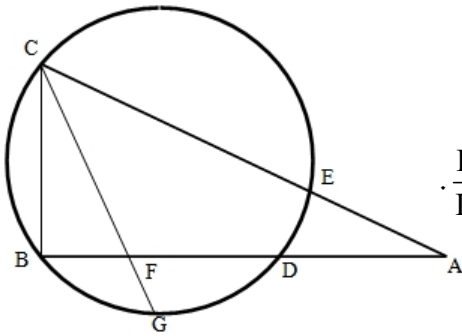
בנקודה F ומקביל למיתר AB.

ב. הוכח כי מיתר זה עובר דרך מרכז המעגל.

ג. חשב את אורך הקטע FE.



24) הישרים AB ו-AC חותכים את המעגל בנקודות D ו-E בהתאמה כך שהמיתרים BD ו-BC מאונכים זה לזה. הקטע CG חוצה את הקשת הקטנה \widehat{BGD} וחותר את המיתר BD בנקודה F.



נתון: $\frac{AC}{AB} = \frac{13}{12}$. נסמן: $AB = t$.

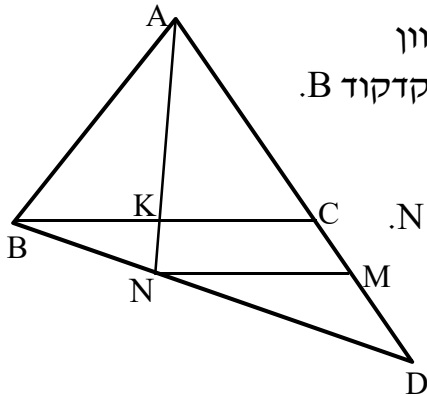
א. הבע באמצעות t את אורך המיתר BC.

ב. נתון כי רדיוס המעגל הוא 5 ס"מ וכי: $\frac{BF}{DF} = \frac{3}{5}$.

חשב את אורך הקטע AB.

שאלות המשלבות את משפט תלס ומשפט חוצה זווית:

25) נתון משולש ABC. ממשיכים את הצלע AC מהכיוון של C עד לנקודה D. מחברים את הנקודה D עם הקדקוד B.



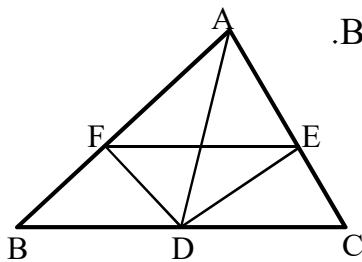
מעבירים את הקטע AK אשר חוצה את זווית A

במשולש ABC. המשך AK חותך את BD בנקודה N.

מעבירים את הקטע MN. נתון: $BC \parallel MN$.

הוכח: $\frac{AB}{AD} = \frac{CM}{DM}$.

26) נתון משולש ABC. מעבירים את התיכון AD לצלע BC.

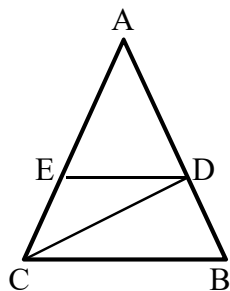


נתון כי DE הוא חוצה זווית $\angle ADC$

וכי DF הוא חוצה זווית $\angle ADB$.

הוכח: $EF \parallel BC$.

27) נתון משולש ABC. מעבירים את הקטעים CD ו-DE.



נתון כי: $DE \parallel BC$ ו- $AC = 2BC$.

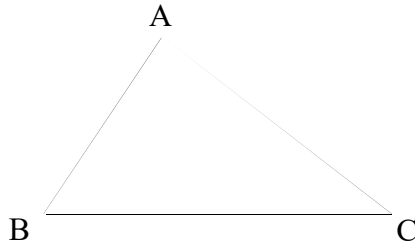
הקטע AC גדול פי 3 מהקטע DE.

הוכח כי: $\angle BCD = \angle ACD$.

דמיון משולשים:

הגדרה:

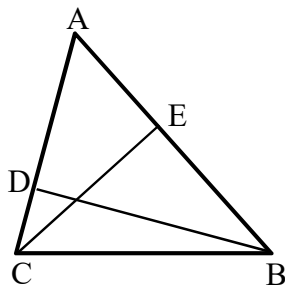
משולשים דומים הם משולשים ששוים זה לזה בכל זוויותיהם ושצלעותיהם שומרות בהתאמה על אותו יחס.



$$\begin{aligned} \Delta ABC &\sim \Delta DEF \\ \Downarrow \\ \sphericalangle A &= \sphericalangle D, \sphericalangle B = \sphericalangle E, \sphericalangle C = \sphericalangle F \\ \frac{AB}{DE} &= \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \end{aligned}$$

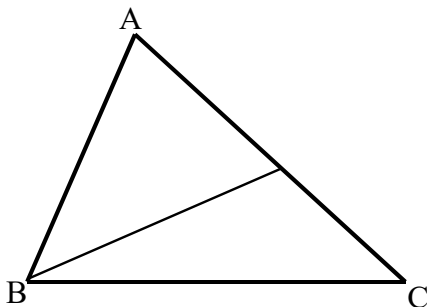
משפטי הדמיון:

- משפט דמיון זווית-זווית (ז.ז.): אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ.): אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזוויות שבניהן שווה אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ.): אם בין שני משולשים שלוש הצלעות שומרות על אותו יחס אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-צלע-זווית הגדולה (צ.צ.ז.): אם בין שני משולשים שתי לצעות שומרות על אותו יחס והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהם שווה אז המשולשים דומים.

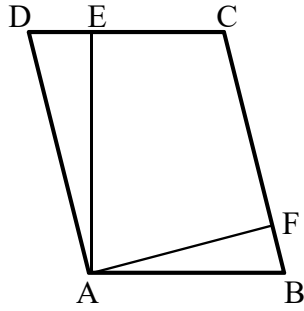


שאלות העוסקות במשפט דמיון ז.ז.:

- 28) BE ו-CD הם גבהים במשולש ABC.
 א. הוכח כי: $\Delta ABE \sim \Delta ACD$.
 ב. נתון כי: $AB = 18$ ס"מ, $BE = 12$ ס"מ, $CD = 10$ ס"מ. חשב את אורך הצלע AC.

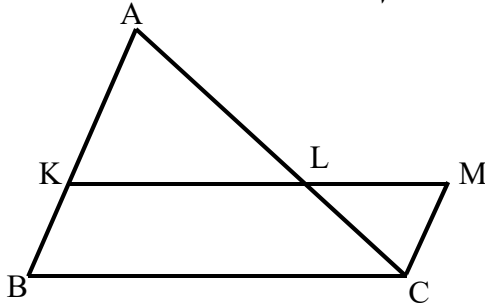


- 29) במשולש ABC העבירו את הקטע BK
 כך ש- $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ABC$.
 הוכח: $\Delta AKB \sim \Delta ABC$.

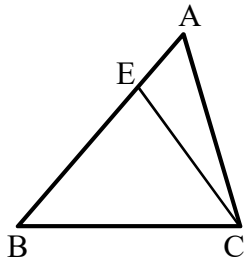


- 30** המרובע ABCD הוא מקבילית.
 מעבירים גבהים AE ו-BF לצלעות DC ו-BC בהתאמה.
 א. הוכח כי: $\triangle ADE \sim \triangle AFB$.
 ב. הוכח כי: $DC \cdot AE = BC \cdot AF$
 והסבר את המשמעות הגיאומטרית של התוצאה.

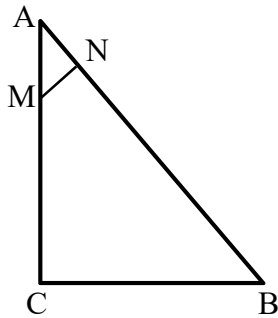
- 31** נתונה מקבילית BKMC. המשיכו את הצלע BK עד לנקודה A.
 הקטע AC חותך את הצלע KM בנקודה L.
 הוכח: $LC \cdot BC = LM \cdot AC$.



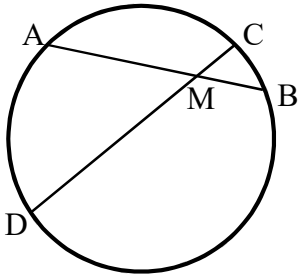
- 32** מעבירים את הקטע CE במשולש ABC.
 ידוע כי: $\angle BAC = \angle ECB$
 וכן: $BE = 8$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ.
 חשב את AB.

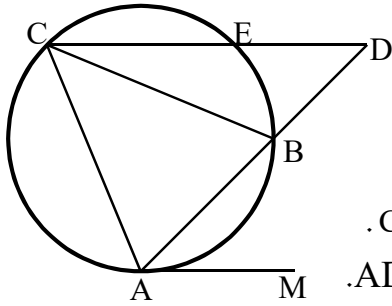


- 33** המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$).
 מנקודה M שעל הניצב AC העלו אנך NM ליתר AB.
 נתון כי:
 $AB = 20$ ס"מ, $AN = 4$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ.
 מצא את אורך הקטע AM.



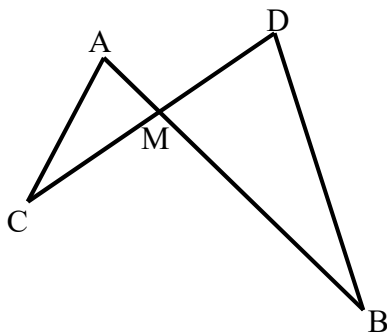
- 34** המיתרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
 א. הוכח כי: $\triangle ADM \sim \triangle CBM$.
 ב. נתון כי: $AM = 5$ ס"מ, $DM = 8$ ס"מ,
 $CM = 2$ ס"מ.
 חשב את אורכו של BM.



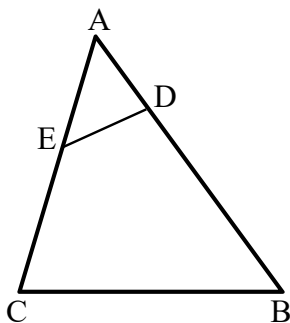


- 35) המשולש ABC חסום במעגל.
 מהנקודה A מעבירים משיק AM.
 ממשיכים את AB עד לנקודה D שמחוץ למעגל.
 מחברים את הנקודה D עם הקדקוד C.
 הישר CD חותך את המעגל בנקודה E כך ש- $CE \parallel AM$.
 הוכח כי AC הוא הממוצע הגיאומטרי בין AB לבין AD.
 כלומר: $AC^2 = AB \cdot AD$.

שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.ז.צ:

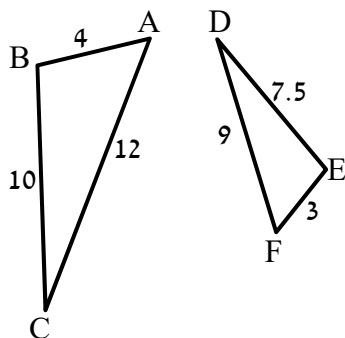


- 36) הישרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
 אורכי הקטעים הם: $AM = 3$ ס"מ, $DM = 5$ ס"מ, $CM = 6$ ס"מ, $BM = 10$ ס"מ.
 א. הוכח כי: $\triangle AMC \sim \triangle DMB$.
 ב. האם $AC \parallel BD$? נמק.
 ג. מצא את אורכו של AC.
 אם נתון כי BD שווה ל-14 ס"מ.

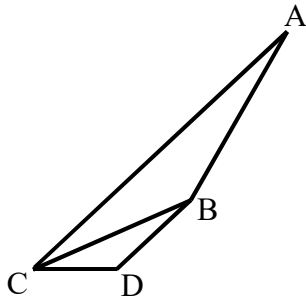


- 37) לפניך משולש ABC. מעבירים את הקטע DE אשר יוצר את הגדלים הבאים:
 $AD = 4$ ס"מ, $BD = 11$ ס"מ, $AE = 5$ ס"מ, $CE = 7$ ס"מ.
 א. הוכח כי: $\triangle ADE \sim \triangle ACB$.
 ב. הוכח כי את המרובע BCED אפשר לחסום במעגל.

שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.צ.צ:



- 38) בסרטוט שלפניך רשומים שני משולשים. אורכי צלעותיהם נתונים בתרשים (בס"מ).
 א. הוכח כי המשולשים דומים ורשום את הדמיון עפ"י הקדקודים.
 ב. רשום את הזוויות השוות בשני המשולשים.



39 נתונים המשולשים ABC ו-BDC.

ידוע כי: $AB = 10$ ס"מ, $AC = 16$ ס"מ,

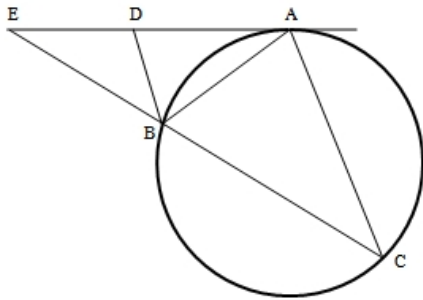
$BD = 4$ ס"מ, $DC = 5$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ.

א. הוכח כי שני המשולשים דומים ורשום

אותם לפי סדר התאמת קדקודיהם.

ב. הוכח כי: $AC \parallel BD$.

שאלות שונות – דמיון משולשים:



40 מעבירים משיק AE למעגל הנתון באיור.

מנקודת ההשקה מעבירים את המיתרים AB ו-AC.

כך שנוצר המשולש ABC. ידוע כי: $\widehat{AC} = \widehat{BC}$.

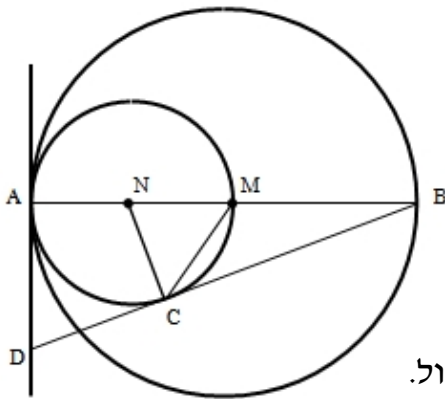
המשך המיתר BC נפגש עם המשיק בנקודה E.

המיתר AB חוצה את זווית CBD.

א. הוכח כי הקטע BD מקביל למיתר AC.

ב. הוכח: $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ וכתוב את יחס הדמיון.

ג. הוכח: $\frac{DE}{BE} = \frac{BD}{AB}$.



41 המעגלים שמרכזם בנקודות M ו-N משיקים זה

לזה מבפנים בנקודה A כך שהיקף

המעגל הפנימי עובר בנקודה M.

דרך הנקודה A מעבירים משיק.

AB הוא קוטר במעגלים ו-C היא נקודה

הנמצאת על היקף המעגל הפנימי כך

שהישר החותך BD משיק למעגל הפנימי בנקודה זו.

א. הוכח: $\triangle ABD \sim \triangle CBN$ וחשב את יחס הדמיון.

ב. נתון כי: $AD = \sqrt{8}$. חשב את רדיוס המעגל הגדול.

ג. הוכח: $2CD = BC$.

42 נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס זהה M ו-N.

מעבירים שני משיקים למעגלים AB ו-CD הנחתכים בנקודה K.

מעבירים את הרדיוסים AN ו-DN במעגל השמאלי ו-BM ו-CM במעגל הימני.

א. הוכח: $KN = KM$.

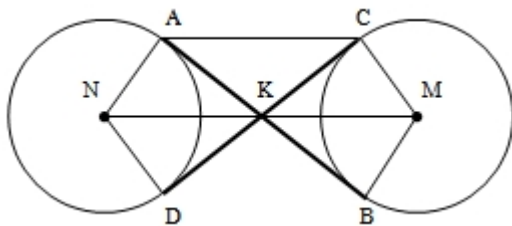
ב. הוכח כי המרובע ACMN הוא

טרפז שווה שוקיים.

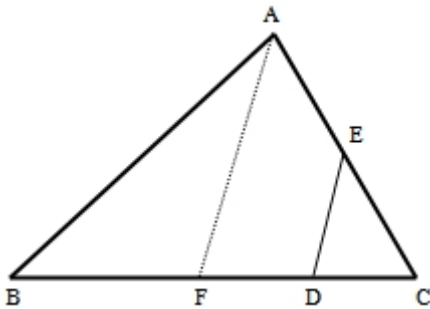
ג. רדיוס המעגלים הוא R וידוע כי

המשולש BKC הוא שווה צלעות.

הבע באמצעות R את היקף הטרפז ACMN.

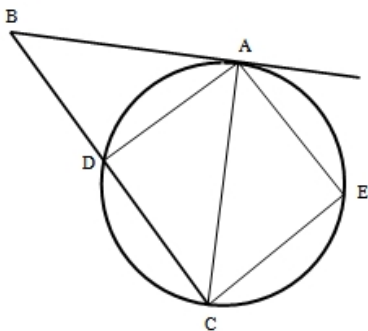


43) על הצלעות של המשולש ABC הקצו את הנקודות D ו-E כך שהמרובע AEDB הוא בר חסימה. הנקודה D מחלקת את הצלע BC כך שהקטע BD גדול פי 3 מהקטע DC.



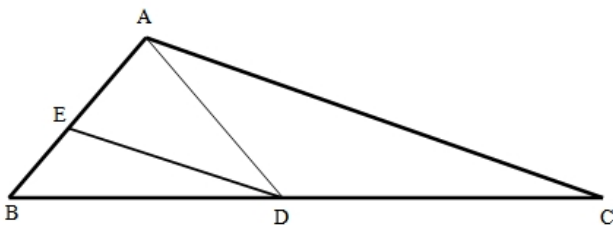
- א. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.
 ב. נתון גם כי: $AC \cdot CE = 36$.
 חשב את אורך הקטע DC.
 ג. מעבירים מהקודקוד A את הקטע AF המקביל לקטע DE. נתון כי: $AC = 9$.
 חשב את היחס: $\frac{DF}{BC}$.

44) הקטע AB משיק למעגל בנקודה A. מהנקודה B מעבירים ישר חותך למעגל החותך אותו בנקודות C ו-D.



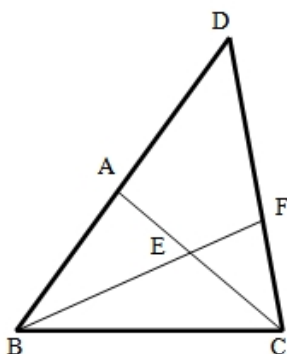
- E היא נקודה על המעגל כך ש- $\angle AEC = 90^\circ$.
 נתון כי המיתר AC חוצה את זווית BCE.
 א. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle EAC$.
 ב. נסמן ב-R את רדיוס המעגל. הוכח: $R = \frac{\sqrt{BC \cdot CE}}{2}$.
 ג. איזה מרובע יהיה המרובע ADCE אם יתקיים: $2CE = BC$. נמק.

45) במשולש ABC הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות BC ו-AB בהתאמה. נתון כי: $DE \parallel AC$, $\angle ADC = \angle BED$.



- א. הוכח כי המשולשים ADC ו-BED דומים.
 ב. הוכח: $AD \cdot BD = AB \cdot DE$.
 ג. ידוע כי הנקודה D מחלקת את הצלע BC באופן הבא: $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$.
 וכי: $AD \cdot BD = 16$.
 חשב את המכפלה: $AB \cdot AC$.

46) מהקודקוד C של המשולש BCD מעבירים את הקטע AC כך שהמשולש ACD הוא שווה שוקיים ($AC = AD$).



- הנקודה F נמצאת על הצלע CD כך שמתקיים:
 $\angle D = \angle CBF$, $3 \cdot \angle ACD = \angle BEC$.
 א. הוכח כי הקטע BF חוצה את זווית B.
 ב. הוכח כי: $\triangle AEB \sim \triangle FEC$.
 ג. הוכח כי: $\frac{BE}{BC} = \frac{AE}{FC}$.

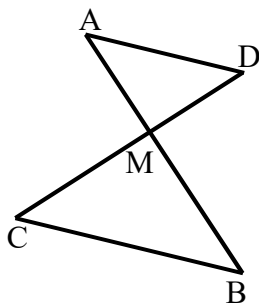
יחסים בין גדלים שונים ושטחים במשולשים דומים:

1. בין שני משולשים דומים היחס בין הגבהים, התיכונים, חוצי הזווית, ההיקפים, רדיוס המעגל החוסם ורדיוס המעגל החסום הוא כיחס הדמיון.
2. היחס בין שטחי משולשים דומים הוא ריבוע יחס הדמיון.

שאלות יסודיות – יחסי שטחים במשולשים דומים:

(47) הוכח את חלקי המשפט הבאים:

- א. גבהים במשולשים דומים לצלעות המתאימות בכל משולש, מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.
- ב. תיכונים במשולשים דומים לצלעות המתאימות בכל משולש, מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.
- ג. היקפים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.

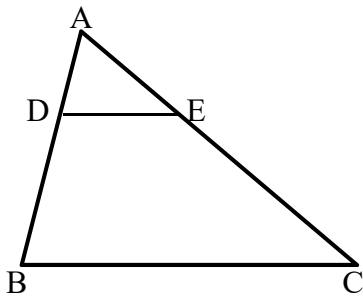


(48) הקטעים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.

נתון כי: $AD \parallel BC$ וכן נתונים הגדלים הבאים:

$$S_{ADM} = 36 \text{ סמ}^2, BC = 6 \text{ ס"מ}, AD = 4 \text{ ס"מ}$$

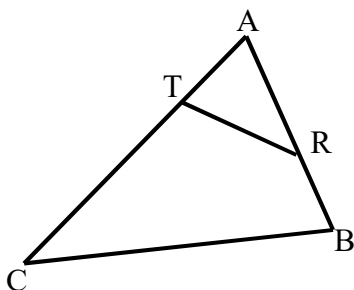
- א. הוכח כי: $\triangle AMD \sim \triangle BMC$.
- ב. חשב את שטח המשולש MBC.



(49) במשולש ABC הקטע DE מקביל לצלע BC.

$$\text{נתון: } \frac{AD}{BD} = \frac{2}{3} \text{ וכי: } 20 \text{ סמ}^2 = S_{ADE}$$

- א. חשב את שטח המשולש ABC.
- ב. חשב את שטח המרובע DECB.



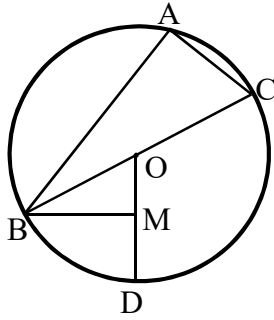
(50) בסרטוט שלפניך נתון משולש ABC

ובו קטע RT כך שמתקיימים האורכים הבאים:

$$AR = 6 \text{ ס"מ}, AT = 4 \text{ ס"מ}, BR = 4 \text{ ס"מ}$$

$$S_{ABC} = 100 \text{ סמ}^2, CT = 11 \text{ ס"מ}$$

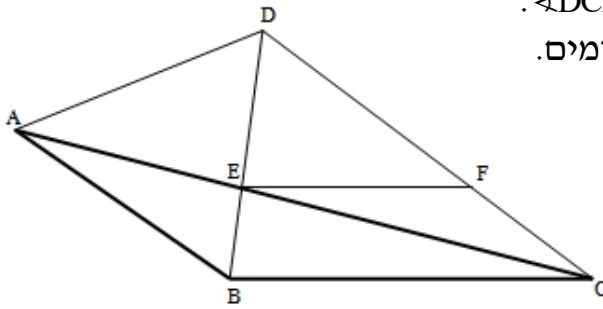
מצא את שטח המרובע RTCB.



51) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O. הצלע BC היא קוטר המעגל. הקטע BM מאונך לרדיוס DO. נתון: $AC = 2OM$.

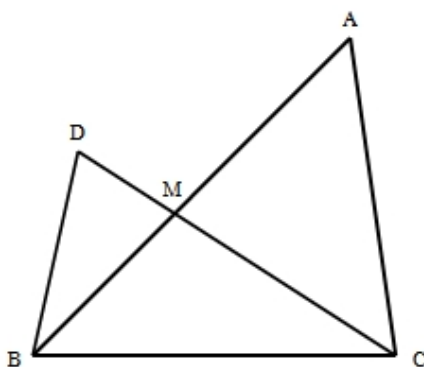
- א. הוכח: $\widehat{AB} = 2\widehat{BD}$.
 ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\Delta BOM}}{S_{\Delta BAC}}$.

52) נתון משולש ABC. על הצלע AB של המשולש ABC בונים משולש שווה צלעות ABD. הצלע AC חותכת את הצלע BD בנקודה E אשר ממנה מעבירים ישר EF המקביל לצלע BC. נתון כי: $\angle DBC = 80^\circ$, $\angle DCB = 40^\circ$.



- א. הוכח כי המשולשים ABE ו-CDE דומים.
 ב. הוכח: $FC \cdot CE = AE \cdot DF$.
 ג. נתון כי: $BC = 1.5 \cdot EF$.
 1. הוכח: $\frac{AE}{CE} = \frac{1}{2}$.
 2. חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta CDE}}$.

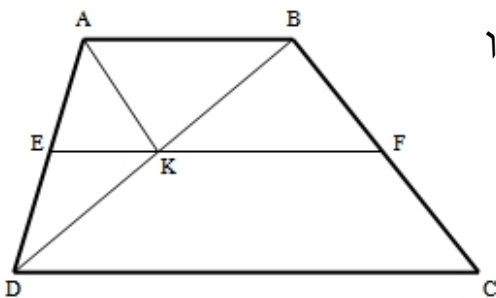
53) נתון משולש ABC. על הצלע BC של המשולש ABC בונים משולש נוסף BDC. הצלעות DC ו-AB נחתכות בנקודה M. הצלע AB חוצה את זווית B וידוע כי: $2\angle ACD = \angle B$.



- א. הוכח: $\Delta ACM \sim \Delta DBM$.
 ב. הוכח: $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{CM}$.
 ג. נתון כי: $\frac{AM}{CM} = \frac{8}{5}$ וכי אורך הצלע BD הוא 6 ס"מ.

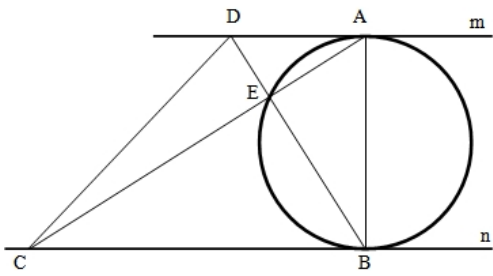
סכום הצלעות AC ו-BC הוא 19.5 ס"מ. חשב את היחס: $\frac{S_{\Delta BDM}}{S_{\Delta BMC}}$.

54) המרובע ABCD הוא טרפז, $(AB \parallel CD)$.



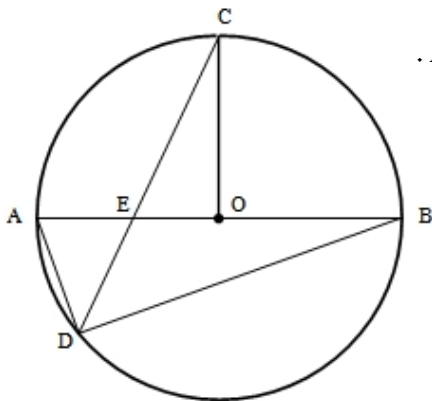
- מעבירים את קטע האמצעים EF החותך את אלכסון הטרפז BD בנקודה K. ידוע כי הקטע AK מקביל לשוק BC של הטרפז.
 א. הוכח כי המרובע ABFK הוא מקבילית.
 ב. נסמן: $S_{BKF} = S$.

הבע באמצעות S את שטח הטרפז ABCD.



55) בין המשיקים המקבילים m ו- n מעבירים מעגל כך ש- AB הוא הקוטר היוצא משתי נקודות ההשקה שלהם. הנקודות D ו- C נמצאות על המשכי המשיקים כך שהמרובע $ABCD$ הוא טרפז. אלכסונו הטרפז נפגשים בנקודה E שנמצאת על היקף המעגל. ידוע כי: $S_{ABC} = 3 \cdot S_{DAB}$. שטח המשולש ADE יסומן ב- S . בטא באמצעות S את שטח הטרפז $ABCD$.

56) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O . מהנקודה C שעל היקף המעגל מעבירים את הרדיוס CO ואת המיתר CD החותך את הקוטר בנקודה E . מהנקודה D מעבירים את המיתרים AD ו- BD .



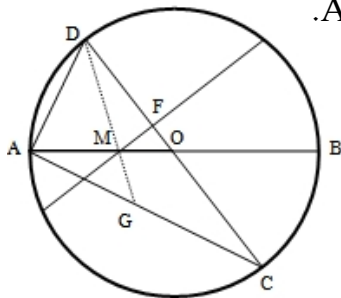
ידוע כי המיתר CD מקיים: $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}$. נתון: $AD = DE$.

- הוכח כי הרדיוס CO מאונך לקוטר AB .
- הוכח: $\triangle COE \sim \triangle BDA$.
- נתון כי אורך המיתר BD הוא 16.2 ס"מ ואורך הקטע CE הוא 10 ס"מ.

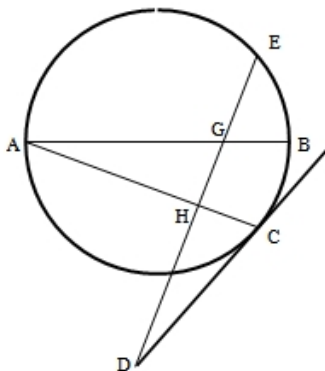
- חשב את רדיוס המעגל.
- חשב את היחס: $\frac{S_{COE}}{S_{BDA}}$.

57) AB ו- CD הם קטרים במעגל שמרכזו O .

מעבירים מיתר החותך את AB בנקודה M כך שמתקיים: $2AM = BM$ ואת CD בנקודה F כך שמתקיים: $FM \perp CD$. ידוע כי זווית $\angle BMF$ היא 30° . מעבירים את המיתרים AC ו- AD כך שנוצר המשולש ACD .



- הוכח: $\angle CAB = \angle BMF$.
- הוכח כי המשולשים ADC ו- FOM דומים.
 - פי כמה קטן הקטע FO מרדיוס המעגל?
 - מעבירים מהקדקוד D של המשולש ACD קטע העובר דרך הנקודה M וחותך את המיתר AC בנקודה G . חשב פי כמה גדול שטח המשולש DGC משטח המשולש MOF .



58) AB הוא קוטר במעגל. מהנקודה A מעבירים מיתר AC . הנקודה D נמצאת מחוץ למעגל וממנה מעבירים משיק DE וישר חותך DE . ידוע כי הישר DE חותך את הקוטר AB בנקודה G ומאונך למיתר AC בנקודה H .

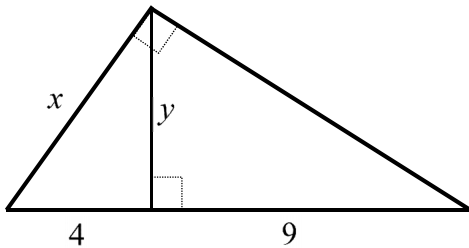
- הוכח: $\angle ACD = \angle BGE$.
- נתון כי: $\frac{S_{AHG}}{S_{GHCB}} = \frac{4}{5}$. חשב את היחס: $\frac{AH}{AC}$.

פרופורציה במשולש ישר זווית:

1. במשולש ישר זווית, הגובה ליתר בריבוע שווה למכפלת היטלי הניצבים על היתר.
2. במשולש ישר זווית, ניצב בריבוע שווה למכפלת היתר והיטל הניצב על היתר.
3. (משפט הפוך ל-1) אם במשולש גובה לצלע אחת בריבוע שווה למכפלת היטלי הצלעות האחרות על צלע זאת, המשולש ישר זווית.

שאלות יסודיות:

59) מצא את ערכם של x ו- y בשרטוט הבא:



60) במשולש ישר זווית שאורכי ניצביו m ו- n נתון כי אורך הגובה ליתר הוא h .

הראה שמתקיים: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$ (אין צורך ברישום מסודר של הוכחה).

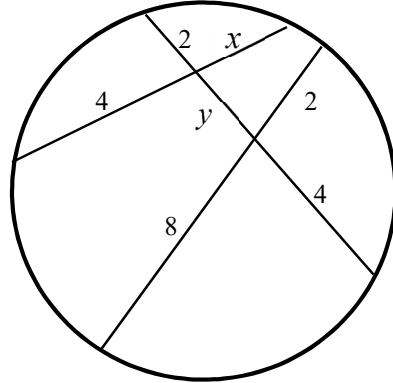
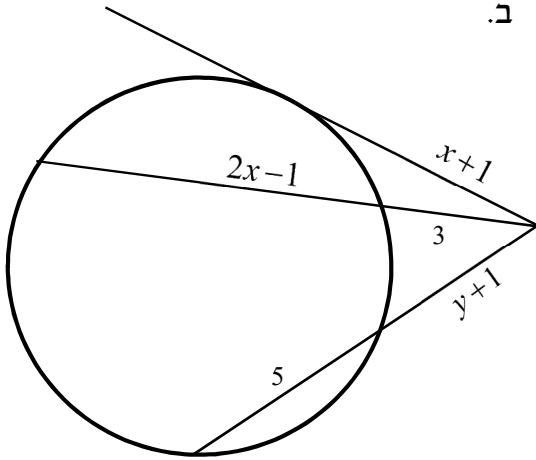
61) הוכח את המשפט: אם במשולש גובה לצלע אחת בריבוע שווה למכפלת היטלי הצלעות האחרות על צלע זאת, המשולש ישר זווית.

פרופורציות במעגל:

1. אם שני מיתרים מחתכים במעגל, אז מכפלת קטעי המיתר האחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.
2. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.
3. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

שאלות יסודיות:

62) חשב את גודלם של x ו- y בשרטוטים הבאים:
 א.
 ב.



63) הוכח את המשפט: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל, מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

64) הוכח את המשפט: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל, מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

תשובות סופיות:

- 1) א. $x = 2$ ב. $x = 1$
- 2) 24 ס"מ.
- 3) א. $x = 2, y = 12$ ב. $x = 4.5, y = 12$ ג. $x = 9, y = 18\frac{2}{3}$
- 4) 8 ס"מ AE, 28 ס"מ CE.
- 5) 6 ס"מ AD, $21\frac{1}{3}$ ס"מ BC, $26\frac{2}{3}$ ס"מ AC.
- 7) א. $x = 16, y = 25$ ב. $x = 12.5, y = 4.5$ ג. $x = 9, y = 37.5$
- 7) א. $x = 5.25, y = 6\frac{2}{3}$
- 8) 14.4 ס"מ ו-5.6 ס"מ.
- 13) 4.5 ס"מ.
- 14) 6 ס"מ.
- 15) א. $60^\circ, 120^\circ$ ג. $\frac{2}{3}$
- 16) 3 ג.
- 17) א. $x = 5.6$ ב. $x = 20$ ג. $x = 12$ ד. $x = 6$
- 18) 3 ס"מ.
- 19) 8 ס"מ.
- 20) א. $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$ ג.
- 21) 10 ס"מ.
- 22) 1 ס"מ.
- 23) א. $BE = 6$ ג. $EF = 2$
- 24) א. $BC = \frac{5}{12}t$ ב. $AB = 14.4$
- 28) 15 ס"מ.
- 32) 12.5 ס"מ.
- 33) 5 ס"מ.
- 34) א. 3.2 ס"מ.

ג. 8.4 ס"מ. (36) ב. לא.

ב. $\sphericalangle A = \sphericalangle F, \sphericalangle B = \sphericalangle E, \sphericalangle C = \sphericalangle D$. $\Delta ABC \sim \Delta FED$. א. (38)

(41) ב. 4 ס"מ.

(42) ג. $9R$.

(43) ב. 3 ס"מ ג. $\frac{BF}{BC} = \frac{7}{16}$.

(44) ג. ריבוע.

(45) ג. $AB \cdot AC = 36$.

(48) ב. 81 סמ"ר.

(49) א. 125 ס"מ. ב. 105 סמ"ר.

(50) 84 סמ"ר.

(51) ב. $\frac{S_{ABOM}}{S_{ABAC}} = \frac{1}{4}$.

(52) ג. 2. $\frac{S_{ABE}}{S_{CDE}} = \frac{1}{4}$.

(53) ג. $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}} = 0.8$.

(54) ב. $6S$.

(55) $16S$.

(56) ג. 1. $R = 9$. 2. $\frac{S_{COE}}{S_{BDA}} = \frac{25}{81}$.

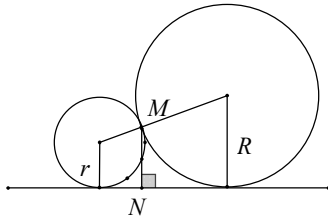
(57) ב. 2. קטן פי 6. ג. שטח המשולש DGC גדול פי 18 משטח המשולש MOF.

(58) ב. $\frac{AH}{AC} = \frac{2}{3}$.

(59) $y = 6, x = \sqrt{52}$.

(62) א. $y = 2, x = 3$. ב. $y = 3, x = 5$.

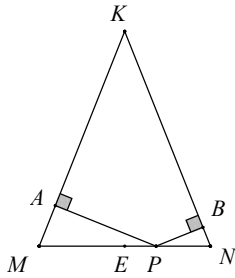
שאלות שונות – פרופורציה ודמיון:



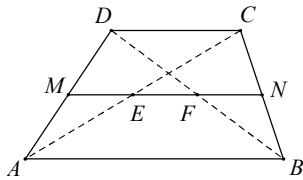
- (1) שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה M .
 רדיוס המעגל הגדול הוא R ורדיוס המעגל הקטן הוא r .
 מעבירים משיק משותף לשני המעגלים.
 MN הוא המרחק שבין נקודת ההשקה של שני
 המעגלים לבין המשיק המשותף שלהם.

$$\text{הוכח כי: } MN = \frac{2R \cdot r}{R+r}$$

- (2) א. הוכח כי: במשולש ישר זווית בעל זווית חדה בת 30° , הניצב שמול
 הזווית שווה למחצית היתר.
 ב. בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ האלכסונים ניצבים לשוקיים.
 הוכח כי: אם הזווית החדה בטרפז שווה ל- 60° , אזי נקודת מפגש
 האלכסונים מחלקת כל אלכסון ביחס 1:2.



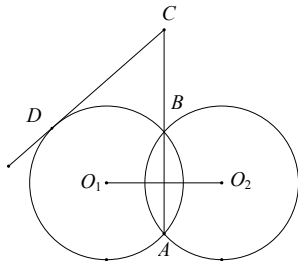
- (3) $\triangle KMN$ הוא משולש שווה שוקיים ($KM = KN$). מנקודה
 כלשהי P הנמצאת על הבסיס MN מורידים אנך לשוק KM
 ואנך לשוק KN החותכים אותן בנקודות A ו- B בהתאמה.
 א. הוכח כי $KAPB$ הוא מרובע בר חסימה.
 ב. הסבר מדוע הנקודה E הנמצאת באמצע הבסיס MN ,
 נמצאת על היקף המעגל החוסם את המרובע $KAPB$.



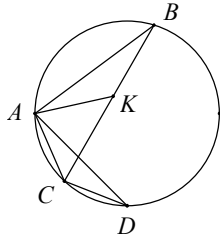
- (4) נסח והוכח את משפט קטע אמצעים בטרפז.
 MN הוא קטע אמצעים בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$).

$$\text{נסמן: } AB = a, CD = b.$$

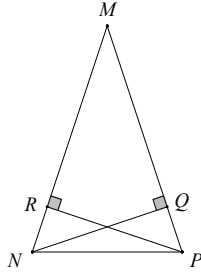
$$\text{הוכח כי: } EF = \frac{1}{2} \cdot (a - b).$$



- (5) שני מעגלים שווים, O_1 ו- O_2 , שמחוגיהם שווים ל-10 ס"מ,
 נחתכים בנקודות A ו- B . מהנקודה C שעל המשך המיתר
 המשותף AB של שני המעגלים יוצא המשיק CD לאחד
 מהמעגלים. נתון כי: $9 \cdot \sqrt{5}$ ס"מ $CD =$ ו-16 ס"מ $O_1O_2 =$.
 חשב את אורך הקטע CB .
 (היעזר בעובדה ש- AB חוצה את הקטע O_1O_2 ומאונך לו.)



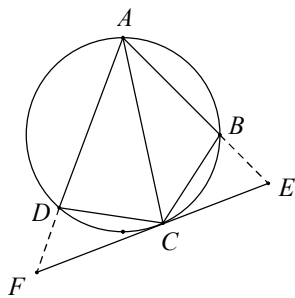
- 6) A, B, C, D הן נקודות על המעגל. K היא נקודה על BC כך ש- $BK = CD$. נתון: $AB = AD$.
- א. הוכח: $\triangle BAK \cong \triangle DAC$.
- ב. המשך הקטע AK חותך את המעגל בנקודה N . הוכח: $BN = CD$.



- 7) במשולש $\triangle MNP$ הגבהים NQ ו- PR נפגשים בנקודה O . נתון כי: $OR = OQ$.
- א. הוכח כי $NO = OP$.
- ב. הוכח כי: משולש $\triangle MNP$ שווה שוקיים.
- ג. הוכח כי: $MQ = MR$.

- 8) א. הוכח את המשפט: שני מיתרים הנחתכים בתוך מעגל מחלקים זה את זה, כך שמכפלת קטעי האחד שווה למכפלת קטעי האחר.
- ב. במעגל שרדיוסו R , הקוטר AB מאונך למיתר CD . הקוטר והמיתר נחתכים בנקודה E . נתון כי $AE : EB = 1 : 4$. הבע את שטח המשולש $\triangle ADC$ באמצעות R .

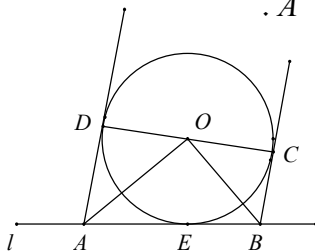
- 9) א. הוכח כי: במרובע חסום במעגל, סכום הזוויות הנגדיות שווה ל- 180° .
- ב. מרובע $ABCD$ חסום במעגל. AC חוצה את הזווית $\sphericalangle DAB$. בנקודה C מעבירים משיק למעגל. המשכי הצלעות AB ו- AD חותכים את המשיק בנקודות E ו- F בהתאמה.



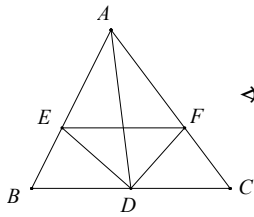
1. הוכח כי: $\sphericalangle CDF = \sphericalangle ABC$.
2. הוכח כי: $\triangle ABC \sim \triangle CDF$.
- ג. נתון $AB = 9$ ס"מ, $DF = 4$ ס"מ. חשב את אורך הקטע BC .

10) מעגל O משיק לישר l בנקודה E . CD הוא קוטר במעגל.

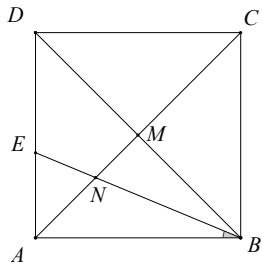
- בנקודה C מעבירים משיק למעגל החותך את הישר l בנקודה B .
בנקודה D מעבירים משיר למעגל החותך את הישר l בנקודה A .



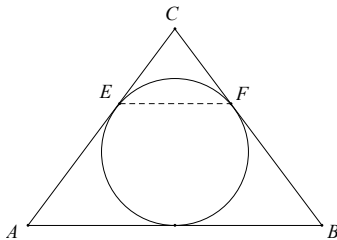
- א. הוכח כי: $\sphericalangle AOB = 90^\circ$.
- ב. הוכח כי: $\triangle AOE \sim \triangle OBE$.
- ג. נתון כי: $R = 6$ ס"מ, $AB = 13$ ס"מ, $EB < AE$. חשב את אורכי הקטעים EB ו- AE .



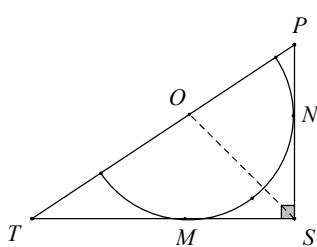
11) במשולש $\triangle ABC$ נתון כי: AD הוא התיכון לצלע BC .
 DE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle ADB$, DF הוא חוצה הזווית $\sphericalangle ADC$
 (ראה ציור). הוכח כי: $EF \parallel BC$.



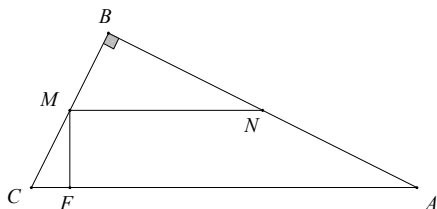
12) בריבוע $ABCD$ נתון כי: אלכסונו נפגשים בנקודה M .
 BE חוצה את הזווית $\sphericalangle DBA$ וחותך את האלכסון AC בנקודה N (ראה ציור).
 א. מצא את היחס $\frac{DE}{EA}$ ואת היחס $\frac{MN}{NA}$.
 ב. הוכח כי המשולש $\triangle ENA$ הוא משולש שווה שוקיים.
 ג. הוכח כי: $DE = 2 \cdot MN$.



13) במשולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ נתון כי:
 $AC = BC = 20$ ס"מ, $AB = 24$ ס"מ.
 במשולש זה חסום מעגל, המשיק לשתי השוקיים בנקודות E ו- F .
 א. הוכח כי: EF מקביל לבסיס.
 ב. חשב את אורך הקטע EF .

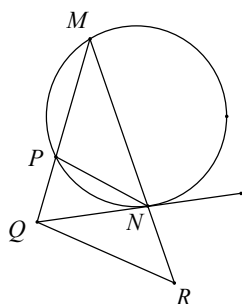


14) במשולש ישר זווית $\triangle PST$ ($\sphericalangle PST = 90^\circ$) חסום חצי מעגל שמרכזו O נמצא על יתר PT .
 א. הוכח כי OS חוצה את הזווית $\sphericalangle PST$.
 ב. נתון כי: $PS = 18$ ס"מ ו- $TS = 24$ ס"מ.
 חשב את אורכי הקטעים OP ו- OT .



15) במשולש $\triangle ABC$, בו $\sphericalangle B = 90^\circ$, נתון כי: $FC = 6$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ, $AB = 16$ ס"מ.
 הקטע FM מאונך ליתר AC , והקטע MN מקביל ליתר AC . חשב את אורך הקטע MN .

16) משולש $\triangle MPN$ חסום במעגל. ישר NQ משיק למעגל זה בנקודה N .



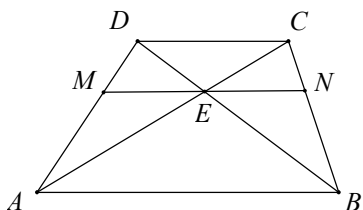
נתון כי: $NP \parallel RQ$ (ראה ציור).

א. הוכח כי: $\triangle QRN \sim \triangle MRQ$.

ב. נתון כי: $MN = 5$ ס"מ ו- $RN = 4$ ס"מ.

חשב את RQ .

17) בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$).



נתון כי: $DC = 9$ ס"מ, $AB = 18$ ס"מ.

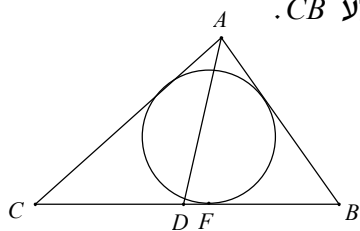
דרך נקודת מפגש האלכסונים E , מעבירים ישר MN המקביל לבסיסי הטרפז.

מצא את אורכו של MN .

18) א. הוכח: חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית חלוקה פנימית

לפי היחס של שתי הצלעות הכולאות את הזווית.

ב. המעגל החסום במשולש $\triangle ABC$ משיק בנקודה F לצלע CB .



נתון כי: $BF = 4$ ס"מ, $CF = 7$ ס"מ.

AD חוצה הזווית $\sphericalangle A$ מחלק את הקטע CB לשני

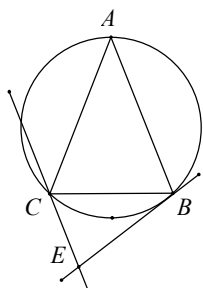
קטעים המתאיחים זה לזה כמו 3:2.

חשב את אורכי הצלעות AC ו- AB .

19) משולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) חסום במעגל.

דרך קדקוד B עובר משיק למעגל. דרך קדקוד C עובר ישר

המקביל ל- AB , וחותך את משיק בנקודה E (ראה ציור).



א. הוכח: $\triangle BAC \sim \triangle CBE$.

ב. נתון כי: $AC = 27$ ס"מ ו- $CE = 12$ ס"מ.

חשב את אורך הקטע BC .

20) בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$) נתון כי: $AB = 3 \cdot CD$.

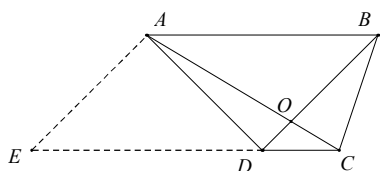
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה O .

דרך הנקודה A מעבירים מקביל ל- BD , החותך

את המשך הצלע CD בנקודה E (ראה ציור).

נסמן את שטח המשולש $\triangle DOC$ באמצעות S .

הבע את שטח הטרפז $ABCE$ באמצעות S .



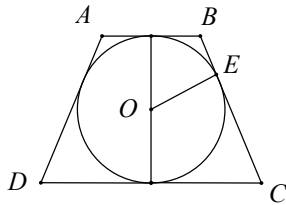
(21) $ABCD$ הוא טרפז שווה שוקיים ($AD = BC$, $AB \parallel CD$).

O הוא מרכז המעגל החסום בטרפז ו- E היא נקודת ההשקה של

השוק BC עם המעגל O (ראה ציור).

א. הוכח כי: $OE^2 = BE \cdot EC$.

ב. הוכח כי: הגובה בטרפז שווה שוקיים החוסם מעגל הוא הממוצע ההנדסי של שני הבסיסים של הטרפז.



(22) במשולש ישר-זווית ΔPQR ($\angle PQR = 90^\circ$) נתון:

h הוא הגובה ליתר, x ו- y הם הניצבים,

א ו- b הם היטלי הניצבים x ו- y בהתאמה (ראה ציור).

א. הוכח כי הגובה ליתר הוא ממוצע גאומטרי של

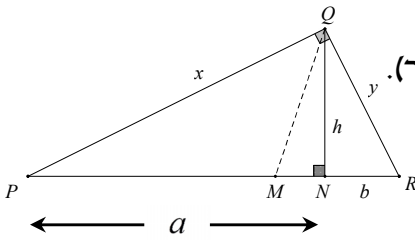
היטלי הניצבים על היתר: $h = \sqrt{a \cdot b}$.

ב. הוכח כי כל ניצב הוא ממוצע גאומטרי של היתר

והיטל הניצב על היתר: $x = \sqrt{a \cdot (a+b)}$, $y = \sqrt{b \cdot (a+b)}$.

ג. מקדוד Q מעבירים חוצה זווית החותך את היתר PR בנקודה M .

הוכח כי: $PM : MR = \sqrt{a} : \sqrt{b}$.

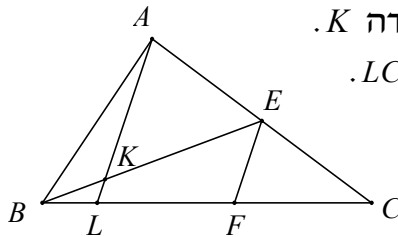


(23) במשולש ΔABC התיכון BE והקטע AL נחתכים בנקודה K .

הקטע EF מקביל ל- AL (ראה ציור). נתון כי: $LC = 5 \cdot BL$.

א. הוכח כי: $LF = 2.5 \cdot BL$.

ב. הוכח כי: $\frac{BK}{BE} = \frac{2}{7}$.



(24) א. הוכח את המשפט: היחס בין השטחים של שני משולשים דומים שווה

לריבוע יחס הדימיון.

ב. במקבילית $ABCD$ נקודה E נמצאת על

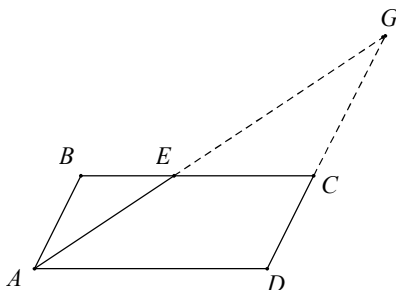
הצלע BC , כך ש- $BE : CE = 2 : 3$.

המשך הקטע AE חותך את המשך הצלע DC

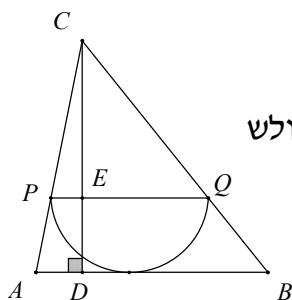
בנקודה G . נתון $S_{\Delta AEG} = 18$ סמ"ר.

1. חשב את שטח המשולש ΔABE .

2. חשב את שטח המשולש ΔABC .



25) א. הוכח כי: במשולשים דומים היחס בין הגבהים המתאימים שווה ליחס הדמיון של המשולשים.



ב. במשולש $\triangle ABC$ חסום חצי מעגל שרדיוסו 6 ס"מ.

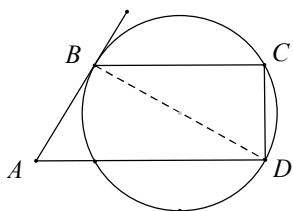
קוטר המעגל PQ מקביל לצלע AB . CD הוא גובה במשולש

$\triangle ABC$ וחותר את הקוטר PQ בנקודה E (ראה ציור).

נתון כי: $AB = 20$ ס"מ.

חשב את אורך הקטע CE .

26) $ABCD$ הוא טרפז ($BC \parallel AD$). הצלעות BC ו- CD הן מיתרים במעגל.



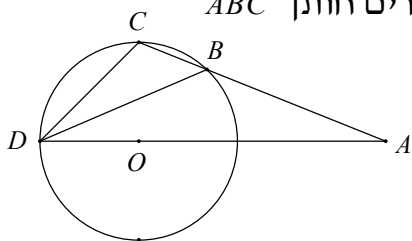
הצלע AB משיקה למעגל בנקודה B (ראה ציור).

א. הוכח כי: $\triangle ABD \sim \triangle DCB$.

ב. נתון כי: $BC = 5$ ס"מ, $AD = 12.8$ ס"מ.

חשב את אורך האלכסון BD .

27) מנקודה A הנמצאת מחוץ למעגל שרדיוסו R , מעבירים חותך ABC



וחותר AOD , שעובר דרך מרכז המעגל O ,

כך ש- $\angle CDB = \angle BDA = \angle BAD = \alpha$.

נתון גם: $BC = n$, $AB = m$.

הוכח כי: $DC^2 = n^2 + m \cdot n$.

28) א. הוכח כי: חותכים למעגל היוצאים מנקודה אחת מחוץ למעגל

יוצרים קטעים פרופורציוניים כך שמכפלת כל החותר בחלקו

מחוץ למעגל היא גודל קבוע.

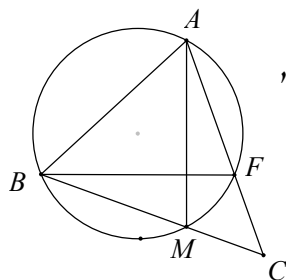
ב. נתון משולש $\triangle ABC$. מעגל העובר דרך הקדקודים A ו- B ,

חותך הצלעות AC ו- BC בנקודות F ו- M בהתאמה.

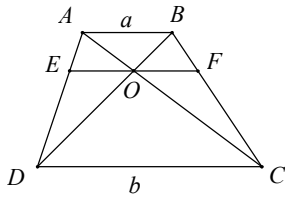
1. הוכח כי: $\triangle ACM \sim \triangle BCF$.

2. נתון כי: $BC = 48$ ס"מ, $AC = 40$ ס"מ,

$AF = 16$ ס"מ. מצא את אורך המיתר BM .



29) בטרפז $ABCD$ אורך הבסיס AB הוא a ואורך הבסיס CD הוא b .



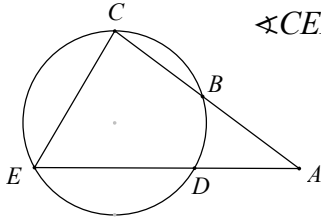
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה O .

דרך הנקודה O מעבירים מקביל לבסיסים החותך

את AD בנקודה E ואת BC בנקודה F .

הוכח כי מתקיים: $EO = OF = \frac{a \cdot b}{a + b}$.

30) מנקודה A מעבירים שני חותכים למעגל, חותך ABC וחותך ADE ,



כך שהנקודה B נמצאת באמצע הקשת \widehat{CD} , ו- $\angle CED = 2\angle CAD$. (ראה ציור).

א. הוכח: $\triangle ECB \sim \triangle ACE$.

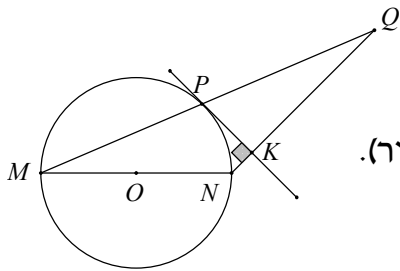
ב. נתון כי: $CB = 4$ ס"מ, $AC = 9$ ס"מ.

חשב את אורך הקטע CE .

31) MN הוא קטע במעגל שמרכזו ב- O .

PK משיק למעגל בנקודה P ומאונך ל- NQ .

הנקודה Q נמצאת על המשך המיתר MP . (ראה ציור).

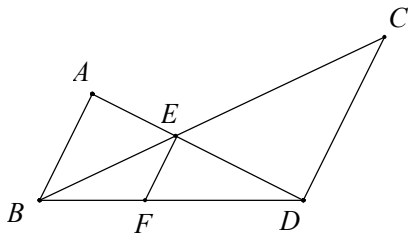


א. הוכח כי: $MP \cdot KN = PK \cdot PN$.

ב. הוכח כי: $MP = PQ$.

32) בציר נתון כי: $AB \parallel EF \parallel CD$.

הוכח כי: $\frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$.



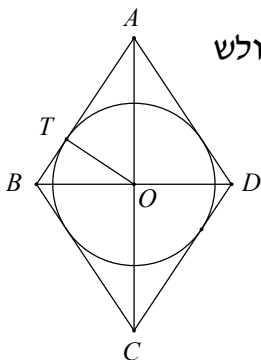
33) א. הוכח כי: הגובה ליתר במשולש ישר-זווית מחלק את המשולש לשני משולשים, שכל אחד מהם דומה למשולש כולו.

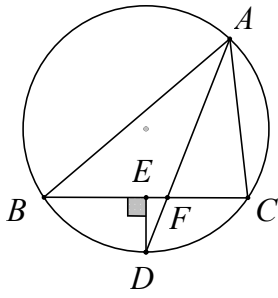
ב. מעויין $ABCD$ חוסם מעגל שמרכזו ב- O .

נתון כי: אורך הרדיוס המעגל OT הוא 24 ס"מ.

ואורך צלע המעויין הוא 50 ס"מ.

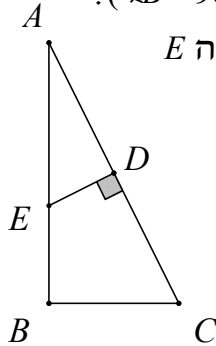
מצא את אורך האלכסון BD ($BD < AC$).



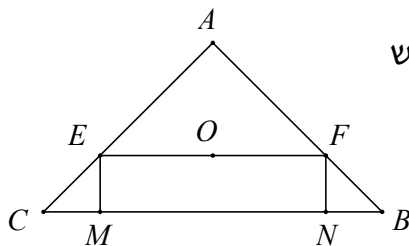


34) משולש $\triangle ABC$ חסום במעגל. חוצה זווית $\sphericalangle BAC$ חותך את המעגל בנקודה D ואת הצלע BC בנקודה F (ראה ציור). מנקודה D הורד אנך על הצלע CB החותך אותה בנקודה E . נתון כי: $AB:AC = 5:3$. הוכח כי: $BC = 8 \cdot EF$.

35) נקודה D היא אמצע היתר AC המשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$).

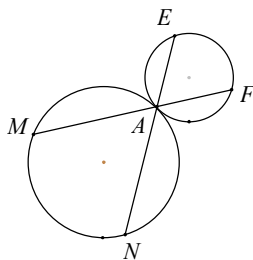


בנקודה D מעלים אנך לצלע AC החותך את הניצב AB בנקודה E (ראה ציור). נתון כי: 8 ס"מ $AC = m$, $AB = m$. הבע את CE ו- BE באמצעות m .

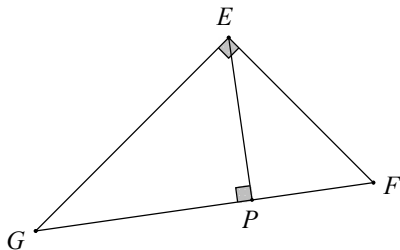


36) במשולש $\triangle ABC$ נתון כי: 15 ס"מ $AB = AC = m$, 18 ס"מ $CB = m$. דרך מרכז המעגל O החסום במשולש עובר הקטע EF המקביל לבסיס BC . EM ו- FN הם אנכים לבסיס BC . חשב את שטח המלבן $EFNM$.

37) א. הוכח כי: הזווית הכלואה בין משיק ומיתר בעלי נקודה משותפת, שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה.



ב. שני מעגלים משיקים מבחוץ בנקודה A . דרך נקודה זו עוברים שני ישרים, החותכים את המעגלים בנקודות E, F ו- M, N . הוכח כי: $\triangle AMN \sim \triangle AFE$.



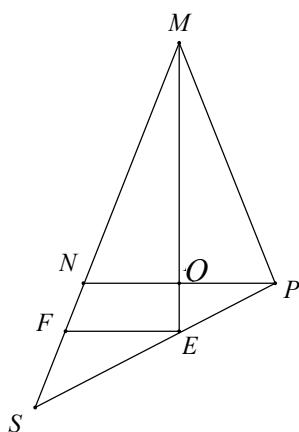
38) במשולש ישר-זווית $\triangle EFG$ ($\sphericalangle GEF = 90^\circ$),

EP הוא הגובה ליתר GF .

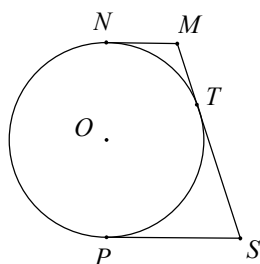
נתון כי: 24 ס"מ $EF = m$, 32 ס"מ $GE = m$.

חשב את אורכי הקטעים: GF, PF, GP ו- EP .

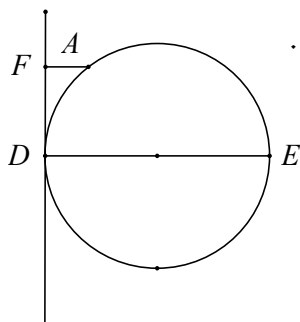
39) MQ הוא התיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים $\triangle MNP$ ($MN = MP$).



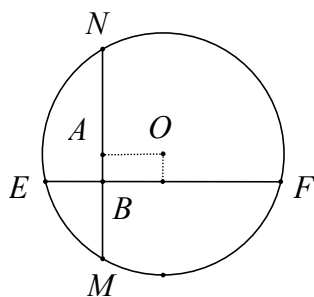
- S היא נקודה על המשך הצלע MN .
 המשך התיכון MQ חותך את הקטע PS בנקודה E .
 הקטע EF מקביל ל- NP (ראה ציור).
 א. הוכח כי: $MP : MS = NF : FS$.
 ב. נתון כי: $MP = 20$ ס"מ, $NF = 4$ ס"מ.
 חשב את אורך הקטע FS .



- 40) NP הוא קוטר במעגל O . MN , MT , ו- SP הם משיקים למעגל O בנקודות N , T , ו- P בהתאמה.
 א. הוכח כי: $\angle MOS = 90^\circ$.
 ב. הוכח כי רדיוס המעגל שווה ל- $\sqrt{MN \cdot SP}$.

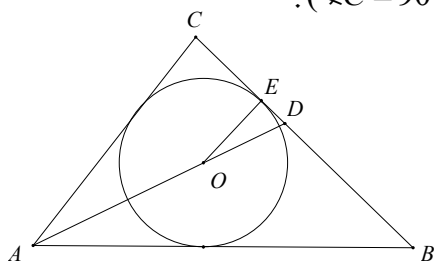


- 41) DE הוא קוטר במעגל. בנקודה D מעבירים משיק למעגל. מנקודה A , שעל המעגל, מעבירים ישר המקביל לקוטר DE . הישר חותך את המשיק למעגל בנקודה F (ראה ציור).
 א. הוכח כי: $AD^2 = AF \cdot DE$.
 ב. נתון $AF = 4$ ס"מ, $DE = 9$ ס"מ.
 חשב את שטח הטרפז $AFDE$.



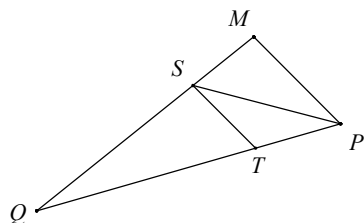
- 42) א. הוכח כי המחוג המאונך למיתר המעגל חוצה אותו.
 ב. בציור שלפניך המיתרים EF ו- MN מאונכים זה לזה.
 נתון כי: $EB = 3$ ס"מ, $BF = 8$ ס"מ, $MB = 4$ ס"מ.
 1. חשב את אורך הקטע NB .
 2. מצא את המרחק המיתר EF ממרכז המעגל O .

43) מעגל שמרכזו בנקודה O חסום במשולש ישר-זווית ($\sphericalangle C = 90^\circ$).



הנקודה E היא נקודת ההשקה של המעגל עם הצלע BC . מעבירים את חוצה הזווית AD . נתון כי: $AB = 30$ ס"מ, $AC = 18$ ס"מ. חשב את אורך הקטע ED .

44) במשולש $\triangle MPQ$ חוצה את הזווית $\sphericalangle MPQ$, $ST \parallel MP$.



נתון כי: $MP = 27$ ס"מ, $QP = 45$ ס"מ. חשב את אורך הקטע TP .

תשובות סופיות:

$$(5) \text{ } CB = 15 \text{ ס"מ} \quad (8) \text{ } S_{\Delta ACD} = \frac{8}{25} R^2 \quad (9) \text{ } BC = 6 \text{ ס"מ}$$

$$(10) \text{ } EB = 4 \text{ ס"מ}, AE = 9 \text{ ס"מ} \quad (12) \text{ } \frac{MN}{NA} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{DE}{EA} = \sqrt{2}$$

$$(13) \text{ } EF = 9.6 \text{ ס"מ} \quad (14) \text{ } OP = \frac{90}{7} \text{ ס"מ}, OT = \frac{120}{7} \text{ ס"מ}$$

$$(15) \text{ } MN = 3\frac{1}{3} \text{ ס"מ} \quad (16) \text{ } RQ = 6 \text{ ס"מ} \quad (17) \text{ } MN = 12 \text{ ס"מ}$$

$$(18) \text{ } AB = 6 \text{ ס"מ}, AC = 9 \text{ ס"מ}$$

$$(19) \text{ } BC = 18 \text{ ס"מ} \quad (20) \text{ } S_{ABCE} = 28 \cdot S$$

$$(24) \text{ } S_{\Delta ABE} = 8 \text{ סמ"ר} \quad (25) \text{ } S_{\Delta ABC} = 20 \text{ סמ"ר} \quad (26) \text{ } CE = 9 \text{ ס"מ}$$

$$(26) \text{ } BD = 8 \text{ ס"מ} \quad (28) \text{ } BM = 28 \text{ ס"מ} \quad (30) \text{ } CE = 6 \text{ ס"מ}$$

$$(33) \text{ } BD = 60 \text{ ס"מ} \quad (35) \text{ } BE = \frac{m^2 - 32}{m}, CE = \frac{32}{m}$$

$$(36) \text{ } S_{EFNM} = 50.625 \text{ סמ"ר}$$

$$(38) \text{ } GF = 40 \text{ ס"מ}, PF = 14.4 \text{ ס"מ}, GP = 25.6 \text{ ס"מ}, EP = 19.2 \text{ ס"מ}$$

$$(39) \text{ } FS = 6 \text{ ס"מ} \quad (41) \text{ } S_{AFDE} = 29.07 \text{ סמ"ר}$$

$$(42) \text{ } NB = 6 \text{ ס"מ} \quad (43) \text{ } DE = 3 \text{ ס"מ}$$

$$(44) \text{ } TP = 16.875 \text{ ס"מ}$$

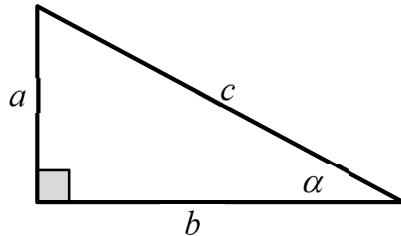
תוכן העניינים - טריגונומטריה:

212	פרק 12 – טריגונומטריה במישור:
212	משולש ישר זווית:
216	זהויות היסוד:
216	שאלות:
217	ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:
217	תרגילים:
218	מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:
218	הגדרת מעגל היחידה:
218	הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:
218	זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:
218	שאלות:
219	סכום והפרש זוויות:
220	שאלות:
220	זווית כפולה:
221	שאלות:
222	תשובות סופיות:
223	משוואות טריגונומטריות:
223	פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):
224	שאלות:
226	פתרון משוואות טריגונומטריות בתחום נתון:
226	שאלות:
227	פתרון של משוואות טריגונומטריות (ברדיאנים):
227	הגדרת הרדיאן:
227	קשר בין רדיאנים למעלות:
227	פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:
228	שאלות:
230	תשובות סופיות:
233	טריגונומטריה במישור:
247	תשובות סופיות:
249	שאלות שונות:
257	תשובות סופיות:

פרק 12 – טריגונומטריה במישור:

משולש ישר זווית:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

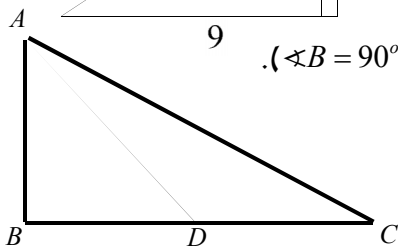
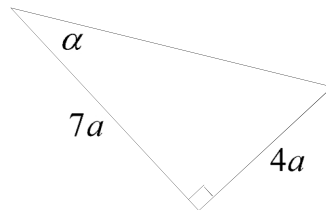
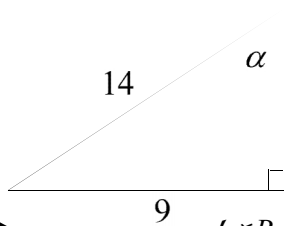
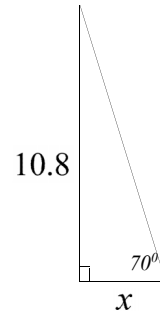
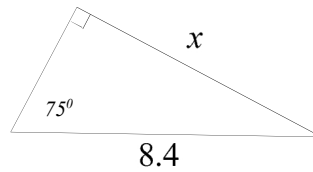
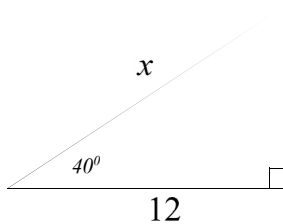
$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

משפט פיתגורס: $a^2 + b^2 = c^2$.

שאלות:

(1) מצא את ערכו של α/x במשולשים ישרי הזווית הבאים:

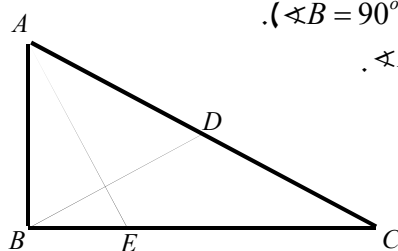


(2) המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle B = 90^\circ$).

AD הוא התיכון לניצב BC .

נתון: $AB = 6_{cm}$, $\sphericalangle C = 28^\circ$.

מצא: $AD = ?$, $\sphericalangle BAD = ?$.



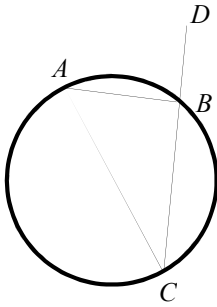
(3) המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle B = 90^\circ$).

BD הוא התיכון ליתר AC ו- AE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle A$.

נתון: $BC = 8_{cm}$, $BD = 5.6_{cm}$.

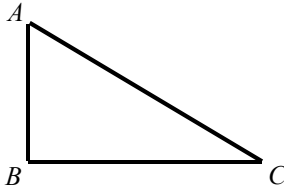
מצא: $BE = ?$, $\sphericalangle BAE = ?$.

4 מצא את זוויתו של מעויין שאורכי אלכסוניו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

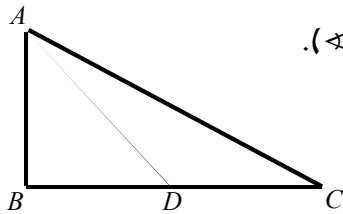


5 המשולש $\triangle ABC$ חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל. המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D . נתון: $\angle DAB = 32^\circ$, $BD = 4_{cm}$. מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

6 במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92° . מצא את שטח המשולש.

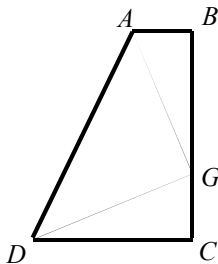


7 המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). נתון: $AB = a$, $\angle A = \alpha$. הבע באמצעות α ו- a את היקף המשולש.



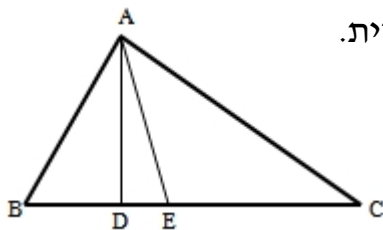
8 המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). AD הוא התיכון לניצב BC . נתון: $AB = b$, $\angle C = \alpha$. הבע באמצעות α ו- b את אורכי הקטעים AD ו- BD .

9 במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k . הבע באמצעות α ו- k את שטח המשולש ואת אורך היתר.



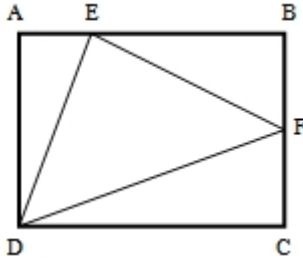
10 טרפז $ABCD$ הוא טרפז ישר זווית ($\angle B = \angle C = 90^\circ$). הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$. נתון: $\angle BAG = \beta$, $AG = DG = m$. הבע באמצעות β ו- m את שטח הטרפז.

11 המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$).



הקטעים AD ו- AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית מסמנים: $\angle DAE = \alpha$, $DE = k$.

- א. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC .
- ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי: $\alpha = 30^\circ$ ו- $k = 2$.

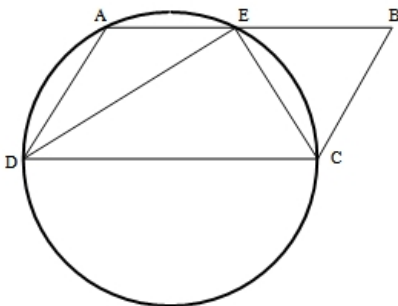


- 12) במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-E מקיימת: $3AE = BE$ ו-F היא אמצע הצלע BC. אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE. מעבירים את הקטעים EF, DF ו-DE כך שנוצר במשולש DEF.
- א. סמן ב- t את אורך הקטע AE והבע באמצעות t את אורכי צלעות המשולש DEF.
- ב. חשב את זווית המשולש EDF.

- 13) משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל. הבע באמצעות β ו- k את רדיוס המעגל.

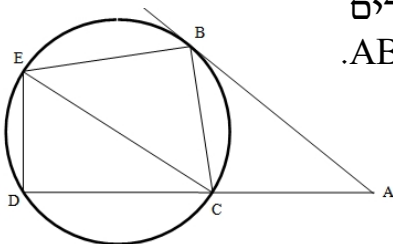
- 14) בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא b והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא α . הבע באמצעות α ו- b את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

* הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:



- 15) דרך הקדקודים A, C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E ($AE=BE$). נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.
- א. הוכח כי המיתר CE חוצה את זווית C.
- ב. רדיוס המעגל יסומן ב- R . הבע באמצעות R את היקף המקבילית.
- ג. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.

- 16) מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD.



- מעבירים את המיתרים השווים BC ו-BE. כמו כן מעבירים את המיתר DE. אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.
- א. הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.
- ב. הוכח כי: $\angle BEC = 2 \cdot \angle EDC$.
- ג. איזה מרובע יהיה המרובע BEDC אם יתקיים: $\angle EDC = 90^\circ$?
- ד. נתונים: $\angle A = 40^\circ$, $AC = 6$ ס"מ, $AB = 9$ ס"מ, $CE = 8$ ס"מ. חשב את שטח המרובע ABEC.

תשובות סופיות:

א. $x = 15.665_{cm}$ ב. $x = 8.114_{cm}$ ג. $x = 3.931_{cm}$ ד. $\alpha = 40.005^\circ$ ה. $\alpha = 29.745^\circ$ (1)

$BE = 3.294_{cm}$, $\sphericalangle BAE = 22.792^\circ$ (3) $AD = 8.236_{cm}$, $\sphericalangle BAD = 43.24^\circ$ (2)

$S = 28.618_{cm^2}$ (6) $R = 6.04_{cm}$ (5) $73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ, 106.26^\circ$ (4)

$AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}}$, $BD = \frac{b}{2 \tan \alpha}$ (8) $P = a \left(1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$ (7)

$AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$, $S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2}$ (9)

$S = \frac{k^2}{\cos 2\alpha \tan^2 \alpha}$.א (11) $\frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2}$ ב. 24 סמ"ר. (10)

$DE = t\sqrt{10}$, $EF = t\sqrt{11.25}$, $DF = t\sqrt{18.25}$.א (12) $81.86^\circ, 51^\circ, 47.14^\circ$ ב.

$\frac{1}{2} b \sin \alpha + \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}}$, $S = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)$ (14) $R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2}$ (13)

ב. $6R$ ג. 4 ס"מ. (16) ג. ריבוע. ד. 34.43 סמ"ר. (15)

זהויות היסוד:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	קשרים בין פונקציות
$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$	זוויות משלימות ל- 90°
$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$	$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$	
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	קשרים בין פונקציות

שאלות:

1) הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \quad \text{א.}$$

$$\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha \quad \text{ד.}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \tan \alpha \quad \text{ג.}$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 \quad \text{ו.}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 \quad \text{ה.}$$

$$\sin^2(\alpha + 45^\circ) - \sin^2(\alpha - 45^\circ) = 1 \quad \text{ח.}$$

$$\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad \text{ז.}$$

$$\frac{\sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha \quad \text{י.}$$

$$\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \tan \alpha \quad \text{ט.}$$

$$\cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1 \quad \text{יב.}$$

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \cot \alpha \quad \text{יא.}$$

$$\frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha \quad \text{יד.}$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \cot \alpha \quad \text{יג.}$$

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha \quad \text{יט.}$$

$$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha \quad \text{יז.}$$

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin \alpha$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos \alpha$
ϕ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\tan \alpha$
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ϕ	$\cot \alpha$

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של 0° ו- 90° תלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$ אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה- $\cos \alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan \alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot \alpha$.

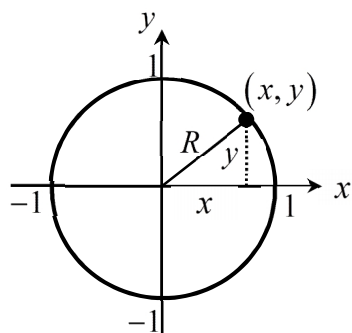
תרגילים:

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

<p>א. $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ$</p> <p>ב. $\frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$</p> <p>ג. $\tan 45^\circ + \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$</p> <p>ד. $\frac{1 + \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ}$</p> <p>ה. $\cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ$</p> <p>ו. $\frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ}$</p> <p>ז. $\frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4 \left(\sin^2 60^\circ - \frac{1}{4} \right)}$</p> <p>ח. $\frac{27 \cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ}$</p>	
---	--

מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ מתאימות לזוויות של 270° , 180° , 90° , 0° .

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

טנגנס	קוסינוס	סינוס	רביע
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	I
$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	II
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	III
			סימנים

זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{matrix} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{matrix}}, \quad \boxed{\begin{matrix} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{matrix}}$$

כאשר k הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

שאלות:

3) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון. אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| א. $\sin 120^\circ$ | ב. $\cos 150^\circ$ |
| ג. $\tan 160^\circ$ | ד. $\cot 130^\circ$ |
| ה. $\sin 215^\circ$ | ו. $\cos 245^\circ$ |
| ז. $\tan 230^\circ$ | ח. $\cot 200^\circ$ |
| ט. $\sin 300^\circ$ | י. $\cos 310^\circ$ |

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150^\circ$	ב. $\cos 210^\circ$	ג. $\tan 120^\circ$
ד. $\sin 330^\circ$	ה. $\tan 225^\circ$	ו. $\sin 315^\circ$
ז. $\cos 120^\circ$	ח. $\tan(-30^\circ)$	ט. $\cos(-45^\circ)$
י. $\sin 510^\circ$	יא. $\cos 930^\circ$	יב. $\tan(-225^\circ)$

5) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

א. $(\sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ + \cos(-60^\circ))^2$
 ב. $8 \sin^2 150^\circ \cdot \tan 135^\circ - 2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos(-135^\circ)$
 ג. $\frac{\cot 225^\circ}{\sin(-225^\circ) - \cos 135^\circ} + \tan^2 210^\circ$

סכום והפרש זוויות:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cos(\alpha \pm \beta)$ יחושב לפי:

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$

$$\begin{cases} \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha} \end{cases}$$

הערה:

- בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות עבור $\tan(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$.

שאלות:

6) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75^\circ$	ב. $\sin 15^\circ$	ג. $\sin 105^\circ$
ד. $\sin(-15^\circ)$	ה. $\cos 75^\circ$	ו. $\cos 15^\circ$
ז. $\cos(-105^\circ)$	ח. $\cos 165^\circ$	ט. $\cos(-195^\circ)$

7) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ$
ב. $5 \cos 50^\circ \cos 20^\circ + 5 \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

8) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$
ב. $\cos(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$
ג. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$
ד. $\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

9) נתון: $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = \frac{8}{17}$ ו- α, β זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של α ו- β חשב:

א. $\sin(\alpha + \beta)$
ב. $\cos(\alpha + \beta)$
ג. $\tan(\alpha + \beta)$

זווית כפולה:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

שאלות:

(10) הוכח את הזהויות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha \\ \text{ב.} & (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha \\ \text{ג.} & (\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha \\ \text{ד.} & \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha \\ \text{ה.} & \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha \\ \text{ו.} & \frac{\cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha \\ \text{ז.} & \cos^2 2\alpha = 4 \sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha + 1 \\ \text{ח.} & \cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1 \end{array}$$

(11) הוכח את הזהות: $\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$

לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימשו בזהויות שנלמדו.

(12) הוכח את הזהות: $\cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$

לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימשו בזהויות שנלמדו.

(13) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\sin \alpha = \frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

- א. $\cos \alpha$
- ב. $\tan \alpha$
- ג. $\sin 2\alpha$
- ד. $\cos 2\alpha$
- ה. $\tan 2\alpha$

(14) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

- א. $\sin \alpha$
- ב. $\cos \alpha$
- ג. $\sin 2\alpha$
- ד. $\cos 2\alpha$

(15) נתונה זווית α ברביע הראשון וזווית β ברביע השני המקיימות: $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

ו- $\cos \beta = -0.8$. מבלי למצוא את α ו- β חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha + \beta)$

ב. $\cos(\alpha + \beta)$

ג. $\sin(2\alpha + \beta)$

(16) נתון כי $\sin \alpha + \cos \alpha = 1.2$ עבור $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. חשב את $\sin 2\alpha$.

תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) א. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ב. $\frac{1}{2}$ ג. 2 ד. $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ ה. $\frac{3}{4}$

ו. 9 ז. $-\frac{1}{3}$ ח. $2\sqrt{6}$
 (3) א. $\sin 60^\circ$ ב. $-\cos 30^\circ$ ג. $-\tan 20^\circ$ ד. $-\cot 50^\circ$
 ה. $-\sin 35^\circ$ ו. $-\cos 65^\circ$ ז. $\tan 50^\circ$ ח. $\cot 20^\circ$
 ט. $-\sin 60^\circ$ י. $\cos 50^\circ$

(4) א. $\frac{1}{2}$ ב. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ג. $-\sqrt{3}$ ד. $-\frac{1}{2}$
 ה. 1 ו. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ז. $-\frac{1}{2}$ ח. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
 ט. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ י. $\frac{1}{2}$ יא. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ יב. -1

(5) א. 1 ב. -1 ג. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$
 (6) א. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ב. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ג. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ד. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
 ה. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ו. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ז. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ ח. $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
 ט. $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

(7) א. 1 ב. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(8) שאלת הוכחה.

(9) א. $\frac{84}{85}$ ב. $-\frac{13}{85}$ ג. $-6\frac{6}{13}$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) א. $\frac{9}{41}$ ב. $4\frac{4}{9}$ ג. $\frac{720}{1681}$ ד. $-\frac{1519}{1681}$

ה. $-\frac{720}{1519}$

(14) א. $\frac{5}{13}$ ב. $\frac{12}{13}$ ג. $\frac{120}{169}$ ד. $\frac{129}{169}$

(15) א. $\frac{16}{65}$ ב. $-\frac{63}{65}$ ג. $-\frac{123}{845}$

(16) 0.44

משוואות טריגונומטריות

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות

כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית נתונה/ידועה:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 360^\circ k$, $x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \alpha \pm 360^\circ k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

- (1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקצית הסינוס):
א. $\sin x = \frac{1}{2}$ ב. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד. $\sin x = -\frac{1}{2}$
- (2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקצית הקוסינוס):
א. $\cos x = \frac{1}{2}$ ב. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקצית הטנגנס):
א. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. $\tan x = -1$
- (4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):
א. $\sin x = 0.7$ ב. $\cos x = -0.6$ ג. $\tan x = 5$
- (5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):
א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ב. $2 \cos 2x = -\sqrt{3}$
ג. $\tan 5x = -1$ ד. $3 \sin 2x = 2$
ה. $3 \cos 3x = 1$ ו. $2 \tan 4x = 1$
- (6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):
א. $\sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\tan(50^\circ - x) = 1.3$
- (7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):
א. $\sin x = \sin 3x$ ב. $\sin 2x = \sin(x + 30^\circ)$
ג. $\sin x = \sin(120^\circ - x)$ ד. $\cos x = \cos 3x$
ה. $\cos x = \cos(40^\circ - x)$ ו. $\tan x = \tan 3x$
ז. $\tan 2x = \tan(60^\circ - x)$

8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א. $\sin x = 0$	ב. $\sin x = 1$
ג. $\sin x = -1$	ד. $\cos x = 0$
ה. $\cos x = 1$	ו. $\cos x = -1$
ז. $\tan x = 0$	ח. $\tan x = 1$

9) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

א. $\cos^2 x = \frac{3}{4}$	ב. $\sin^2 x = \frac{1}{4}$
ג. $\tan^2 2x = 3$	ד. $\sin x \cos 3x = 0$
ה. $\sin 2x - 2 \sin^2 2x = 0$	ו. $2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0$
ז. $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$	ח. $3 \sin^2 x - \sin x = 2$
ט. $6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$	י. $\cos^2 x + 2 \cos x = 3$
יא. $\tan^2 x - 3 \tan x - 4 = 0$	יב. $\tan^2 x = 4 \tan x - 1$
יג. $\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0$	יד. $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0$
טו. $\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0$	

10) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (שימוש בזהויות יסוד):

א. $\sin x = \cos x$	ב. $\sin x = \cos(x + 45^\circ)$
ג. $\cos x = \frac{2}{3} \sin^2 x$	ד. $2 \cos^2 x = 3 \sin x$
ה. $\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4}$	ו. $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$
ז. $\sin^2 x + 2 \cos^2 x = 1.5$	ח. $\sin x - \tan x = 0$

11) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $\sin x = -\sin 3x$	ב. $\cos 2x = -\cos 3x$
ג. $\sin(x + 30^\circ) = -\cos x$	ד. $\sin 3x = -\cos(180^\circ - x)$

12) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (חלוקה בקוסינוס):

א. $\sin x = 2 \cos x$ ב. $3 \sin x = \cos x$

ג. $4 \sin x = 7 \cos x$ ד. $2 \sin x = -5 \cos x$

ה. $\sin^2 x = 8 \cos^2 x$ ו. $3 \sin^2 x = \cos^2 x$

13) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זהויות של זווית כפולה):

א. $\sin x - \sin 2x = 0$ ב. $\sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0$

ג. $4 \cos x = \sin 2x$ ד. $2 \cos 2x + \sin 4x = 0$

ה. $3 \cos x - \cos 2x = 0$ ו. $\cos 2x = 2 \sin x$

ז. $\sin x + \cos 2x = 1$ ח. $2 \sin^2 x + \cos 2x + 2 = 0$

פתרון משוואות טריגונומטריות בתחום נתון:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- k ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

שאלות:

14) מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

א. $[0^\circ : 180^\circ]$, $8 \sin x - 4 = 0$

ב. $[-90^\circ : 90^\circ]$, $\sin 2x = \sin(x + 60^\circ)$

ג. $[-90^\circ : 90^\circ]$, $3 \cos(2x + 30^\circ) + 1 = 0$

ד. $[0^\circ : 360^\circ]$, $\cos(50^\circ - x) = -\cos x$

ה. $[-30^\circ : 30^\circ]$, $2 \sin 3x - 5 \cos 3x = 0$

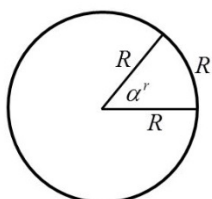
ו. $[0^\circ : 180^\circ]$, $2 \cos^2 3x = \sin 6x + 1$

ז. $[-180^\circ : 180^\circ]$, $\cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$

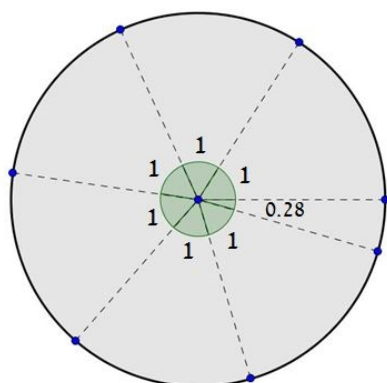
ח. $[-180^\circ : 180^\circ]$, $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x = 0$

פתרון של משוואות טריגונומטריות (ברדיאנים):

הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל. עבור מעגל שרדיוסו R , תימצאנה 2π רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P = 2\pi \cdot R$.



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל- $2\pi = 6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל. הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד, כאשר הזווית האחרונה שווה ל- 0.28 מרדיאן. מקבלים 2π רדיאנים.

קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית α° (במעלות) לזווית α^r (ברדיאנים): $\alpha^r = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$.
- נוסחת מעבר מזווית α^r (ברדיאנים) לזווית α° (במעלות): $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^r$.

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 2\pi k$, $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + \pi k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + \pi k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

15) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים :

א. 30°	ב. 90°	ג. 75°	ד. 120°
ה. 210°	ו. 315°	ז. 18°	ח. 285°
ט. -15°	י. -80°	יא. 510°	יב. -390°

16) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות :

א. π	ב. 2π	ג. 4π	ד. 1.5π
ה. $\frac{1}{2}\pi$	ו. $\frac{\pi}{4}$	ז. $\frac{\pi}{6}$	ח. $\frac{1}{18}\pi$
ט. $\frac{13}{18}\pi$	י. $\frac{19}{12}\pi$	יא. $1\frac{1}{6}\pi$	יב. $2\frac{1}{4}\pi$

17) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות) :

א. $2 \sin 3x = 1$, $\left[0 : \frac{1}{3}\pi\right]$	ב. $\sqrt{3} + 2 \cos x = 0$, $[0 : \pi]$
ג. $3 - 3 \tan \frac{x}{2} = 0$, $[0 : 2\pi]$	ד. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0 : \pi]$
ה. $4 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$, $\left[0 : \frac{1}{2}\pi\right]$	ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$, $\left[-\frac{5\pi}{18} : \frac{5\pi}{18}\right]$
ז. $5 - 5 \tan(4x - 0.1\pi) = 0$, $\left[0 : \frac{\pi}{3}\right]$	ח. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.7$, $\left[-\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{4}\right]$

18) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית) :

א. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$, $\left[0 : \frac{\pi}{2}\right]$	ב. $16 \cos^2 2x - 1 = 0$, $\left[-\frac{\pi}{8} : \frac{\pi}{8}\right]$
ג. $2 \tan^2 x - 18 = 0$, $[0 : \pi]$	ד. $3 \sin x \cos x + 3 \cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{3} : \frac{\pi}{3}\right]$
ה. $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$	ו. $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$, $[-\pi : \pi]$
ז. $4 \cos^2 x - \sqrt{2} \cos x - 1 = 0$, $[-\pi : 0]$	ח. $\tan^2 x - 7 \tan x + 10 = 0$, $[0 : 2\pi]$

(19) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \leq x \leq \pi$, $\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב. $0 \leq x \leq \pi$, $\tan x = 4 \sin x$

ג. $0 \leq x \leq 2\pi$, $2 \sin^2 x = 3 \cos x$

(20) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $[-\pi : \pi]$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב. $[0 : \pi]$, $\sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג. $[0 : \pi]$, $\sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד. $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan x = -\tan 2x$

(21) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \leq x \leq \pi$, $\sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $[-\pi : \pi]$, $\cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \leq x \leq \pi$, $\cos 4x + \sin^2 x = 1$

תשובות סופיות:

- (1) $x_1 = 45^\circ + 360^\circ k, x_2 = 135^\circ + 360^\circ k$.ב $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$.א
- $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k$.ד $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k, x_2 = 240^\circ + 360^\circ k$.ג
- $x_{1,2} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$.ב $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$.א (2)
- $x = 135^\circ + 180^\circ k$.ב $x = 30^\circ + 180^\circ k$.א (3)
- $x_1 = 44.427^\circ + 360^\circ k, x_2 = 135.573^\circ + 360^\circ k$.א (4)
- $x = 78.69^\circ + 180^\circ k$.ג $x_{1,2} = 126.87^\circ + 360^\circ k$.ב
- $x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 105^\circ + 180^\circ k$.ב $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k, x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$.א (5)
- $x_1 = 20.9^\circ + 180^\circ k, x_2 = 69.09^\circ + 180^\circ k$.ד $x = -9^\circ + 36^\circ k$.ג
- $x = 6.64^\circ + 45^\circ k$.א $x_{1,2} = \pm 23.5^\circ + 120^\circ k$.ה
- $x_1 = 105^\circ + 180^\circ k, x_2 = -45^\circ + 180^\circ k$.א (6)
- $x = -2.431^\circ + 180^\circ k$.ג $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k, x_2 = 40^\circ + 120^\circ k$.ב
- $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$.ב $x_1 = 180^\circ k, x_2 = 45^\circ + 90^\circ k$.א (7)
- $x = 90^\circ k$.ד $x = 60^\circ + 180^\circ k$.ג
- $x = 20^\circ + 60^\circ k$.א $x = 90^\circ k$.א $x = 20^\circ + 180^\circ k$.ה
- $x = 180^\circ + 360^\circ k$.ג $x = 90^\circ + 360^\circ k$.ב $x = 180^\circ k$.א (8)
- $x = 180^\circ + 360^\circ k$.א $x = 360^\circ k$.ה $x = 90^\circ + 180^\circ k$.ד
- $x = 45^\circ + 180^\circ k$.ה $x = 180^\circ k$.א
- $x_{1,2} = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$.א (9)
- $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = 330^\circ + 360^\circ k, x_4 = 210^\circ + 360^\circ k$.ב
- $x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 60^\circ k$.ד $x_1 = 30^\circ + 90^\circ k, x_2 = -30^\circ + 90^\circ k$.ג
- $x_1 = 90^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k, x_3 = 75^\circ + 180^\circ k$.ה
- $x_1 = 90^\circ + 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$.א
- $x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k, x_3 = -30^\circ + 360^\circ k$.א
- $x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = -41.8^\circ + 360^\circ k, x_3 = 221.8^\circ + 360^\circ k$.ה
- $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = -19.4^\circ + 360^\circ k, x_4 = 199.4^\circ + 360^\circ k$.ו
- $x_1 = -45^\circ + 180^\circ k, x_2 = 75.964^\circ + 180^\circ k$.א $x = 360^\circ k$.א

$$\begin{aligned}
& x = 360^\circ k \quad .\text{ג} & x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k \quad .\text{ב} \\
. x = 45^\circ + 90^\circ k, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad .\text{ו} & x = 180^\circ + 360^\circ k \quad .\text{ד} \\
& x = 22.5^\circ + 180^\circ k \quad .\text{ב} & x = 45^\circ + 180^\circ k \quad .\text{א} \quad \mathbf{(10)} \\
x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad .\text{ד} & x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad .\text{א} \\
x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad .\text{ג} & x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad .\text{ב} \\
. x = 180^\circ k \quad .\text{ה} & x_{1,2} = \pm 45^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 135^\circ + 360^\circ k \quad .\text{ו} \\
& x = 180^\circ + 360^\circ k \quad .\text{ב} & x_1 = 90^\circ k, x_2 = -90^\circ + 180^\circ k \quad .\text{א} \quad \mathbf{(11)} \\
. x_1 = 22.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 45^\circ + 180^\circ k \quad .\text{ד} & x = 120^\circ + 180^\circ k \quad .\text{א} \\
& x = 18.43^\circ + 180^\circ k \quad .\text{ב} & x = 63.43^\circ + 180^\circ k \quad .\text{א} \quad \mathbf{(12)} \\
x = -68.19^\circ + 180^\circ k \quad .\text{ד} & x = 60.25^\circ + 180^\circ k \quad .\text{א} \\
& & x_1 = 70.52^\circ + 180^\circ k, x_2 = -70.52^\circ + 180^\circ k \quad .\text{ב} \\
& & . x_1 = 30^\circ + 180^\circ k, x_2 = -30^\circ + 180^\circ k \quad .\text{ג} \\
& & x_1 = 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 120^\circ k \quad .\text{א} \quad \mathbf{(13)} \\
& & x_1 = 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 135^\circ + 360^\circ k \quad .\text{ב} \\
& & x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 135^\circ + 180^\circ k \quad .\text{ד} & x = 90^\circ + 180^\circ k \quad .\text{א} \\
x_1 = 21.1^\circ + 360^\circ k, x_2 = 158.9^\circ + 360^\circ k \quad .\text{ג} & x_{1,2} = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k \quad .\text{ב} \\
& & x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, x_3 = 150^\circ + 360^\circ k \quad .\text{ו} \\
. x_1 = -60 + 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 120^\circ + 360^\circ k, x_4 = 240^\circ + 360^\circ k \quad .\text{ה} \\
& & x = -80^\circ, 40^\circ, 60^\circ \quad .\text{ב} & x = 30^\circ, 150^\circ \quad .\text{א} \quad \mathbf{(14)} \\
x = 22.733^\circ \quad .\text{ה} & x = 115^\circ, 295^\circ \quad .\text{ד} & x = 39.736^\circ, -69.736^\circ \quad .\text{א} \\
& & x = 7.5^\circ, 37.5^\circ, 67.5^\circ, 97.5^\circ, 127.5^\circ, 157.5^\circ \quad .\text{ג} \\
. x = -138.19^\circ, -41.81^\circ, 90^\circ \quad .\text{ה} & x = -165^\circ, -105^\circ, 15^\circ, 75^\circ \quad .\text{ו}
\end{aligned}$$

$$\frac{7\pi}{6} \text{ .ה} \quad \frac{2\pi}{3} \text{ .ז} \quad \frac{5\pi}{12} \text{ .ח} \quad \frac{\pi}{2} \text{ .ט} \quad \frac{\pi}{6} \text{ .י} \quad (15)$$

$$-\frac{4\pi}{9} \text{ .יא} \quad -\frac{\pi}{12} \text{ .יב} \quad \frac{19\pi}{12} \text{ .יג} \quad \frac{\pi}{10} \text{ .יד} \quad \frac{7\pi}{4} \text{ .יז}$$

$$-\frac{13\pi}{6} \text{ .יח} \quad \frac{17\pi}{6} \text{ .יט}$$

$$90^\circ \text{ .ה} \quad 270^\circ \text{ .ז} \quad 720^\circ \text{ .ח} \quad 360^\circ \text{ .ט} \quad 180^\circ \text{ .י} \quad (16)$$

$$285^\circ \text{ .יא} \quad 130^\circ \text{ .יב} \quad 10^\circ \text{ .יג} \quad 30^\circ \text{ .יד} \quad 45^\circ \text{ .יז}$$

$$405^\circ \text{ .יח} \quad 210^\circ \text{ .יט}$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \text{ .ז} \quad x = \frac{\pi}{2} \text{ .ח} \quad x = \frac{5\pi}{6} \text{ .ט} \quad x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18} \text{ .י} \quad (17)$$

$$.x = 0.224\pi \text{ .ה} \quad x = 0.0875\pi \text{ .ז} \quad x = \frac{2\pi}{9} \text{ .ח} \quad x = 0 \text{ .ה}$$

$$x = 0.398\pi, 0.602\pi \text{ .ח} \quad \phi \text{ .ט} \quad x = \frac{\pi}{3} \text{ .י} \quad (18)$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \text{ .ז} \quad x = 0, 0.437\pi \text{ .ה} \quad \phi \text{ .ז}$$

$$.x = 0.352\pi, 0.437\pi, 1.352\pi, 1.437\pi \text{ .ה} \quad x = -\frac{\pi}{4}, -0.615\pi \text{ .ז}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \text{ .ח} \quad x = 0, 0.42\pi, \pi \text{ .ט} \quad x = \frac{\pi}{8} \text{ .י} \quad (19)$$

$$x = \frac{23\pi}{72}, \frac{59\pi}{72} \text{ .ז} \quad x = \frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12} \text{ .י} \quad (20)$$

$$.x = \pm \frac{\pi}{3}, 0 \text{ .ז} \quad x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{10} \text{ .ח}$$

$$x = -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \text{ .ז} \quad x = \pm \frac{\pi}{2}, -0.148\pi, 0.852\pi \text{ .י} \quad (21)$$

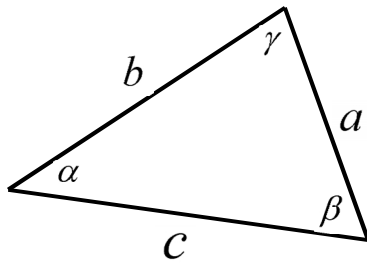
$$.x = 0, 0.38\pi, 0.61\pi, \pi \text{ .ז} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} \text{ .ח}$$

טריגונומטריה במישור:

משפט הסינוסים:

הגדרה:

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

בצורה מתמטית:

משפט הקוסינוסים:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{או} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

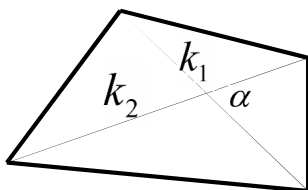
מתי נשתמש בכל משפט:

- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
 - נתונות שתי זוויות וצלע.
 - נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
 - נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
 - נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
 - נתונות שלוש צלעות.
- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנושתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

שטחים של משולשים ומרובעים:

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

שטח משולש ניתן לחישוב ע"י:

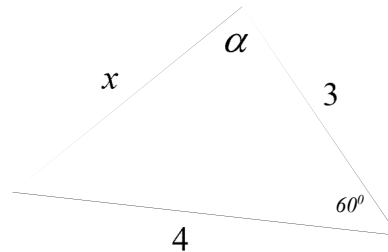
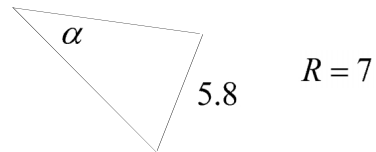
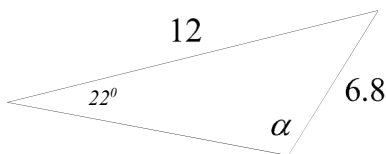
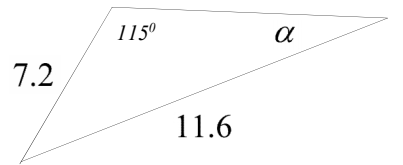
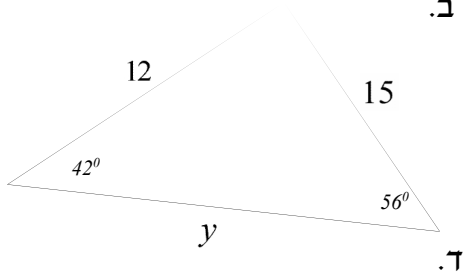


$$S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$$

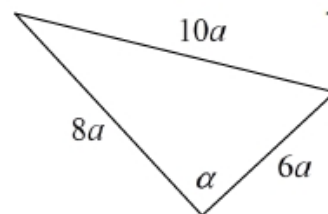
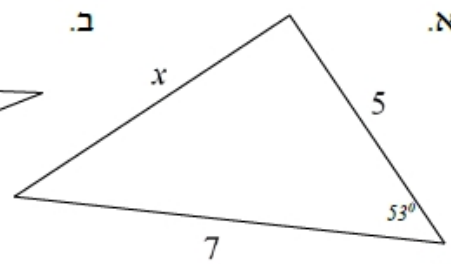
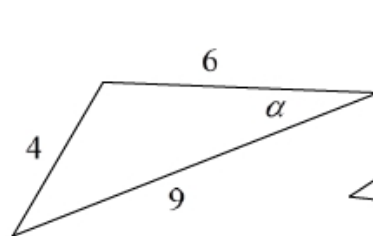
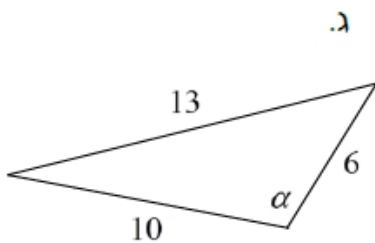
שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסונו:

שאלות:

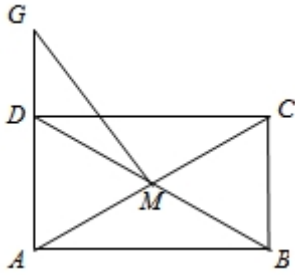
1 מצא את ערכו של $\alpha/x/y$ במשולשים הבאים (R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):



2 מצא את ערכו של α/x במשולשים הבאים:

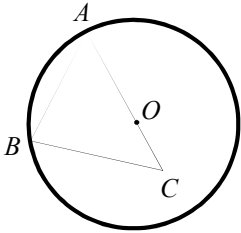


3 נתון משולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא 70° . CD הוא חוצה זווית הבסיס $\sphericalangle C$. מצא את אורכו של הקטע AD .



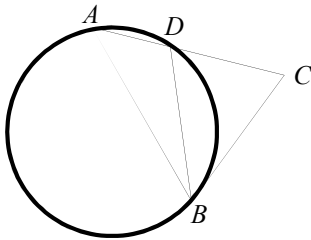
- 4) אלכסוני המלבן $ABCD$ נפגשים בנקודה M . הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD . נתון: $DG = 1.2\text{ cm}$, $AB = 4\text{ cm}$, $AD = 3\text{ cm}$. מצא את גודלו של הקטע GM .

- 5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ. חשב את זוויות המרובע.

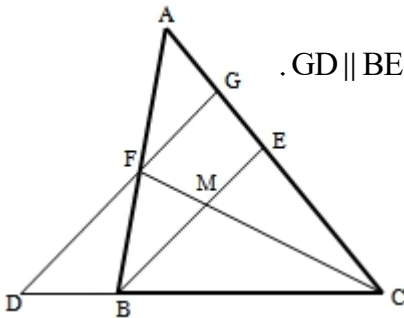


- 6) הצלע AB במשולש $\triangle ABC$ היא מיתר במעגל שמרכזו O . הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט. נתון: $\angle BAC = 38^\circ$, $OC = 3\text{ cm}$, $BC = 9\text{ cm}$. מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB .

- 7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של 30° עם צלע אחת של המקבילית וזווית של 61.05° עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה. חשב את היקף המקבילית.



- 8) המשולש $\triangle ABD$ חסום במעגל שרדיוסו R . המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B נפגשים בנקודה C . נתון: $\angle ADB = \beta$, $\angle C = \alpha$. הבע באמצעות α ו- β את אורך הקטע BC .



- 9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M . מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: $AC = DC$ ו- $GD \parallel BE$.

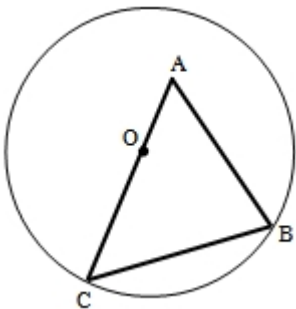
א. הוכח: $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$.

- ב. נתון כי: $ME = 4$ ס"מ. חשב את אורך הקטע DG .

ג. נתון כי: $\angle ACD = 48.189^\circ$.

הוכח כי המשולש DGC הוא שווה שוקיים.

- 10) נתון משולש ABC . הקודקודים B ו- C של המשולש ABC נמצאים



על מעגל שמרכזו O . מרכז המעגל O מונח על הצלע AC .

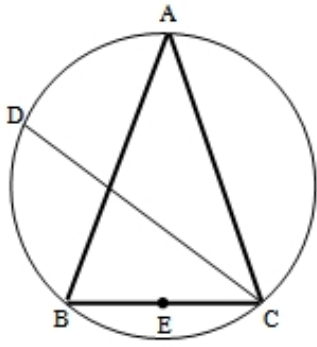
אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ.

זווית BAC היא 60° .

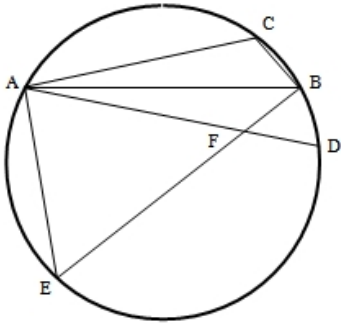
א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך

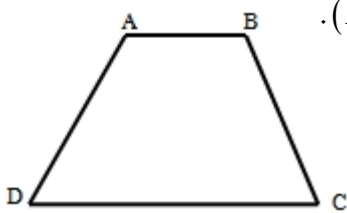
שנוצר המשולש ADB . חשב את זווית ADB .



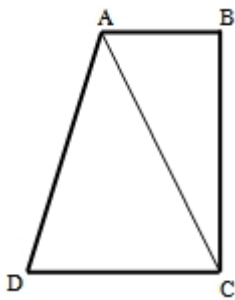
- 11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) החוסם במעגל שרדיוסו R . הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת \widehat{AB} . ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא 80° .
- א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.
- ב. הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED. הבע באמצעות R את r .



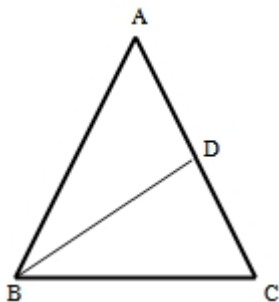
- 12) $\widehat{BC} = \widehat{BD}$ הם מיתרים במעגל המקיימים: $\widehat{BC} = \widehat{BD}$. מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את המיתרים AE ו-BE. המיתרים AD ו-BE נחתכים בנקודה F. נתון כי: $AC = AF = EF$.
- א. הוכח: $\triangle ABF \cong \triangle ABC$.
- ב. נתון גם: $\angle CAB = 3 \cdot \angle DAE$. הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.



- 13) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel CD, AD = BC$). מידות הטרפז הן: $CD = 12$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ, $AB = 6$ ס"מ.
- א. מצא את זווית C (עגל למספר שלם).
- ב. מצא את אורך אלכסון הטרפז.
- ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.



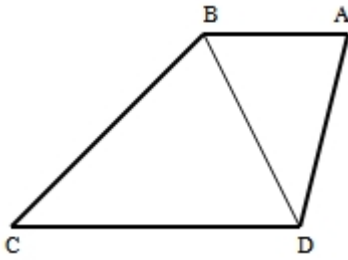
- 14) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD, \angle B = 90^\circ$). מסמנים את הבסיס: $AB = t$ וידוע כי: $DC = 1.6t, AD = 3t$. היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.
- א. הבע באמצעות t את אורך האלכסון AC.
- ב. ידוע גם כי: $\angle D = 60^\circ$.
1. חשב את אורך הקטע AC.
2. חשב את שטח הטרפז.



- 15) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) בעל זווית ראש 36° החוסם במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.
- א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.
- ב. חשב את אורך התיכון BD.
- ג. מסמנים:
- r_1 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.
- r_2 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

$$\frac{r_1}{r_2} = 2 \cos 36^\circ$$

הוכח את היחס הבא:



16) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

- מעבירים את האלכסון BD המקיים: $\angle BCD = \angle ADB$.
 נתון כי: $CD = 20$ ס"מ, $AD = 10$ ס"מ, $AB = 5$ ס"מ.
 כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.
 א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.

ב. חשב את זווית C.

ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.

חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

17) באיור שלפניך נתון המרובע ABCD. ידוע כי: $\angle D = 90^\circ$. נסמן את הצלעות

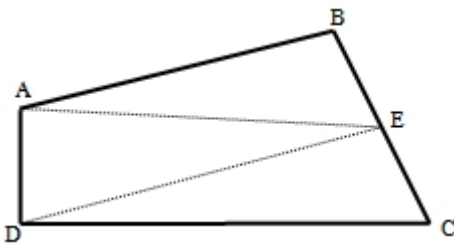
באופן הבא: $AD = 3x$, $CD = 8x$, $BC = 5x$, $AB = 6x$.

א. חשב את זווית BDC.

ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.

מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך ש-DE

מקביל ל-AB. חשב את היחס הבא: $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}}$.



18) מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA, OB, OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α .

המשולש COD הוא ישר זווית ($\angle CDO = 90^\circ$).

נתונים האורכים: $DO = 10$, $BO = 9$.

מסמנים: $BC = 1.4m$, $CD = 1.5m$.

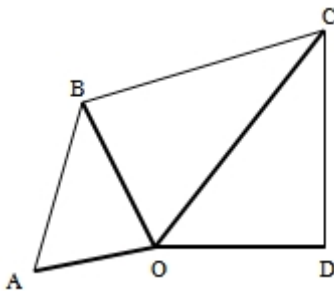
א. הבע באמצעות m את $\sin \alpha$.

(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי: $AB = m$. מצא את m אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את

המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.

ג. חשב את זווית BOC.



19) במשולש ABC הזווית A היא בת 60° .

מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\angle ADB = 60^\circ$.

ידוע כי $AB = \sqrt{28}$ וכי הצלע AD במשולש ABD גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

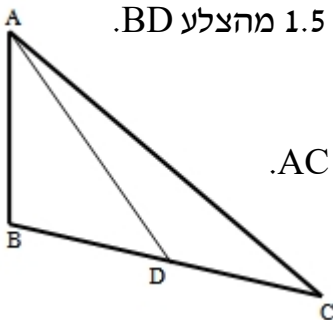
א. מצא את אורך הצלע BD.

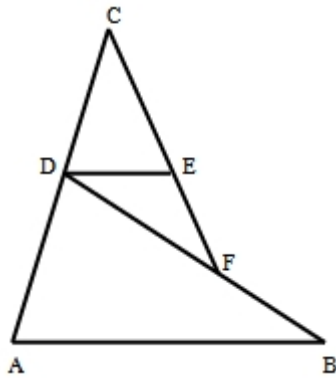
ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 5\sqrt{7} + 7$.

1. סמן: $DC = t$ והבע באמצעות t את אורך הצלע AC.

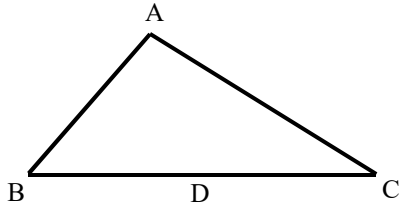
2. מצא את t.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.

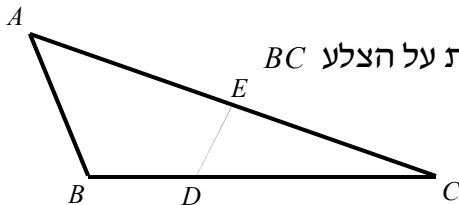




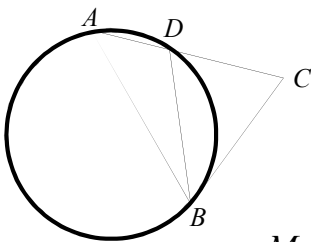
- 20) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC. הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB. הנקודות C, E ו-F נמצאות על אותו הישר. ידוע כי המשולשים ABD, DEF ו-DCE הם שווים שוקיים: $(AB = BD, DC = CE, EF = DE)$. נתון כי: $AD = 8$.
- חשב את אורך הקטע BF.
 - מחברים את הנקודות B ו-C. חשב את אורך הצלע BC.



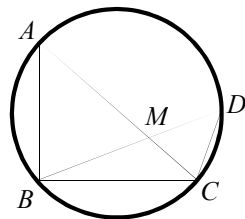
- 21) בשרטוט נתון: $AD = 5_{cm}$, $AC = 8_{cm}$, $AB = 6_{cm}$. הנקודה D היא אמצע הצלע BC. חשב את אורך הקטע BC.



- 22) הצלע AC במשולש $\triangle ABC$ גדולה פי 4 מהצלע AB. הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$. נתון: $BC = b$, $AB = a$. הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.

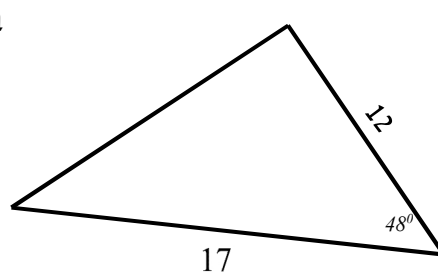
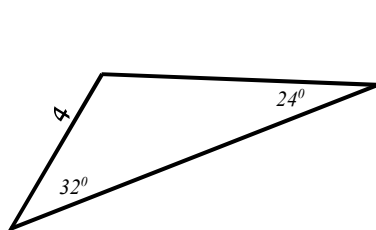


- 23) המשולש $\triangle ABD$ חסום במעגל שרדיוסו R. המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B נפגשים בנקודה C. נתון: $\angle ADB = \beta$, $\angle C = \alpha$. הבע באמצעות R, α ו- β את אורך הקטע BC.



- 24) AC ו- BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M. זווית $\angle B$ היא זווית ישרה. נתון: $DC = q$, $DM = p$, $AB = k$. הבע באמצעות R, k, p ו-q את אורך הקטע MC.

- 25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

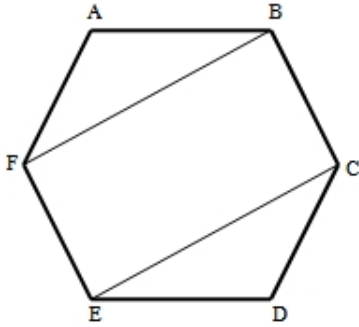


26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של 15° עם הבסיסים.

27) אורכו של מלבן הוא m ורוחבו n . הזווית שבין אלכסוני המלבן היא θ .

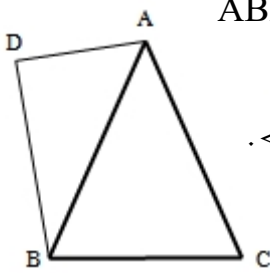
$$\sin \theta = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad \text{הוכח כי מתקיים:}$$

28) במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$) חוצה את הזווית $\sphericalangle B$. נתון: $\sphericalangle A = \alpha$, $AB = m$. הבע באמצעות α ו- m את שטח המשולש $\triangle ABC$.



29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא S .
 א. הבע באמצעות S את אורך צלע המשושה.
 ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן BFEC.
 ג. הבע באמצעות S את שטח המלבן.

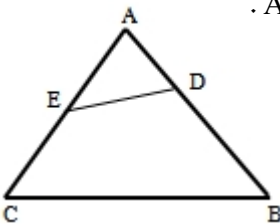
30) המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש α , ($AB = AC$).



אורך הבסיס BC הוא k . על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו $\sphericalangle D = 90^\circ$.

א. הבע באמצעות k ו- α את אורך שוק המשולש ABC.
 ב. הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$ וכי: $\sphericalangle ABD = 40^\circ$.
 מצא את זוויות המשולש ABC.
 ג. חשב את שטח המרובע ABCD אם ידוע כי $k = 6$.

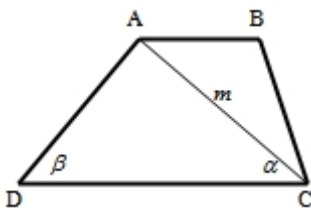
31) במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.



הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D מקיימת: $AD = 3$.
 ידוע כי: $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$.

א. מצא את אורך הקטע DE.
 ב. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
 ג. חשב את שטח המרובע BCED.

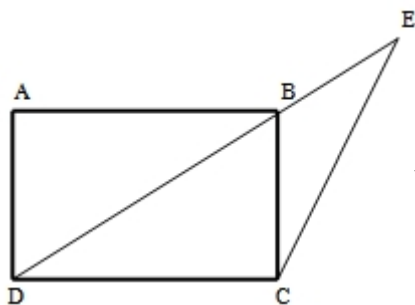
32) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).



הקטע AC הוא אלכסון בטרפז. מסמנים: $AC = m$, $\sphericalangle ACD = \alpha$, $\sphericalangle ADC = \beta$.

א. הבע באמצעות α, β ו- m את אורך הבסיס הגדול DC.
 ב. נתון כי האלכסון AC מקיים: $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$. הבע באמצעות α, β ו- m את הבסיס AB.
 ג. חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$ ו- $m = 8$.

33) המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.



וממשיכים את הנקודה E עם הקודקוד C.

ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ

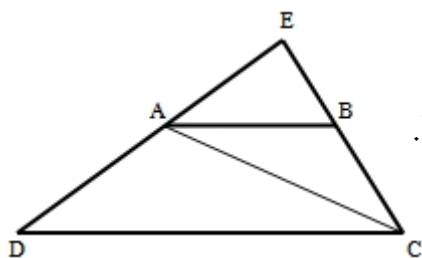
וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא 115° .

א. מצא את אורך הקטע CE.

ב. מצא את אורך האלכסון BD.

ג. חשב את שטח המשולש DCE.

34) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).



ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם בנקודה E.

ידוע כי: $DE \perp CE$.

מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C.

מסמנים את הבסיס הגדול DC ב-k ואת: $\angle ACD = \alpha$.

א. הבע באמצעות k ו- α את הבסיס הקטן של הטרפז AB.

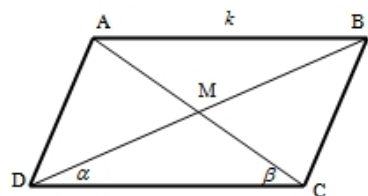
ב. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.

ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר: $\alpha = 15^\circ$, $k = 12$ ס"מ.

35) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים

בנקודה M כמתואר באיור.

מסמנים: $AB = k$, $\angle BDC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$.



א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

ב. 1. הבע באמצעות α , β ו-k את שטח המשולש DMC.

2. הבע באמצעות α , β ו-k את שטח המקבילית ABCD.

ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD} = 2$. הראה כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2 \sin^2 \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

36) המרובע ABCD הוא מעוין ובו $\angle D = 60^\circ$. מעבירים את

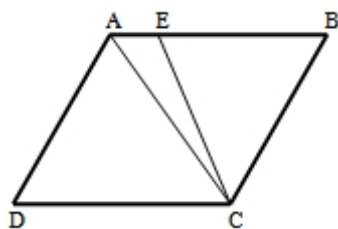
האלכסון AC ואת הקטע CE כך שהנקודה E נמצאת על

הצלע AB ומחלקת אותה ביחס: $\frac{BE}{AE} = 4$.

א. חשב את זווית AEC.

ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר.

חשב את שטח המעוין.



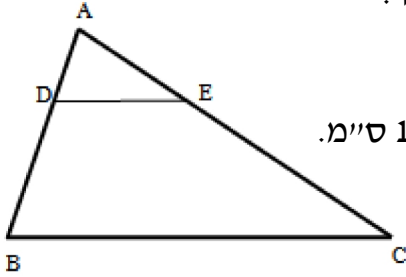
37) הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.

נתון כי: $BD = \sqrt{129}$, $BC = 15$, $CE = 13$.

ידוע כי זווית AED היא 60° .

א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע כי הוא קטן מ-10 ס"מ.

ב. חשב את שטח המשולש ADE.



38) המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.

הנקודה D היא אמצע הקשת \widehat{BC} וממנה מעבירים את

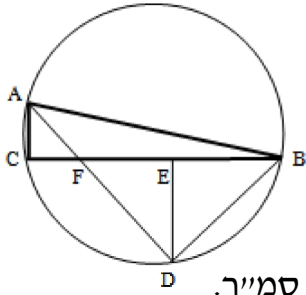
המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC.

מסמנים: $DE = k$ ונתון כי: $\angle ABC = 10^\circ$.

א. הבע באמצעות k את רדיוס המעגל.

ב. הבע באמצעות k את שטח המשולש ABF.

ג. מצא את k אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.



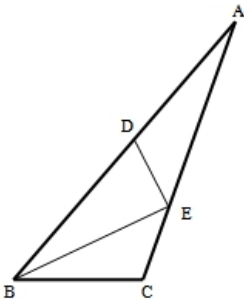
39) במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.

הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת: $DE = CE$.

ידוע כי: $BC = 6$, $BE = 8$, $BD = 9$.

א. מצא את זווית B.

ב. חשב את שטח המשולש ADE.



40) נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.

א. חשב את זווית המעוין.

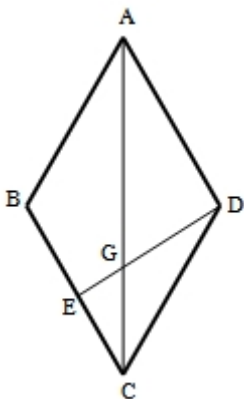
מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא m .

הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.

הזווית EDC תסומן ב- α .

ב. הבע באמצעות m ו- α את אורך הקטע CE.

ג. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש EGC.



41) המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.

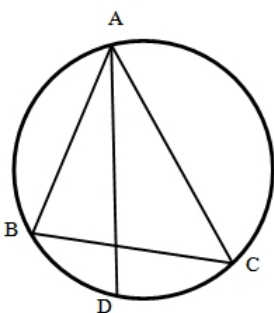
מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.

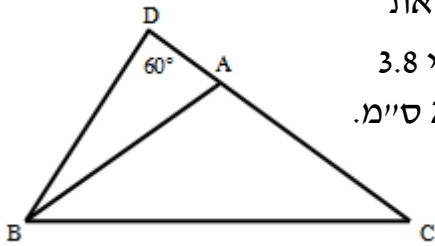
ידוע כי: $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle BAC = 40^\circ$. מסמנים: $AD = k$.

א. הבע באמצעות k את אורך המיתר BD.

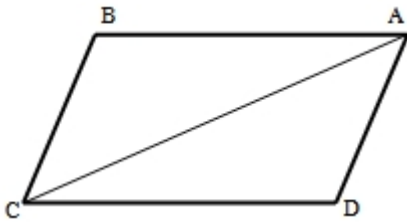
ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.

מצא את k (עגל למספר שלם).

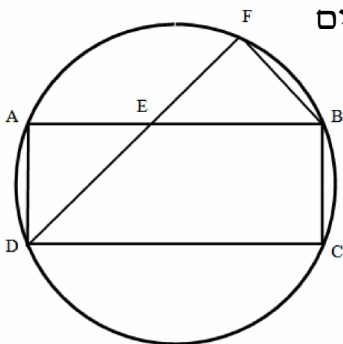




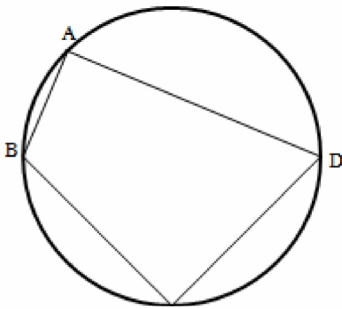
- (42)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD. ידוע כי: $\angle D = 60^\circ$. אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.
- מצא את אורך הקטע AD.
 - חשב את שטח המשולש ABC.



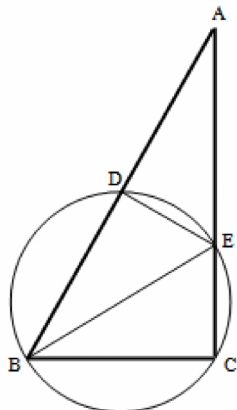
- (43)** במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא $\sqrt{79}$ ס"מ. היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי: $\angle B = 120^\circ$.
- מצא את אורכי צלעות המקבילית.
 - חשב את שטח המקבילית.
 - מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



- (44)** המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל. מהקדקוד D מעבירים את המיתר DF החותך את הצלע AB בנקודה E. ידוע כי: $\widehat{AF} = \widehat{CF}$. הצלע AD של המלבן תסומן ב-a.
- הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.
 - נתון גם כי: $BC = BF$.
- הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.
 - חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות: \widehat{AB} ; \widehat{BC} (אין צורך לסרטט אותן).



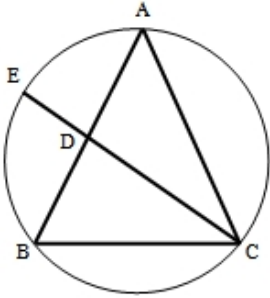
- (45)** המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור. ידוע כי: $AB = b$, $BC = a$, $CD = a$, $AD = 3b$.
- הבע באמצעות a ו-b את $\cos \angle BCD$.
 - הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים: $a = b\sqrt{5}$.
 - נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ. הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.



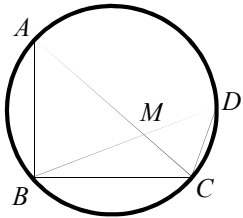
- (46)** המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$) ובו: $\angle B = 2\alpha$. מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקדקודים B ו-C אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E. המיתר BE חוצה את זווית B.
- הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש ABE.
 - ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ. חשב את שטח המשולש ABE.

47) במשולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא β , חוצה את זווית B ו- CD הוא הגובה לשוק AB .

הוכח כי שטח המשולש $\triangle ADE$ הוא:
$$S_{\triangle ADE} = \frac{k^2 \sin \frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4 \sin \frac{3\beta}{2}}$$

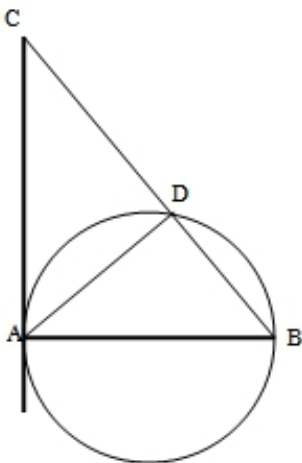


48) נתון משולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) החסום במעגל. מהקדקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D . ידוע כי E היא אמצע הקשת \widehat{AB} והיחס בין הקטעים BD ו- CD הוא 7:4. מסמנים: $\angle ACD = \alpha$.
 א. מצא את זוויות המשולש $\triangle ABC$ (עגל למספרים שלמים).
 ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.

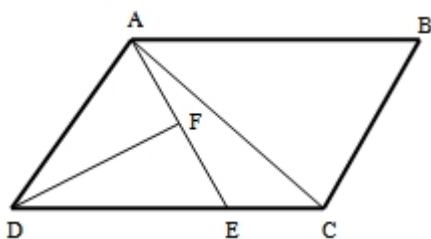


49) BD ו- AC הם מיתרים במעגל שרדיוסו R , שנפגשים בנקודה M . זווית $\angle B$ היא זווית ישרה.
 נתון: $\angle MCB = \beta$, $\angle MBC = \alpha$.
 א. הבע באמצעות R , α ו- β את שטח המשולש $\triangle BDC$.
 ב. נתון: $\beta = 2\alpha$, $S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} R^2$. חשב את α .

50) בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא b והזווית שליד הבסיס הגדול היא γ נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.
 א. הבע באמצעות γ ו- b את אורכי בסיסי הטרפז.
 ב. חשב את γ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.

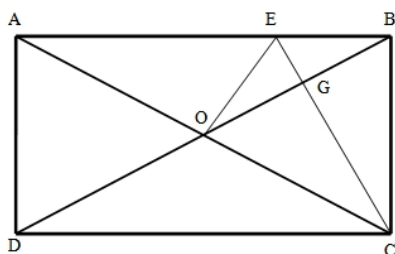


51) המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ו- AD הוא מיתר. ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A . המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C . מסמנים: $\angle BAD = \alpha$.
 א. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש $\triangle ABD$.
 ב. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש $\triangle ACD$.
 ג. מצא את α אם ידוע כי שטח המשולש $\triangle ABD$ קטן פי 4 משטח המשולש $\triangle ACD$.

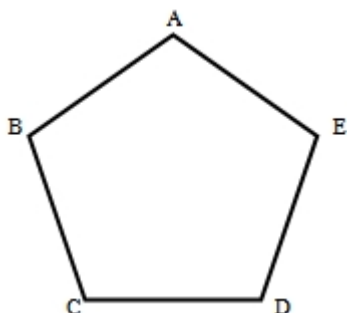


- 52) המרובע ABCD הוא מקבילית. הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים המקיימים: $3CE = DE$. מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE. ידוע כי: $\angle ADF = \angle CDF = \alpha$. מסמנים: $CE = k$.
- הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE.
 - מעבירים את האלכסון AC. הבע באמצעות k ו- α את היקף המשולש ACE.
 - היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצא את α .

*הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:



- 53) המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסונים AC ו-BD. הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן ומחלקת אותה כך ש- $2BE = AE$. ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC ושווה ל-BE. הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.
- הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.
 - הוכח כי מתקיים: $4GE = AE$.
 - נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר. חשב את שטח המלבן ABCD.



- 54) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE (כל זוויותיו הן 108°) בעל אורך צלע a .
- הבע באמצעות a את אלכסון המחומש AD.
 - הבע באמצעות a את רדיוס המעגל החוסם את המחומש.
 - הבע באמצעות a את שטח המחומש.
 - אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ. חשב את שטח המחומש.

- 55) במשולש ABC הזווית C היא: 60° . מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים המשולשים ACD ו-ABD.

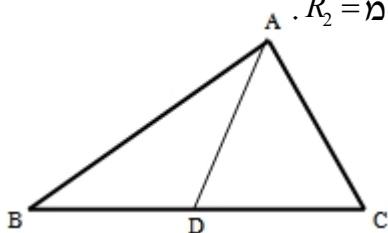
ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא: $R_1 = \sqrt{3}$ ס"מ.

כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא: $R_2 = 3$ ס"מ.

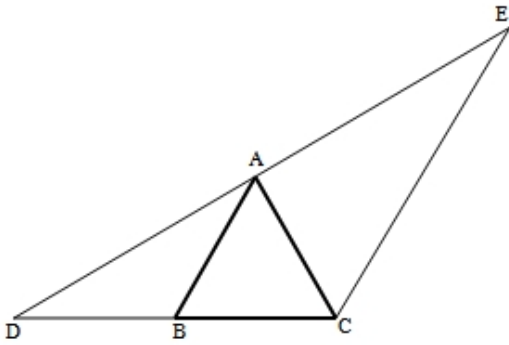
א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

ב. היקף המשולש ABC הוא: $12 + 4\sqrt{3}$ ס"מ. $P =$

חשב את שטח המשולש.



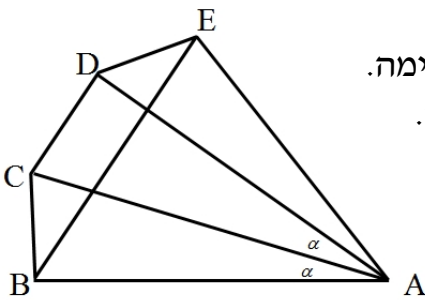
56) המשולש ABC הוא שווה צלעות. הקטע DE עובר דרך הקדקוד A כך שנוצרים



שני משולשים ABD ו-ACE ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.

- א. הוכח: $AB \parallel CE$.
 - ב. הוכח: $BC \cdot DE = DC \cdot AE$.
 - ג. נתון: 8 ס"מ $DC =$ וכי $AC \perp DE$.
1. חשב את שטח המשולש DCE.
 2. חשב את שטח המשולש ABD.

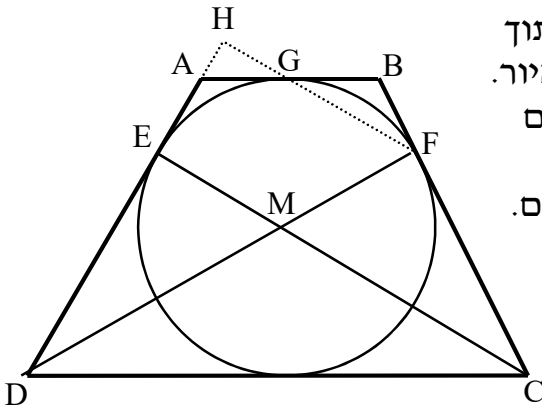
57) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB, AC, AD, AE כך שמתקיים: $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$ ו- $AB = AE$.



מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE. מתקיים: $BE \parallel CD$. ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.

- א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.
 - ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש ($AC = AD$).
 - ג. ידוע כי: $\angle ADC = 3\alpha + 2.5$ ו- $\angle ADE = 3\alpha - 10$.
 - ד. נסמן: $AB = m$.
1. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.
 2. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.
 3. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).

58) הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F, G ו- H כמתואר באיור.



הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M.

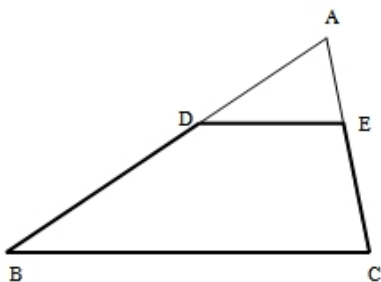
- א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.
- ב. חשב את זוויות הטרפז.
- ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם

נפגשים בנקודה H. חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$.

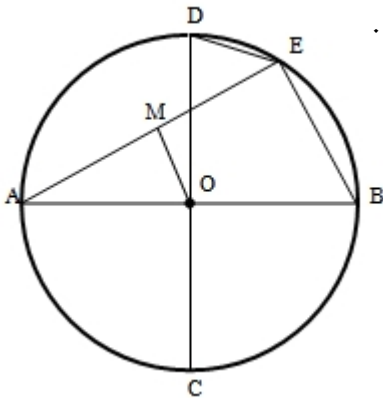
59) המרובע BDEC הוא טרפז ($BC \parallel DE$).

המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = BC$).

נתון: 18 ס"מ $AB =$, $\angle ADE = 30^\circ$.



- א. סמן את אורך הבסיס DE ב- x ואת שטח הטרפז BDEC ב- S . הבע את S באמצעות x .
- ב. על הקטע AD בונים ריבוע. ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC. חשב את היחס: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$.



60) במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו-CD המאונכים זה לזה.

E היא נקודה על היקף המעגל המקיימת: $BE + DE = 15$ ס"מ.
מעבירים את המיתר AE. הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.

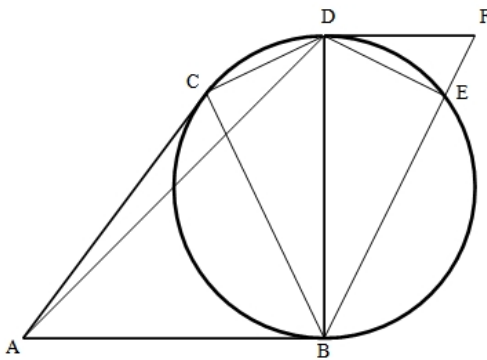
א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.

ב. מצא את אורך המיתר BE.

ג. מצא את רדיוס המעגל.

ד. חשב את זווית B.

- 61) דרך הנקודה A מעבירים שני משיקים למעגל AB ו-AC. הנקודות D ו-E נמצאות על היקף המעגל ומהן מעבירים את המיתרים DC ו-DE. ממשיכים את המיתר BE עד לנקודה F שמחוץ למעגל כך ש-DF מאונך למיתר BD ושווה באורכו לרדיוס המעגל. נתון כי: $\angle BFD = \angle BDC$.



א. הוכח כי: $\angle BFD = \angle ABC$.

ב. הוכח כי המרובע ADFB הוא טרפז.

אורך המשיק AC הוא 8 ס"מ ואורך

המיתר CD הוא 6 ס"מ.

ג. חשב את שטח הטרפז.

ד. חשב את זוויות הטרפז.

62) BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD. הנקודות E ו-F הן בהתאמה

אמצעי הצלעות AD ו-AB במרובע. מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש: $BE \parallel CD$. נתון כי הזוויות $\angle A$ ו- $\angle BFE$ משלימות ל- 180° .

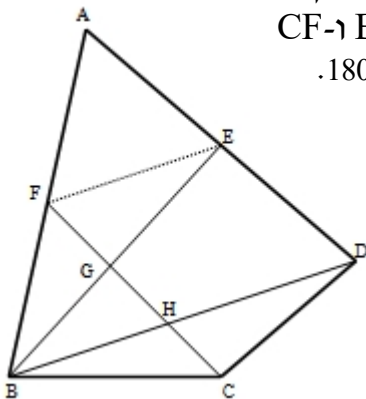
א. הוכח: $\triangle ABCD \sim \triangle BFE$.

נתון כי: $BE = 7.5$ וכי: $GE \cdot HD = 17 \frac{1}{15}$.

ב. חשב את אורך הקטע FE.

ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED

הוא: $R = 4.001$ ס"מ. מצא את זווית $\angle EBD$.



תשובות סופיות:

- א. $\alpha = 138.618^\circ$ או $\alpha = 41.382^\circ$ ג. $\alpha = 34.231^\circ$ ב. $x = 18.585_{cm}$, $y = 22.199_{cm}$ (1)
- ד. $\alpha = 73.898^\circ$, $x = 3.606_{cm}$ ה. $\alpha = 24.474^\circ$ או $\alpha = 155.526^\circ$
- א. $AD = 13.064_{cm}$ (3) $\alpha = 90^\circ$ ד. $\alpha = 105.962^\circ$ ג. $\alpha = 20.742^\circ$ ב. $x = 5.646_{cm}$ (2)
- (4) $GM = 3.360_{cm}$ (5) 66.444° , 113.556° , 41.810° , 138.190°
- (6) $R = 5.395_{cm}$, $AC = 10.790_{cm}$ (8) $P = 22_{cm}$ (7) $R = 9.242_{cm}$, $AB = 14.56_{cm}$
- (9) ב. $DG = 18$ א. 10.5 ס"מ $R =$ ב. 24.32°
- (11) א. $CD = R\sqrt{3}$ ב. $DE = 1.48R$ ג. $r = 1.15R$ (13) א. 68° ב. 11.66 ס"מ ג. 6.29 ס"מ $R =$
- (14) א. $AC = \sqrt{32.36t^2 - 448t + 1600}$ ב. 1 ס"מ 13 ס"מ 2 ס"מ 78 ס"מ
- (15) א. 9.4 ס"מ ב. 10.1 ס"מ (16) ב. $C = 28.9^\circ$ ג. $R = 13.77$
- (17) א. 37.72° ב. $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}} = 0.934$ (18) א. $\sin \alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$ ב. $m = 16$ ג. 56.89°
- (19) א. 4 ב. 1 ג. $1.5\sqrt{28} + 3 - t$ (20) א. 4.94 ס"מ ב. 17.19 ס"מ
- (21) א. $BC = 10_{cm}$ (22) $DE = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$ (23) $BC = \frac{2R \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$
- (24) א. $MC = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}}$ (25) א. $S = 75.801_{cm^2}$ ב. $S = 8.641_{cm^2}$ (26) $S = 16_{cm^2}$
- (28) א. $S_{ABCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45^\circ \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}$ (29) א. $\sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}} \approx 0.62S$ ב. $\frac{2}{3}S$
- (30) א. $\frac{k}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ ב. 67.78° , 67.78° , 44.4° ג. $S = 37.18$
- (31) א. $DE = \sqrt{1.6} = 1.26$ ב. $R = 2$ ג. $S = 21.48$
- (32) א. $DC = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$ ב. $AB = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{3 \sin \beta}$ ג. $S_{ABCD} = 31.2$
- (33) א. 12.75 ס"מ ב. 14.19 ס"מ ג. 63.05 ס"מ
- (34) א. $\frac{k \tan \alpha}{\tan 2\alpha}$ ב. $\frac{k^2 \tan^2 \alpha \sin 2\alpha}{2 \tan^2 2\alpha}$ ג. 7.754 ס"מ $S =$
- (35) א. 1 ב. 2 ג. 109.1° ב. $S = 86.6$ (36) א. $\frac{k^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$ ב. $\frac{2k^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$
- (37) א. 7 ס"מ ב. 34.48 ס"מ
- (38) א. $R = \frac{k}{2 \sin^2 40} = 1.21k$ ב. $S = \frac{k^2 \sin 10}{2 \sin 50 \sin^3 40} = 0.426k^2$ ג. $k = 6$
- (39) א. 40.72° ב. $S = 12.52$
- (40) א. 128.32° ; 51.68° ב. $1.27m \sin \alpha$ ג. $\frac{0.35m^2 \sin^2 \alpha \sin(128.32 - \alpha)}{\sin(25.84 + \alpha)}$

$$.S = 172.77 \text{ ב. } 5 \text{ ס"מ } \text{א. (42 } k = 7 \text{ ב. } BD = \frac{k \sin 20}{\sin 100} \text{ .א (41}$$

$$.R = \sqrt{\frac{37}{3}} \approx \text{ג. } S = 18.18 \text{ סמ"ר} \text{ב. } AB = 7 \text{ ס"מ} \text{ ו- } BC = 3 \text{ ס"מ} \text{א. (43}$$

$$.45^\circ, 135^\circ \text{ .2 } R = a\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.3a \text{ .1 ב. (44}$$

$$.S = 36 \text{ ב. } S = R^2 \tan 2\alpha \text{ .א (46 } S = 14.4 \text{ ג. } \cos \angle BCD = \frac{a^2 - 5b^2}{a^2 + 3b^2} \text{ .א (45}$$

$$.BE = 7.75 \text{ ב. } 58^\circ, 58^\circ, 64^\circ \text{ .א (48}$$

$$.\alpha = 22.5^\circ \text{ ב. } S = 2R^2 \sin \alpha \cos \beta \sin(90^\circ - \alpha + \beta) \text{ .א (49}$$

$$.\gamma = 75^\circ \text{ ב. } \frac{b \sin(135^\circ - \gamma)}{\sin 45^\circ}, \frac{b \sin(\gamma - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} \text{ .א (50}$$

$$.\alpha = 26.56^\circ \text{ ג. } S = \frac{2R^2 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha} \text{ ב. } S = R^2 \sin 2\alpha \text{ .א (51}$$

$$\alpha = 14.47^\circ \text{ ג. } P_{ACE} = k + 6k \sin \alpha + k\sqrt{25 - 24 \cos 2\alpha} \text{ ב. } AE = 6k \sin \alpha \text{ .א (52}$$

$$.S = 8\sqrt{3} \text{ ב. (55 } .S = 85.57 \text{ ד. } 1.72a^2 \text{ ג. } 0.85a \text{ ב. } 1.618a \text{ .א (54 } 120 \text{ סמ"ר} \text{ .ג (53}$$

$$.S_{ABD} = 4\sqrt{3} \text{ .2 } S_{CDE} = 16\sqrt{3} \text{ .1 ג. (56}$$

$$.BC = 0.4663m, DE = 0.4663m, CD = 0.4776m, BE = 1.2175m \text{ .1 ד. (57}$$

$$\frac{2}{3} \text{ ג. } 60^\circ, 120^\circ \text{ ב. (58 } m = 8 \text{ ס"מ} \text{ .3 } 0.7232m^2 \text{ .2}$$

$$.\angle B = 67.38^\circ \text{ ד. } R = 13 \text{ ג. } BE = 10 \text{ ב. (60 } \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{16}{81} \text{ ב. } S = 81 - 0.25x^2 \text{ .א (59}$$

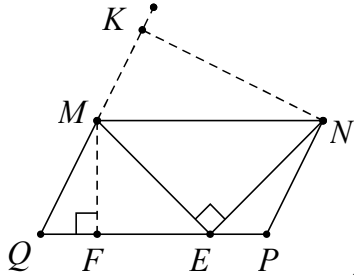
$$.16.73^\circ \text{ ג. } FE = 4 \text{ ב. (62 } 26.56^\circ, 116.56^\circ, 59.19^\circ, 120.8^\circ \text{ ד. (61}$$

שאלות שונות:

(1) במשולש $\triangle ABC$ חסום מעגל שרדיוסו R . נתון כי $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

א. חשב את רדיוס המעגל החוסם במשולש בעזרת α , β , R .

ב. נתון כי: $\alpha = \beta = 30^\circ$. חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R .



(2) במקבילית $MNPQ$ נקודה E נמצאת על הצלע PQ

כך ש- $\angle MEN = 90^\circ$ (ראה ציור).

נתון: 12 ס"מ $MQ =$, $\angle MNE = 40^\circ$, $\angle MQP = 70^\circ$.

מצא את הגובה MF , ואת הגובה NK .

(3) במשולש ישר-זווית $\triangle MNP$ ($\angle P = 90^\circ$) הוא גובה ליתר

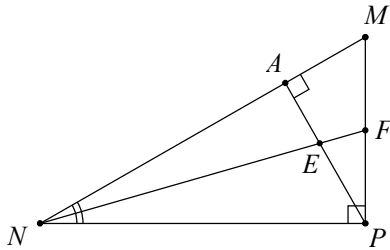
ו- NF חוצה את הזווית $\angle MNP$.

PA ו- NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

נתון: 24 ס"מ $NP =$, $\angle MNP = 40^\circ$.

א. מצא את אורך הקטע NA .

ב. מצא את אורך הקטע EF .



(4) אלכסוני המלבן $MNPQ$ נחתכים בנקודה O .

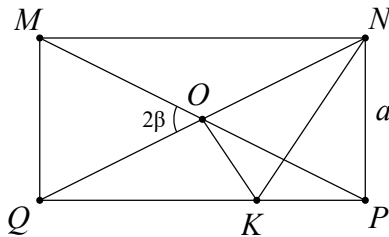
מנקודה O מעלים אנך ל- QN החותך את QP

בנקודה K (ראה ציור).

נתון: $NP = a$, $\angle MOQ = 2\beta$.

א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות β ו- a .

ב. הבע את היקף המשולש $\triangle NOK$ באמצעות β ו- a .



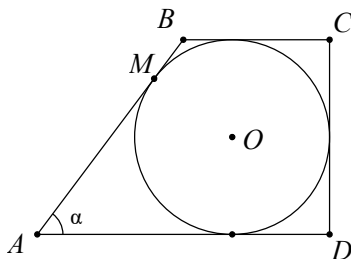
(5) בטרפז ישר-זווית $ABCD$ חסום מעגל שמרכזו O .

הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם

השוק AB . נתון: 12 ס"מ $AM =$, $\angle BAD = \alpha$.

א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת α .

ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת α .



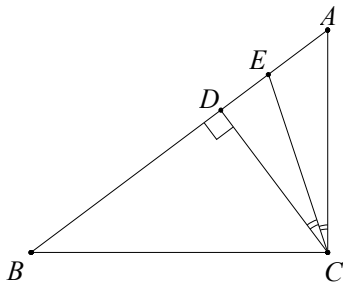
(6) במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$ (ראה ציור) נתון:

8 ס"מ $BC =$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = \beta$.

CD הוא הגובה ליתר.

CE הוא חוצה-הזווית $\angle ACD$.

הבע את אורך הקטע AE באמצעות β .



7) נתון מעגל שרדיוסו R . מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה. מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חסום בתוך מעגל זה. חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

8) $\triangle ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$) שאורך בסיסו 12 ס"מ.

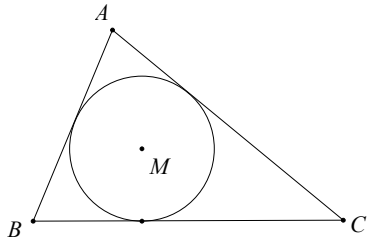
AD הוא הגובה לבסיס BC , ו- CE הוא הגובה לשוק AB .

שני הגבהים נחתכים בנקודה O . נתון: $\angle ABC = \alpha$ ($\alpha > 45^\circ$).

א. הבע את היחס $AO : DO$ באמצעות α .

ב. הראה כי בעבור $\alpha = 60^\circ$ הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות

הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.



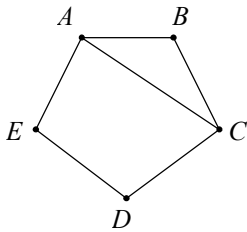
9) במשולש $\triangle ABC$ חסום מעגל שמרכזו

M ורדיוסו r (ראה ציור).

נתון: $\angle B = 62^\circ$, $\angle C = 46^\circ$.

א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC .

ב. נתון: $BC = 16$ ס"מ. מצא את r .



10) במחומש משוכלל $ABCDE$ (ראה ציור)

אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.

חשב את שטח המחומש.

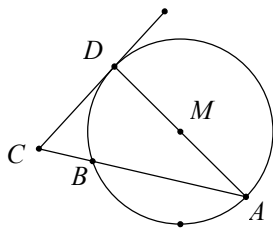
11) מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R

מעבירים משיק CD וחותר CBA למעגל (ראה ציור).

נתון: $CD = \frac{3}{5}R$.

א. מצא את זוויות המשולש $\triangle CAD$.

ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש $\triangle BCD$.



12) מנקודה A , הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O ,

יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו- AC (ראה ציור).

נתון: $\angle BAC = 2\alpha$, $AO = 10$ ס"מ.

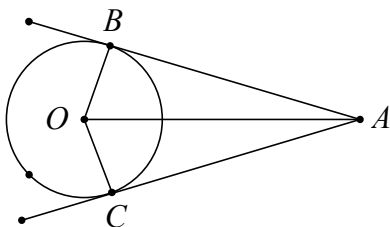
א. הבע באמצעות α את S_1 ,

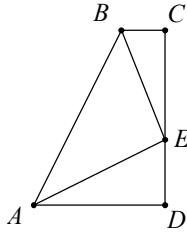
שטח המרובע $ABOC$.

ב. הבע באמצעות α את S_2 ,

שטח המשולש $\triangle BOC$.

ג. הראה שאם $\alpha = 30^\circ$, אזי: $S_1 = 4 \cdot S_2$.

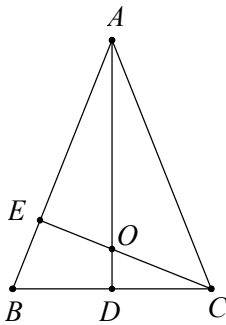




- 13** $ABCD$ הוא טרפז ישר-זווית ($\angle C = \angle D = 90^\circ$).
 נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).
 נתון: $\angle AEB = 90^\circ$, $AE = BE = k$, ו- $\angle CBE = \beta$.
 הבע באמצעות k ו- β את שטח הטרפז.

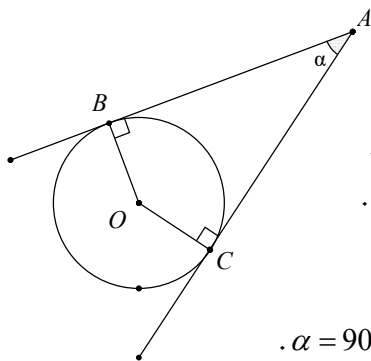
- 14** א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל.
 מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.
 ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'.
 מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.

- 15** $\triangle ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$) שבו זווית הראש היא זווית חדה.



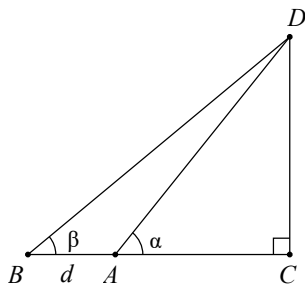
- נתון כי זווית הבסיס היא β ואורך הבסיס BC הוא $2a$.
 AD הוא הגובה לבסיס BC ו- CE הוא הגובה לשוק AB .
 הגבהים AD ו- CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).
 א. הבע באמצעות a ו- β את אורכי הקטעים CO ו- CE .
 ב. הבע באמצעות β את היחס $\frac{CO}{CE}$.
 ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר $\beta = 60^\circ$,
 והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.

- 16** מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O , שאורכם m

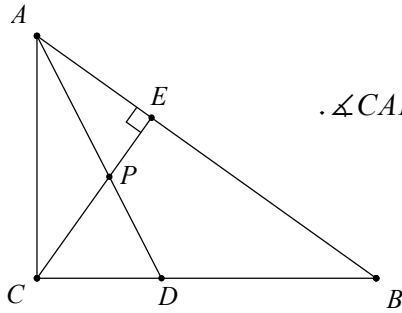


- (כלומר: $AB = AC = m$). נקודות ההשקה הן B ו- C , והזווית שבין המשיקים היא $\angle BAC = \alpha$.
 (ראה ציור).

- א. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש $\triangle ABC$.
 ב. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש $\triangle BOC$.
 ג. הבע באמצעות α את היחס שבין שטחו של המשולש $\triangle BOC$ לבין שטחו של המשולש $\triangle ABC$.
 ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו $\alpha = 90^\circ$.



- 17** במשולש ישר-זווית $\triangle DAC$ נתון $\angle DAC = \alpha$.
 מאריכים את הניצב AC כך ש- $AB = d$.
 נתון כי: $\angle DBA = \beta$ (ראה ציור).
 סמן: $AC = x$.
 הבע את x באמצעות d , α ו- β .



18) נתון משולש ישר-זווית $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$).

CE הוא הגובה ליתר. AD הוא חוצה-הזווית $\angle CAB$.

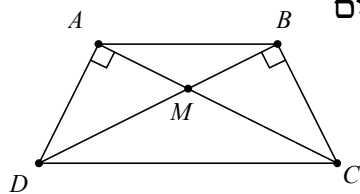
CE ו- AD נחתכים בנקודה P (ראה ציור).

נתון: $\angle CAB = \alpha$, $AC = m$.

הבע באמצעות m ו- α את:

א. אורך הקטע AE .

ב. אורך הקטע PD .



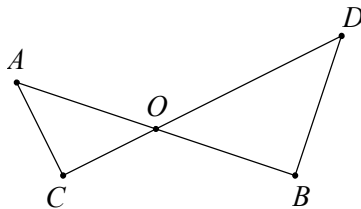
19) בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AD = BC$) האלכסונים

נפגשים בנקודה M (ראה ציור).

נתון: $\angle DAC = \angle DBC = 90^\circ$,

$\angle ADC = \angle BCD = 65^\circ$, $DC = 11$ ס"מ.

חשב את שטח המשולש $\triangle AMD$.



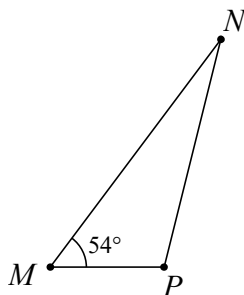
20) הקטעים AB ו- CD נחתכים בנקודה O .

נתון כי: $\angle OAC = 60^\circ$, $CO = 9$ ס"מ,

$AC = 6$ ס"מ, $OD = 14$ ס"מ,

$OB = 10$ ס"מ.

חשב את $\angle ODB$.



21) במשולש $\triangle MNP$ גודל הזווית M הוא 54° .

נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ (ראה ציור),

והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP .

א. חשב את אורך הצלע NP .

ב. PA הוא תיכון לצלע MN .

חשב את שטח המשולש $\triangle PAN$.

22) המשולש שווה-שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) חסום במעגל (ראה ציור).

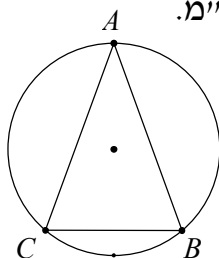
נתון: $\angle ABC = \beta$. כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.

א. הבע בעזרת β את שטח

המשולש $\triangle ABC$.

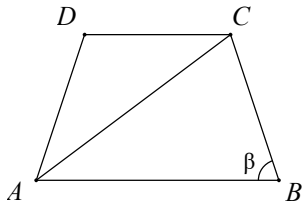
ב. חשב את שטח המשולש $\triangle ABC$

בעבור $\beta = 45^\circ$.

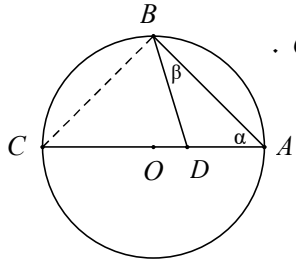


23) במשולש $\triangle ABC$ הזווית $\angle C$ היא בת 60° , אורך הצלע AB הוא $\sqrt{13}$ ס"מ,

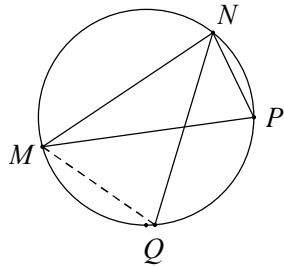
והיקף המשולש הוא $7 + \sqrt{13}$ ס"מ. חשב את שטח המשולש.



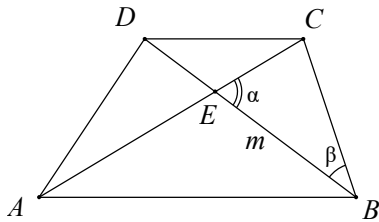
24) בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AD = BC$) אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך הלאכסון. זווית הבסיס היא β ($\beta > 60^\circ$), ראה ציור. הבע באמצעות β את היחס שבין שטח המשולש $\triangle ACD$ לשטח המשולש $\triangle ABC$.



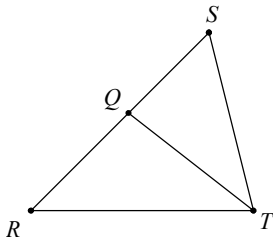
25) הקדקודים A ו- B של המשולש $\triangle ABD$ נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O . הקדקוד D של המשולש $\triangle ABD$ נמצא על הרדיוס OA . א. הבע בעזרת α ו- β את שטח המשולש $\triangle ABD$. ב. חשב את היחס שבין שטח המשולש $\triangle ABC$ לשטח המשולש $\triangle ABD$.



26) משולש $\triangle MNP$ חסום במעגל. המיתר NQ חוצה את הזווית $\angle MNP$. נתון: $\angle MNP = 80^\circ$, $\angle MPN = 70^\circ$ ו- $NP = 12$ ס"מ. חשב את אורך המיתר MQ .



27) נתון טרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$). הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז. נתון: $DC = BC$, $BE = m$, $\angle CEB = \alpha$, $\angle CBD = \beta$. הבע את אורכי בסיס הטרפז: AB ו- CD באמצעות m , α ו- β .

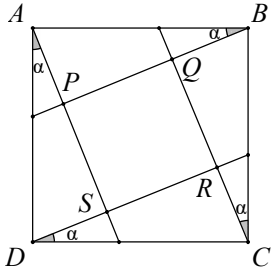


28) במשולש $\triangle RST$ נתון: QT הוא חוצה-הזווית $\angle RTS$, $\angle TRQ = 45^\circ$, $\angle RST = \alpha$, $RQ = \sqrt{2}$, $QS = m$. א. הבע את $\sin \alpha$ באמצעות m . ב. נתון כי: $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$. חשב את זוויות המשולש $\triangle RST$.

29) במשולש שווים שוקיים ABC ($AB = AC$) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

30) נתון משולש שצלעותיו $t, 2t, kt$.

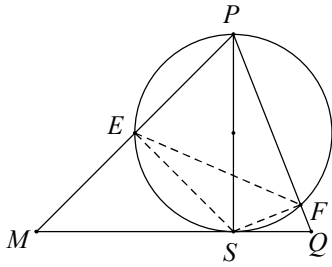
א. לאיזה ערכים של הקבוע k המשולש הוא קהה זווית?
 ב. נתון $k = \sqrt{7}$. חשב את אורך חוצה הזווית $\angle BAC$.



31) בתוך הריבוע $ABCD$ נתון, העבירו ארבעה קטעים היוצרים את אותה זווית α עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע פנימי $PQRS$.

א. הוכח כי: $\frac{PQ}{AB} = \cos \alpha - \sin \alpha$.

ב. לאיזו זווית α מתקיים: $PR = AB$.



32) PS הוא גובה במשולש ΔPMQ (ראה ציור).

נתון: $PS = h$, $\angle MPS = \alpha$, $\angle SPQ = \beta$.

א. הבע את שטח המשולש ΔPMQ

באמצעות h , α ו- β .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את הצלעות PM

ו- PQ בנקודות E ו- F בהתאמה (ראה ציור).

1. הבע באמצעות α ו- β את $\angle ESF$.

2. הבע באמצעות α ו- β את היחס בין שטח המשולש ΔESF

לשטח המשולש ΔPMQ .

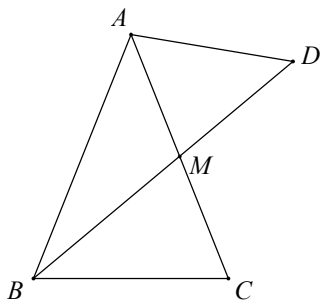
33) במשולש ΔABC הצלעות הן a , b ו- c והזוויות שמונחות מולן

הן: α , β ו- γ בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון m_a (התיכון לצלע a) באמצעות הצלעות b ו- c

והזווית α

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ΔABC הוא שווה צלעות.



34) במשולש שווה שוקיים ΔABC ($AB = AC$),

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ΔABC

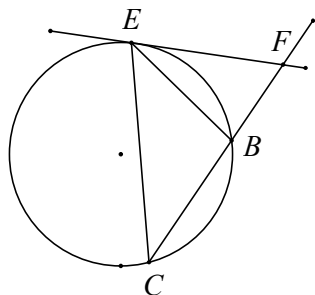
הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\angle BAC = 50^\circ$.

א. מצא את גודל הזווית $\angle BMC$.

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D , כך שרדיוס

המעגל החוסם את המשולש ΔABD הוא 14 ס"מ.

מצא את שטח המשולש ΔAMD .



35) משולש שווה שוקיים ΔBCE ($BC = BE$) חסום

במעגל שרדיוסו R . זווית הבסיס של המשולש ΔBCE

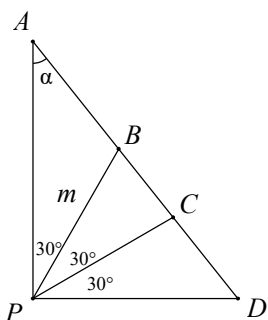
היא α . בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את

המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

א. בטא את שטח המשולש ΔBEF באמצעות R ו- α .

ב. מצא את הערך של α שבעבורו שטח המשולש $\triangle BCE$ שווה לשטח המשולש $\triangle BEF$.

36) בטרפז $BCDE$ ($BC \parallel ED$) אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ. הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא 80° . אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית $\angle CBE$. חשב את היקף הטרפז.

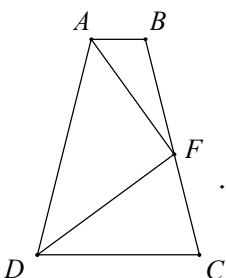


37) במשולש ישר-זווית $\triangle APD$ מחלקים את הזווית הישרה $\angle P$ לשלוש זוויות שוות.

כלומר: $(\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = 30^\circ)$. נתון כי: $\angle PAD = \alpha$ $PB = m$.

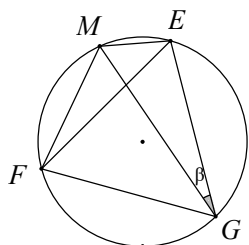
א. היעזר במשפט הסינוסים, והבע את BD , AC , AB ו- CD באמצעות m ו- α .

ב. הוכח כי: $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$.



38) בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ ($AD = BC$, $AB \parallel DC$), F היא נקודה על השוק BC , כך ש- DF חוצה את הזווית $\angle CDA$ ו- AF חוצה את הזווית $\angle DAB$ (ראה ציור).

נתון: $\angle FAB = \beta$, $AB = b$. הבע באמצעות b ו- β את אורך הבסיס DC .



39) משולש שווה צלעות $\triangle EFG$ חסום במעגל שרדיוסו R . M היא נקודה על המעגל.

נתון: $\angle MGE = \beta$ (ראה ציור). א. הוכח כי: $ME + MF = MG$.

ב. אם $ME = R$ מה תוכל לומר על MG ?

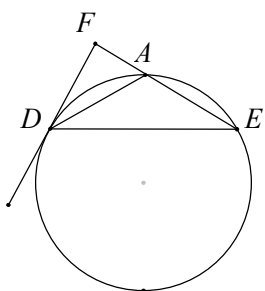
40) משולש שווה שוקיים $\triangle ADE$ ($AD = AE$). חסום במעגל שרדיוסו R . ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הצלע AE בנקודה F .

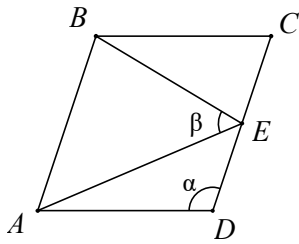
נתון: $\angle DAE = \alpha$ ($60^\circ < \alpha < 180^\circ$).

א. הבע את שטח המשולש $\triangle ADF$ באמצעות R ו- α .

ב. הבע באמצעות α את היחס שבין שטח המשולש $\triangle ADE$ ובין שטח המשולש $\triangle ADF$.

ג. חשב את α אם שטח המשולש $\triangle ADE$ שווה לשטח המשולש $\triangle ADF$.

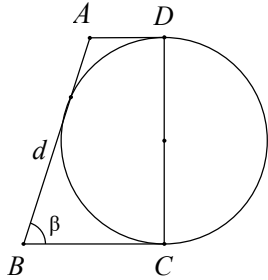




41) במעוין $ABCD$ הנקודה E היא אמצע הצלע CD . נתון: $\angle AEB = \beta$, $\angle ADC = \alpha$. (ראה ציור).

הוכח כי: $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha}}$.

42) נתון טרפז $ABCD$ ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.



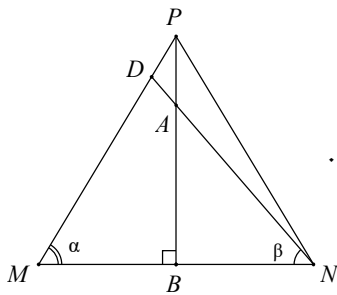
השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו- BC משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו- C בהתאמה. נתון כי: $AB = d$, $\angle B = \beta$.

א. הבע באמצעות d את סכום בסיסיו של הטרפז.

ב. הבע באמצעות d ו- β את היקף הטרפז ואת השטח של הטרפז.

ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר. חשב את הזווית החדה β .

43) במשולש שווה שוקיים $\triangle PMN$ ($PM = PN$) היא A נקודה על הגובה PB , כך ש- $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$.



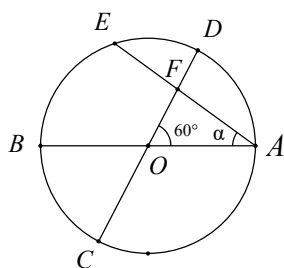
הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D . (ראה ציור).

נתון: $\angle DMN = \alpha$, $\angle DNB = \beta$ ו- $BN = a$.

א. חשב את היחס $\tan \beta : \tan \alpha$.

ב. חשב את היחס $PM : DM$.

44) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני קטרים AB ו- CD הנחתכים בזווית של 60° . מיתר AE , היוצר זווית α עם הקוטר AB ,



חותך את הקוטר CD בנקודה F . (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש $\triangle ACF$ באמצעות R ו- α .

ב. הוכח שכאשר $\alpha = 30^\circ$, שטח המשולש $\triangle ACF$

הוא $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$.

תשובות סופיות:

$$.a) 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \quad b) \frac{1}{2} R \quad (1)$$

$$.KN = 21.52 \text{ ס"מ} , MF = 11.28 \text{ ס"מ} \quad (2)$$

$$.EF = 5.975 \text{ ס"מ} . NA = 18.385 \text{ ס"מ} \quad (3)$$

$$. \frac{a}{2 \sin \beta} \cdot \left[1 + \operatorname{tg} \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right] . \text{ב.} . OK = \frac{a}{2 \cos \beta} . \text{א.} \quad (4)$$

$$. 24 \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 . \text{ב.} . 12 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} . \text{א.} \quad (5)$$

$$. 2 \cdot \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{\cos^2 20^\circ} \approx 1.132 \quad (7) . AE = 8 \sin \beta \cdot \left[\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \beta \right) \right] = 8 \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \beta \right) \quad (6)$$

$$. \text{א.} \quad -2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 \quad (8)$$

הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

$$. r = 16 / (\operatorname{tg} 59^\circ + \operatorname{tg} 67^\circ) \approx 3.98 \text{ ס"מ} . \text{ב.} . BC = r \cdot (\operatorname{tg} 59^\circ + \operatorname{tg} 67^\circ) \approx 4.02 \cdot r . \text{א.} \quad (9)$$

$$. S = 147.86 \text{ סמ"ר} \quad (10)$$

$$. S \approx 0.0495 \cdot R^2 . \text{ב.} . \sphericalangle D = 90^\circ , \sphericalangle A \approx 16.7^\circ , \sphericalangle C \approx 73.3^\circ . \text{א.} \quad (11)$$

$$. S_1 = 100 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 50 \cdot \sin 2\alpha . \text{א.} \quad (12)$$

$$. \text{ב.} . S_2 = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin (180^\circ - 2\alpha) = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha$$

$$. S = \frac{1}{2} k^2 \cdot (1 + 2 \sin \beta \cos \beta) \quad (13)$$

$$. r \approx 5.548 \text{ ס"מ} . \text{ב.} . S \approx 90.45 \text{ סמ"ר} \quad (14)$$

$$. \frac{CO}{CE} = \frac{1}{2 \sin^2 \beta} . \text{ב.} . CE = 2a \cdot \sin \beta , CO = \frac{a}{\sin \beta} . \text{א.} \quad (15)$$

בדומה למפגש התיכונים במשולש).

$$. S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} . \text{ב.} . S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha . \text{א.} \quad (16)$$

$$. \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} : \text{ג. יחס השטחים}$$

ד. במקרה זה $ABOC$ הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 ($\operatorname{tg}^2 45^\circ = 1$).

$$. AC = x = d \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} \quad (17)$$

$$. PD = \frac{m \cdot (1 - \cos \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2m \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2m \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} . \text{ב.} . AE = m \cdot \cos \alpha . \text{א.} \quad (18)$$

$$. \sphericalangle ODB \approx 44.7^\circ \quad (20) . S \approx 9.07 \text{ סמ"ר} \quad (19)$$

$$\text{א. } S_{\Delta PAN} = 10.38 \text{ ס"מ} \quad \text{ב. } 8.2 \text{ סמ"ר} = S_{\Delta PAN} \quad (21)$$

$$\text{א. } S = 800 \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin 2\beta \quad \text{ב. } 400 \text{ סמ"ר} = S \quad (22)$$

$$S_{\Delta ABC} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5.196 \text{ סמ"ר} \quad (23)$$

$$\text{א. } \left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} \right) = 1 - 4\cos^2 \beta \quad \text{ב. } \text{יחס השטחים הוא: } \left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} \right) \text{ או כל תשובה שקולה.} \quad (24)$$

$$\text{א. } S_{\Delta ABD} = 288 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ב. } \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \alpha} \quad (25)$$

$$\text{א. } DC = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad AB = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \quad (27) \quad \text{ב. } MQ \approx 15.43 \text{ ס"מ} \quad (26)$$

$$\text{א. } \sin \alpha = \frac{1}{m} \quad \text{ב. } \alpha \approx 20.7^\circ \quad (29) \quad \text{א. } 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ \text{ או } 45^\circ, 120^\circ, 15^\circ \quad (28)$$

$$\text{א. } \sqrt{5} < k < 3 \text{ או } 1 < k < \sqrt{3} \quad \text{ב. } \frac{2}{3} \cdot t \approx 0.667 \quad \alpha = 15^\circ \quad (31)$$

$$\text{א. } S_{\Delta MPQ} = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \quad \text{ב. } \sphericalangle ESF = 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad (32)$$

$$S_{\Delta EFS} : S_{\Delta MPQ} = \frac{1}{4} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \quad (30)$$

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \quad \text{ב. } m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha} \quad (33)$$

$$S_{\Delta AMD} = 54.1 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב. } \sphericalangle BMC = 79.5^\circ \quad (34)$$

$$P_{BCDE} = 51.09 \quad (36) \quad \alpha = 45^\circ \quad \text{ב. } S_{BEF} = \frac{2R^2 \sin^3 \alpha \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \quad (35)$$

$$BD = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot \cos \alpha}, \quad AB = \frac{m}{2 \cdot \sin \alpha}, \quad AC = \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha} \quad (37)$$

$$DC = \frac{-b \cdot \tan \beta}{\tan 3\beta} \quad (38) \quad CD = \frac{m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha}$$

$$\text{ב. } MG \text{ הוא קוטר במעגל.} \quad (39)$$

$$\alpha = 90^\circ \quad \lambda \quad \frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta DF}} = -\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)} \quad \text{ב. } S_{\Delta ADF} = \frac{-2R^2 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\cos(1.5\alpha)} \quad (40)$$

$$\beta = 30^\circ \quad \lambda \quad S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \beta \quad P = 2d + d \sin \beta \quad \text{ב. } AD + BC = d \quad (42)$$

$$PM : DM = \frac{9}{8} = 1.125 \quad \text{ב. } \tan \beta : \tan \alpha = \frac{4}{5} = 0.8 \quad (43)$$

$$S = \frac{3R^2 \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{4 \cdot \sin(60^\circ + \alpha)} \quad (44)$$

תוכן העניינים – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי:

261	פרק 13 – חשבון דיפרנציאלי:
261	נגזרות ומשיקים:
262	שאלות יסודיות – גזירת פונקציות:
265	שאלות שונות – שימושי הנגזרת:
266	שאלות עם פרמטרים:
268	תשובות סופיות:
270	חקירת פונקצית פולינום:
274	תשובות סופיות:
276	חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש:
278	מציאת תחום הגדרה:
279	מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:
279	מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:
281	חקירת פונקצית מנה:
285	חקירת פונקצית שורש:
290	שאלות עם תחומי קעירות ונקודות פיתול:
292	תשובות סופיות:
298	חקירת פונקציות עם פרמטר:
299	תשובות סופיות:
301	חקירת פונקציות טריגונומטריות:
301	הגדרות כלליות:
303	שאלות:
309	תשובות סופיות:
312	פרק 14 - בעיות קיצון:
312	בעיות קיצון עם מספרים:
313	בעיות בהנדסת המישור:
316	בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:
318	בעיות קיצון בהנדסת המרחב:
319	בעית קיצון עם תנועה:
320	תשובות סופיות:
321	בעיות קיצון – שאלות שונות:
321	בעיות בהנדסת המישור:
323	בעיות בהנדסת המרחב:
324	בעיות בפונקציות וגרפים:
327	תשובות סופיות:

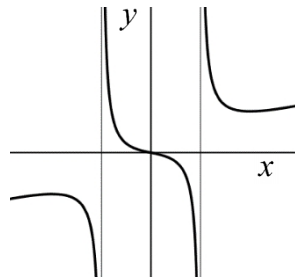
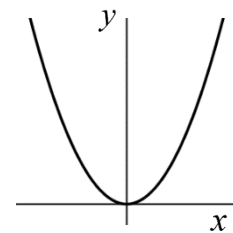
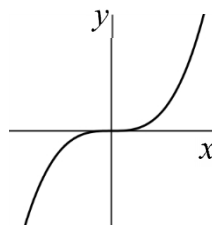
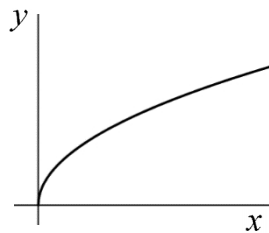
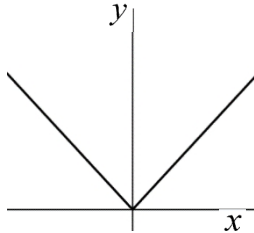
328	פרק 15 - חשבון אינטגרלי:
328	סיכום כללי האינטגרציה:
328	הגדרה וחוקים יסודיים:
328	חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים):
329	חישוב נפחים באמצעות האינטגרל:
329	שאלות לפי נושאים:
329	שאלות יסודיות – חישובי אינטגרלים:
332	שאלות יסודיות – מציאת פונקציה קדומה:
334	האינטגרל המסוים:
334	חישובי שטחים – פונקציה פולינומית:
341	שאלות עם פרמטר:
342	חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה:
344	חישובי שטחים – פונקציה רציונאלית:
345	חישובי שטחים – פונקצית שורש:
347	חישובי שטחים – פונקציות טריגונומטריות:
350	מציאת נפח גוף סיבוב:
350	בעיות קיצון עם אינטגרלים:
351	תשובות סופיות:
355	הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת:
360	חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:
363	תשובות סופיות:

פרק 13 – חשבון דיפרנציאלי:

נגזרות ומשיקים:

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x) = x^2$: הפונקציה $f(x) = x^3$: הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$: הפונקציה $f(x) = |x|$:



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$:

הנגזרת:

כלל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

כללי הגזירה:

1. כלל גזירה מס' 1: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
2. כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
3. כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
4. כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
5. כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
6. כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
7. כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
8. כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
9. כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

שיפוע של פונקציה:

1. השיפוע (m) של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1, y_1)$, כלומר: $m = f'(x_1)$.
2. השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$.
3. משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

שאלות יסודיות – גזירת פונקציות:

1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה יסודית):

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

2) גזור את הפונקציות הבאות (כפל בקבוע):

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

3) גזור את הפונקציות הבאות (נגזרת של קבוע):

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

4) גזור את הפונקציות הבאות (סכום והפרש של ביטויים פולינומיים):

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
ג. $f(x) = 7x^2 + 23x - 6$	ד. $f(x) = 6x^2 + 8x + 4$
ה. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3$	ו. $f(x) = \frac{x^4}{8} + 67$

5) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה פולינומית מורכבת):

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = (5x - 2)^3 & \text{ב.} & f(x) = (x^3 + 6)^5 \\ \text{ג.} & f(x) = 3(x - x^2)^2 & \text{ד.} & f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \\ & & \text{ה.} & f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \end{array}$$

6) גזור את הפונקציות הבאות (פונקצית מנה עם פולינום במכנה):

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \frac{3}{x} & \text{ב.} & f(x) = -\frac{2}{x} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{1}{x^2} & \text{ד.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{2}{3-x} & \text{ז.} & f(x) = \frac{6}{x+5} \\ \text{ח.} & f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} & \text{ט.} & \end{array}$$

7) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות פולינום):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x+1)(x-3) \\ \text{ב.} & f(x) = (5x+1)^3(x-3) \\ \text{ג.} & f(x) = x^3 \cdot (6-x)^4 \\ \text{ד.} & f(x) = 3x^2 \cdot x \\ \text{ה.} & f(x) = x^2 \cdot x^3 \\ \text{ו.} & f(x) = x \cdot (3x+7) \\ \text{ז.} & f(x) = 3x^3 \cdot (3x-1) \\ \text{ח.} & f(x) = (x-2)(2x^2+3) \\ \text{ט.} & f(x) = (3x-2)(x^2+10x) \\ \text{י.} & f(x) = (3x^4-4x)(2x^2+5x+2) \\ \text{יא.} & f(x) = x(x-2)(3x-4) \end{array}$$

8) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות מורכבות):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (x^2 - 4)^2 \\ \text{ב.} & f(x) = 2x^3(3x+5)^2 \\ \text{ג.} & f(x) = (x^3 + 2)^2(x-1)^3 \\ \text{ד.} & f(x) = (x^2 + 1)^3(2x-1)^2 \end{array}$$

9) גזור את הפונקציות הבאות (פונקצית מנה עם פילונם במונה ובמכנה):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \\ \text{ז.} & f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1} \\ \text{ח.} & f(x) = \frac{(x^2+3)^2}{x^2-2} \\ \text{ט.} & f(x) = \frac{x^3-x^2}{2(1-x)} \\ \text{י.} & f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \end{array}$$

10) גזור את הפונקציות הבאות (פונקצית שורש):

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & f(x) = \sqrt{x} & \text{ב.} & f(x) = 4\sqrt{x+1} & \text{ג.} & f(x) = \sqrt{x^3-1} \\
 \text{ד.} & f(x) = (3x+1)\sqrt{x} & \text{ה.} & f(x) = x^2\sqrt{x+3} & \text{ו.} & f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}
 \end{array}$$

11) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות משולבות):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} & f(x) = \sqrt{x+1} \\
 \text{ב.} & f(x) = \sqrt{2x} \\
 \text{ג.} & f(x) = \sqrt{3x^2+1} \\
 \text{ד.} & f(x) = \sqrt{10-3x} \\
 \text{ה.} & f(x) = \sqrt{2x^2-7x} \\
 \text{ו.} & f(x) = x^2\sqrt{1-2x} \\
 \text{ז.} & f(x) = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \\
 \text{ח.} & f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}} \\
 \text{ט.} & f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2} \\
 \text{י.} & f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x}} \\
 \text{יא.} & f(x) = \frac{2x^3-x^2+x-5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \\
 \text{יב.} & f(x) = \frac{x^2+7}{\sqrt{x^2-5}} \\
 \text{יג.} & f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}} \\
 \text{יד.} & f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \\
 \text{טו.} & f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}
 \end{array}$$

12) גזור את הפונקציות הבאות (פרמטרים):

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & f(x) = ax^4 - bx & \text{ב.} & f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \\
 \text{ג.} & f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} & \text{ד.} & f(x) = a\sqrt{bx^2+c}
 \end{array}$$

13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} & f(x) = \frac{x^2+2x+4}{2x} \\
 \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2-5x+6}{2x+10} \\
 \text{ג.} & f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \\
 \text{ד.} & f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \\
 \text{ה.} & f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \\
 \text{ו.} & f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3
 \end{array}$$

שאלות שונות – שימושי הנגזרת:

(14) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2, 2)$.

(15) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ בנקודה שבה $x = -2$.

(16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה שבה $x = 1$.

(17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x + 3)^3$ בנקודה שבה $x = -1$.

(18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x + 1}$ בנקודה שבה $y = 2$.

(19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

(20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

(21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$ בנקודה שבה $x = 1$.

(22) נתון כי הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = 3\sqrt{x}$. מצא את נקודת ההשקה.

(23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3, 0)$.

(24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ בנקודה שבה: $x = 1$.

(25) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ בנקודה שבה: $x = 4$.

(26) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר: $y = 3x - \frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

(27) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

(28) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו -2.

(29) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

(30) מצא את משוואת המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית של 135° .

(31) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצא את k ואת נקודת ההשקה.

(32) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y = x^2$, $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

שאלות עם פרמטרים:

(33) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$ בנקודה שבה $x=3$ הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(34) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, $(a > 0)$. המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1. מצא את ערך הפרמטר a .

(35) נתונה הפונקציה: $y = x^3 + a\sqrt{x}$ (a פרמטר). שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 5. מצא את ערך הפרמטר a .

(36) נתונה הפונקציה: $y = 2\sqrt{x} + \frac{A}{x}$ (A פרמטר). שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 2. מצא את ערך הפרמטר A .

(37) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(38) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y = 2$ הוא -4 . מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(39) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- c .

(40) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

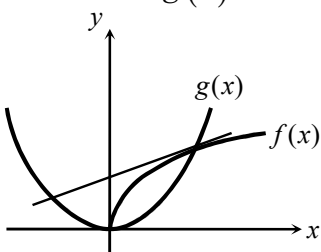
(41) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $(1,6)$ הוא -6 . מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

(42) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$ לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$? לכל ערך כזה של k מצא את נקודת ההשקה.

(43) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y = 2x$.

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

(44) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{x}$ ו- $g(x) = x^2$.



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

(45) א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודה שבה $x = t$.
 ב. מצא את ערכו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1,1)$.

תשובות סופיות:

1. א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$ ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

2. א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8 ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

3. א. 0 ב. 0 ג. $3x^2 + 4x - 3$ ד. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$ ה. $14x + 23$ ו. $12x + 8$

ה. $x - 3x^2$ ו. $0.5x^3$

5. א. $15(5x - 2)^2$ ב. $15x^2(x^3 + 6)^4$ ג. $6(x - x^2)(1 - 2x)$ ד. $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$ ה. $\frac{8(x + 1)^3}{3}$

6. א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$ ו. $\frac{2}{(3 - x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x + 5)^2}$

7. א. $10x - 14$ ב. $(5x + 1)^2(20x - 44)$ ג. $x^2(6 - x)^3(18 - 7x)$

ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x + 7$ ז. $36x^3 - 9x^2$ ח. $6x^2 - 8x + 3$ ט. $9x^2 + 56x - 20$

י. $36x^5 + 75x^4 + 24x^3 - 24x^2 - 40x - 8$ יא. $9x^2 - 20x + 8$

8. א. $4x(x^2 - 4)$ ב. $30x^2(x + 1)(3x + 5)$ ג. $3(x - 1)^2(x^3 + 2)(3x^3 - 2x^2 + 2)$

ד. $2(2x - 1)(x^2 + 1)^2(8x^2 - 3x + 2)$

9. א. $\frac{5}{(1 + 2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x - 12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$ ד. $\frac{(x - 4)(x + 2)}{(x - 1)^2}$ ה. $\frac{1}{x^2}$

ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$ ח. $\frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 7)}{(x^2 - 2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x + 2)^2}$

10. א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x + 1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}$ ד. $\frac{9x + 1}{2\sqrt{x}}$ ה. $\frac{x(5x + 12)}{2\sqrt{x + 3}}$ ו. $\frac{x - 3}{2x\sqrt{x}}$

11. א. $\frac{1}{2\sqrt{x + 1}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ ג. $\frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$ ד. $-\frac{3}{2\sqrt{10 - 3x}}$ ה. $\frac{4x - 7}{2\sqrt{2x^2 - 7x}}$

ו. $6x - \frac{4}{\sqrt{x}}$ ז. $\frac{2x - 5x^2}{\sqrt{1 - 2x}}$ ח. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ט. $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 4}}$ י. $\frac{3x + 1}{(1 - x^2)^{1.5}}$

יא. $3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2}$ יב. $-\frac{3}{2x\sqrt{3x - x^2}}$ יג. $\frac{-x^2 + 2x + 1}{2(1 - x)^{1.5}\sqrt{1 + x^2}}$

יד. $\frac{x^3 - 17x}{(x^2 - 5)^{1.5}}$ טו. $-\frac{x + 1}{2\sqrt{x}(x - 1)^2}$ טז. $-\frac{x + 3}{2(x - 1)^2\sqrt{x + 1}}$

12. א. $4ax^3 - b$ ב. $\frac{2ax}{3} - \frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x - 4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2 + c}}$

$$\cdot f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \cdot \beth f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3} \cdot \aleph \text{ (13)}$$

$$\cdot f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, f''(x) = \frac{8x \cdot (x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3} \cdot \daleth f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \cdot \lambda$$

$$\cdot f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \cdot \beth f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \cdot \daleth$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \text{ (18)} \quad y = 24x + 22 \text{ (17)} \quad m = 2 \text{ (16)} \quad m = 4 \text{ (15)} \quad m = 17 \text{ (14)}$$

$$(1, 3) \text{ (22)} \quad y = -12x + 9 \text{ (21)} \quad y = 2x - 3 \text{ (20)} \quad y = 6x - 24, y = -6x - 12 \text{ (19)}$$

$$y = 22x - 56 \text{ (25)} \quad y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} \text{ (24)} \quad y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} \text{ (23)}$$

$$\cdot y = \frac{11}{16}x - \frac{15}{8} \text{ (29)} \quad y = -2x + 8 \text{ (28)} \quad y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4} \text{ (27)} \quad \left(\frac{1}{3}, 0\right) \cdot \beth y = 3x - 1 \cdot \aleph \text{ (26)}$$

$$\cdot y = 2x - 1, y = -2x - 1 \text{ (32)} \quad (1, 1), k = 1.5 \text{ (31)} \quad y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3} \text{ (30)}$$

$$\cdot A = -1 \text{ (36)} \quad a = 4 \text{ (35)} \quad a = 2 \text{ (34)} \quad a = 2, y = 8x - 18 \text{ (33)}$$

$$\cdot a = 2, y = -4x - 2 \text{ (38)} \quad (-1, 5), y = 4x + 9 \text{ (37)}$$

$$\cdot b = 2, a = 6, y = -6x + 12 \text{ (41)} \quad b = 4, (4, 12) \text{ (40)} \quad a = -\frac{1}{8}, c = 4 \text{ (39)}$$

$$\cdot k = \frac{158}{27} : \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right) : \aleph k = 6 : (1, 1) \text{ (42)}$$

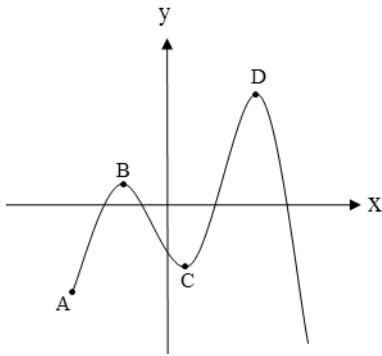
$$\cdot S = 4\frac{1}{12} \cdot \lambda y = -1.5x + 3.5 \cdot \beth (1, 2) \cdot \aleph \text{ (43)}$$

$$\cdot (-0.5, 0.25) \cdot \lambda y = 0.5x + 0.5 \cdot \beth (0, 0), (1, 1) \cdot \aleph \text{ (44)}$$

$$\cdot t = 0, t = -2 \cdot \beth y = 2tx - t^2 + 1 \cdot \aleph \text{ (45)}$$

חקירת פונקצית פולינום:

נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):



מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) - B, C, D

מינימום או מקסימום קצה - A

מינימום או מקסימום מוחלט - D

נקודות קיצון מקומיות:

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס. בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית – נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

מציאת נקודות קיצון מקומיות:

- א. נגזור את הפונקציה.
- ב. נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.
- ג. נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y .
- ד. נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה או נגזרת שנייה.

שאלות:

1) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

2) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

- (3) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$.
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה: $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.
 מצא את ערכו של הפרמטר a .
- (6) נתונה הפונקציה: $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון.
 מצא את הקבוע a .
- (7) לפונקציה: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה: $(2, 3)$.
 מצא את ערכי הפרמטרים A, B .
- (8) לפונקציה: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$ יש נקודת קיצון ב- $x = -1$ ו- $x = 4$.
 מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- y של שתי נקודות הקיצון.
- (9) נתונה הפונקציה: $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון.
 מצא את הפרמטרים a, b .
- (10) לפונקציה: $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2, 3)$.
 מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (11) נתונה הפונקציה: $f(x) = 10x - x^2$. ענה על הסעיפים הבאים:
 א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

12) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 12x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

13) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

14) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

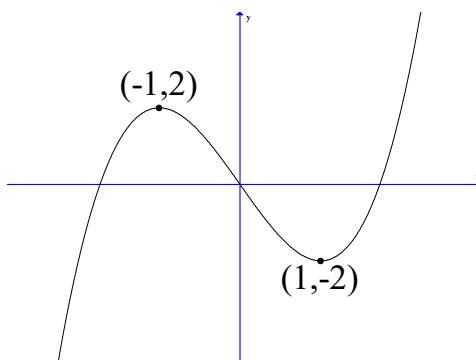
16) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$.

- א. לאלו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- ב. הצב בפונקציה $a = 6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y , סרטוט.

- 17) נתונה הפונקציה: $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$ (פרמטר d).
 ידוע כי הפונקציה חותכת של ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 2$.
- מצא את d .
 - האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
 - כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
 - מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

18) לפי גרף הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3x$

- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$.
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$.
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$.
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד.
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות.
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות.
- האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון.
- מצא את התחומים בהם הפונקציה היא ח"ע.

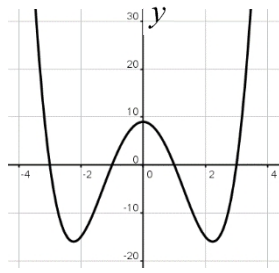


תשובות סופיות:

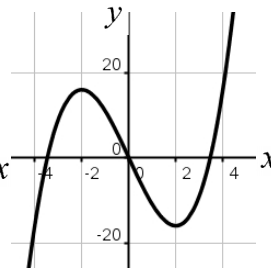
- (1) $\max(5,25)$ א. $(-2,16)\max$, $(2,-16)\min$
ב. עלייה: $x > 2$, $x < -2$ ירידה: $-2 < x < 2$
- (3) א. $(-\sqrt{5},-16)\min$, $(\sqrt{5},-16)\min$, $(0,9)\max$
ב. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$ ירידה: $0 < x < \sqrt{5}$, $x < -\sqrt{5}$
- (4) א. $\min(3,5)$ ב. עלייה: $x > 3$ ירידה: $x < 3$
- (5) $a = 3$ (6) $a = -\frac{2}{3}$ (7) $A = -1$, $B = 3$
- (8) $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{3}{2}$, $(-1, 2\frac{1}{6})$, $(4, -18\frac{2}{3})$
- (9) $b = 6, a = -4$ (10) $b = -16, a = 2$
- (11) א. כל x ב. $(5,25)\max$ ג. עלייה: $x < 5$ ירידה: $x > 5$ ד. $(0,0)$, $(10,0)$
- (12) א. כל x ב. $(-2,16)\max$, $(2,-16)\min$ ג. עלייה: $x > 2$, $x < -2$
ירידה: $-2 < x < 2$ ד. $(0,0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(-\sqrt{12},0)$
- (13) א. כל x ב. $(-\sqrt{5},-16)\min$, $(\sqrt{5},-16)\min$, $(0,9)\max$
ג. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$ ירידה: $0 < x < \sqrt{5}$ או $x < -\sqrt{5}$
ד. $(0,9)$, $(\pm 1,0)$, $(\pm 3,0)$
- (14) א. כל x ב. $\min(3,5)$ ג. תחומי עלייה: $x > 3$ תחומי ירידה: $x < 3$ ד. $(0,32)$
- (15) א. כל x ב. אין ג. עולה לכל x ד. $(0,0)$
- (16) א. $-6 \leq a \leq 6$ ב. תחום הגדרה: כל x נקודות קיצון: אין תחומי עלייה: כל x
תחומי ירידה: אין נקודת חיתוך עם הצירים: $(0, -50)$
- (17) א. $d = 8$ ב. לא ג. יורדת בתחום $x \neq \frac{2}{3}$ ד. $(0,8)$
- (18) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k < -2$, $k > 2$ ה. $k = \pm 2$ ו. $-2 < k < 2$
ז. לא ח. $x < -1$, $-1 < x < 1$, $x > 1$

סקיצות לשאלות החקירה:

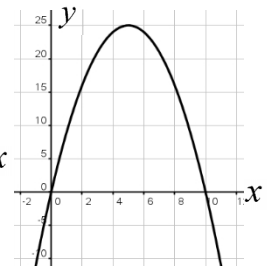
(13)



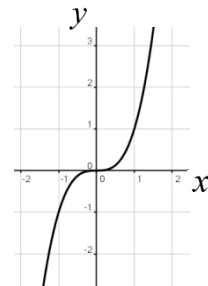
(12)



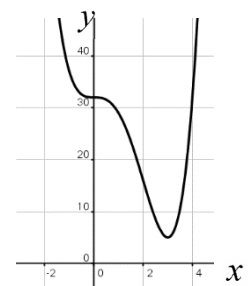
(11)



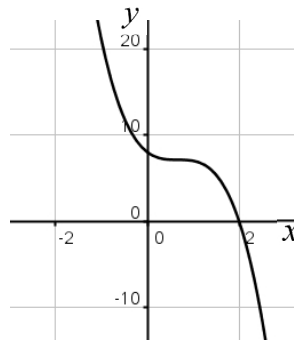
(15)



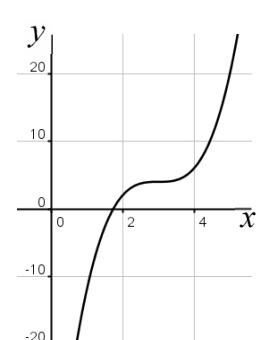
(14)



(17)



(16)



חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש:

סעיפי חקירה מלאה של פונקציה:

1. תחום הגדרה.
2. נקודות קיצון.
3. תחומי עלייה וירידה.
4. נקודות חיתוך עם הצירים.
5. אסימפטוטות מקבילות לצירים.
6. נקודות פיתול.
7. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה.
8. סרטוט.

תחום הגדרה של פונקציה:

1. כל פולינום מוגדר לכל x .
2. בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
3. בפונקציה עם שורש, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

אסימפטוטות:

1. אסימפטוטה אנכית - הגדרה:

הישר: $x = k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k) = 0$ וגם: $f(k) \neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

או: $\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x = k$ הוא אסימפטוטה אנכית

לפונקציה $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

הסבר כללי:

בעבור ערכי x שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית. כאשר ערך x מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם. אם אחרי הצמצום אותו ערך של x עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך x זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

2. אסימפטוטה אופקית - הגדרה:

ישר מהצורה: $y = n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{f(x)}{g(x)} = n$ או: $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{f(x)}{g(x)} = n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m > n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m = n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = \frac{a}{b}$.
- אם $m < n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

3. חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר x שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף). עבור ערכי x שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x = \infty$ או $x = -\infty$ בהתאמה. ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת x לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$.
- הגבול: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:
 - א. אם: $x \rightarrow 0^+$ (מתקרב ל-0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.
 - ב. אם: $x \rightarrow 0^-$ (מתקרב ל-0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty \cdot \infty$ (מכפלת שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty \cdot \infty = \infty$.
- הגבול מהצורה $\infty + \infty$ (סכום שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty + \infty = \infty$.

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).
- הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת x).
- הגבול מהצורה: $\infty - \infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x). במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול:

1. תחומי קעירות – הגדרה:

פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0 : x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.

כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) < 0$.

פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0 : x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.

כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) > 0$.

2. נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x) = 0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

שאלות:

מצאת תחום הגדרה:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x \quad \text{ב. } f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1 \quad \text{ג. } f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{2x}{x-3} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x^2-4} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{5x^3+4x}{x^2-1}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{x^2}{x^2-x-2} \quad \text{ח. } f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x-8} \quad \text{ט. } f(x) = \frac{6}{x^2+1}$$

$$\text{י. } f(x) = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad \text{יא. } f(x) = \frac{1}{x^3-x} \quad \text{יב. } f(x) = \frac{x^2}{x^3-4x}$$

2 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$f(x) = \sqrt{x-4}$.ג	$f(x) = 2\sqrt{x-3}$.ב	$f(x) = \sqrt{x}$.א
$f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$.ו	$f(x) = \sqrt{x^2+3x-10}$.ה	$f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$.ד
$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$.ט	$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$.ח	$f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$.ז
$f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$.יב	$f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$.יא	$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$.י
	$f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3}$.יד	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1- x }}$.יג

מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

3 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x}{x^2-10x+9}$

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

4 מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

5 מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-9}$

6 מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$

7 מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$

8 מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$

9 מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$

10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - 4x}$

12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4}$

13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$

17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$

18) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה נפגשות בנקודה $(-1, 2)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

19) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16, 2)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

חקירת פונקציות מנה:

(20) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

25) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון.
- ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.
- ו. סרטוט סקיצה.

26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x = -8$.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 8}$.

- א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.
- ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה: $y = \frac{a^2x-4}{2x^2-1}$, $(a$ קבוע). ידוע כי שיפוע המשיק לגרף

הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$ הוא: $m = 4$.

- א. מצא את כל הערכים האפשריים עבור a .
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

(31) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 1.5x - \frac{5x+1}{x+5}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון וסוגן.
- ג. תחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה.

32 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, $(a \neq 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .
- ד. 1. מצא עבור אילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.
2. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 2$.
מצא את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x .

33 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + ax + 6}{x-2}$, $(a$ פרמטר).

- ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .
- א. מצא את הערך של a .
 - ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א' ומצא:
 1. את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 2. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 3. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 4. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
 - ג. עבור אלו ערכי x הפונקציה שלילית?
 - ד. נתון הישר: $y = k$. עבור אלו ערכי k אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

34 נתונה הפונקציה: $y = \frac{x+3}{x-2} + A$, $(A$ פרמטר).

- גרף הפונקציה עובר בנקודה $(3A, A)$.
- א. מצא את ערך הפרמטר A .
 - ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל x .
 - ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 - ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - ו. נתון הישר: $y = k$. האם קיים ערך של k עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

35) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$.

- ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה $(0.5, 3)$.
- מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.
 - מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 - כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של k הישר $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

36) א. הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- y .

- הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x אם ידוע כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא 3.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y = -1$. נמק את תשובתך.

חקירת פונקצית שורש:

37) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

38) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

39) נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

40) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

41) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

42) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(43) נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- x ? נמק והראה חישוב מתאים.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
- ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

(44) נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-1}}$

- א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- x ? מצא אותן.
- ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

(45) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(46) נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, פרמטר a .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y . ידוע כי הוא מקביל לישר : $3y - x = 0$.
- א. מצא את ערך הפרמטר a .
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ד. כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

47 נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$ (פרמטר חיובי).

ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x = 0.8$.

א. מצא את k .

ב. האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן מצא אותה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 0.52$.

48 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$, פרמטר חיובי.

א. 1. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות k).

2. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?

ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של k בתחום הגדרתה.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
(בטא באמצעות k).

ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה- x והאסימפטוטה הנ"ל הוא 4 סמ"ר S . מצא את ערך הפרמטר k .

49 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.

ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

1. לפונקציות תחום הגדרה זהה.

2. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

3. שתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x באותה נקודה.

4. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.

ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- y .

אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:

היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור

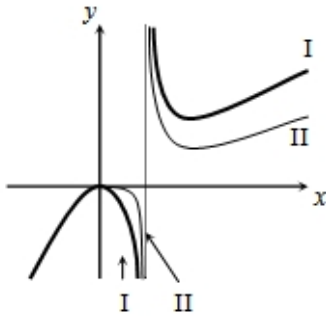
ה- y של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה- y

של הנקודה בעלת אותו שיעור x על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.

ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

50) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$; $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

- א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
1. לשתי הפונקציות יש את תחום ההגדרה.
 2. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y = x$.
 3. הפונקציות לא חותכות זו את זו.

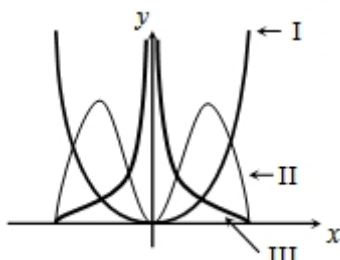


מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x) = (g(x))^2$

- ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$.
- ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$?
- ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים. קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף מתאר מבין הפונקציות: $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. נמק את בחירותיך.

51) לפניך שלוש פונקציות: $f(x) = x^2 \sqrt{k-x^2}$; $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$; $h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$ ($k > 0$).

- א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
1. לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של: $h(x)$.
 2. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- x כלל.
 3. הפונקציות: $h(x)$ ו- $g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן (כאשר אחת עולה השנייה יורדת).
 4. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.



מסמנים נקודה $A(0, \sqrt{12})$ עם ציר ה- y .

ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x שאינה בראשית הוא: $d = 6$.

- ב. מצא את k .
- ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
- ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של שלושת הפונקציות. קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף שייך לכל פונקציה.

שאלות עם תחומי קעירות ונקודות פיתול:

52) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

53) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$.

54) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

55) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$.

56) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a}{x^2 + b}$, פרמטרים a, b .

הנקודה $(-1, 1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

57) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

58) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x - \sqrt{x}}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

59) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

1. מציאת תחום הגדרה.
2. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
4. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
5. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
6. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
7. מציאת תחומי הקמירות והקעירות של הפונקציה.
8. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{א.} \qquad f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad \text{ג.} \qquad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ה.} \qquad f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad \text{ו.}$$

*ללא סעיפים 6 ו-7.

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad \text{ז.} \qquad f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad \text{ח.}$$

*ללא סעיפים 6 ו-7.

תשובות סופיות:

- (1) א-ג: כל x ד. $x \neq 3$ ה. $x \neq \pm 2$ ו. $x \neq \pm 1$ ז. $x \neq -1, 2$ ח. $x \neq 4, -2$ ט. $x \neq 0$ י. כל x .
יא. $x \neq 0, \pm 1$ יב. $x \neq 0, 2, -2$.
- (2) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \geq 4$ ד. $x \leq \frac{1}{2}$ ה. $-5 \leq x \leq 2$ ו. $-2 \leq x \leq 1$ ז. $x > -4$.
ח. $-3 < x < 0, x > 3$ י. $x \leq -1.5, x \geq 1$ ט. $x \leq -3, -2 \leq x < 1, x > 1$.
יא. $-6 \leq x < -2, x > -2$ יב. $x < 1, 1 < x \leq 2$ יג. $-1 < x < 1$ יד. $x \geq 7$.
- (3) א. $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$ ב. עולה: $-3 < x < 3, x \neq 1$ יורדת: $3 < x \neq 9, x < -3$.
- (4) $x = 2, y = 3$ (5) $x = \pm 3, y = 5$ (6) $y = \frac{2}{3}$ (7) $x = -3, x = 5, y = 0$ (8) אין.
- (9) $x = b, y = a$ (10) נקודת אי-הגדרה: $(2, 4)$.
- (11) $x = 2, y = \frac{1}{2}$ נקודת אי-הגדרה: $(0, 0)$ (12) $x = 2, y = 0$ (13) $x = 4$
- (14) $x = 1, y = -1$ (15) $x = 1, y = 2$ (16) $y = 3$ (17) $x = 2, x = -2, y = 3$
- (18) $b = -3, a = 2$ (19) $b = 1, a = 2$ (20) א. $x \neq 0$ ב. $\min(1, 2), \max(-1, -2)$
- ג. עולה: $1 < x$ או $x < -1$ יורדת: $x \neq 0, -1 < x < 1$ ד. אין ה. $x = 0$.
- (21) א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה. ד. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ ה. $y = 2, x = 3$.
- (22) א. $x \neq 1, x \neq 4$ ב. $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$ ג. תחומי עלייה: $-2 < x < 2, x \neq 1$,
תחומי ירידה: $2 < x \neq 4$ או $x < -2$ ד. $(0, 0)$ ה. $y = 0, x = 1, x = 4$.
- (23) א. כל x ב. $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$ ג. עולה: $1 < x$ או $x < -3$ יורדת: $-3 < x < 1$
ד. $(3, 0), (0, 0)$ ה. $y = 1$.
- (24) א. $x \neq \frac{1}{3}, x \neq 3$ ב. $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$
וגם $x \neq \frac{1}{3}$ תחומי ירידה: $1 < x \neq 3$ או $x < -1$ ד. $(0, 2)$ ה. $x = 3, x = \frac{1}{3}, y = 2$.
- (25) א. $x \neq 0$ ב. $Max(-1, -2.25), Min(1, -0.25)$ ג. עולה: $x < -1, x > 1$
יורדת: $-1 < x < 1, x \neq 0$ ד. $(0.5, 0), (2, 0)$ ה. $x = 0$.
- (26) א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה ד. $(0, -2), (2, 0)$
ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3, 1)$.
- (27) א. $x \neq \pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה ד. $(0, -2), (2, 0)$
ה. יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

(28) א. $f(x) = \frac{x+4}{x^2}$, $a=1$ ב. עולה: $-8 < x < 0$ יורדת: $x < -8$, $x > 0$

ג. $(-4, 0)$ ד. $x=0, y=0$

(29) א. $x \neq \pm 2$ ב. $Max(0, 0)$ ג. יורדת: $x > 0, x \neq 2$ עולה: $x < 0, x \neq -2$ ד. $(0, 0)$

ה. $x = \pm 2, y = 1.5$

(30) א. $a = \pm 2$ ב. $(0, 4)$, $(1, 0)$ ג. המשיק: $y = -4x + 4$ אשר עובר בנקודה $(1, 0)$.

(31) א. $x \neq -5$ ב. $Max(-9, -24.5)$, $Min(-1, -0.5)$ ג. עולה: $x > -1$, $x < -9$

יורדת: $-9 < x < -1$ ד. $x \neq -5$, $(0, -0.2)$, $(\frac{1}{3}, 0)$, $(-2, 0)$ ה. $x = -5$

(32) א. $x \neq 1$ ב. $x=1, y=1$ ג. $(0, a)$, $(a, 0)$ ד. 1. $a > 1$ 2. $a = 2$

(33) א. $a = -3$ ב. 1. $x \neq 2$ 2. $(0, -3)$ 3. $Max(-3, 0)$, $Min(4, 5)$ 4. $x = 2$ ג. $x < 2$ ד. $-3 < k < 5$

(34) א. $A = -1$ ב. $x \neq 2$ ד. $(0, -2.5)$ ו. לא (35) א. $a = 3$, $f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}$, כל x

ב. $Max(-2, 8)$, $Min(3, -\frac{1}{3})$ ג. עולה: $x < -2$, $x > 3$ יורדת: $-2 < x < 3$

ד. $(2, 0)$, $(0, 4\frac{2}{3})$, $(4\frac{2}{3}, 0)$ ו. $k = 8, -\frac{1}{3}, 3$

(36) ב. $k = -3$ ג. $(3, 0)$, $(-3, 0)$ ד. $y = -1$ ה. באף נקודה.

(37) א. $x \geq 3$ ב. $min(3, 0)$ קצה ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה. ד. $(3, 0)$ ה. אין.

(38) א. $x \geq 1$ ב. $max(1, 0)$, $min(2, -2)$ קצה ג. עולה: $2 < x$ יורדת: $1 < x < 2$

ד. $(1, 0)$, $(4, 0)$ ה. אין.

(39) א. $x \leq 6$ ב. $min(6, 0)$, $max(4, 4\sqrt{2})$ קצה ג. עלייה: $x < 4$, ירידה: $4 < x < 6$

ד. $(0, 0)$, $(6, 0)$ א. $x \geq 0$ ב. $min(0, 0)$, $max(1, 1)$ קצה

ג. עולה: $0 < x < 1$ יורדת: $1 < x$ ד. $(0, 0)$ ה. $y = 0$

(41) א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ב. $max(-3, 0)$ קצה, $min(3, 0)$ קצה ג. עולה: אף x

יורדת: $-3 \leq x \leq 3$, $x \neq 0$ ד. $(-3, 0)$, $(3, 0)$ ה. $x = 0$

(42) א. $x < 0$, $x \geq 2$ ב. $max(3, \frac{1}{\sqrt{27}})$, $min(2, 0)$ ג. $(2, 0)$

(43) א. $(2, 0)$ ב. לא ג. $y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$ ד. $S = 4\sqrt{2}$

(44) א. $x \geq 0$, $x \neq 1$ ב. $(9, 6)$ ג. $y = 6$

(45) א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ב. $max(-3, 0)$ קצה, $min(3, 0)$ קצה

ג. עולה: אף x , יורדת: $-3 \leq x \leq 3$, $x \neq 0$ ד. $(-3, 0)$, $(3, 0)$ ה. $x = 0$

(46) א. $a = 1$ ב. $-3 < x < 3$ ג. $(-1.5, \sqrt{3})$ ד. יורדת: $-3 < x < -1.5$ עולה: $-1.5 < x < 3$

(47) א. $k = 0.48$ ב. כן, $(0.6, 0.57)$ ג. $y = 0.74x + 0.1352$

48 א. 1. $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$ 2. $x = \pm\sqrt{k}$ ב. $f'(x) = \frac{k^2}{(k-x^2)^{1.5}} > 0$ ג. $y = \sqrt{kx}$ ד. $k = 4$

49 א. $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$ ב. 1. לא נכון 2. נכון 3. נכון 4. נכון ג. $g(x): (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$; $f(x): (0, \frac{1}{2})$

ד. אסף צודק. 50 א. 1. לא נכון 2. נכון 3. נכון ב. $h(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ג. לא, $x \neq 1$

ד. $I = h(x)$, $II = f(x)$ 51 א. 1. לא נכון 2. לא נכון 3. נכון 4. נכון ב. $k = 24$

ג. $(0,0) Min$, $(\pm 4, 32\sqrt{2}) Max$ ד. $I = g(x)$, $II = f(x)$, $III = h(x)$

52 $(1,7)$, $(2,16)$, קעירות כלפי מעלה: $x > 2$ או $x < 1$, קעירות כלפי מטה: $1 < x < 2$

53 $(2,1)$, קעירות כלפי מעלה: $x > 2$, קעירות כלפי מטה: $0 \neq x < 2$

54 קיצון: $\min(2,4)$. פיתול: $(4, \frac{8}{\sqrt{3}})$ 55 קיצון: $\min(\frac{1}{2}, -\frac{27}{16})$ פיתול: $(1,-1)$, $(2,0)$

56 $b = 3$, $a = 4$ 57 א. $x \neq 0$ ב. $\max(2, 2\frac{1}{4})$ ג. עולה: $0 < x < 2$ יורדת: $x < 0$, $x > 2$

ד. $(-1,0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ ה. $x = 0$, $y = 2$ ו. $(3, 2\frac{2}{9})$

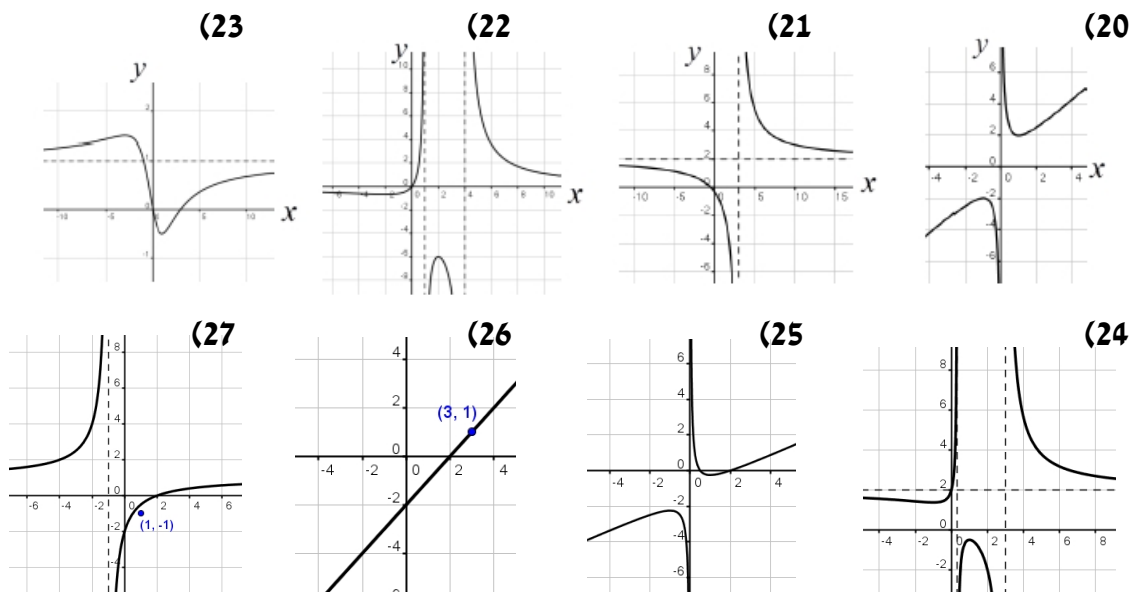
ז. קעירות כלפי מעלה: $x > 3$, קעירות כלפי מטה: $0 \neq x < 3$

58 א. $0 < x \neq 1$ ב. אין ג. יורדת בכל תחום הגדרתה. ד. אין

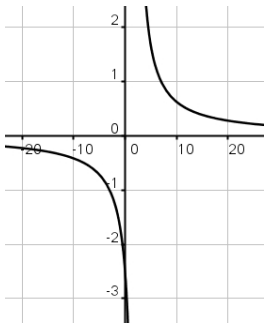
ה. $x = 1$, $y = 2$ נקודת אי הגדרה: $(0,0)$ ו. $(\frac{1}{9}, -1)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{9}$, קעירות כלפי מטה: $\frac{1}{9} < x < 1$

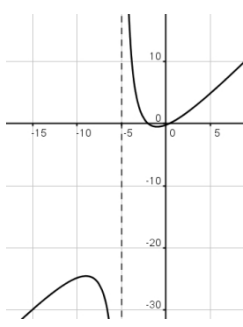
סקיצות לשאלות החקירה:



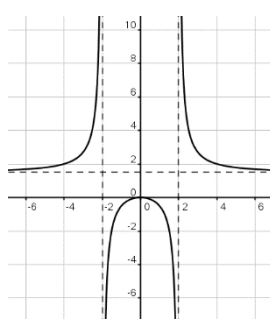
(34)



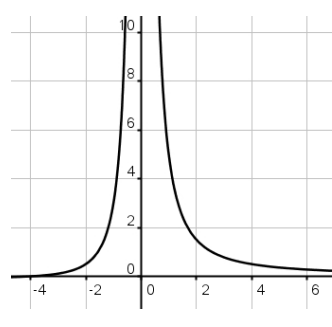
(31)



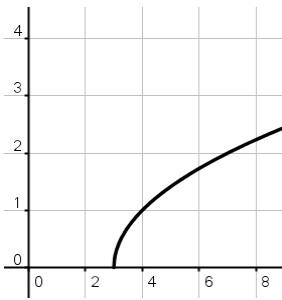
(29)



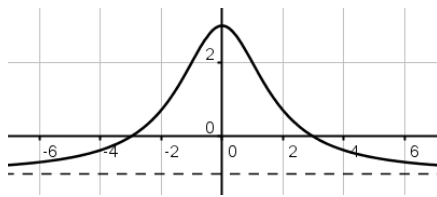
(28)



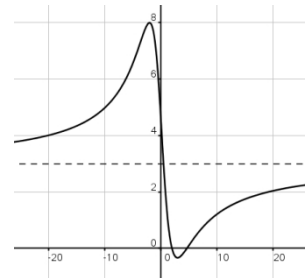
(37)



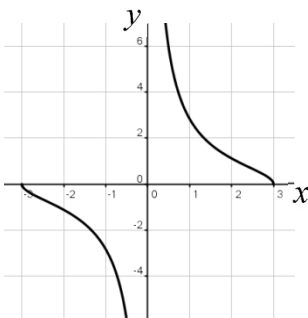
(36)



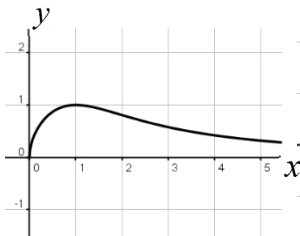
(35)



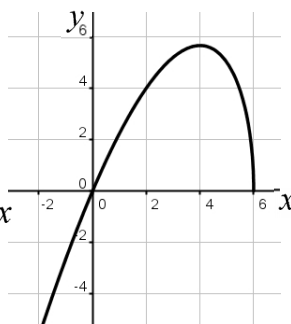
(41)



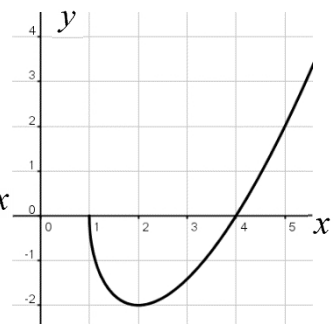
(40)



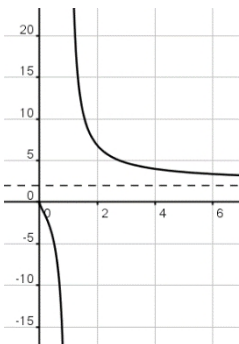
(39)



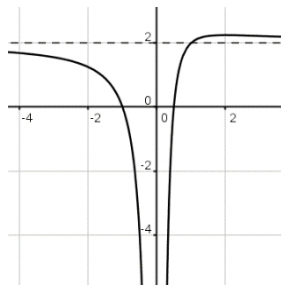
(38)



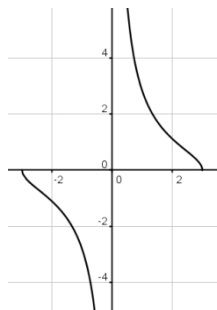
(58)



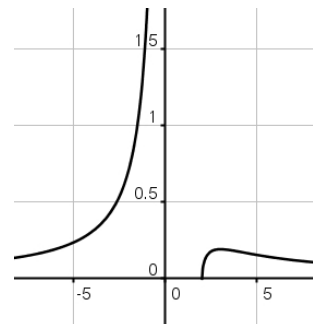
(57)



(45)



(42)



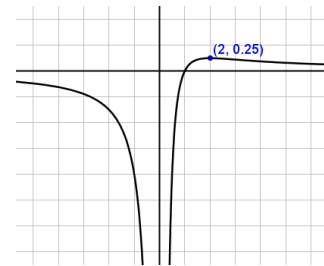
שאלה 59:

- א. 1. $x \neq 0$ 2. $(1, 0)$ 3. $x = 0, y = 0$ 4. $\max(2, 0.25)$ 5. עולה: $0 < x < 2$.
- יורדת: $x < 0, x > 2$ 6. $\left(3, \frac{2}{9}\right)$ 7. קעורה כלפי מעלה: $x > 3$.
- קעורה כלפי מטה: $x < 0, 0 < x < 3$.
- ב. 1. $x \neq -1$ 2. $(0, 0)$ 3. $x = -1, y = 2$ 4. $\min(0, 0)$ 5. עולה: $x < -1, x > 0$.
- יורדת: $-1 < x < 0$ 6. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$ 7. קעורה כלפי מעלה: $x < -1, -1 < x < \frac{1}{2}$.
- קעורה כלפי מטה: $x > \frac{1}{2}$.
- ג. 1. $x \neq \pm 2$ 2. $(0, 0)$ 3. $x = \pm 2$ 4. $\min(\sqrt{12}, 5.2), \max(-\sqrt{12}, -5.2)$.
5. עולה: $x < -\sqrt{12}, x > \sqrt{12}$ יורדת: $-\sqrt{12} < x < -2, -2 < x < 2, 2 < x < \sqrt{12}$.
6. $(0, 0)$ 7. קעורה כלפי מעלה: $-2 < x < 0, x > 2$.
- קעורה כלפי מטה: $x < -2, 0 < x < 2$.
- ד. 1. $x \neq -1$ 2. $(0, 0)$ 3. $x = -1$ 4. $\max(-3, -6.75)$ 5. עולה: $x < -3, x > -1$.
- יורדת: $-3 < x < -1$ 6. $(0, 0)$ 7. קעורה כלפי מעלה: $x > 0$.
- קעורה כלפי מטה: $x < -1, -1 < x < 0$.
- ה. 1. $x \neq 1$ 2. $(-1, 0), (0, -1)$ 3. $x = 1, y = 1$ 4. אין. 5. יורדת בכל ת.ה.
6. $\left(-3, \frac{1}{8}\right), (-1, 0)$ 7. קעורה כלפי מעלה: $x > 1, -3 < x < -1$.
- קעורה כלפי מטה: $x < -3, -1 < x < 1$.
- ו. 1. $x \neq 2, 5$ 2. $(0, -0.1), (-1, 0), (1, 0)$ 3. $x = 2, x = 5, y = 1$.
4. $\min(0.359, -0.11), \max(2.78, -3.89)$ 5. עולה: $0.359 < x < 2, 2 < x < 2.78$.
- יורדת: $x < 0.359, 2.78 < x < 5, x > 5$.
- ז. 1. $x \neq \pm 2$ 2. $(3, 0), (1, 0), (0, -0.75)$ 3. $x = \pm 2, y = 1$ 4. אין.
5. יורדת בכל ת.ה.

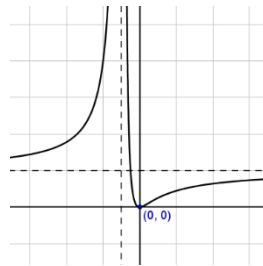
- ח. 1. $x \neq \pm 1$ 2. $(0,0)$ 3. $x = -1$ 4. $\min(0,0)$, $\max(-2,-4)$
5. עולה: $x > 0$, $x < -2$, $x \neq 1$ יורדת: $-1 < x < 0$, $-2 < x < -1$
6. אין. 7. קעורה כלפי מעלה: $x > -1$, $x \neq 1$ קעורה כלפי מטה: $x < -1$

סקיצות:

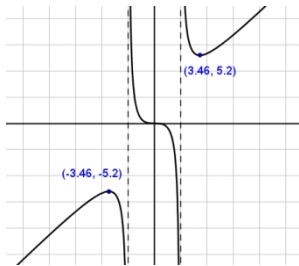
א.



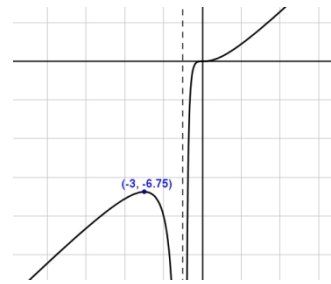
ב.



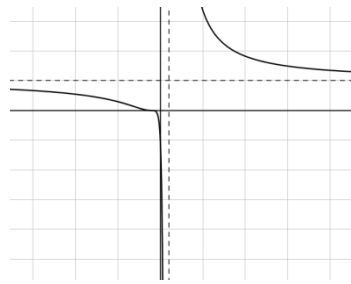
ג.



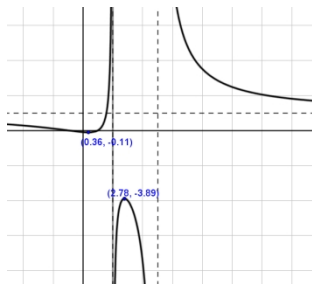
ד.



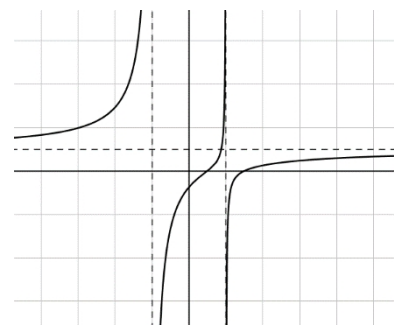
ה.



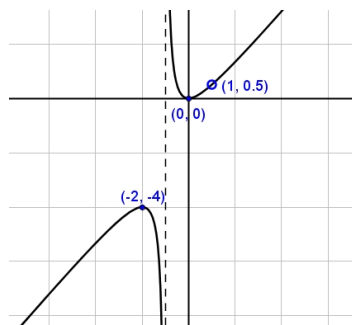
ו.



ז.



ח.



חקירת פונקציות עם פרמטר:

סיווג נקודות קיצון באמצעות "y :

אם הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודה החשודה לקיצון אז :

- אם $f''(x_1) > 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מינימום.
- אם $f''(x_1) < 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מקסימום.

שאלות:

(1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x) = x^3 - 12x$.

(2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x) = x^2 - 6x - 16$.

(3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x) = x^3 - 3b^2x$, $b > 0$ פרמטר. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$. $(a > 0)$. חקור לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{1-x^2}{(x-b)^2}$. $(b > 1)$. חקור לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

6 נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x\sqrt{b^2 - x^2}$ ($b > 0$).

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

7 נתונה הפונקציה: $y = \frac{x^2 - m}{ax - 4}$, a, m פרמטרים קבועים כאשר: $a > 0$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .

- מצא את הערך של הפרמטר m .
 - הצב את הערך של m שמצאת בסעיף א' והבע באמצעות a את:
 - תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 - האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.
 - סרטוט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות a בסעיף הקודם.
 - ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- y , נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר a .
 - נתון הישר: $y = k$.
- מצא עבור אילו ערכים של k אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

תשובות סופיות:

1) $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$ 2) $\min(3, -25)$ 3) $\min(b, -2b^3)$, $\max(-b, 2b^3)$

4) א. כל x ב. $\min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$, $\max\left(a, \frac{1}{a}\right)$ ג. עולה: $-a < x < a$, יורדת: $x < -a, x > a$.

ד. $(0, 0)$ ה. $y = 0$.

5) א. $x \neq b$ ב. $\max\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2 - 1}\right)$ ג. עולה: $x > b$ או $x < \frac{1}{b}$, יורדת: $\frac{1}{b} < x < b$.

ד. $\left(0, \frac{1}{b^2}\right)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ ה. $y = -1$, $x = b$.

6 א. $-b \leq x \leq b$ ב. $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}}, 2b^2\right)$, $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, -2b^2\right)$ קצה, $\max(-b, 0)$

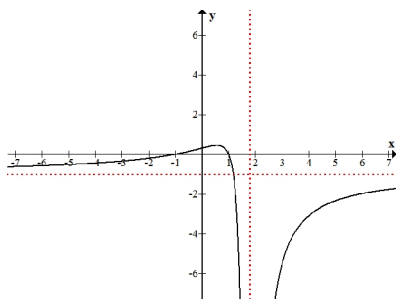
קצה, $\min(b, 0)$ עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}} < x < \frac{b}{\sqrt{2}}$ יורדת: $\frac{b}{\sqrt{2}} < x < b$, $-b < x < -\frac{b}{\sqrt{2}}$

ד. $(b, 0)$, $(-b, 0)$, $(0, 0)$

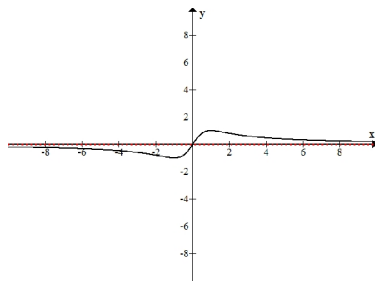
7 א. $m = 0$ ב. $x \neq \frac{4}{a}$ 2. $\text{Max}\left(0, 0\right)$, $\text{Min}\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$ 3. $x = \frac{4}{a}$ ד. $a = 2$ ה. $0 < k < 4$

סקיצות לשאלות:

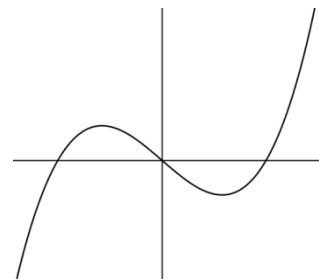
(5)



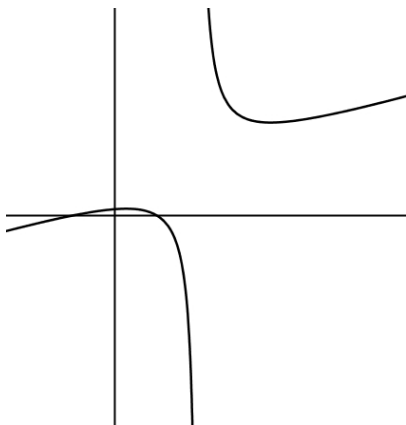
(4)



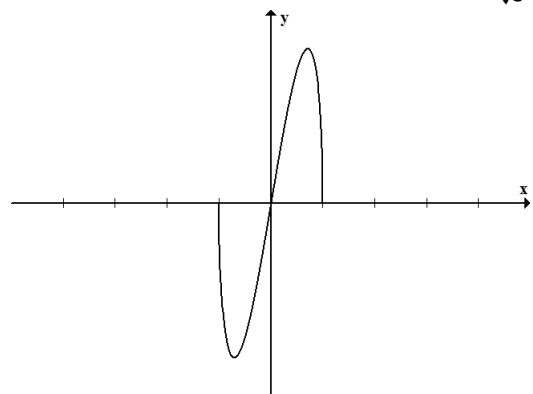
(3)



(7)



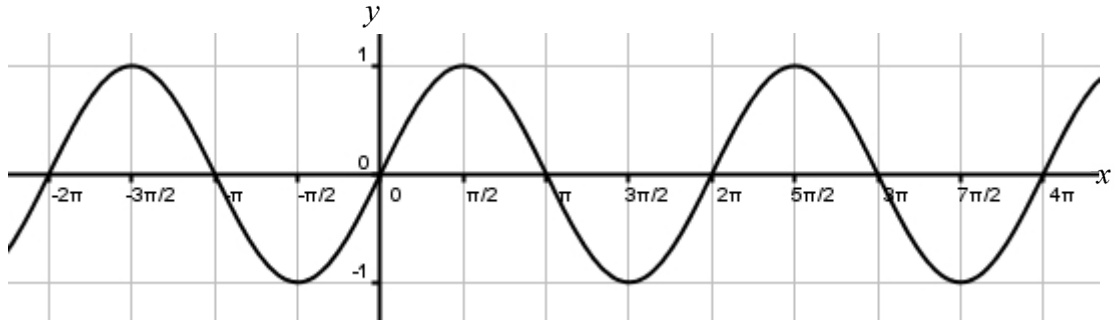
(6)



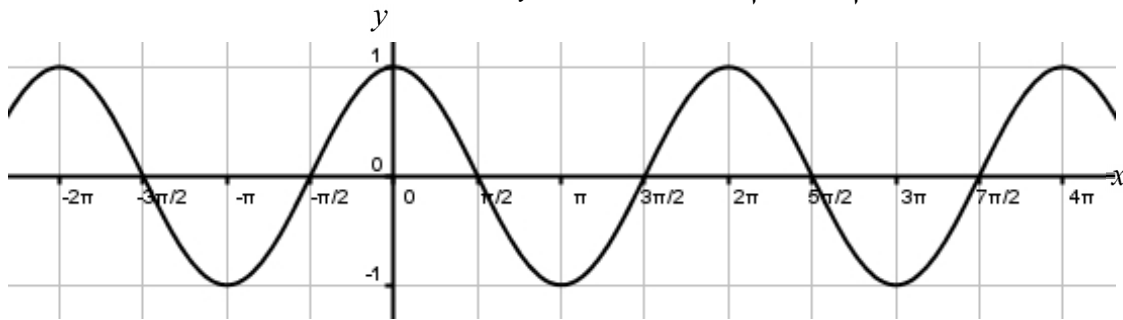
חקירת פונקציות טריגונומטריות:

הגדרות כלליות:

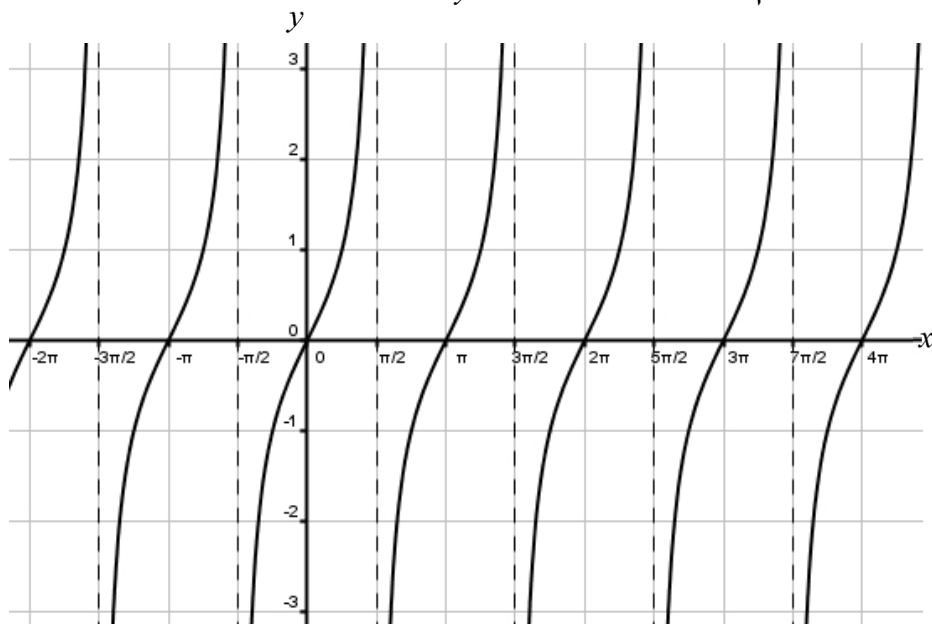
תיאור גרפי של פונקציית הסינוס: $y = \sin x$



תיאור גרפי של פונקציית הקוסינוס: $y = \cos x$



תיאור גרפי של פונקציית הטנגנס: $y = \tan x$



הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

זוגיות של פונקציות:

1. פונקציה $f(x)$ תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x) = f(-x)$.
2. פונקציה $f(x)$ תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x) = -f(-x)$.
3. פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

מחזוריות של פונקציות:

1. פונקציה $f(x)$ תיקרא מחזורית במחזור T אם היא מקיימת:
 $f(x+T) = f(x)$ לכל x בתחום הגדרתה.
2. מחזור של פונקציות טריגונומטריות:
 - הפונקציה $f(x) = \sin x$ מחזורית במחזור $T = 2\pi$ שכן: $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
 - הפונקציה $f(x) = \cos x$ מחזורית במחזור $T = 2\pi$ שכן: $\cos(x+2\pi) = \cos x$.
 - הפונקציה $f(x) = \tan x$ מחזורית במחזור $T = \pi$ שכן: $\tan(x+\pi) = \tan x$.
 - הפונקציה $f(x) = \cot x$ מחזורית במחזור $T = \pi$ שכן: $\cot(x+\pi) = \cot x$.
3. מחזור של פונקציות מהצורה: $y = a + c \cdot f(mx+n)$ (כאשר $f(x)$ מחזורית במחזור T) תלוי רק במקדם של x והוא: T/m . דוגמאות:
 - הפונקציה $f(x) = \sin(3x)$ מחזורית במחזור $T = 2\pi/3$.
 - הפונקציה $f(x) = 5 - 2\cos(2x - \pi)$ מחזורית במחזור $T = \pi$.
 - הפונקציה $f(x) = \tan(0.1x)$ מחזורית במחזור $T = \pi/0.1 = 10\pi$.

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin x + 3 \cos x + x$ ב. $f(x) = 2x \sin x + 4 \tan x$ ג. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin 3x + 2 \cos 5x$ ב. $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin^3 x$ ב. $f(x) = 2 \cos^4 x$
ג. $f(x) = \sin^2 x$ ד. $f(x) = \sin^3 2x$
ה. $f(x) = \cos^2 2x$ ו. $f(x) = \tan^2 4x$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$ ב. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ ב. $f(x) = \sin^4 2x - \cos^4 2x$
ג. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \cos x$ בנקודה $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \sin 2x$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{2}$.

(8) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \tan 3x$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{9}$.

(9) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $f(x) = 4 \sin^2 x$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = 1$ בתחום $[0, \pi]$.

10 שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sin x + a}$, $(a$ פרמטר) בנקודה שבה $y = 1$ בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}$. מצא את ערך הפרמטר a .

11 נתונה הפונקציה: $f(x) = a \sin^2 x - 5 \sin x + ax$, $(a$ פרמטר) בתחום: $0 \leq x \leq \pi$. ידוע כי הישר: $y = ax - 2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$.

- מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
- מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא: $m = 2$.
- האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2? נמק את תשובתך.
- כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

12 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x^2 + \cos^2 x$ ו- $g(x) = x^2 + \sin^2 x$.

- הוכח כי ההפרש: $f(x) - g(x)$ שווה ל- $\cos 2x$.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $-\pi < x < \pi$.
- ישר $x = t$, $(0 < t < 1)$ חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה $g(x)$ לשיפוע המשיק של גרף הפונקציה $f(x)$ הוא 1. מצא את כל הערכים האפשריים עבור t .

13 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

- $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x}$ $[0, 2\pi]$
- $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ $[-\pi, \pi]$
- $f(x) = \tan x$ $[0, 2\pi]$

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \sin x + \cos x$ בתחום: $[0; 2\pi]$.

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$ בתחום: $[0; 2\pi]$.

16 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$ בתחום: $[0; 2\pi]$.

17 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{3} \sin^3 x - 2 \sin x$ בתחום: $[0; 1.5\pi]$.

(18) לפונקציה: $f(x) = a \sin x + b \sin^3 x$ (פרמטרים a, b) יש נקודת קיצון

ששיעוריה $\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(19) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$ בתחום: $[0: \pi]$.

(20) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$ בתחום: $[0: \pi]$.

(21) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \tan x$ בתחום: $[-\pi: \pi]$.

(22) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \sin^2 x - 2 \sin x$ בתחום: $[0: 2\pi]$.

(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2 \cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0, \pi]$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4 \sin 2x - 2$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים את הישר $y = k$. היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי k הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

- ה. העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה. כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר x . מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(27) נתונה הפונקציה: $y = \cos x + \frac{1}{m} \sin mx$, $1 < m < 3$, (m פרמטר).

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר: $x = -\frac{\pi}{2}$.

- מצא את ערך הפרמטר m .
- האם הנקודה שבה: $x = -\frac{\pi}{2}$ היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה. אם לא נמק מדוע.
- מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום: $0 < x < 2\pi$.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

(28) נתונה הפונקציה הבאה: $y = (\sin x + 1) \cdot \cos x$ בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה: $(\sin x + 1) \cdot \cos x = 1$ בתחום הנתון?

(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

- מצא בתחום $[0, \pi]$ את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה ואת נקודות הקיצון שלה.
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi, \pi]$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x - 3 \tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(31) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi < x < 0.25\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

(32) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan(x^2 - 4x)$ בתחום $[0, 4]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(33) נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cos x - x$ בתחום: $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x מאפסות את הנגזרת של הפונקציה.
- קבע אלו נקודות מנקודות החיתוך הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון ומצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

(34) נתונה הפונקציה: $y = (\cos x + k)^2$, פרמטר, בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{2\pi}{3}$.

- מצא את k וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

35) נתונה הפונקציה: $f(x) = m \sin x + k \cos^2 x$, (פרמטר m).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \pi$ שמשוואתו: $y = -6x + 6\pi + \sqrt{7}$.

- מצא את ערכי הפרמטרים k ו- m .
- מצא את נקודות הקיצון בתחום: $-0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בתחום הנ"ל.

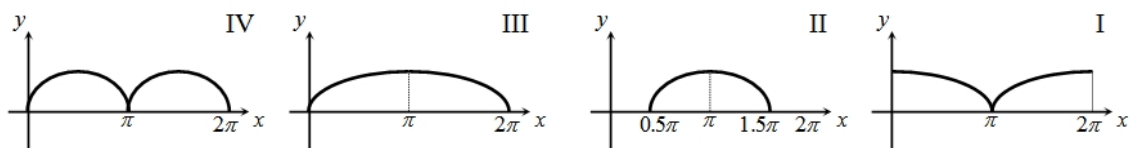
36) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan x + kx$, (פרמטר k) בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

- מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון. הפונקציה: $g(x) = \tan^2 x + kx$ חותכת את הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- מצא את ערך הפרמטר k .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

37) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{-\cos x}$ ו- $g(x) = \sqrt{\cos x + 1}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$ והפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

- האם הגרפים חותכים את ציר ה- x בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.
- האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגה.
- לפניך ארבעה איורים: I, II, III, ו-IV. קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של $f(x)$ ואיזה מתאר את הגרף של $g(x)$. נמק.



תשובות סופיות:

(1) א. $\cos x - 3\sin x + 1$. ב. $2\sin x + 2x\cos x + \frac{4}{\cos^2 x}$. ג. $\frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$.

(2) א. $3\cos 3x - 10\sin 5x$. ב. $-\frac{2}{1 + \sin 2x}$.

(3) א. $3\sin^2 x \cdot \cos x$. ב. $-8\cos^3 x \sin x$. ג. $\sin 2x$. ד. $6\sin^2 2x \cos 2x$. ה. $-2\sin 4x$. ו. $\frac{8 \tan 4x}{\cos^2 4x}$.

(4) א. $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$. ב. $\frac{\cos^2 2x + 1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$ (5) א. $2\sin 2x$. ב. $4\sin 4x$. ג. $-\sin 4x$.

(6) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (7) $y = -2x + \pi$ (8) $y = 12x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$.

(9) $y = -2\sqrt{3}x + \frac{5\pi\sqrt{3}}{3} + 1$, $y = 2\sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 1$ (10) $a = \frac{1}{2}$.

(11) א. $f(x) = 2\sin^2 x - 5\sin x + 2x$, $a = 2$. ב. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right)$. ג. לא . ד. $y = 2x - 3$.

(12) ב. $\left(\frac{3\pi}{4}, 6.05\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, 1.11\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}, 1.11\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{4}, 6.05\right)$. ג. $t_{1,2} = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.

(13) א. $0 \leq x \leq 2\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. ב. $-\pi \leq x \leq \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$.

ג. $0 \leq x \leq 2\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

(14) $\min(0, 1)$ קצה , $\max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, $\min\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$, $\max(2\pi, 1)$ קצה .

(15) $\min(0, 0)$ קצה , $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$, $\min\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)$, $\max(2\pi, -\pi)$ קצה .

(16) $\max\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ מוחלט . (17) $\min\left(\frac{\pi}{2}, -2\frac{2}{15}\right)$ (18) $\max\left(\frac{3\pi}{2}, 2\frac{2}{15}\right)$, $a = 3$, $b = -4$.

(19) $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \pi$ (20) $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ (21) $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

(22) $\left(\frac{7\pi}{6}, 1\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{11\pi}{6}, 1\frac{1}{4}\right)$. א. $0 < x < 2\pi$.

ב. $\max(2\pi, 2\pi + 2)$ קצה , $\min\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$, $\min(0, 2)$ קצה .

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{6}$ תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. ד. $(0, 2)$.

ה. אין . ו. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

24 א. $0 < x < \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ד. $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$.

ה. אנכית: $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$.

25 א. $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right); \left(\frac{\pi}{12}, 0\right); (0, -2)$ ב. $\max(\pi, -2), \min\left(\frac{3\pi}{4}, -6\right), \max\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \min(0, -2)$.

ד. $-6 < k < 2$ וגם $k \neq -2$ ה. $\frac{\pi}{2}$.

26 א. $(\pi, 0), (0, -2)$ ב. $\max(\pi, 0), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right), \max(0, -2)$.

ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi, \frac{\pi}{3} < x < \pi$ $\min\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right), \max(2\pi, -2)$

יורדת: $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi, 0 < x < \frac{\pi}{3}$

27 א. $m = 2$ ב. נקודת פיתול ג. 2 נקודות ד. $(0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0)$.

28 א. $(0, 1), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ב. $(1.5\pi, 0), \left(\frac{5\pi}{6}, -1.29\right), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right), (0, 1)$ ד. 2 פתרונות.

29 א. חיתוך: $(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ קיצון: $\min(\pi, -2)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right), \min(0, 0)$ קצה.

30 א. $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$ ב. $\min\left(\frac{2\pi}{3}, 13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$.

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ קצה $\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$ קצה.

גם $x \neq \frac{\pi}{2}$ ד. $(0, 0)$ ה. אנכית: $x = \frac{\pi}{2}$ ו. $(0, 0)$ ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$

או $-\frac{\pi}{6} < x < 0$, קעירות כלפי מטה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

31 א. $(\pm 0.23\pi, 0), (0, 0)$ ב. $x = \pm 0.25\pi$ ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right), \min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right)$.

32 א. $0 \leq x \leq 4$ וגם $x \neq 0.44, x \neq 3.56$ ב. $\max(0, 0)$ קצה, $\min(2, -1.16)$, $\max(4, 0)$ קצה.

33 א. $(-2\pi, 0), (2\pi, 0), (0, 0)$ ב. 1. $\min(-2\pi, 0), \max(2\pi, 0)$, 2. $(0, 0)$ פיתול.

34 א. $k = 0.5, y = (\cos x + 0.5)^2$ ב. $(\pi, 0.25)$ ג. לא.

35 א. $k = \sqrt{7}, m = 6$ ב. $(1.5\pi, -6), (0.5\pi, 6), (-0.5\pi, -6)$ ג. בשתי נקודות.

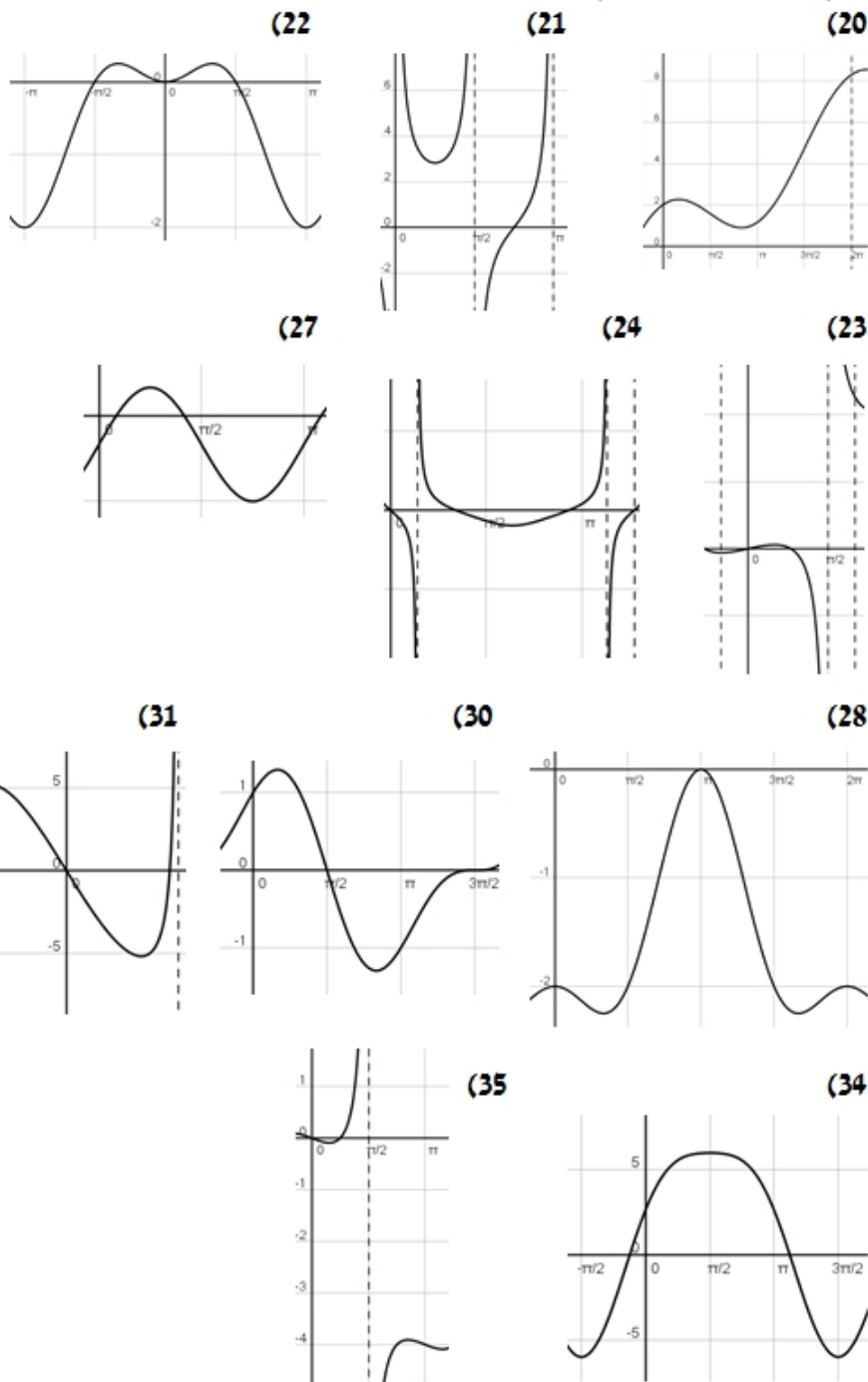
36 א. $x = 0.5\pi$ ב. $k = -\frac{4}{\pi} \approx -1.27$

ג. $Max(0,0)$, $Min(0.15\pi, -0.07)$, $Max(0.84\pi, -3.9)$, $Min(\pi, -4)$

37 א. כן. ב. $(1.5\pi, 0)$, $f(x):(0.5\pi, 0)$, $g(x):(\pi, 0)$. כן. $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ג. $Min(1.5\pi, 0)$, $Max(\pi, 1)$, $Min(0.5\pi, 0)$. ד. איור I - $g(x)$. איור II - $f(x)$.

סקיצות לשאלות החקירה:



פרק 14 - בעיות קיצון:

שלבי עבודה:

1. נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
2. נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
3. נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
4. נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ את ערך/ערכי ה- x .
5. נוודא שערך ה- x מסעיף ד' הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
6. ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

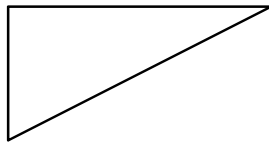
בעיות קיצון עם מספרים:

- 1) מבין כל זוגות המספרים שסכומם 14 מצא את הזוג שמכפלתו מקסימלית.
- 2) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- 3) מצא את המספר החיובי שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- 4) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
 - א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
 - ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
 - ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- 5) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x + 6y = 60$.
 - א. הבע את y באמצעות x .
 - ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
 - ג. מהי המכפלה הנ"ל?
- 6) נתונים שני מספרים חיוביים p ו- q שסכומם a . הראה שכאשר מתקיים $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ ערך הביטוי $p^n q^m$ (n ו- m טבעיים) מקסימלי.

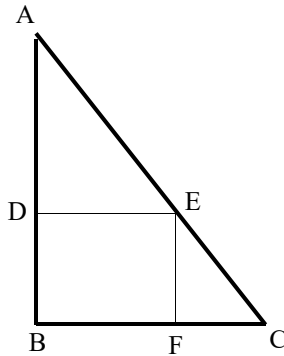
בעיות בהנדסת המישור:

7) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

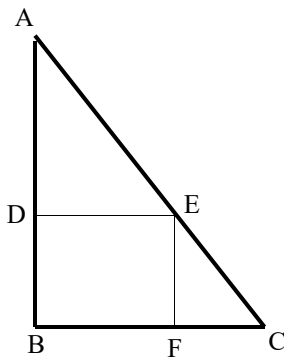
8) א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם a מצא את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.
 ב. הוכח: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.



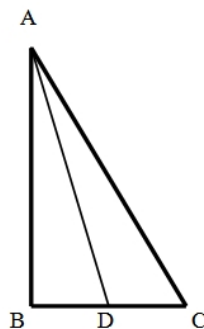
9) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.
 א. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי שטח המשולש יהיה מקסימלי?
 ב. מהו השטח המקסימלי?
 ג. מה יהיה אורך היתר במשולש במקרה זה?



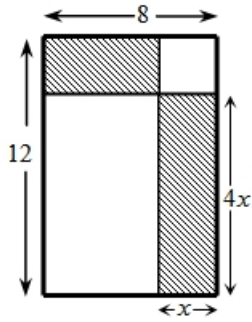
10) במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע EDBF הוא מלבן. נתון: $BC = 16_{cm}$, $AB = 20_{cm}$. מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



11) במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע EDBF הוא מלבן. נתון: $BC = b$, $AB = a$. מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

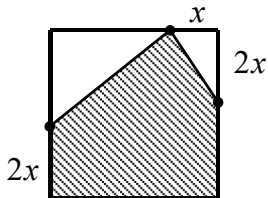


12) במשולש ישר הזווית ABC, ($\sphericalangle B = 90^\circ$) הוא תיכון לניצב BC. ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ. מצא מה צריכים להיות אורכי הניצבים עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.

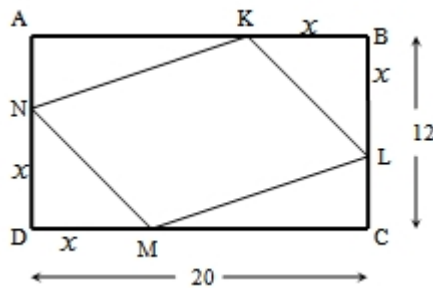


13) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$ על צלעות המלבן כך שנוצרים המלבנים המקווקוים. מצא את x עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.

14) נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ. מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור כך שנוצר המחומש המקווקו. מצא מה צריך להיות ערכו של x עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.

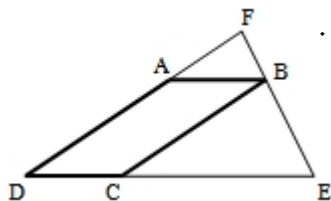


15) הנקודות K, L, M, N מקצות קטעים שווים במלבן $ABCD$



כך ש: $BK = BL = DM = DN = x$.
 צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.
 א. הבע באמצעות x את סכום שטחי המשולשים: $\triangle AKN + \triangle KBL + \triangle CLM + \triangle DNM$
 ב. מצא מה צריך להיות x כדי ששטח המרובע $LKNM$ יהיה מקסימלי.
 ג. מה הוא השטח של המרובע $LKNM$ במקרה זה.

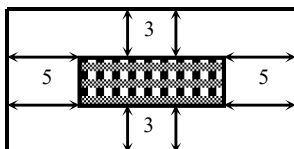
16) המרובע $ABCD$ הוא מקבילית. מהקדקוד B מעבירים את הצלע EF הנפגשת



עם המשכי הצלעות DC ו- AD . ידוע כי מידות המקבילית הן: 2 ס"מ $AB =$, 8 ס"מ $AD =$. מסמנים את אורך הצלע DE ב- x .
 א. הבע באמצעות x את אורך הצלע DF .
 ב. מצא את x עבורו סכום הצלעות DE ו- DF הוא מינימלי.
 ג. מה הוא הסכום המינימלי?

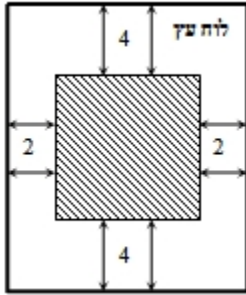
17) חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ".

תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור). יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל אותו את השאלה הבאה:



"יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר. מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?"

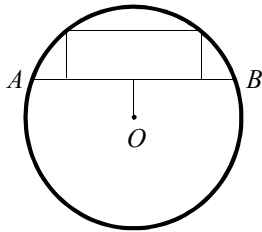
א. עזור לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראה דרך חישוב.
 ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?



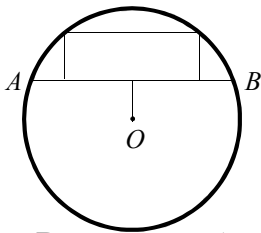
18 אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון 4- ס"מ (ראה איור). כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).

א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

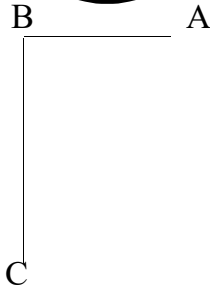
ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?



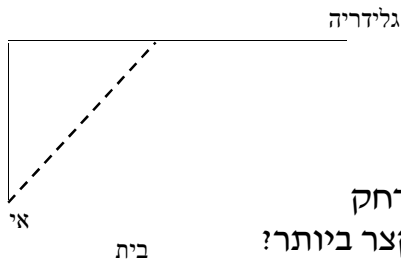
19 במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ cm העבירו מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 cm. במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט. מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



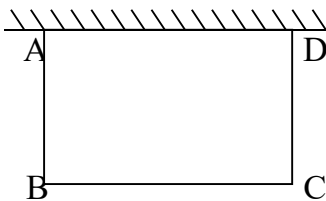
20 במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא a . במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט. מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



21 שני הולכי רגל יוצאים בו זמנית לדרכם, האחד מעיר A מערבה לעיר B והשני מעיר B דרומה לעיר C. המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ. מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש. כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי? מצא גם את המרחק המינימלי.

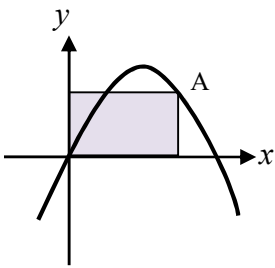


22 אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה. האדם שוחה במהירות של 8 קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש. לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?

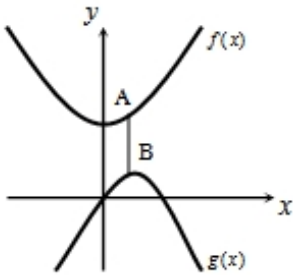


23 אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:

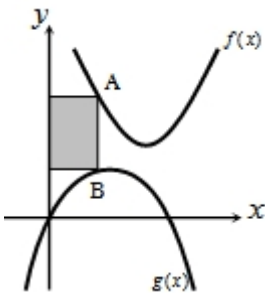


24 נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בסרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



25 נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 12$ ו- $g(x) = 2x - x^2$ כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.

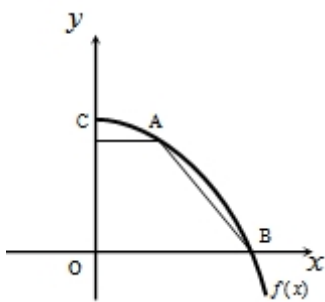
26 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$



כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

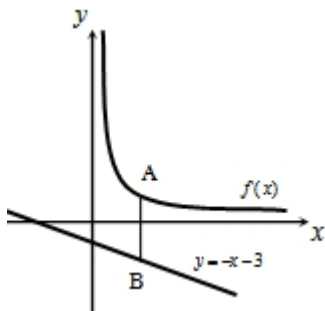
א. הבע באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
 ב. מצא את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
 ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?

27 נתונה הפונקציה: $f(x) = 36 - x^2$. על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A.

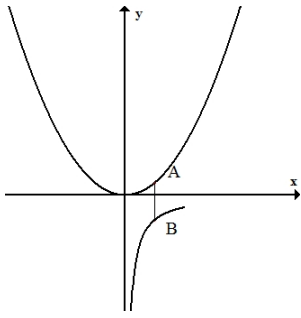


מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה- x שחותך את ציר ה- y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ו- O ראשית הצירים.

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
 ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?



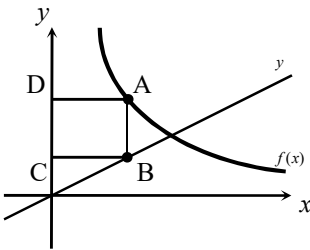
28 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{x}$ ונתון הישר: $y = -x - 3$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הישר כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



(29) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ו- $g(x) = -\frac{1}{x}$.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ונקודה B על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצא את שיעורי הנקודות A ו-B עבורן אורך הקטע AB מינימלי.

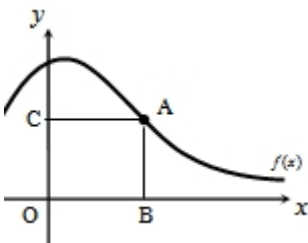
(30) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y = \frac{9x}{25}$.



הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- y כך שנוצר המלבן ABCD. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

- הבע באמצעות t את היקף המלבן ABCD.
- מצא את t עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.
- מה יהיה ההיקף במקרה זה?

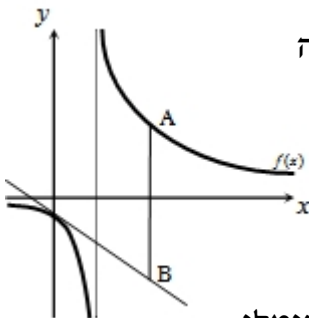
(31) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x-1}$ והישר $y = 2x$. בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן. מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.



(32) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$ בתחום: $x \geq 0$.

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור.

- מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.
- מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הני"ל.

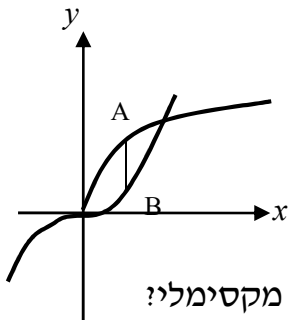


(33) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$. מעבירים משיק לגרף הפונקציה

דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

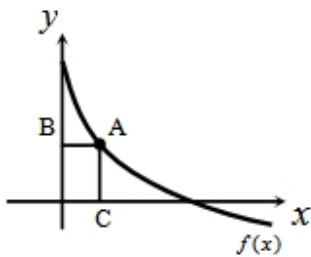
- מצא את משוואת המשיק.
- מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
- מצא את שיעורי הנקודה A עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.
- מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

34) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$. מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.



35) נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



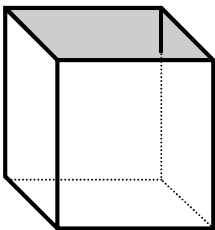
36) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB=AC$).

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 6 - 3\sqrt{x}$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C כמתואר באיור. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t. א. הבע באמצעות t את סכום הקטעים AC+AB. ב. מצא את ערכו של t עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

37) נתונות הפונקציות $f(x) = 1 - x^2$ ו- $g(x) = bx^2$ ($b > 0$). הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B. מצא את ערכו של b שבעבורו הקטע AO מינימלי (O – ראשית הצירים).

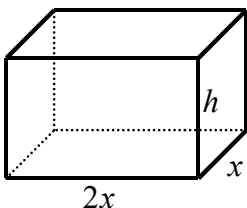
בעיות קיצון בהנדסת המרחב:

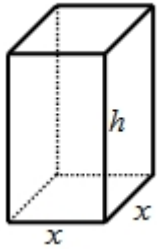
38) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר. מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.



39) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח פניה (ללא המכסה) הוא 75 סמ"ר. מצא את אורך צלע הבסיס של התיבה שנפחה הוא מקסימלי.

40) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה כמתואר באיור. ידוע כי גובה התיבה h וצלע המלבן הקטנה x מקיימים: $x + h = 9$. מצא מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.



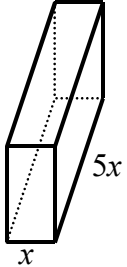


41) נתונה תיבה שגובהה הוא h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא x . נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים: $4x + h = 63$.

א. הבע את h באמצעות x .

ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x .

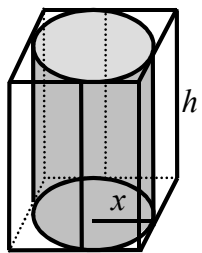
ג. מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?



42) ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק. יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5 מרוחבו כמתואר באיור הסמוך. כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת ולכן הוא רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח שעליו להשתמש בכדי להשיג את מבוקשו. מצאו את כמות הפח המינימלית.

43) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה דרושים שני חומרים להם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון. מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

44) מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k מצא את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



45) באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- x וגובהו ב- h . ידוע כי הסכום של x ו- h הוא 12 ס"מ.

א. הבע באמצעות x את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. 1. הבע באמצעות x את נפח הגליל.

2. הבע באמצעות x את נפח התיבה.

ג. מצא את x עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מינימלי.

46) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא k ושטח המעטפת שלה הוא S . הוכח: $S < 2k^2$.

47) הוכח שמכל החרוטים הישרים שנפחם πk סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ.

(שטח מעטפת של חרוט הוא πRl , כאשר l הוא הקו היוצר של החרוט).

בעית קיצון עם תנועה:

48) מהירותו של רכב היא v קמ"ש ועליו לנסוע דרך של S ק"מ.

לרכב יש הוצאות נסיעה של $\frac{v}{400}$ נה לכל ק"מ נסיעה ו- $48 + \frac{v^2}{200}$ נה לכל שעת נסיעה.

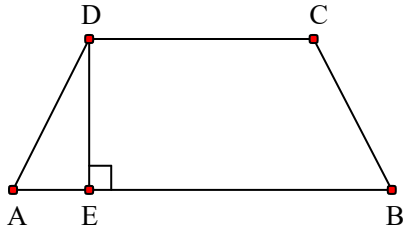
הראה שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

תשובות סופיות:

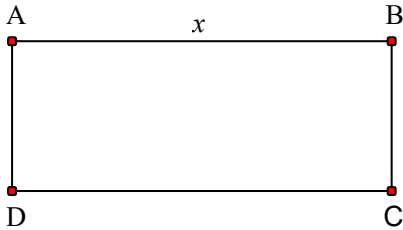
- (1) 7,7 (2) 8,8,8 (3) 1 (4) 12,12,12 א. ב. 12,12,8 ג. מקרה א'.
- (5) א. $y = 10 - \frac{x}{6}$ ב. $y = 5$, $x = 30$ ג. $M = 22500$.
- (7) 8 יח"ר. (8) א. 2.5 ס"מ. (9) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 18 סמ"ר ג. $6\sqrt{2} \approx 8.48$ ס"מ.
- (10) 80 סמ"ר $S = \frac{ab}{4}$ (11) יחידות שטח. (12) 4 ס"מ, 16 ס"מ.
- (13) $x = 2.75$ (14) $x = 6$ (15) $2x^2 - 32x + 240$ א. ב. $x = 8$ ג. 128 סמ"ר $S =$.
- (16) א. $DF = \frac{8x}{x-2}$ ב. $L = \frac{x^2 + 6x}{x-2}$, $x = 6$ ג. $L = 18$.
- (17) א. 6 ס"מ X 10 ס"מ ב. 12 ס"מ X 20 ס"מ.
- (18) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ ב. $S = 98$.
- (19) 92 ס"מ (20) $2\sqrt{5}R - 2a$ יחידות אורך. (21) 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק"מ.
- (22) $2\frac{1}{3}$ ק"מ. (23) 4X6 (24) A(4,8) (25) A(0.5,12.25).
- (26) א. $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$ ב. $t = 1$ ג. $S = 8$ (27) א. A(2,32) ב. $S = 128$.
- (28) A(2,2) (29) A(1, $\frac{1}{2}$), B(1,-1).
- (30) א. $P = \frac{1.28t^2 + 0.72t + 16}{t-1}$ ב. $t = 4\frac{3}{4}$ ג. $P = 12.88$ ס"מ (31) 2 X 1.
- (32) א. A(2,2) ב. A(0,4) (33) א. $y = -3x - 5$ ב. A(4,7) ג. $AB = 24$.
- (34) $(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}})$ (35) A(1,2) (36) א. $l = t + 6 - 3\sqrt{t}$ ב. $t = 2.25$ (37) $b = 1$.
- (38) 4X4X4 (39) 5 ס"מ. (40) בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.
- (41) א. $h = 63 - 4x$ ב. $p = -14x^2 + 252x$ ג. $x = 9$ (42) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו-5 ס"מ.
- (43) 8X6X3 ס"מ. (44) $V = \frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח.
- (45) א. $2x$ ב. 1. $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$ 2. $V = 48x^2 - 4x^3$ ג. $x = 8$.

בעיות קיצון – שאלות שונות:

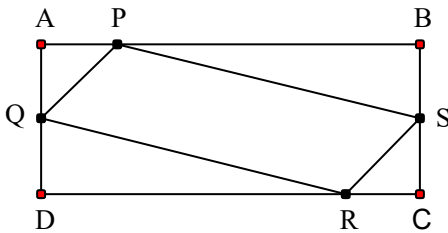
בעיות בהנדסת המישור:



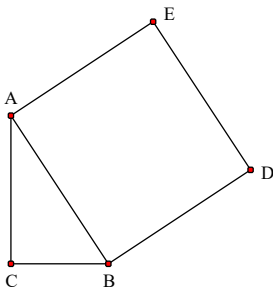
- 1) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB \parallel CD$) אורך השוק הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ. DE הוא הגובה מקדקוד D (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הקטע AE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?



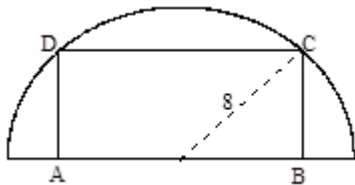
- 2) נתון מלבן ABCD. נסמן ב- x את אחת מצלעות המלבן (ראה ציור).
 א. אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ בטא באמצעות x את שטח המלבן.
 ב. אם היקף המלבן הוא p מצא מה צריכות להיות אורכי הצלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי (הבע את אורכי הצלעות באמצעות p).



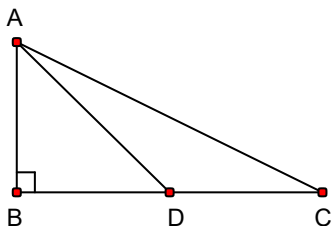
- 3) נתון מלבן ABCD כך ש- $AD = BC = 5$ ס"מ, $AB = CD = 10$ ס"מ. על הצלעות המלבן מקצים קטעים: $AP = AQ = CS = CR = x$ (ראה ציור). מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח המקבילית PQRS יהיה מקסימלי?



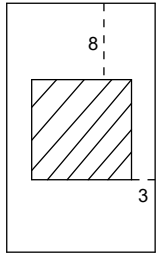
- 4) במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) סכום אורכי הניצבים הוא 8 ס"מ. על היתר AB בונים ריבוע ABDE. מה צריכים להיות אורכי הניצבים, כדי ששטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי.



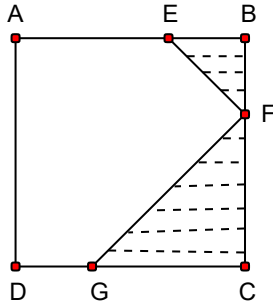
- 5) בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס"מ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB של המלבן מונחת על הקוטר, והקדקודים C ו-D מונחים על הקשת (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



- 6) במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$), סכום אורכי הניצבים הוא 30 ס"מ. AD הוא תיכון לניצב BC. חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים, על מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.

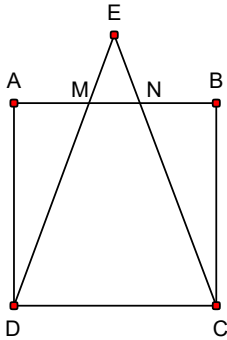


7) בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ"ר. רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס"מ, ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס"מ. מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד כדי שהשטח המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח המקווקו בציור).

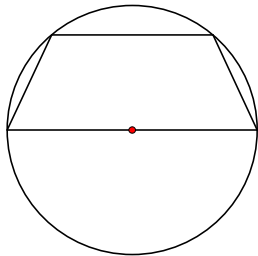


8) בריבוע ABCD הנקודות E, F, G נמצאות על הצלעות AB, BC, DC בהתאמה, כך ש- $BE = BF$, $CF = CG$ (ראה ציור). נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ. א. סמן ב- x את BF ואת BE, והבע באמצעות x את הסכום של שטחי המשולשים EBF ו-FCG (השטח המקווקו בציור).

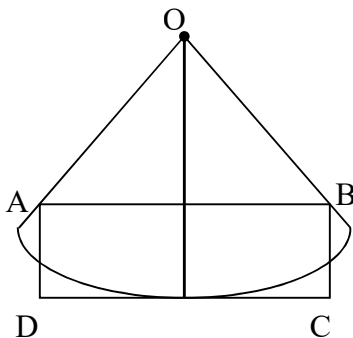
ב. 1. מצא את x שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא מינימלי.
2. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.



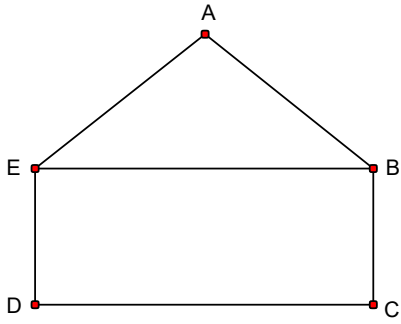
9) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ. E היא נקודה כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא שוו"ש ($ED = EC$). שוקי המשולש חותכות את הצלע AB בנקודות M ו- N (ראה ציור). מצא מה צריך להיות אורך הקטע AM כדי שהסכום של שטחי המשולשים AMD, EMN, BNC יהיה מינימלי.



10) נתון מעגל שרדיוסו R . במעגל זה חסום טרפז שוו"ש, כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה ציור). מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה, הבע באמצעות R את אורך הבסיס הקטן בטרפז ששטחו מקסימלי.

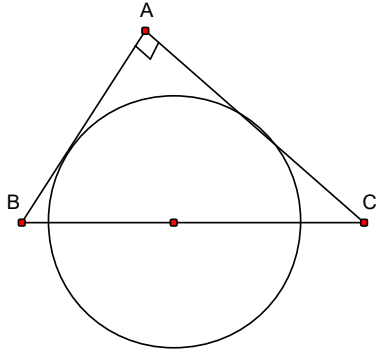


11) נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ. בונים מלבן ABCD, כך שרבע המעגל משיק לצלע DC בנקודת האמצע שלה, והקודקודים A ו- B נמצאים על הרדיוסים התוחמים את הגזרה (ראה ציור). מבין כל האלכסונים של המלבנים ABCD שנוצרים באופן זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.



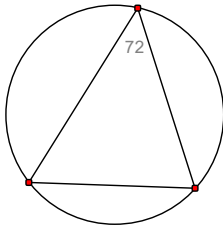
12) ABCDE הוא מחומש המורכב

ממשולש ABE ומלבן EBCD (ראה ציור).
נתון: $BC = 2$ ס"מ, $AB = AE = 4$ ס"מ.
מצא את השטח של המחומש ששטחו מקסימלי.



13) מתבוננים בכל המשולשים ישרי הזווית ABC

החוסמים חצי מעגל שרדיוסו R כמתואר בציור.
מהן זוויות המשולש שסכום הניצבים שלו הוא מינימלי?

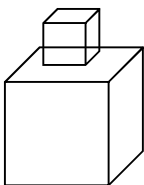


14) במעגל שרדיוסו R חסומים משולשים כך שהגודל של

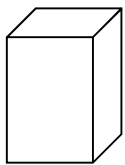
הזווית בכל אחד מהמשולשים הוא $\frac{2\pi}{5}$.

מצא את הזוויות במשולש בעל ההיקף המקסימלי.

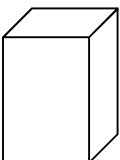
בעיות בהנדסת המרחב:



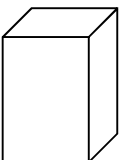
15) גובהו של "מגדל" הבנוי משתי קוביות (לאו דווקא שוות) הוא 8 ס"מ. מה צריך להיות אורך המקצוע של הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי הקוביות) יהיה מינימלי?



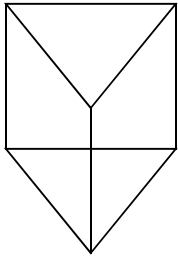
16) בונים תיבה שגובהה y ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך צלעו x ס"מ (ראה ציור), כך שההיקף של כל אחת מהדפנות הצדדיות שווה ל-12 ס"מ. מה צריך להיות אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



17) יש לבנות תיבה פתוחה מלמעלה, שבסיסה ריבוע ושטח פניה 75 סמ"ר (במקרה זה שטח הפנים מורכב מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס וגובה) שנפחה מקסימלי.

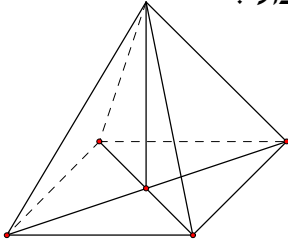


18) יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה, שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק. מהו האורך המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?

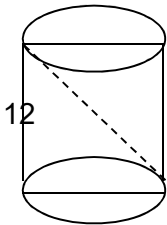


- 19) מחוט שאורכו a ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות.
מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע הבסיס x ואיזה חלק לגובה y כדי שיתקיים (בטא ע"י a):
א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי.
ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.

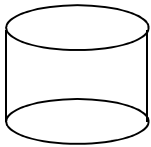
- 20) מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות, שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא a , מצא את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.



- 21) מכל הפירמידות הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

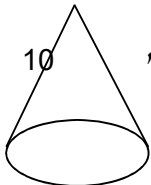


- 22) אלכסון החתך הצירי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה ציור). מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



- 23) נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק. המיכל עשוי כולו מפח. הראה כי שטח הפח הוא מינימלי

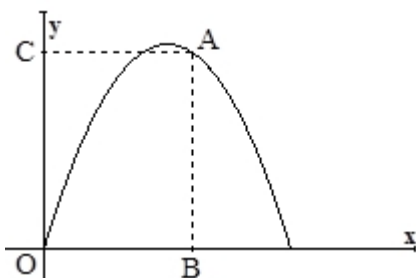
כאשר רדיוס הבסיס הוא $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ מטר.



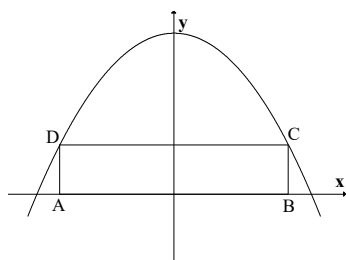
- 24) מבין כל החרוטים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 10 ס"מ (ראה ציור), מהו נפח החרוט שנפחו מקסימלי?

בעיות בפונקציות וגרפים:

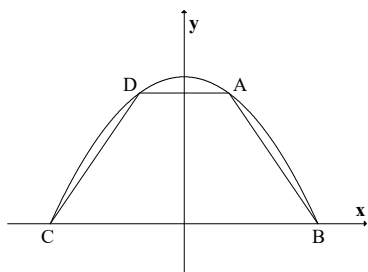
- 25) מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה $y = -x^2 + 5x$, מורידים אנכים לצירים



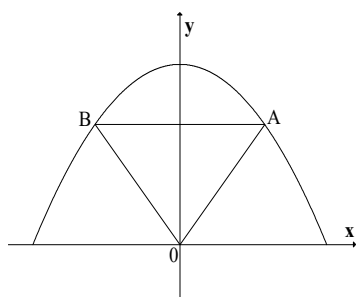
- כך שנוצר מלבן ABOC (ראה ציור).
א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?
ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?



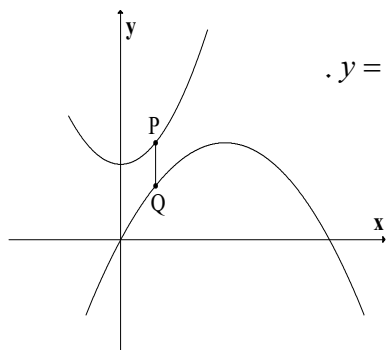
(26) בפרבולה $y = 9 - x^2$ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB מונחת על ציר ה- x (ראה ציור).
מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



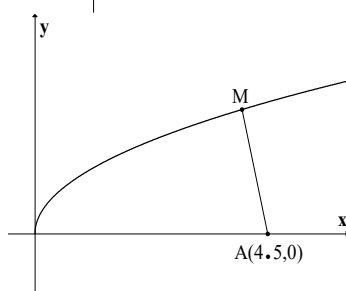
(27) טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה $y = 9 - x^2$ לבין ציר ה- x (ראה ציור).
א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?
ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.



(28) נתונה הפרבולה $y = -x^2 + 12$. ישר המקביל לציר ה- x חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B (ראה ציור).
מחברים את הנקודות A ו-B עם ראשית הצירים, O.
א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?
ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB?

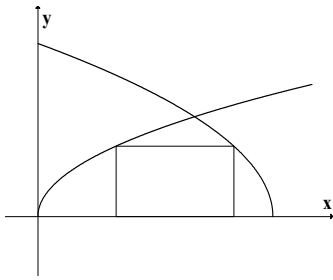


(29) נתונים הגרפים של שתי פרבולות: $y = \frac{1}{2}x^2 + 7$, $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$.
קו מקביל לציר ה- y חותך את שתי הפרבולות בנקודות P ו-Q (ראה ציור). מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה, מצא את האורך המינימלי של הקטע PQ.

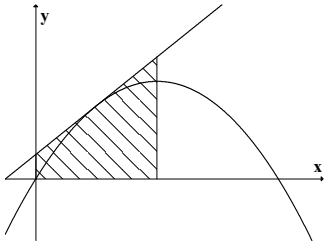


(30) נתון גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$. על ציר ה- x נתונה הנקודה $A(4.5, 0)$ (ראה ציור).
מצא על גרף הפונקציה נקודה M, כך שריבוע המרחק AM יהיה מינימלי.

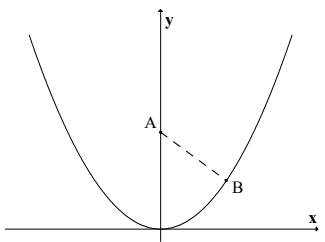
(31) מצא על הישר $f(x) = 3x - 4$ את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $(0, 1)$.



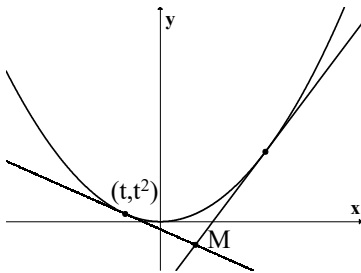
32 בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{3x}$, $g(x) = \sqrt{36-6x}$. מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה- x , כמתואר בציור. מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי למלבן שחסום באופן זה.



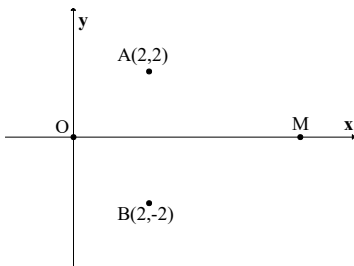
33 דרך איזו נקודה על הפרבולה $y = -x^2 + 2x$ צריך להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי המשיק והישרים: $x=0$, $x=1$ ו- $y=0$ (השטח המקווקו שבציור) יהיה מינימלי?



34 נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $y = x^2$ ברביע הראשון. A היא הנקודה $(0, a)$ כאשר ידוע כי $a > 0.5$ (ראה ציור). א. בטא באמצעות a את שיעורי הנקודה B, שעבורה המרחק AB הוא מינימלי. ב. מצא עבור איזה ערך של a המרחק המינימלי הוא 2.



35 נתונה הפרבולה $y = x^2$, ונתון משיק לפרבולה שמשוואתו היא $y = 6x - 9$. בנקודה (t, t^2) שעל הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה. המשיקים נחתכים בנקודה M (ראה ציור). א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות t . ב. מצא את t שעבורו אורך הקטע, המחבר את הנקודה M עם קודקוד הפרבולה יהיה מינימלי.



36 במערכת צירים נתונות הנקודות $A(2,2)$ ו- $B(2,-2)$. ראשית הצירים היא בנקודה O. M היא נקודה על ציר ה- x בתחום $x > 0$. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה M, כדי שהסכום: $OM + MA + MB$ יהיה מינימלי?

תשובות סופיות:

- (1) $AE = 1.7 \text{ cm}$ (2) א. $x(30-x)$. ב. כל צלע שווה ל- $0.25p$ (3) $x = 3.75 \text{ cm}$.
- (4) $AC = BC = 4 \text{ cm}$ (5) $AB = 2\sqrt{32} \text{ cm}$ (6) $AB = 6$ ס"מ , $BC = 24$ ס"מ .
- (7) אורך: 40 ס"מ, רוחב: 15 ס"מ .
- (8) א. $S = x^2 - 6x + 18$. ב.1. $x = 3$. ב.2. 9 סמ"ר .
- (9) $AM = 5/\sqrt{2}$ (10) בסיס קטן $R = 4\sqrt{5} \text{ cm}$ (11) $12\sqrt{3}$ סמ"ר (12)
- (13) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (14) $\frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}$ (15) 4 ס"מ . (16) 4 ס"מ .
- (17) צלע הבסיס: 5 ס"מ . גובה: 2.5 ס"מ . (18) 120 ס"מ .
- (19) א. $x = \frac{1}{12}a, y = \frac{1}{6}a$. ב. $x = y = \frac{1}{9}a$ (20) $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$ (21) $\frac{500}{3}$ סמ"ק .
- (22) גובה: $\sqrt{48}$ ס"מ . רדיוס: $\sqrt{24}$ ס"מ . (24) 403.1 סמ"ק .
- (25) א. $A(3,6)$. ב. $A(0,0)$ או $A(5,0)$ (26) $CD = 2\sqrt{3}$.
- (27) א. $A(1,8)$. ב. 32 . (28) א. $AB = 4$. ב. $S_{\Delta AOB} = 16$.
- (29) $PQ = 4$ (30) $M(4,2)$ (31) $(1.5, 0.5)$ (32) 8 .
- (33) $(0.5, 0.75)$ (34) א. $B(\sqrt{(2a-1)/2}, (2a-1)/2)$. ב. 4.25 .
- (35) א. $y = 2t \cdot x - t^2$. ב. $t = -3/37$ (36) $M(0.845, 0)$.

פרק 15 - חשבון אינטגרלי:

סיכום כללי האינטגרציה:

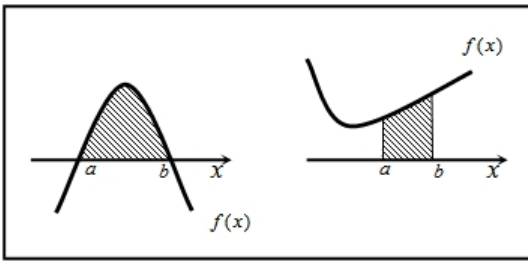
הגדרה וחוקים יסודיים:

כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

עבור מקדם קבוע a נקבל: $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

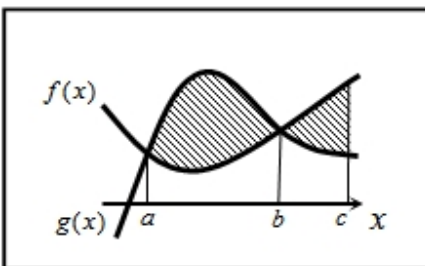
חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים):

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים כך שגרף אחד כולו מעל השני:

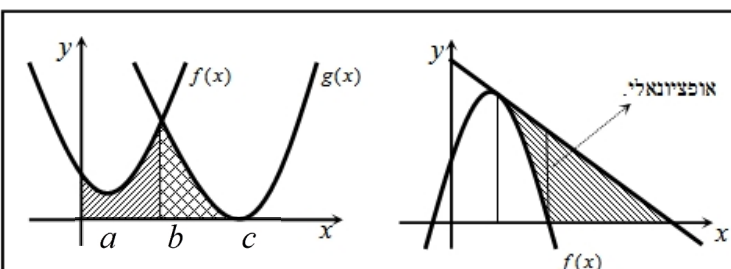


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

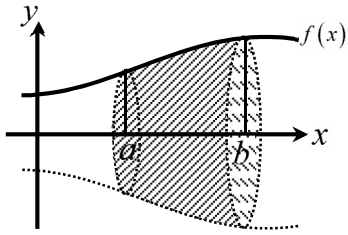
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :



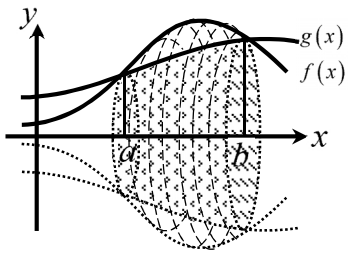
$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

חישוב נפחים באמצעות האינטגרל:



1. נפח הגוף שנוצר עקב סיבוב הפונקציה $f(x)$ סביב ציר ה- x בגבולות: $x = a$ ו- $x = b$ נתון ע"י האינטגרל הבא:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$



2. בפרט עבור גוף הנוצר ע"י בסיס שטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ נקבל את הנוסחה הבאה:

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

אינטגרלים טריגונומטריים:

$$\int (\sin x) dx = -\cos x + c ; \int (\cos x) dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c ; \int -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + c$$

שאלות לפי נושאים:

שאלות יסודיות – חישובי אינטגרלים:

1 מצא את האינטגרלים הבאים:

- | | |
|--------------------------------|----------------------|
| א. $\int x^3 dx =$ | ב. $\int 12x^5 dx =$ |
| ג. $\int x^4 dx =$ | ד. $\int 2x^3 dx =$ |
| ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx =$ | ו. $\int 7 dx =$ |

ז. $\int \left(\frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx =$	ח. $\int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx =$
--	---

2 מצא את האינטגרלים הבאים:

- | | |
|---|---|
| א. $\int x^{-3} dx =$ | ב. $\int \frac{1}{x^3} dx =$ |
| ג. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx =$ | ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx =$ |

3 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\int \sqrt{x} dx = \text{ב.} \quad \int x^{\frac{1}{2}} dx = \text{א.}$$
$$\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx = \text{ד.} \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \text{ג.}$$

4 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{18}{(6x+5)^2} dx = \text{ג.} \quad \int 3(2-7x)^4 dx = \text{ב.} \quad \int (5x-1)^3 dx = \text{א.}$$
$$\int \sqrt{ax+b} dx = \text{ה.} \quad \int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx = \text{ד.}$$

5 מצא את תוצאת החילוק :

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x+3} = \text{ג.} \quad \frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x-1} = \text{ב.} \quad \frac{x^2 - 5x - 14}{x+2} = \text{א.}$$
$$\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x+5} = \text{ה.} \quad \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x-3} = \text{ד.}$$

6 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x-1} dx = \text{ב.} \quad \int \frac{x^2 - 5x - 14}{x+2} dx = \text{א.}$$
$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x-3} dx = \text{ד.} \quad \int \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x+3} dx = \text{ג.}$$
$$\int \frac{2x^5 + x^4 - 4x^2 + 1}{2x+1} dx = \text{ו.} \quad \int \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x+5} dx = \text{ה.}$$

7 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^2} dx = \text{ג.} \quad \int \frac{x^2}{(x^3+6)^2} dx = \text{ב.} \quad \int -\frac{2x}{(x^2-1)^2} dx = \text{א.}$$
$$\int 8x(x^2+1)^3 dx = \text{ו.} \quad \int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}} dx = \text{ה.} \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx = \text{ד.}$$
$$\int (2-x^2)(6x-x^3)^2 dx = \text{ז.}$$

8) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \left(\cos 3x - 2 \sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx \quad \text{ב.} \quad \int \left(\sin x - 3 \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx \quad \text{א.}$$

$$\int \left(\sin(\pi - x) + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx \quad \text{ג.}$$

9) חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות) :

$$\int (\sin 3x \cos 3x) dx \quad \text{ב.} \quad \int (2 \sin x \cos x) dx \quad \text{א.}$$

$$\int (\sin^2 x) dx = \quad \text{ד.} \quad \int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx \quad \text{ג.}$$

10) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx = \quad \text{ב.} \quad \int \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \right) dx = \quad \text{א.}$$

$$\int (\cos x \sin^2 x) dx = \quad \text{ג.}$$

11) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \quad \text{ב.} \quad \int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad \text{א.}$$

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad \text{ד.} \quad \int \frac{1}{\sin^2 10x} dx \quad \text{ג.}$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad \text{ו.} \quad \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad \text{ה.}$$

$$\int \tan^2 x dx \quad \text{ח.} \quad \int (\sin x \cos x \cos(2x)) dx \quad \text{ז.}$$

$$\int (\sin(7x) \cos(5x)) dx \quad \text{י.} \quad \int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx \quad \text{ט.}$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad \text{יב.} \quad \int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad \text{יא.}$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad \text{יד.} \quad \int \cos^2 x dx \quad \text{יג.}$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad \text{טז.} \quad \int \cos^3 x dx \quad \text{טו.}$$

$$\int \sin^4 2x dx \quad \text{יח.} \quad \int \cos^4 x dx \quad \text{יז.}$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad \text{כ.}$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad \text{כב.}$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad \text{יט.}$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad \text{כא.}$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad \text{כג.}$$

שאלות יסודיות – מציאת פונקציה קדומה:

12 נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 3x^2 - 7$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2, -1)$.

13 נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5. מצא את הפונקציה.

14 הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = x^2 - 8x + 2$. נתון: $f(-2) = 1$.

א. מצא את $f(x)$.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

15 נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x) = 9x^2 - 4$.

ערך הפונקציה בנקודה $x = 1$ הוא 3.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$.

ב. מצא את $f(x)$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

16 הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 3$.

לפונקציה משיק ששיפועו הוא -3.

א. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.

17) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -6x - 5$.

המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

א. מצא את שיעור ה- x של הנקודה A.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא -6.

ג. מצא את משוואת המשיק.

18) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x - 4$.

הישר $y = 2x + 5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

19) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x + 6$. שיפוע הפונקציה בנקודת

הפיתול שלה הוא -12 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1. מצא את הפונקציה.

20) נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x) = 8x - 6$.

א. מצא את $f'(x)$ אם ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x = 2$.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה בנקודת הקיצון הוא $2/3$.

21) נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x) = 2x - 3$.

א. שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 4. מצא את $f'(x)$.

ב. ערך הפונקציה בנקודת ההשקה הוא 5. מצא את $f(x)$.

22) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.

המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y = -4$. מצא את הפונקציה.

23) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $y = 5\frac{2}{3}$ הוא 3. מצא את הפונקציה.

24) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \cos x + 4 \sin 2x$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(\frac{\pi}{6}, 1\frac{1}{2})$.

25) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = -4 \sin 2x - \cos x$.

שיפוע הפונקציה בנקודה (π, π) הוא 3. מצא את הפונקציה.

26) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \cos x + \sin x$.

א. ידוע כי הפונקציה המקורית עוברת בראשית הצירים.
 הוכח כי הנגזרת $f'(x)$ והפונקציה המקורית $f(x)$ מקיימות את המשוואה: $f(x) + f'(x) = 2\sin x + 1$.

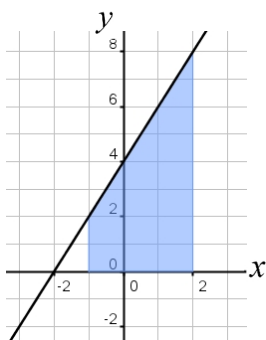
ב. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$ באופן הבא: $g(x) = f(x) + f'(x)$.

- מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה- y של הפונקציה $g(x)$.
- מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה- y של הפונקציה $f(x)$.
- כתוב את משוואת הישר העובר דרך שתי הנקודות שמצאת.

האינטגרל המסוים:

27) בסרטון זה מוסבר האינטגרל המסוים.

חשב את האינטגרל המסוים הבא: $\int_{-2}^1 (x^2 - 6x + 1) dx$.



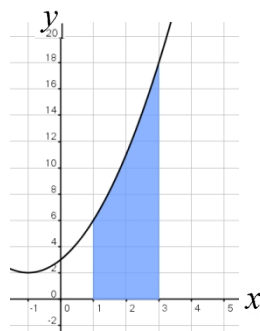
חישובי שטחים – פונקציה פולינומית:

28) בסרטון זה מוסבר כיצד להשתמש באינטגרל המסוים כדי לחשב שטחים.

נתונה הפונקציה: $y = 2x + 4$.

חשב את השטח המוגבל שמתחת הישר,

ציר ה- x והישרים $x = -1$ ו- $x = 2$.



29) חשב את השטח המוגבל בין גרף

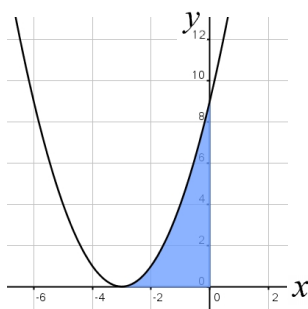
הפונקציה: $f(x) = x^2 + 2x + 3$, ציר ה- x

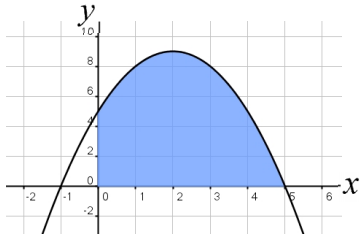
והישרים $x = 1$ ו- $x = 3$.

30) נתונה הפונקציה $y = (x + 3)^2$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

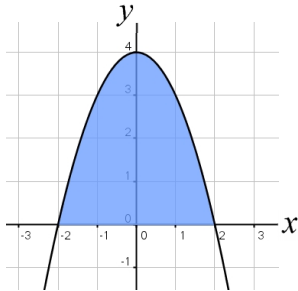
ב. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לצירים.





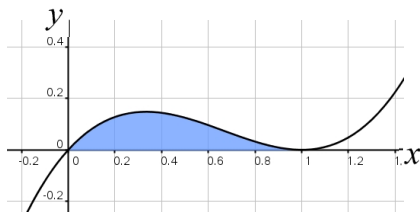
31) נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + 4x + 5$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x וציר ה- y .

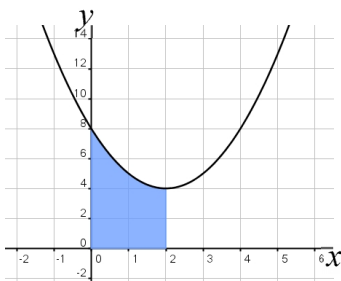


32) נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4$.

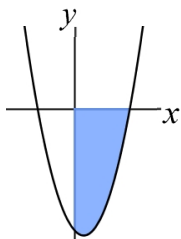
- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לציר ה- x .



33) מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ וציר ה- x כמתואר באיור:

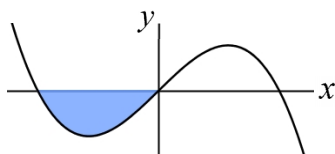


34) נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4x + 8$. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הצירים וקדקוד הפרבולה.

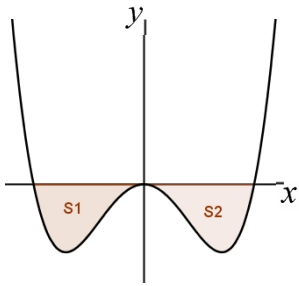


35) בסרטון זה מוסבר כיצד לחשב שטח שמתחת לציר ה- x .

נתונה הפונקציה $y = x^2 - x - 6$. חשב את השטח המוגבל שמתחת לפונקציה ולצירים שברביע הרביעי.

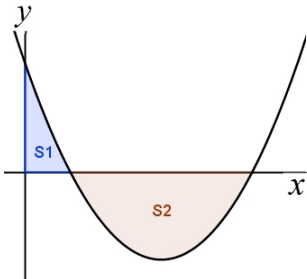


36) נתונה הפונקציה $f(x) = x(4 - x^2)$. חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה- x שברביע השלישי.



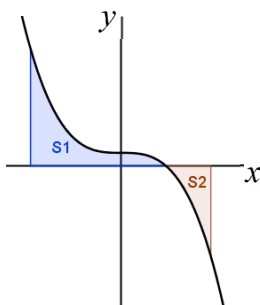
(37) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$.

חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה- x .



(38) חשב את האינטגרל המסוים של הפונקציה $y = x^2 - 6x + 5$ בין 0 ל-5.

האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים: $S_1 + S_2$? אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.

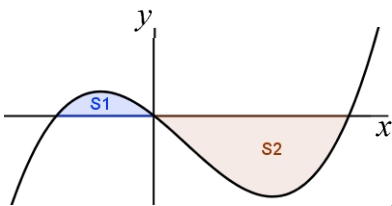


(39) א. חשב את ערך האינטגרל הבא: $\int_{-2}^2 (-x^3 + 1) dx$.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^3 + 1$.

מעבירים ישרים: $x = 2$ ו- $x = -2$ כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2 כמתואר באיור.

חשב את סכום השטחים: $S_1 + S_2$ והסבר מדוע תוצאת החישוב שונה מסעיף א'.

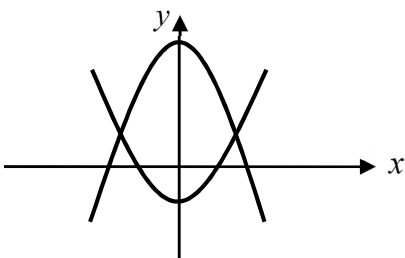


(40) נתונה הפונקציה: $y = x^3 - x^2 - 2x$.

יוצרים את השטחים S_1 ו- S_2 בין גרף הפונקציה וציר ה- x כמתואר באיור.

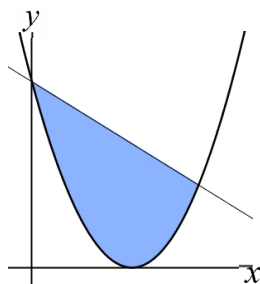
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x .



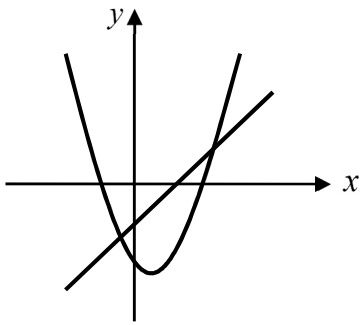
(41) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.



(42) נתונות הפונקציות: $y = -x + 9$; $y = (x - 3)^2$.

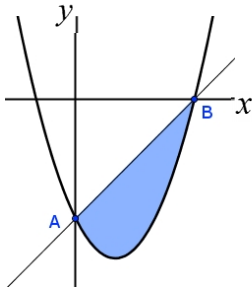
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



(43) נתונות הפונקציות הבאות :

$f(x) = x^2 - 4x - 12$, $g(x) = x - 6$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.

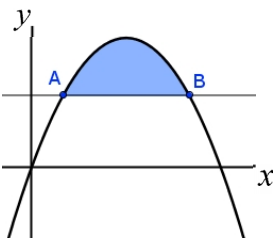


(44) נתונה הפונקציה : $y = 3x^2 - 6x - 9$

א. מצא נקודות חיתוך של הפונקציה

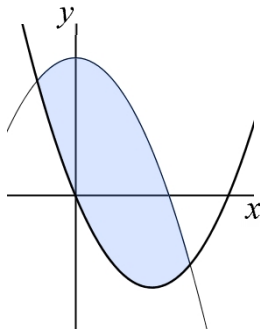
עם הצירים (נסמן ב-A ו-B).

ב. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AB.



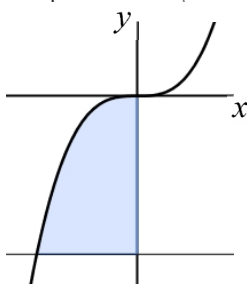
(45) נתונה הפרבולה : $y = -x^2 + 6x$ והישר $y = 5$.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפרבולה לישר.



(46) חשב את השטח המוגבל בין גרפים של הפונקציות :

$y = x^2 - 4x$; $y = -x^2 + 6$



(47) נתונה הפונקציה : $f(x) = x^3$

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

הישר $y = -8$ וציר ה-y כמתואר באיור.

(48) נתונות הפונקציות הבאות :

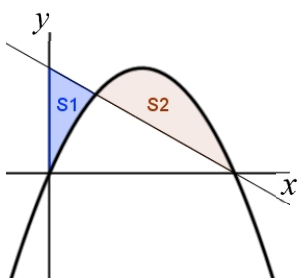
$g(x) = -x + 4$; $f(x) = -x^2 + 4x$

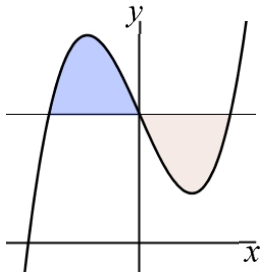
מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה-y ב- S_1 ,

ואת המשך השטח הכלוא בין הגרפים ב- S_2 כמתואר באיור.

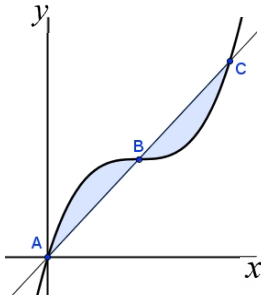
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. חשב את היחס שבין השטחים : $\frac{S_1}{S_2}$.



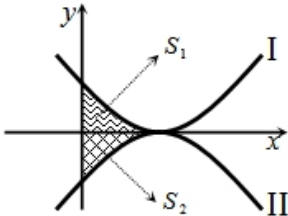


- 49 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x + 5$ והישר $y = 5$.
- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.
- ב. חשב את השטח המוגבל ביניהן.



- 50 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
- הישר AC חותך את גרף הפונקציה בנקודות הבאות: $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$.
- חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

- 51 נתונות הפונקציות: $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2 - 1$ כמתואר באיור.



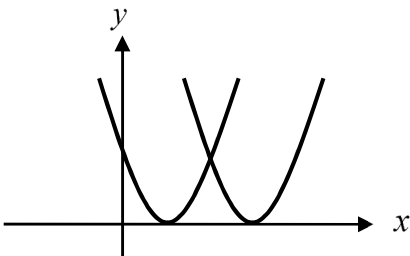
- א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.
- ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים ב- S_1 ו- S_2 כמתואר באיור. הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.

- 52 בסרטון זה מוסבר כיצד לחשב שטח של פונקציה ללא גרף נתון.

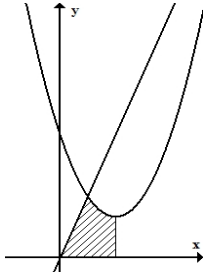
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות: $f(x) = x^3$, $g(x) = x$.

- 53 חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה $f(x) = x^3 - 4x$ לציר ה- x .

- 54 מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה: $y = x^2$ לבין גרף הפונקציה: $y = 2x - x^2$.

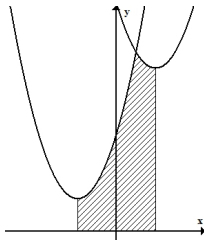


- 55 בסרטון זה מוסבר מהו שטח מורכב. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .



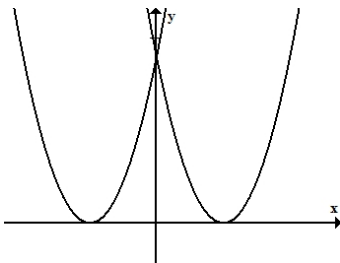
56) הפונקציות המתוארות בשרטוט הן: $y = 3x$; $y = x^2 - 4x + 6$.

- מצא את קדקוד הפרבולה.
- מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר.
- חשב את השטח המסומן שבשרטוט.



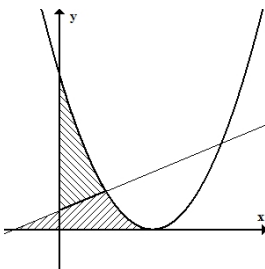
57) נתונות הפונקציות: $y = x^2 - 4x + 14$, $y = x^2 + 4x + 6$.

- מצא את שיעורי ה- x של קדקודי הפרבולות.
- חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.
- חשב את השטח המסומן בשרטוט.



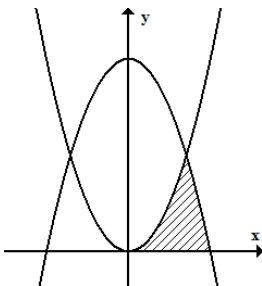
58) נתונות הפונקציות: $f(x) = (x-3)^2$, $g(x) = (x+3)^2$.

חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- x .



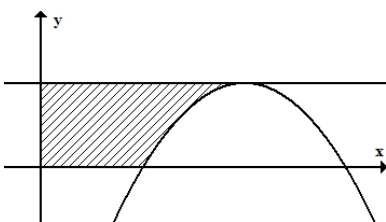
59) נתונות שתי הפונקציות: $y = (x-2)^2$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

- מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- x .
- מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- y .



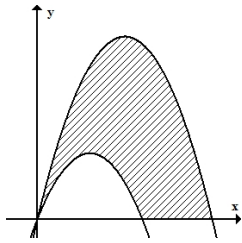
60) נתונות הפונקציות: $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.

חשב את השטח המוגבל על ידי שתי הפונקציות וציר ה- x ברביע הראשון.



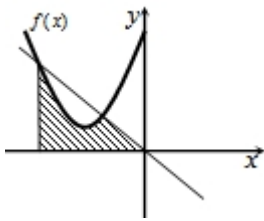
61) נתונה הפרבולה: $y = -x^2 + 4x - 3$.

- מעבירים ישר המקביל לציר ה- x מקדקוד הפרבולה.
- מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה.
- מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר והצירים.



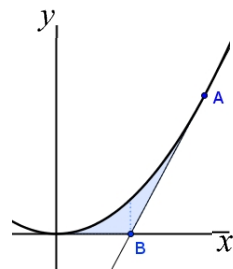
62 נתונות הפרבולות הבאות :

$f(x) = -x^2 + 5x$, $g(x) = -x^2 + 3x$
 חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה- x .



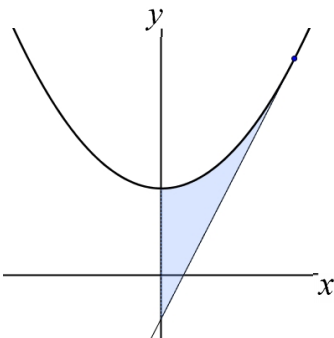
63 נתונה הפונקציה : $f(x) = x^2 + 6x + 12$. ישר העובר בראשית הציריו

חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4$ כמתואר באיור.
 א. מצא את משוואת הישר.
 ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
 ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.



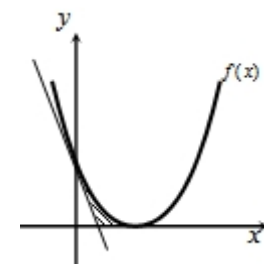
64 נתונה הפונקציה : $y = 2x^2$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה : $A(1,2)$.
 המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה B.
 חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .



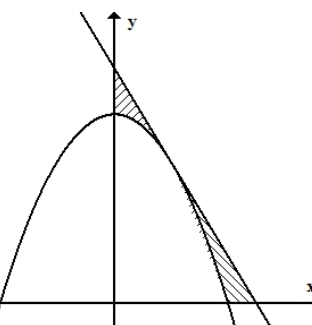
65 נתונה הפונקציה : $y = 3x^2 + 2$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,5)$.
 חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- y .



66 נתונה הפונקציה : $f(x) = (x-2)^2$.

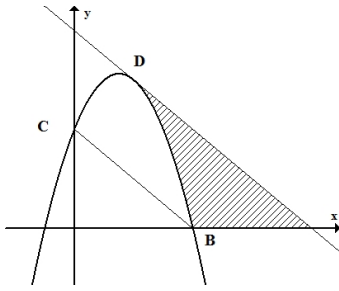
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מעבירים משיק.
 א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
 ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



67 נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4$

בנקודה $(1,3)$ העבירו משיק.

א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. מצא את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- y .
 ג. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .



68) משוואת הפרבולה היא: $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$.

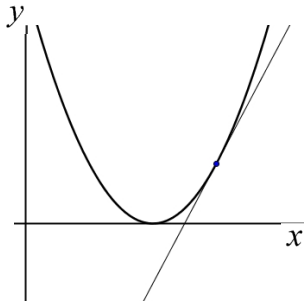
הנקודות $C(0, 2)$, $B(2, 0)$ הן נקודות חיתוך של הפרבולה

עם הצירים. המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה-x.

ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה-y.



69) נתונה הפונקציה: $y = (x-4)^2$.

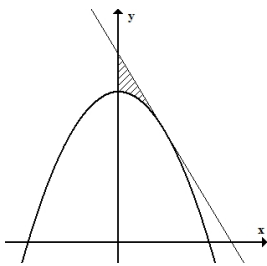
מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך הנקודה שבה: $x = 6$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, המשיק וציר ה-x.

שאלות עם פרמטר:



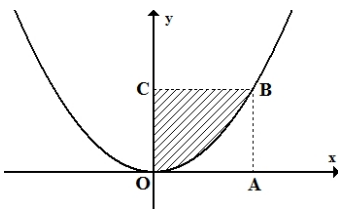
70) נתונה הפרבולה: $y = ax^2 + 8$.

שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה $x = 2$ הוא -2.

א. חשב את a .

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק,

הפרבולה וציר ה-y.



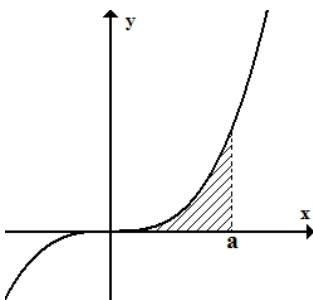
71) הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y = ax^2$, (a פרמטר).

המרובע ABCD הוא ריבוע.

הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.

ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.

מצא את ערך הפרמטר a ואת השטח המסומן בשרטוט.



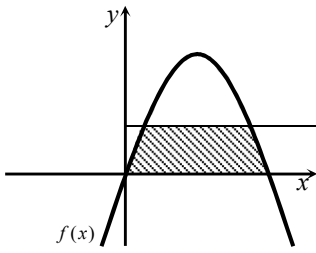
72) נתונה הפונקציה $y = x^3$.

מעבירים אנך לציר ה-x: $x = a$ (a פרמטר חיובי) כך שנוצר

שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה-x.

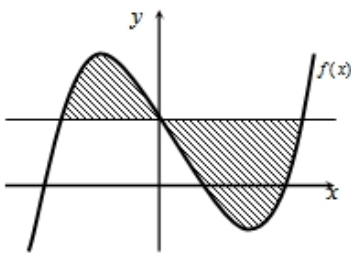
א. הבע באמצעות a את השטח המקווקו בציור.

ב. חשב את a אם ידוע כי שטח זה שווה ל- a^2 .



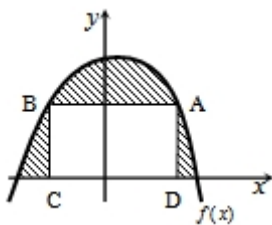
- 73** נתונה הפונקציה: $f(x) = kx - x^2$. הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות. ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות החיתוך הוא $x = 9$.
- מצא את ערך הפרמטר k .
 - מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
 - חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).

חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה:

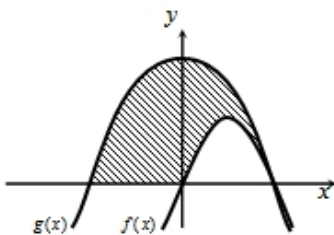


- 74** נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x^2 - 8x - 12$. הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ על ציר ה- y .
- מצא את הפונקציה $f(x)$.
 - מצא את השטח המוגבל בין הישר והפונקציה.

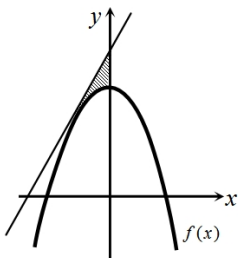
- 75** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ המתוארת באיור שלפניך היא: $f'(x) = 3 - 2x$. ישר AB שמשוואתו: $y = 6$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו- B .



- מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x כך שנוצר מלבן $ABCD$. ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא 4 .
- מצא את הפונקציה $f(x)$.
 - חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x .



- 76** באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן: $f'(x) = 4 - 2x$, $g'(x) = -2x + 1$. ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x כאשר: $x = 4$.
- מצא את הפונקציות.
 - חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- x (המסומן).



77) נתונה פונקציה $f(x)$. משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה

שבה: $x = -2$ היא: $y = x + 13$.

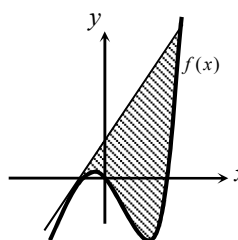
הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x) = -4x - 7$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- y .

78) נתונה פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

ישר ששיפועו 15 משיק לפונקציה ברביע הרביעי בנקודה שבה: $y = -20$.



א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15?

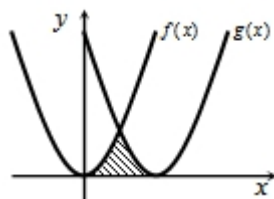
אם כן- מצא אותם.

ג. 1. הראה כי הנקודה שבה $x = 7$ משותפת למשיק שמצאת

בסעיף הקודם ולפונקציה $f(x)$.

2. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והמשיק שמצאת

בסעיף הקודם (ראה איור).



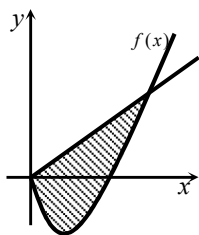
79) באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x) = x^2$ את גרף

הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 2$.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא: $g'(x) = 2x - 8$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (המסומן).



80) באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y = 2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 6$ וידוע הישר חותך את

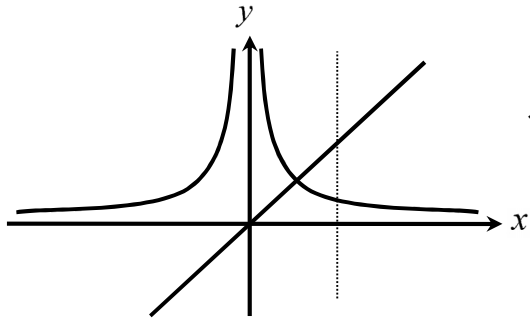
הפונקציה בנקודה שבה ערך ה- y הוא 16.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

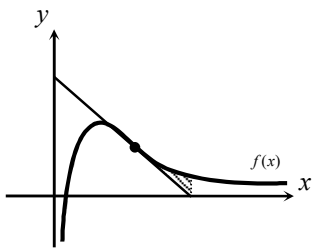
ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

חישובי שטחים – פונקציה רציונאלית:

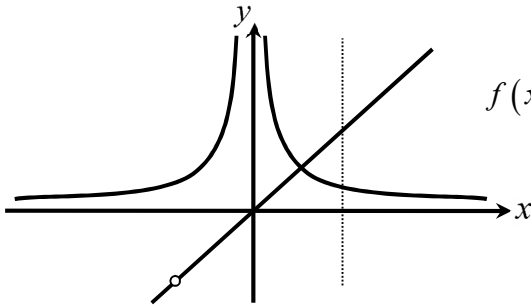


(81) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x$.
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
 הישר $x = 2$ וציר ה- x .

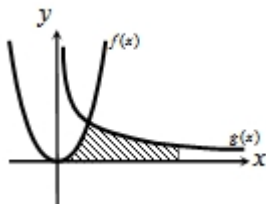


(82) א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
 מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

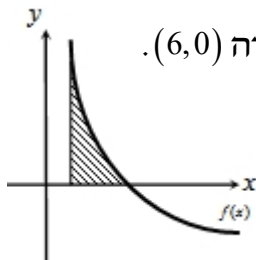
ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
 והמשיק שמצאת בסעיף א'. חשב את השטח הכלוא
 בין גרף הפונקציה, המשיק ואנך לציר ה- x היוצא
 מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .



(83) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$.
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
 הישר $x = 2$ וציר ה- x .

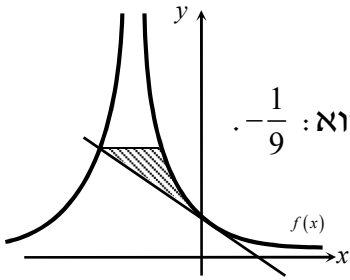


(84) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 2x^2$
 ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$ (קבוע a) בתחום: $x > 0$. ידוע כי הגרפים נחתכים
 ברביע הראשון בנקודה הנמצאת על הישר: $y = 4x$.
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .
 ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר: $x = 4$.



(85) גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{a - x^2}{x^2}$ (קבוע a) חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$.
 א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
 ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
 ציר ה- x והישר: $x = 2$.

86 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$, (A פרמטר).

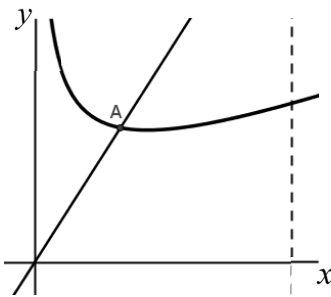


ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y הוא: $-\frac{1}{9}$.

- מצא את ערך הפרמטר A .
- כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- y .
- הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = -4.5$.
- העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.
- חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).

חישובי שטחים – פונקצית שורש:

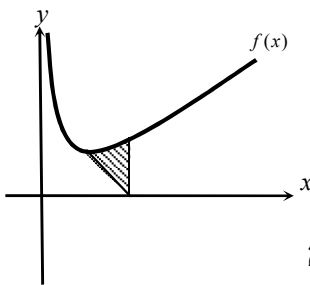
87 באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + x$.



מעבירים ישר: $y = 4x$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A המסומנת באיור.

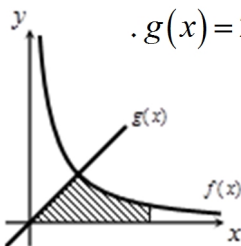
- מצא את שיעורי הנקודה A.
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $y = 4x$, ציר ה- x ואנך לציר ה- x : $x = 4$.

88 באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.



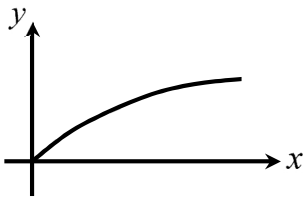
- מצא את נקודת המינימום שלה.
- מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים ישר לנקודה: $(2, 0)$ שעל ציר ה- x . מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה- x היוצא מהנקודה $(2, 0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

89 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = 2x - 1$.



- מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
- חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר: $x = 9$.

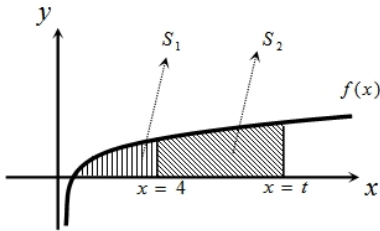
90) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- y .



91) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x = \sqrt{3}$.



92) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x = 4$ ו- $x = t$, $(t > 4)$.

נסמן: S_1 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x .

S_2 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנכים.

ידוע כי: $8S_1 = S_2$. מצא את t .

93) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$

א. ענה על הסעיפים הבאים:

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

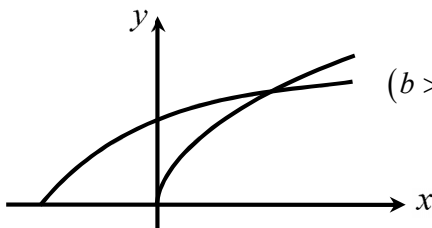
2. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

3. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא: $m = \frac{17}{16}$. מצא את נקודת ההשקה.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x .

מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.



94) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$ ($b > 0$)

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה- x

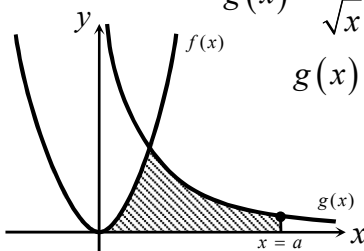
הוא $\frac{2}{3}$ יחידות שטח. מצא את ערכו של הפרמטר b .

95) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$

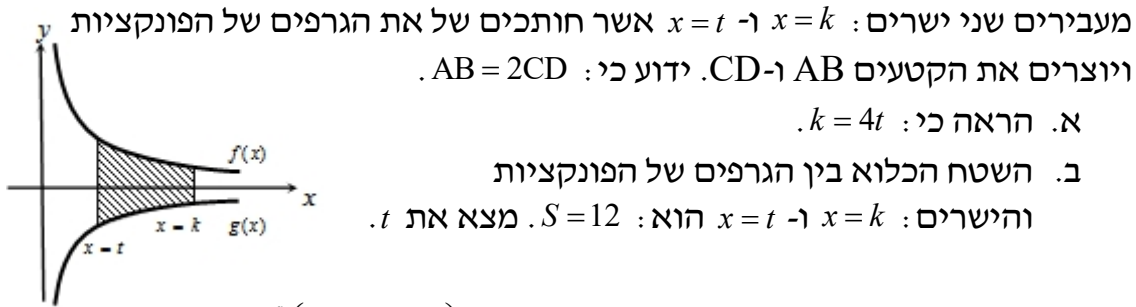
ברביע הראשון. מעבירים ישר $x = a$ החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $\frac{1}{3}85$. מצא את a .

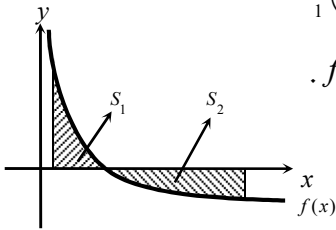


96) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$.



מעבירים שני ישרים: $x=k$ ו- $x=t$ אשר חותכים של את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD. ידוע כי: $AB = 2CD$.
 א. הראה כי: $k = 4t$.
 ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים: $x=k$ ו- $x=t$ הוא: $S = 12$. מצא את t .

97) א. מצא עבור איזה ערך של a יתקיים: $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$.



ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$.

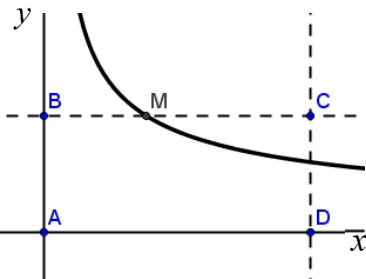
מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x=1$ ו- $x=13$ כך שנוצרים השטחים: S_1 ו- S_2 .

מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. 1. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנך $x=1$, (S_1).

2. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח: S_2 .

נמק את טענתך.



98) באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x) = \frac{9}{\sqrt{2x-1}}$.

מעבירים את הישרים המקבילים לצירים: $x=13$

ו- $y=3$ כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור.

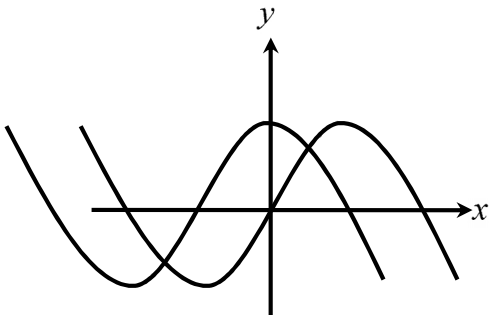
הישר $y=3$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.

א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

והישרים ב- S_1 ואת שטח המלבן ב- S_2 . הראה כי: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{13}$.

חישובי שטחים – פונקציות טריגונומטריות:

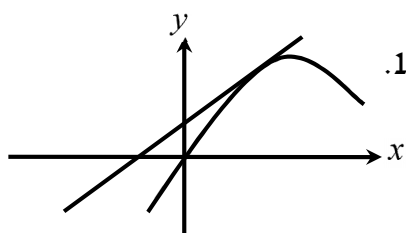


99) נתונות הפונקציות: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

לציר ה- y ברביע הראשון.

100 נתונה הפונקציה : $f(x) = x + 2 \sin x$.

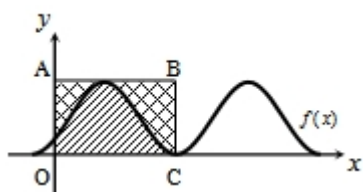


- בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.
 א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x ברביעים הראשון והשני.

101 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה : $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$ בתחום : $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$.

מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון המסומנת ב- C כך שנוצר המלבן ABCO.

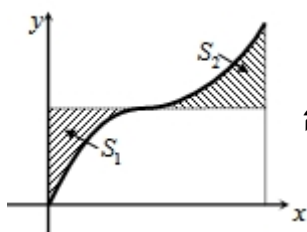
השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 (המקווקו).
 השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .



א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

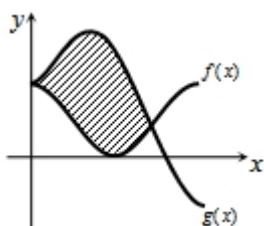
ב. חשב את היחס : $\frac{S_1}{S_2}$.

102 באיור שלפניך נתונה הפונקציה : $y = \sin x + x$ בתחום : $0 \leq x \leq 2\pi$.



א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון?

- ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה : $x = 2\pi$. מעבירים ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת. הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 המסומנים בסרטוט שווים.



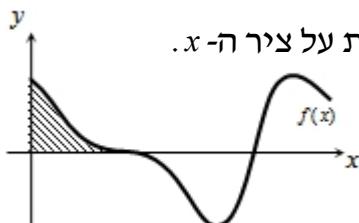
103 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה הבאות :

$f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x$ בתחום : $0 \leq x \leq \pi$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
 השתמש בזהות : $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

104 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$.

א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות המקיימות: $f'(x) = 0$ בתחום: $0 < x < 2\pi$.

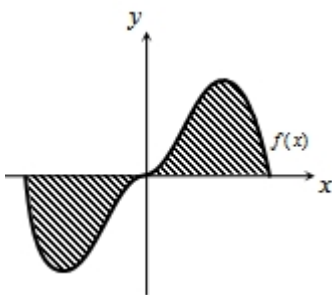


ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$ אשר אינה קיצון נמצאת על ציר ה- x .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



105 א. נתונה הפונקציה: $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$.

הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y' = x^2 \sin x$.

באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 \sin x$

בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x בתחום הנתון.

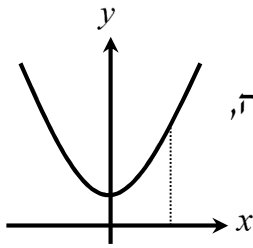
106 נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cos x + b \sin x$, a, b פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$.

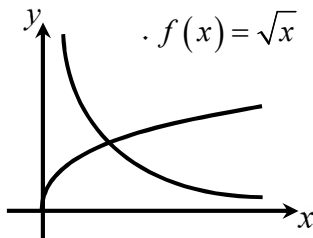
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

מציאת נפח גוף סיבוב:



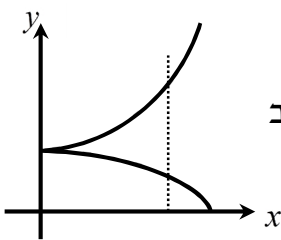
(107) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 + 1$. השטח הכלוא בין הפונקציה,

הישר $x = 3$ והצירים מסתובב סביב ציר ה- x .
חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל באופן זה.



(108) בשרטוט נתונות הפונקציות ברביע הראשון: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר, כאשר השטח הכלוא בין הפונקציות והישר $x = 2$ מסתובב סביב ציר ה- x .

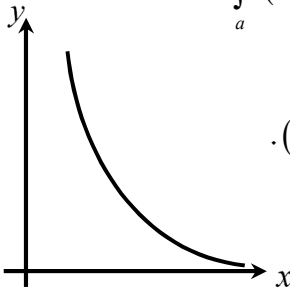


(109) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $g(x) = \sqrt{\cos x}$.

השטח הכלוא בין הפונקציות לישר $x = \frac{\pi}{6}$ המסתובב סביב ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

בעיות קיצון עם אינטגרלים:

(110) מצא את ערכו של a שבעבורו ערך האינטגרל $\int_a^{2a+1} (2x-1) dx$ מינימלי.



(111) בשרטוט נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{b-1}{\sqrt{x-1}}$ ($1 < b < 2$).

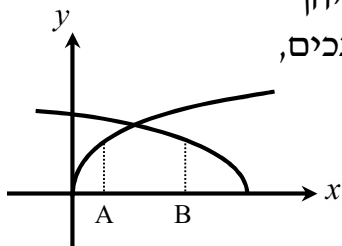
לאיזה ערך של b השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = b$ ו- $x = 2$ וציר ה- x מקסימלי?

(112) בשרטוט נתונות הפונקציות: $f(x) = \sqrt{2x}$, $g(x) = \sqrt{6-x}$.

מהנקודות A ו-B, הנמצאות על ציר ה- x והמרחק ביניהן הוא 2, העלו אנכים לציר ה- x . השטח הכלוא בין האנכים,

שתי הפונקציות וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .

מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שנפח גוף הסיבוב המתקבל באופן זה יהיה מקסימלי.



תשובות סופיות:

$$\cdot 7x+c \quad \text{ו} \quad \frac{x^6}{9}+c \quad \text{ה} \quad \frac{x^4}{2}+c \quad \text{ז} \quad \frac{x^5}{5}+c \quad \text{ח} \quad 2x^6+c \quad \text{ט} \quad \frac{x^4}{4}+c \quad \text{א} \quad (1)$$

$$\cdot \frac{x^4}{5}-\frac{ax^3}{3}-\frac{ax^2}{b}+bx+c \quad \text{ב} \quad \frac{x^5}{6}+4x^4-\frac{x^3}{6}+2x^2-\frac{1}{3}x+c \quad \text{ג}$$

$$\cdot 2x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+c \quad \text{ד} \quad -\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{a}{2x^2}+\frac{x^2}{2a}+c \quad \text{ה} \quad -\frac{1}{2x^2}+c \quad \text{ו} \quad -\frac{x^{-2}}{2}+c \quad \text{ז} \quad (2)$$

$$\cdot 8\sqrt{x}+2\sqrt{x^3}+c \quad \text{ח} \quad 2\sqrt{x}+c \quad \text{ט} \quad \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c \quad \text{א} \quad \frac{x^{1.5}}{1.5}+c \quad \text{ב} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{6x+5}+c \quad \text{ג} \quad -\frac{3(2-7x)^5}{35}+c \quad \text{ד} \quad \frac{(5x-1)^4}{20}+c \quad \text{ה} \quad (4)$$

$$\cdot \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}+c \quad \text{ו} \quad \frac{\sqrt{6x-3}}{3}+c \quad \text{ז}$$

$$x^2-4 \quad \text{ח} \quad x^2-x-3 \quad \text{ט} \quad x^3-2x^2+5x-1 \quad \text{א} \quad x^2+2x+5 \quad \text{ב} \quad x-7 \quad \text{ג} \quad (5)$$

$$\cdot \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x \quad \text{ד} \quad \frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x+c \quad \text{ה} \quad \frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+5x+c \quad \text{ו} \quad \frac{x^2}{2}-7x+c \quad \text{ז} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{x^5}{5}-x^2+x+c \quad \text{ח} \quad \frac{x^3}{3}-4x \quad \text{ט}$$

$$\cdot \sqrt{x^2+2}+c \quad \text{א} \quad -\frac{1}{2(x^2-4x+1)}+c \quad \text{ב} \quad -\frac{1}{3(x^3+6)}+c \quad \text{ג} \quad \frac{1}{x^2-1}+c \quad \text{ד} \quad (7)$$

$$\cdot (2-x^2)(6x-x^3)^2 \quad \text{ה} \quad (x^2+1)^4+c \quad \text{ו} \quad -6\sqrt{x-x^2}+c \quad \text{ז}$$

$$\cdot \frac{\sin(3x)}{3}+\frac{\cos 4x}{2}+\frac{4 \tan 3x}{3}+c \quad \text{ח} \quad -\cos x-3 \sin x+4 \tan x+5x+c \quad \text{ט} \quad (8)$$

$$\cdot -\frac{\sin 2x}{2}+c \quad \text{א} \quad -\frac{\cos 6x}{12}+c \quad \text{ב} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x+c \quad \text{ג} \quad (9) \quad \cos(\pi-x)+\tan x+x+c \quad \text{ד}$$

$$\cdot \frac{1}{3} \sin^3 x+c \quad \text{ה} \quad \frac{1}{\cos x}+c \quad \text{ו} \quad 2\sqrt{\sin x}+c \quad \text{ז} \quad (10) \quad \frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \sin 2x+c \quad \text{ח}$$

$$-\frac{1}{10} \cot(10x)+c \quad \text{ט} \quad \frac{1}{4} \tan(4x)+c \quad \text{א} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x-12 \sin \frac{x}{3}+c \quad \text{ב} \quad (11)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x+c \quad \text{ג} \quad x-\frac{1}{2} \cos 2x+c \quad \text{ד} \quad \frac{1}{2} \sin 2x+c \quad \text{ה} \quad \frac{1}{2} \sin 2x+c \quad \text{ו}$$

$$-\frac{1}{24} \cos 12x-\frac{1}{4} \cos 2x+c \quad \text{ז} \quad \tan x-\cot x+c \quad \text{ח} \quad \tan x-x+c \quad \text{ט}$$

$$\cdot \frac{1}{2}x-\frac{1}{16} \sin 8x+c \quad \text{א} \quad \frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \sin 2x+c \quad \text{ב} \quad \frac{3}{4}x+\frac{1}{16} \sin 4x+c \quad \text{ג} \quad \sin x+c \quad \text{ד}$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x+\frac{1}{48} \cos 12x+c \quad \text{ה} \quad \frac{3}{4} \sin x+\frac{1}{12} \sin 3x+c \quad \text{ו}$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{128}\sin 16x + c \quad \text{ז.} \quad \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \quad \text{ז.}$$

$$-\cot x - x + c \quad \text{ז.} \quad 2\sin x + c \quad \text{ז.} \quad -\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + c \quad \text{ז.}$$

$$\frac{1}{16}x + \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{192}\sin 6x + c \quad \text{ז.} \quad 3x + \frac{1}{2}\sin 2x - 2\sin x + c \quad \text{ז.}$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (13) \quad f(x) = x^3 - 7x + 5 \quad (12)$$

$$y = -5x + 27 \quad \text{ז.} \quad f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 2x + 23 \frac{2}{3} \quad \text{ז.} \quad (14)$$

$$(0, -2), (0.4, 0) \quad \text{ז.} \quad f(x) = 3x^3 - 4x + 4 \quad \text{ז.} \quad y = 5x - 2 \quad \text{ז.} \quad (15)$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 7 \quad \text{ז.} \quad x = 0 \quad \text{ז.} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} - 4x + 11 \quad (18) \quad y = x - 5 \quad \text{ז.} \quad f(x) = -3x^2 - 5x - 8 \quad \text{ז.} \quad x = -1 \quad \text{ז.} \quad (17)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (19)$$

$$f(x) = \frac{4x^3}{3} - 3x^2 - 4x - 6 \quad \text{ז.} \quad f'(x) = 4x^2 - 6x - 4 \quad \text{ז.} \quad (20)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{1}{6} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = x^2 - 3x + 6 \quad \text{ז.} \quad (21)$$

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (23) \quad f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + x - 6 \quad (22)$$

$$f(x) = \sin 2x + \cos x + x + 1 \quad (25) \quad f(x) = \sin x - 2\cos 2x + 2 \quad (24)$$

$$y = -0.746x + 4.172 \quad \text{ז.} \quad (0.75\pi, \sqrt{2} + 1) \quad \text{ז.} \quad (0.5\pi, 3) \quad \text{ז.} \quad (26)$$

$$15 \text{ יח"ש.} \quad (29) \quad 10 \frac{2}{3} \text{ יח"ש.} \quad (30) \quad (-3, 0) \quad \text{ז.} \quad 9 \text{ יח"ש.}$$

$$(-1, 0), (5, 0) \quad \text{ז.} \quad 33 \frac{1}{3} \text{ יח"ש.} \quad (32) \quad (-2, 0), (2, 0) \quad \text{ז.} \quad 10 \frac{2}{3} \text{ יח"ש.}$$

$$-8 \frac{1}{3} \quad (38) \quad 4 \frac{4}{15} \text{ יח"ש.} \quad (37) \quad 4 \text{ יח"ש.} \quad (36) \quad 13.5 \text{ יח"ש.} \quad (35) \quad 10 \frac{2}{3} \text{ יח"ש.} \quad (34) \quad \frac{1}{12} \text{ יח"ש.} \quad (33)$$

$$21 \frac{1}{3} \text{ יח"ש.} \quad (41) \quad 3 \frac{1}{12} \text{ יח"ש.} \quad \text{ז.} \quad (-1, 0), (0, 0), (2, 0) \quad \text{ז.} \quad (40) \quad 9.5 \text{ יח"ש.} \quad (42) \quad 4 \quad \text{ז.}$$

$$10 \frac{2}{3} \text{ יח"ש.} \quad (45) \quad A(0, -9), B(3, 0) \quad \text{ז.} \quad 13.5 \text{ יח"ש.} \quad (44) \quad 57 \frac{1}{6} \text{ יח"ש.} \quad (43) \quad 20 \frac{5}{6} \text{ יח"ש.}$$

$$21 \frac{1}{3} \text{ יח"ש.} \quad (46) \quad 12 \text{ יח"ש.} \quad (47) \quad (1, 3), (4, 0) \quad \text{ז.} \quad 2 \frac{5}{11} \quad \text{ז.} \quad (48)$$

$$(-2, 5), (0, 5), (2, 5) \quad \text{ז.} \quad 8 \text{ יח"ש.} \quad (50) \quad \frac{1}{2} \text{ יח"ש.}$$

$$\text{ז.} \quad (51) \quad \text{ז.} \quad \text{ז.} \quad 0.5 \text{ יח"ש.} \quad (52) \quad 8 \text{ יח"ש.} \quad (53) \quad \frac{1}{3} \text{ יח"ש.} \quad (54)$$

- (55) $\frac{2}{3}$ יחיש א. (2,2) ב. (1,3) ג. $3\frac{5}{6}$ יחיש.
- (57) א. $x=2, x=-2$ ב. (1,11) ג. $65\frac{1}{3}$ יחיש. (58) 18 יחיש.
- (59) א. $\frac{4}{3}$ יחיש ב. $1\frac{7}{12}$ יחיש (60) $4\frac{5}{12}$ יחיש.
- (61) א. (2,1) ב. $\frac{4}{3}$ יחיש (62) $16\frac{1}{3}$ יחיש.
- (63) א. $y=-x$ ב. (-3,3) ג. $7\frac{5}{6}$ יחיש. (64) $\frac{1}{6}$ יחיש. (65) 1 יחיש.
- (66) א. $y=-4x+4$ ב. (1,0) ג. $\frac{2}{3}$ יחיש. (67) $y=-2x+5$ ב. $\frac{1}{3}$ יחיש. ג. $\frac{7}{12}$ יחיש.
- (68) א. $y=-x+4$ ב. $2\frac{2}{3}$ יחיש. ג. $\frac{2}{3}$ יחיש. (69) $y=4x-20$ ב. $\frac{2}{3}$ יחיש.
- (70) א. $a=-\frac{1}{2}$ ב. $\frac{4}{3}$ יחיש. (71) $2\frac{2}{3}, a=\frac{1}{2}$ יחיש.
- (72) א. $\frac{a^4}{4}$ ב. $a=2$. (73) $k=10$ ב. (1,9) ג. $81\frac{1}{3}$ יחיש.
- (74) א. $f(x)=x^3-4x^2-12x+5$ ב. $189\frac{1}{3}$ יחיש.
- (75) א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יחיש.
- (76) א. $f(x)=4x-x^2, g(x)=-x^2+x+12$ ב. 46.5 יחיש.
- (77) א. $f(x)=-2x^2-7x+5$ ב. $5\frac{1}{3}$ יחיש.
- (78) א. $f(x)=x^3-3x^2-9x$ ב. $y=15x+28$ ג. 1. (7,133) 2. 546.75 יחיש.
- (79) א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יחיש.
- (80) א. $f(x)=x^2-6x$ ב. (0,0) ג. $85\frac{1}{3}$ יחיש. (81) 1 יחיש.
- (82) א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יחיש. (83) 1 יחיש.
- (84) א. $a=32, (2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יחיש. (85) $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}, a=36$ ב. 8 יחיש.
- (86) א. $A=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ד. $(-1.5, \frac{2}{3})$ ה. $\frac{5}{8}$ יחיש.

- (87) א. $A(1,4)$ ב. 15.5 יח"ש (88) א. $Min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש
- (89) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש (90) 2.26 יח"ש. (91) 0.5 יח"ש (92) $t=16$
- (93) א. 1. $x > 0$ 2. $(4,0)$ 3. $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$ ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.
- (94) $b=2$ (95) $a=9$ (96) $t=1$ (97) $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. 1. $S_1=2$ 2. $S_2 = |-S_1|=2$
- (98) א. $M(5,3)$ (99) 0.41 יח"ש (100) א. $y=x+2$ ב. π יח"ש.
- (101) א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi+2}{3\pi-2} = 1.538$
- (102) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π, π) היא נקודת פיתול. ב. $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$
- (103) א. $(0,1), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$ ב. $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$
- (104) א. $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.
- (105) ג. $S = 2(\pi^2 - 4) \sim 11.74$ (106) $b=-2, a=2$
- (107) $V = 69\frac{3}{5}\pi$ יח"ש (108) $V = \pi$ יח"ש (109) 0.243 יח"ש $V =$
- (110) $a = -\frac{1}{2}$ (111) $b = 1\frac{4}{9}$ (112) $A\left(1\frac{1}{3}, 0\right)$

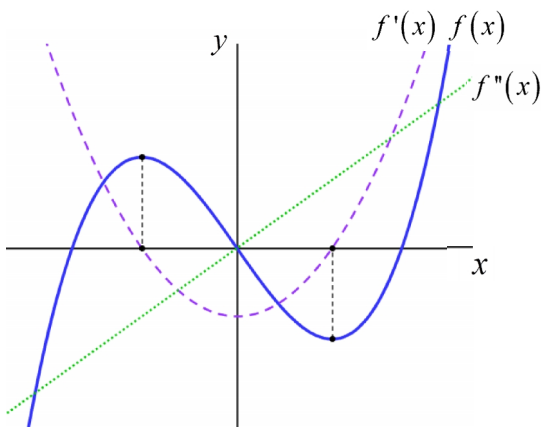
הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת:

חוקים כלליים עבור נגזרת ראשונה:

1. כאשר $f(x)$ עולה, $f'(x)$ חיובית ולהיפך.
2. כאשר $f(x)$ יורדת, $f'(x)$ שלילית ולהיפך.
3. כאשר ל- $f(x)$ יש נקודת קיצון, $f'(x)$ מחליפה סימן (חותכת את ציר ה- x) ולהיפך.

חוקים כלליים עבור נגזרת שנייה:

4. כאשר $f'(x)$ עולה אז $f''(x)$ חיובית ו- $f(x)$ קעורה כלפי מעלה.
5. כאשר $f'(x)$ יורדת אז $f''(x)$ שלילית ו- $f(x)$ קעורה כלפי מטה.
6. כאשר ל- $f'(x)$ יש קיצון, אז $f''(x)$ מחליפה סימן (חותכת את ציר ה- x) ולהיפך.



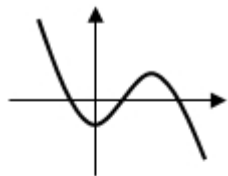
דוגמא עבור הפונקציה: $f(x) = x^3 - 12x$.

נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = 3x^2 - 12$.

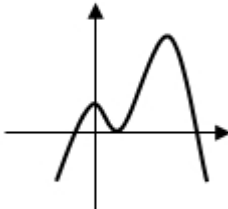
הנגזרת השנייה היא: $f''(x) = 6x$.

ניתן לראות את חוקים 1-6 לעיל באיור הסמוך.

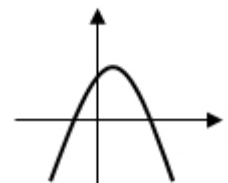
שאלות:



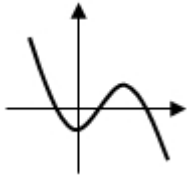
- (1) נתון גרף של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת. נמק את שיקוליך בסרטוט.



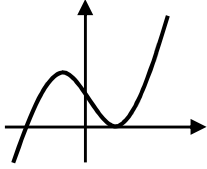
- (2) נתון גרף של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת. נמק את שיקוליך בסרטוט.



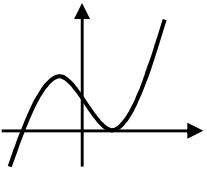
- (3) נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בראשית הצירים. נמק את שיקוליך בסרטוט.



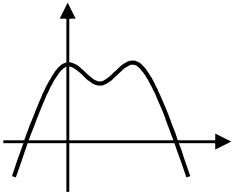
4) נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בראשית הצירים. נמק את שיקוליך בסרטוט.



5) נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה אם נתון: $f(0) = 0$. נמק את שיקוליך בסרטוט.



6) נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה ואת גרף הנגזרת השנייה אם נתון: $f(0) = 0$. נמק את שיקוליך בסרטוט.



7) נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה ואת גרף הנגזרת השנייה אם נתון: $f(0) = 0$. נמק את שיקוליך בסרטוט.

8) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

- א. 1. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
2. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הנגזרת $f'(x)$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3x$.

- א. 1. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
2. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הנגזרת $f'(x)$.

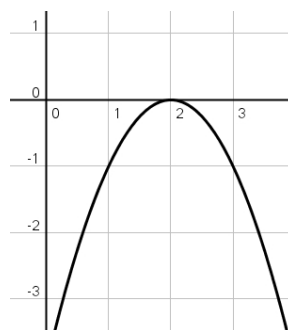
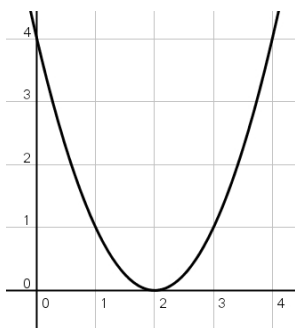
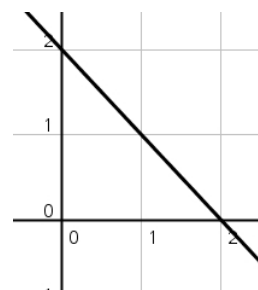
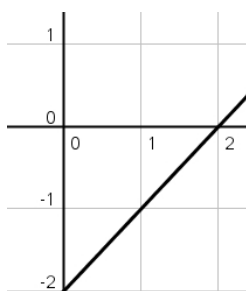
10) לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת.

הערך המקסימלי שלה מתקבל בנקודה שבה: $x=2$.

א. מהו סימן הנגזרת עבור: $x < 2$?

ב. מהו סימן הנגזרת עבור: $x > 2$?

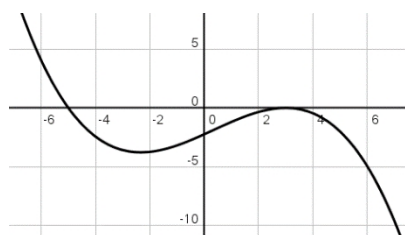
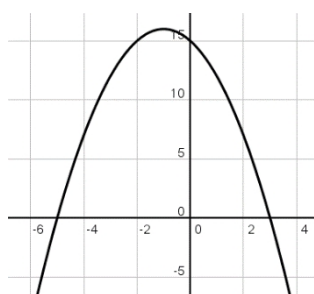
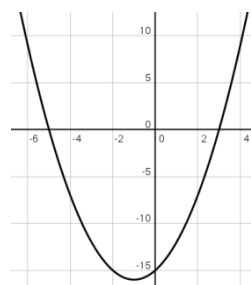
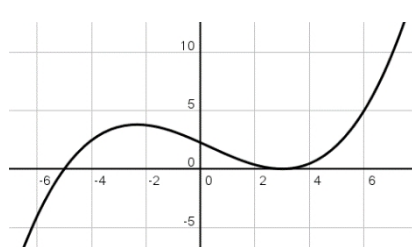
ג. איזה מבין הגרפים הני"ל יכול לתאר את גרף הנגזרת:



11) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x$.

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. איזה מבין הגרפים הבאים מתאר סקיצה של הנגזרת $f'(x)$? נמק.



12) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 - 4x^3$.

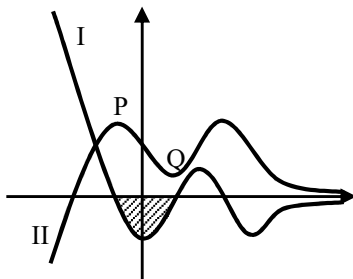
- א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ב. סרטט באמצעות נתונים אלו את הגרף של נגזרת הפונקציה.

13) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. סרטט את גרף פונקצית הנגזרת, $f'(x)$, של $f(x)$, אם ידוע כי ל- $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון: מקסימום כאשר $x = -1$ ומינימום כאשר $x = 3$.
ב. נתונה הפונקציה $f(x)$ ולה 3 נקודות קיצון: מקסימום כאשר $x = 0, 5$ ומינימום כאשר $x = 2$. סרטט את גרף הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.
ג. סרטט את גרף הנגזרת, $f'(x)$, של $f(x)$, אם ידוע כי היא יורדת לכל x והנגזרת שלה מתאפסת בנקודה שבה: $x = 3$.

14) בשרטוט נתונים הגרפים של פונקציה ושל נגזרתה.

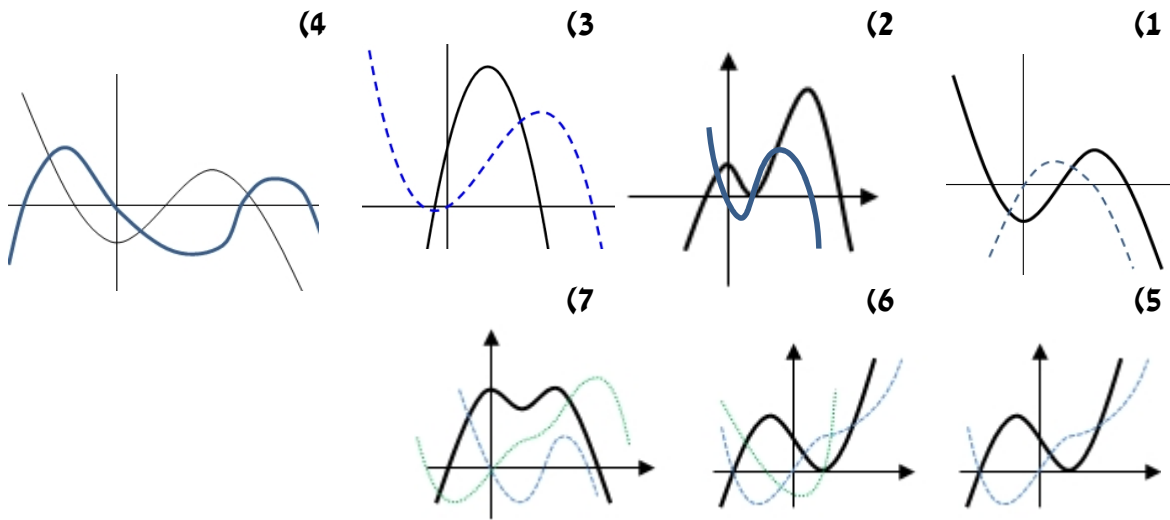
- א. קבע איזה מהגרפים, I או II, שייך לפונקציה ואיזה לנגזרת. נמק.
ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? נמק וסמן אותן על השרטוט.



ג. נתון: $Q(2,1)$, $P(-2,4)$.

- מצא את גודלו של השטח הכלוא בין גרף I לציר ה- x (השטח המקווקו בשרטוט).

תשובות סופיות:



(8) א. 1. $(0,5)$, $(1,0)$, $(5,0)$ 2. $\min(3,-4)$

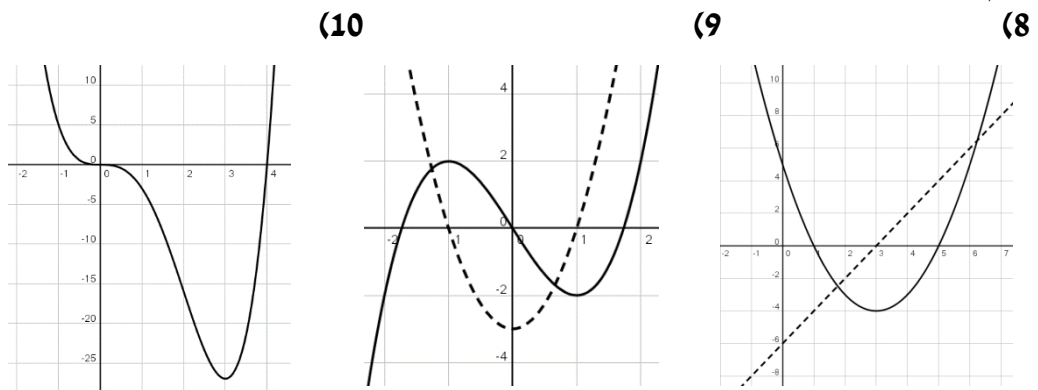
(9) א. 1. $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},0)$, $(0,0)$ 2. $\max(-1,2)$, $\min(1,-2)$

(10) א. $f'(x) > 0$ ב. $f'(x) < 0$ ג. 1. א. עולה: $x > 3$, $x < -5$

יורדת: $-5 < x < 3$ ב. 1. א. עולה: $x > 3$ יורדת: $0 < x < 3$, $x < 0$

(14) א. $f(x)$, $I: f'(x)$ ב. 3 נקודות ג. 3 יחיש

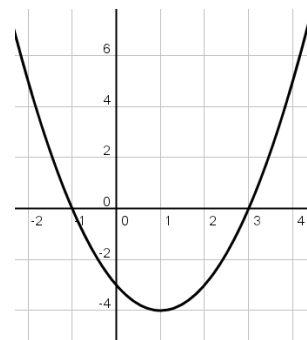
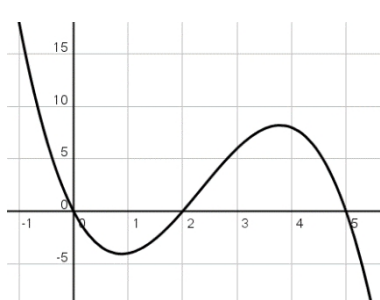
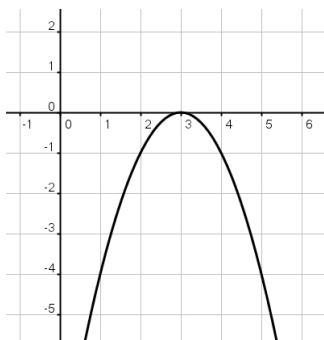
סקיצות לשאלות:



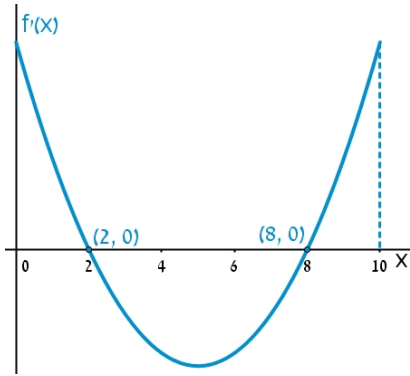
(13) ג.

(13) ב.

(13) א.



חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:



1) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

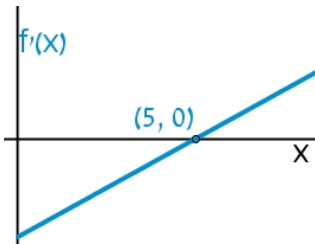
א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

בתחום הנ"ל אם: $f(0) = -4, f(2) = 6, f(5) = 0$

וכן: $f(10) > 0$.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת

והצירים ברביע הראשון עד לנקודה שבה $x = 2$.



2) לפניך גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.

הגרף המתואר חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד

והיא $(5, 0)$.

א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ היא חיובית ואת

התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

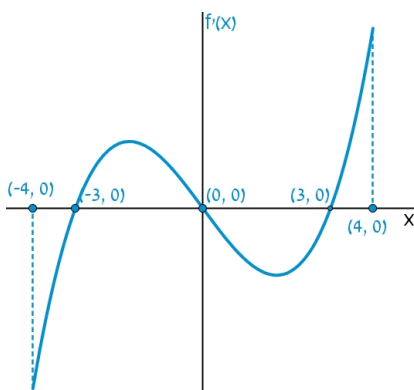
ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$

אם ידוע כי שיעור ה- y שלה הוא -2 .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.



3) בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 4$.

א. רשום את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון

של $f(x)$ וקבע את סוגן.

ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית

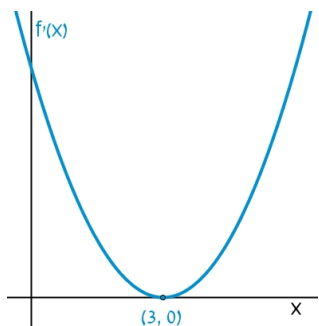
הצירים וגם מקיימת: $f(-3) = f(3) = m$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום

הנ"ל (הבע באמצעות m).

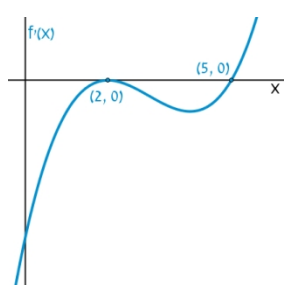
ד. השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ וציר ה- x ברביעים הראשון והשלישי

הוא 40.5 יח"ש. מצא את m .



4 הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור הבא :

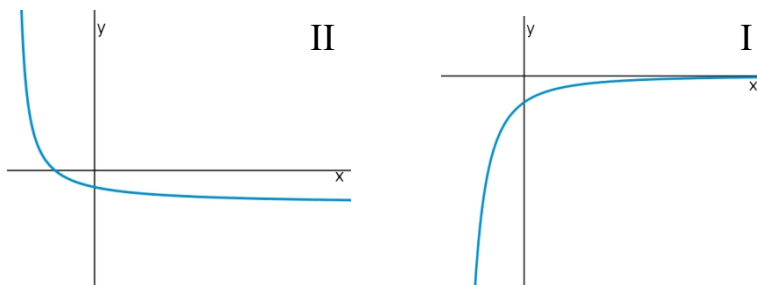
- א. האם ל- $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי $f(3) = 4$ וכי היא חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.
- ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.



5 באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$:

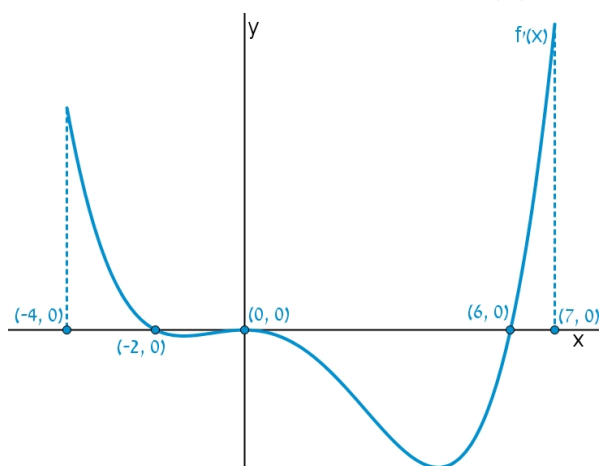
- ידוע כי הנקודות $A(5, -4.75)$, $B(2, 2)$ ו- $C(0, 14)$ נמצאות על $f(x)$.
- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.
 - ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.
 - ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ד. חשב את השטח מוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 5$.

6 באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:



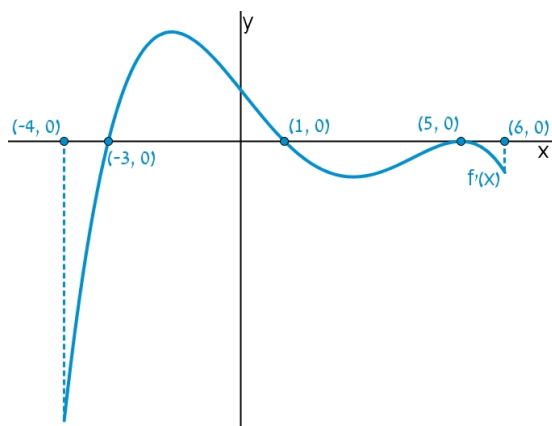
- א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.
- ב. נתון כי $f(10) = -3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$. מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

7 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא :



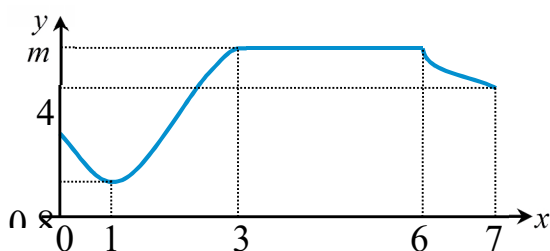
- א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$ לפי הנתונים :
 $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.
- ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.
- ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

8 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא :



- א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 6$ עבור הנתונים :
 $f(-3) = -356\frac{2}{5}$, $f(1) = 36\frac{2}{15}$, $f(5) = -83\frac{1}{3}$.
- ב. חשב את כלל השטח הכלוא בין גרף הנגזרת וציר ה- x בתחום : $-3 \leq x \leq 5$.

9) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 < x < 7$:



הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הצירים וענה על השאלות הבאות:

א. מצא עבור אילו ערכים של x השונים מ-6 מתקיים:

i. $f'(x) > 0$

ii. $f'(x) = 0$

iii. $f'(x) < 0$

ב. נתון כי: $\int_3^6 m dx = 15$, כאשר m הוא פרמטר המסומן על ציר ה- y .

מצא את $f(5)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציה הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 < x < 3$.

ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרף של פונקציה הנגזרת $f'(x)$

וציר ה- x בתחום $1 < x < 3$.

תשובות סופיות:

הערה: סרטוטי סקיצות לשאלות הבאות מופיעות בסוף התשובות.

1) ב. 10 יח"ש.

2) א. חיובית: $x > 5$, שלילית: $x < 5$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$.

ג. $\min(5, -2)$. ה. 10 יח"ש.

3) א. עולה: $3 < x \leq 4$, $-3 < x < 0$, יורדת: $0 < x < 3$, $-4 \leq x < -3$.

ב. $x_{\min} = 3$, $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = -3$. ד. $m = -8$.

4) א. לא. הנקודה $(3, 0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ג. 5 יח"ש.

5) א. $\min(5, 0)$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$. ד. 10 יח"ש.

6) א. $f(x): \text{II}$, $f'(x): \text{I}$. ב. 1 יח"ש.

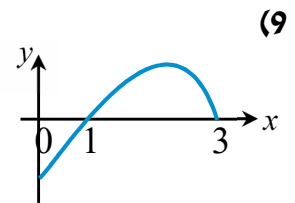
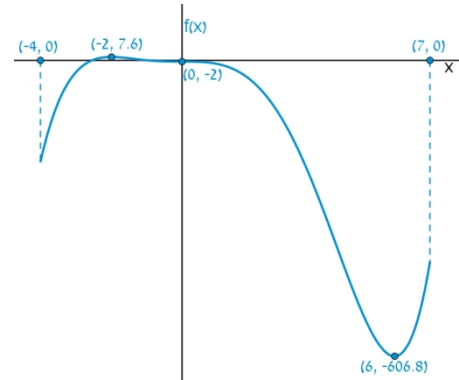
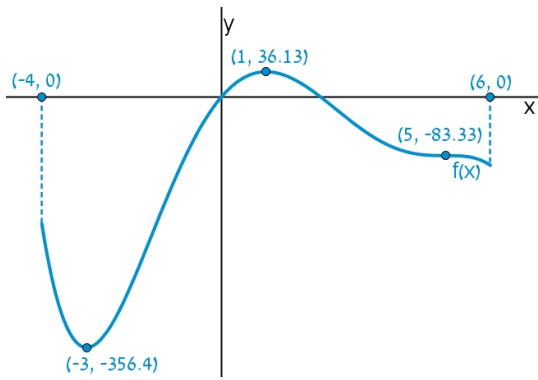
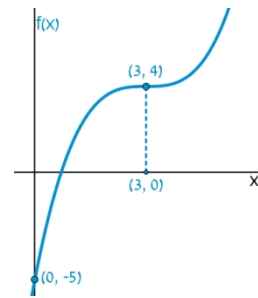
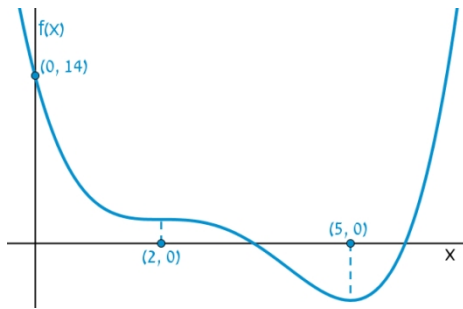
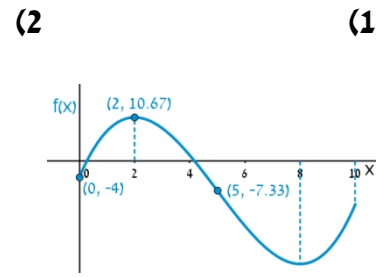
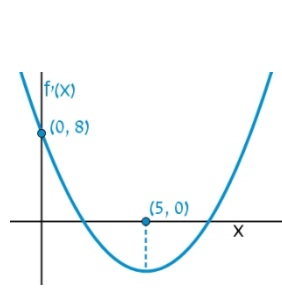
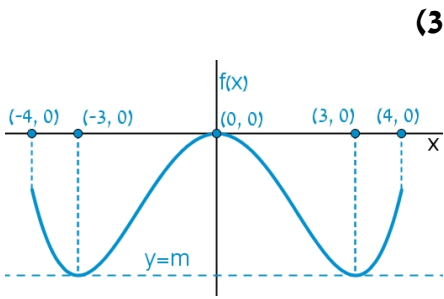
7) ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

8) ב. 512 יח"ש.

9) א. $f'(x) > 0: 1 < x < 3$; $f'(x) = 0: x = 1, 3 < x < 6$; $f'(x) < 0: 6 < x < 7, 0 < x < 1$

ב. $f(5) = 5, m = 5$. ד. 4.2 יח"ש.

סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:



תוכן העניינים – פרקי תרגול בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי:

366	פרק 16 – חשבון דיפרנציאלי - תרגילים מסכמים :
366	תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית :
376	תשובות סופיות :
379	תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית :
389	תשובות סופיות :
393	תרגילים העוסקים בפונקצית שורש (אי-רציונאלית) :
413	תשובות סופיות :
419	תרגילים העוסקים בפונקציות טריגונומטריות :
427	חקירות פונקציה טריגונומטרית :
436	תשובות סופיות :
444	פרק 17 - בעיות מקסימום ומינימום - תרגילים מסכמים :
444	תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית :
448	תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית :
454	תרגילים העוסקים בפונקצית שורש :
459	פרק 18 – חשבון אינטגרלי - תרגילים מסכמים :
459	תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית :
469	תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית :
474	תרגילים העוסקים בפונקצית שורש :

פרק 16 – חשבון דיפרנציאלי - תרגילים מסכמים:

תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית:

תרגילים העוסקים בנגזרות יסודיות:

גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} y = x^2 & \text{(1)} & y = (x-1)^2 & \text{(2)} & y = x^3 - 4x^2 + 4x + 3 & \text{(3)} \\ y = 3x^3 - 3x & \text{(4)} & y = (x^2 - 1)(x^2 + 3) & \text{(5)} & y = x^2(2x+1)^2 & \text{(6)} \\ y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 4 & \text{(7)} & y = \frac{5}{7}x^7 - \frac{4x^5}{5} + \frac{1}{2}x & \text{(8)} & y = \frac{4x^2 - 2x + 6}{2} & \text{(9)} \\ y = \frac{x^3 - 3x^2 - 6x - 9}{5} & \text{(10)} & y = x^4 + 1 + \frac{x^3 + 9x}{3} & \text{(11)} & y = \frac{x(x+7)^2}{2} & \text{(12)} \\ y = (x-1)^6 & \text{(13)} & y = (3x+2)^8 & \text{(14)} & y = (4x-5)^4 & \text{(15)} \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{llllll} y' = 2x & \text{(1)} & y' = 2x - 2 & \text{(2)} & y' = 3x^2 - 8x + 4 & \text{(3)} & y' = 9x^2 - 3 & \text{(4)} & y' = 4x^3 + 4x & \text{(5)} \\ y' = 16x^3 + 12x^2 + 2x & \text{(6)} & y' = x + \frac{1}{3} & \text{(7)} & y' = 5x^6 - 4x^4 + \frac{1}{2} & \text{(8)} & y' = 4x - 1 & \text{(9)} \\ y' = \frac{3x^2 - 6x - 6}{5} & \text{(10)} & y' = 4x^3 + x^2 + 3 & \text{(11)} & y' = \frac{3x^2 + 28x + 49}{2} & \text{(12)} \\ y' = 6(x-1)^5 & \text{(13)} & y' = 24(3x+2)^7 & \text{(14)} & y' = 16(4x-5)^3 & \text{(15)} \end{array}$$

תרגילים העוסקים במציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה לפי הכלל: $f'(x_0) = m$.

16) חשב את שיפוע המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } x = 1, f(x) = 2x^2 - x & \text{ב. } x = 7, f(x) = x^3 + 5x^2 - 5x \\ \text{ג. } x = -1, f(x) = x(4x-3)^2 & \text{ד. } x = 2, f(x) = \frac{x^5 - 15x^3 + 20x + 4}{5} \\ \text{ה. } x = 0, f(x) = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 & \text{ו. } x = -1, f(x) = x(x-3)(x^2+1) \end{array}$$

17) לפניך מספר פונקציות. לכל פונקציה מצא את שיעורי הנקודות עבורם שיפוע המשיק הוא המצוין לידה.

ב. $m = 0$, $f(x) = x(x-2)^2$

א. $m = 13$, $f(x) = 5x^2 + 3x$

ד. $m = 6$, $f(x) = (x^2 + 6)(x-2)$

ג. $m = 20$, $f(x) = 2x^3 + 14x$

18) א. מצא נקודה על גרף הפונקציה: $y = 3x^2 - x - 2$ אשר המשיק העובר

דרכה מקביל לישר: $y = 5x + 2$.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה: $y = x^3 + 3x^2 + 2x$ אשר המשיק העובר

דרכה מקביל לישר: $y + x = 3$.

19) נתונה הפונקציה הבאה: $y = 3x^2 - 12x$.

הראה כי שיפוע המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x הם מספרים נגדיים.

תרגילים העוסקים במציאת משוואת משיק לפי הנוסחה: $y - y_1 = m(x - x_1)$

כאשר: (x_1, y_1) - נקודת ההשקה ו- m שיפוע המשיק.

20) מצא את משוואת המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

ב. $x = -1$, $y = x^3 - 4x$

א. $x = 3$, $y = x^2 - 4x - 5$

ד. $x = 1$, $y = 3x^4 + 4x^3 + 5x$

ג. $x = 0$, $y = x(x+5)^2$

ו. $x = 1$, $y = \frac{4x^7}{7} - \frac{2x^{10}}{5}$

ה. $x = -3$, $y = \frac{x^3 + 6x^2 - 9x}{3}$

ח. $x = 2$, $y = x(x-1)(3x+8)$

ז. $x = 0$, $y = (3x^2 - 4)(6-x)$

21) נתונה הפונקציה: $y = x^3 - 3x + 12$. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה

העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

22) נתונה הפונקציה: $y = x^2 - 7x + 10$. מצא את משוואת המשיקים לגרף

הפונקציה העוברים דרך נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

(23) נתונה הפונקציה: $y = 2x^2 + 5x + 3$ ונתון הישר: $y = 4x + 4$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.
ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך שמצאת.

(24) נתונה הפונקציה: $y = 4x^3$ ונתון הישר: $y = 4x$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.
ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך שמצאת.

(25) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 3x - 4$ ו- $g(x) = 5x - x^2$.

- א. מצא את משוואות המשיקים לכל הפונקציה העוברים דרך הנקודה שבה $x = 1$.
ב. מצא את נקודת החיתוך של שני המשיקים שמצאת בסעיף הקודם.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 3$.

- הישר $y = 3$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשלוש נקודות.
א. מצא את נקודות החיתוך בין הפונקציה והישר.
ב. מצא את משוואות המשיקים בנקודות החיתוך.

תרגילים העוסקים במציאת משוואת המשיק כאשר נתון מידע הקשור לשיפוע:

(27) א. נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x^2 + x + 3$.

מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה ששיפועו: $m = 9$.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + 2x^2$.

מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה ששיפועם: $m = -1$.

ג. נתונה הפונקציה: $f(x) = x(x + 4)^2$.

מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה ששיפועם: $m = 0$.

(28) א. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 + 12x + 4$.

מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר: $y = 44x + 1$.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$.

המקבילים לישר: $3y - 12x = 5$.

(29) א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 4x + 1$.

בעלי שיפוע 2.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $y = -2x^3 - 3x^2 + 10x + 3$.

ששיפועם הוא: $m = -2$.

תרגילים עם פרמטרים:

(30) נתונה הפונקציה: $y = ax^2 + 4x + 5$. ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ הוא 8. מצא את a .

(31) נתונה הפונקציה: $y = x^2 + a$.

ידוע כי לגרף הפונקציה יש משיק שמשוואתו: $y = 2x - 2$.

א. מצא את נקודת ההשקה.

ב. מצא את a .

(32) נתונה הפונקציה: $y = x^3 + 6x^2 + ax$. ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y הוא 5. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

(33) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x^2}{A} + 8x + 20$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך אחת מנקודות החיתוך

שלה עם ציר ה- x היא: $y = 12x + 24$.

א. מצא את A .

ב. מצא את משוואת המשיק העובר דרך נקודת החיתוך השנייה של

הפונקציה עם ציר ה- x .

(34) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = (x-1)(x^2 + a)$.

ידוע כי: $f'(1) = 2$. מצא את a .

(35) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^4}{A} + 2x^3 + 4x^2 + 4$. ידוע כי המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה שבה $x = -2$ מקביל לציר ה- x .

א. מצא את A .

ב. האם יש לגרף הפונקציה משיקים נוספים המקבילים לציר ה- x ? אם כן,

מצא את המשוואות שלהם.

(36) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^5 + Bx^3 + 4x$.

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ מקביל לישר: $y = 24x$.

א. מצא את B .

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. האם יש משיק נוסף לגרף הפונקציה המקביל לישר $y = 24x$?

במידה וכן מצא את משוואתו.

(37) נתונה הפונקציה: $f(x) = Ax^2 + Bx + 5$. ידוע כי: $f(1) = 12$ וגם: $f'(1) = 8$. מצא את A ו-B.

(38) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + Ax + C$. ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה: $y = 5$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודה זו הוא 4. מצא את A ו-C.

(39) נתונה הפונקציה: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + 8$. משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך הנקודה שבה $x = -2$ היא: $y = 12x + 28$. מצא את A ו-B.

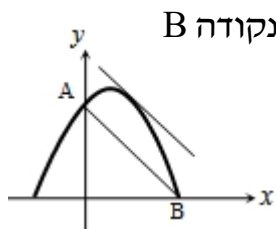
(40) נתונה הפונקציה: $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + 10$. שיפוע הפונקציה בנקודה $(1, 18)$ הוא 18.
 א. מצא את A ו-B.
 ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את ציר ה-x.

(41) נתונות הפונקציות: $f(x) = 3x^2 + Ax$ ו- $g(x) = x^2 + B$. ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה: $x = 1$ ולשתיהן יש את אותו השיפוע בנקודה שבה $x = -0.25$. מצא את A ו-B.

(42) נתונות הפונקציות: $f(x) = Ax^2 + 10x$ ו- $g(x) = x^2 + Bx - 16$. ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה: $x = -1$. כמו כן לשתי הפונקציות יש את אותו השיפוע בעבור $x = -8.5$. מצא את A ו-B.

תרגילים שונים – שימושי הנגזרת:

(43) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + 6x + 16$.



הנקודה A היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y והנקודה B

היא נקודת החיתוך החיובית של הפונקציה עם ציר ה-x.

א. מצא את משוואת המיתר העובר דרך הנקודות A ו-B.

ב. מצא את משוואת המשיק לפונקציה המקביל לישר שמצאת בסעיף הקודם.

44) נתונה הפרבולה: $f(x) = -x^2 + 8x - 12$.



- מצא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- x .
- דרך נקודות החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- x מעבירים משיקים. מצא את משוואות המשיקים הללו.
- מצא את נקודת החיתוך של שני המשיקים.
- חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים וציר ה- x .

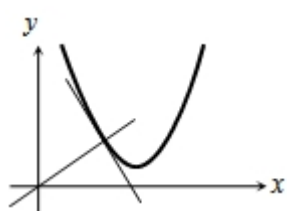
45) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 27x$.

- מצא את שיעורי הנקודות שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- x .
- כתוב את משוואות המשיקים העוברים דרך הנקודות שמצאת.
- חשב את שטח המלבן הנוצר בין שני המשיקים שמצאת והאנכים לציר ה- x היוצאים מנקודות ההשקה.

46) נתונות הפונקציות: $f(x) = 8 - x^2$ ו- $g(x) = Ax^2 + 15.5x - 1$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה: $x = 1$.

- מצא את A .
- הראה כי המשיקים לכל פונקציה בנקודת החיתוך שבה $x = 1$ מאונכים זה לזה. (תזכורת: השיפועים m_1, m_2 של שני ישרים מאונכים מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$ - מכפלתם שווה ל-1).

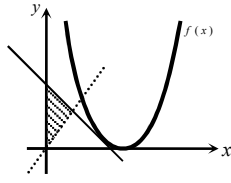


47) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 2x^2 - 10x + 13$.

- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך הנקודה שבה $x = 2$.
- מצא את משוואת הנורמל לפונקציה העובר דרך נקודת ההשקה של המשיק שמצאת.
- חשב את שטח המשולש הנוצר בין הנורמל, המשיק והצירים. (היעזר באיור).

48) נתונה הפונקציה: $f(x) = Ax^2 - 6x + 9$. שיפוע הפונקציה בנקודה שבה $x = 3$ הוא אפס.

- מצא את A .
- הראה כי הפונקציה משיקה לציר ה- x .
- מעבירים את הישר $y = 1$ החותך את הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם הישר.



49 נתונה הפונקציה: $f(x) = (2x - 5)^8$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 2$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של משיק זה עם הישר $y = 17x$.

ג. חשב את שטח המשולש שנוצר בין המשיק, הישר וציר ה- y (ראה איור).

50 נתונה הפונקציה: $f(x) = a(x - b)^5$, $a, b \neq 0$. ידוע כי ערך הנגזרת הוא אפס

כאשר $x = 1$. כמו כן הישר $y = 15x - 27$ משיק לפונקציה בנקודה שבה: $x = 2$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

ב. מצא שתי נקודות על הפונקציה $f(x)$ ועל הפונקציה: $g(x) = 7.5(x - 1)^4 - 24$ בעבורה שיפוע המשיק זהה לשני הגרפים.

תרגילים העוסקים במציאת נקודות קיצון לפי הכלל: $f'(x) = 0$, סיווג

ומציאת תחומי עלייה וירידה:

51 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות:

ב. $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 8$

א. $y = x^2 - 6x + 8$

ד. $y = x^5 + 80x$

ג. $y = x(x + 3)^2$

ה. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{26x^3}{3} + 25x$

52 לפניך מספר פונקציות. רשום בעבור כל פונקציה את תחומי העלייה והירידה שלה:

ב. $y = x^3 - 12x$

א. $y = x^2 - 7x + 10$

ד. $y = 16 - x^2 + 2x^4$

ג. $y = x^2(x - 1)$

ו. $y = \frac{x^3 + 6x^2 + 15x}{3}$

ה. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

ח. $y = (4 - x)^7$

ז. $y = (2x - 5)^6$

53 נתונה הפונקציה הבאה: $y = x^4 - 3x^3 + 4x$.

א. הראה כי הנקודה שבה: $x = 2$ היא נקודת קיצון.

ב. כתוב את הנגזרת השנייה של הפונקציה.

ג. קבע על פי הנגזרת השנייה את סוג הקיצון של נקודה זו.

54) נתונה הפונקציה: $y = x^3 + 6x^2$.

- א. הראה כי יש לפונקציה נקודת קיצון על ציר ה- x וקבע את סוגה.
ב. מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וכתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

55) א. מצא את הערך הגדול ביותר של הפונקציה: $y = 27 - x^2$.
ב. מצא את הערך הקטן ביותר של הפונקציה: $y = x^4 - 8x^2 + 10$.

56) נתונה הפונקציה: $y = 4x^3 + x$.

- א. הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון.
ב. הראה כי הפונקציה עולה תמיד.

תרגילים העוסקים במציאת נקודות קיצון מוחלטות כאשר נתונה פונקציה בקטע מסוים:

57) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות בעבור כל פונקציה בתחום הנתון לידה:

- א. $1 \leq x \leq 7, y = x^2 - 2x$
ב. $-4 \leq x \leq 4, y = 16 - x^2$
ג. $-2 \leq x \leq 4, y = x^3 - 3x^2 - 9x$
ד. $-1 \leq x \leq 5, y = -x^3 + 7.5x^2 - 12x$
ה. $-6 \leq x \leq 6, y = x^4 - 50x^2 + 3$

58) נתונה הפונקציה: $y = -x^3 + 6x^2 - 9x - 6$ בתחום הסגור: $[0; 5]$.

- א. מצא את נקודות קיצון הקצה בתחום הסגור הנ"ל.
ב. מצא את נקודות הקיצון המקומיות בתחום הנ"ל.
ג. קבע אלו נקודות הן נקודות הקיצון המוחלטות.

59) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 36x$ בתחום: $[-8; 6]$.

- א. מצא את שיעורי נקודות קיצון הקצה בתחום הנתון.
ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון המקומיות.
ג. מצא אלו נקודות הן נקודות הקיצון המוחלטות בתחום הנתון.

תרגילים העוסקים בחקירה מלאה של פונקציה פולינומית:

60) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

1. תחום הגדרה.
2. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
3. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
4. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
5. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. $y = x^2 - 8x + 12$ ב. $y = x^3 - 12x$

ג. $y = x(x+8)^2$ ד. $y = x(x-12)(2x-9)$

ה. $y = x^4 - 4x$ ו. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}$

ז. $y = (3x-1)^6$ ח. $y = (6-x)^8$

תרגילים שונים העוסקים בחקירות:

61) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 3$. הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה

בנקודה שבה $x = 2$.

- א. מצא את הפרמטר a .
- ב. מצא את הנקודות המקיימות $f'(x) = 0$.
- ג. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

62) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + a$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בראשית הצירים.

- א. מצא את הפרמטר a .
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

63) נתונה הפונקציה: $y = (x-2)(x+1)^2$.

- א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ב. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

64 נתונה הפונקציה: $y = (x-3)(2-x)^2$.

- א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

65 נתונה הפונקציה: $y = 2x^2(x+a)^2$, $a > -6$.

ידוע שלפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x = 4$.

- א. מצא את הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.
- ב. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון? אם כן, מצא אותן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

66 לגרף הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x^2 + kx$ מעבירים משיק $y = 21x + 6$ החותך אותנו בנקודה שבה $x = 6$.

- א. מצא את k .
- ב. מצא את נקודת ההשקה של המשיק עם הפונקציה $f(x)$.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ד. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון?
- ה. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

67 נתונה הפונקציה: $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$.

ידוע שהפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 2$.

- א. מצא את y .
- ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

68 נתונה הפונקציה: $f(x) = 3(3x-5)^4$.

- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

- (16) א. 3 ב. 212 ג. 105 ד. -16 ה. 0 ו. -18 ז. 17 א. (1,8) ב. $(\frac{2}{3}, 1\frac{5}{27})$ (2,0)
- ג. $(1,16)(-1,-16)$ ד. $(\frac{4}{3}, -5\frac{5}{27})$ (0,-12) ז. 18 א. (1,0) ב. (-1,0) (19) $m = \pm 12$
- (20) א. $y = 2x - 20$ ב. $y = -x + 2$ ג. $y = 25x$ ד. $y = 29x - 17$ ה. $y = -6x$
- ו. $y = \frac{6}{35}$ ז. $y = 4x - 24$ ח. $y = 48x - 68$ ט. 21 א. $y = -3x + 12$
- (22) א. $y = -3x + 6, y = 3x - 15$ ב. (0,5), (6) א. (23) $y = x + 1, y = 7x + 2.5$ ב. (-1,0)
- (24) א. (-1,-4), (1,4), (0,0) ב. $y = 12x + 8, y = 12x - 8, y = 0$
- (25) א. $y = 5x - 5, y = 3x + 1$ ב. (3,10) א. (26) (0,3), (1,3), (3,3)
- ב. $y = 3x + 3, y = -2x + 5, y = 6x - 15$ א. (27) $y = 9x - 1$ ב. $y = -x, y = -x - \frac{4}{27}$
- ג. $y = 0, y = -9\frac{13}{27}$ א. (28) $y = 44x - 44$ ב. $y = 4x - 4, y = 4x + 5\frac{13}{27}$
- (29) א. $y = 2x - 9, y = 2x + 4.5$ ב. $y = -2x + 10; y = -2x - 17$ א. (30) $a = 1$
- (31) א. (1,0) ב. $a = -1$ א. (32) $a = 5, y = x^3 + 6x^2 + 5x$
- (33) א. $A = -1$ ב. $y = -12x + 120$ א. (34) $a = 1$ א. (35) $A = 4$ ב. כן, $y = 4$
- (36) א. $B = 5$ ב. $y = 24x - 14$ ג. כן, $y = 24x + 14$
- (37) א. $A = 1, B = 6$ (38) $A = 4, C = 5$ (39) $A = 2, B = 3$ א. (40) $A = 1, B = 7$
- (41) א. $A = 1, B = 3$ (42) $A = 2, B = -7$ א. (43) $y = -2x + 16$ ב. $y = -2x + 32$
- (44) א. (2,0), (6,0) ב. i. $y = -4x + 24, y = 4x - 8$ ii. (4,8) ג. 16
- (45) א. (3,-54), (-3,54) ב. $y = \pm 54$ ג. 648 א. (46) $A = -7.5$
- (47) א. $y = -2x + 5$ ב. $y = 0.5x$ ג. 1.25 א. (48) $A = 1$ ג. $y = -2x + 5, y = 2x - 7$
- (49) א. $y = -16x + 33$ ב. (1,17) ג. 16.5 א. (50) $a = 3, b = 1$ ב. (1,0), (3,96)
- (51) א. (3,-1) ב. $(-\frac{1}{3}, 8\frac{14}{27})$ ג. $(3,-10)(-1,-4)(-3,0)$ ד. אין קיצון.
- ה. $(-1, -16\frac{8}{15}), (1, 16\frac{8}{15}), (-5, 333\frac{1}{3}), (5, -333\frac{1}{3})$
- (52) א. עולה: $x > 3.5$ יורד: $x < 3.5$ ב. עולה: $x < -2, x > 2$ יורד: $-2 < x < 2$
- ג. עולה: $x < 0, x > \frac{2}{3}$ יורד: $0 < x < \frac{2}{3}$ ד. עולה: $-0.5 < x < 0, x > 0.5$
- יורד: $0 < x < 0.5, x < -0.5$ ה. עולה: $x < -0.5, x > 2$ יורד: $-1 < x < 2$ ו. עולה לכל x.
- ז. עולה: $x > 2.5$ יורד: $x < 2.5$ ח. יורד לכל x. (53) $f''(x) = 12x^2 - 18x$ ג. Min.
- (54) א. $Min(0,0)$ ב. $Max(-4,32)$ עולה: $x < -4, x > 0$ יורד: $-4 < x < 0$
- (55) א. 27 ב. -6
- (57) א. $Min(1,-1)$ מוחלט. $Max(7,35)$ מוחלט.
- ב. $Min(\pm 4,0)$ מוחלט. $Max(0,16)$ מוחלט.
- ג. $Min(3,-27)$ מוחלט. $Max(-1,5)$ מוחלט.

ד. $Min(1, -5.5)$ מוחלט. $Max(-1, 20.5)$ מוחלט.

ה. $Min(\pm 5, -622)$ מוחלט. $Max(0, 3)$ מוחלט.

58 א. $(0, -6)$, $(5, -26)$ ב. $Min(1, -10)$, $Max(3, -6)$.

ג. $Min(5, -26)$ מוחלט. $Max(0, -6)$, $Max(3, -6)$ מוחלט.

59 א. $(6, 0)$, $(-8, -224)$ ב. $(\sqrt{12}, -83.13)$, $(-\sqrt{12}, 83.13)$

ג. $Min(-8, -224)$, $Max(-\sqrt{12}, 83.13)$.

60. תשובות לסעיפים 1 עד 4:

א. 1. כל x . 2. $Min(4, -4)$. 3. עולה: $x > 4$ יורד: $x < 4$. 4. $(0, 12)$, $(6, 0)$, $(2, 0)$.

ב. 1. כל x . 2. $Min(2, -16)$, $Max(-2, 16)$. 3. עולה: $x > 2$, $x < -2$ יורד: $-2 < x < 2$.

4. $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{12}, 0)$ ג. 1. כל x . 2. $Min(-2\frac{2}{3}, -75\frac{23}{27})$, $Max(-8, 0)$.

3. עולה: $x < -8$, $x > -2\frac{2}{3}$ יורד: $-8 < x < -2\frac{2}{3}$. 4. $(0, 0)$, $(-8, 0)$ ד. 1. כל x .

2. $Min(9, -243)$, $Max(2, 100)$. 3. עולה: $x > 9$, $x < 2$ יורד: $2 < x < 9$.

4. $(0, 0)$, $(12, 0)$, $(4.5, 0)$ ה. 1. כל x . 2. $Min(1, -3)$. 3. עולה: $x > 1$ יורד: $x < 1$.

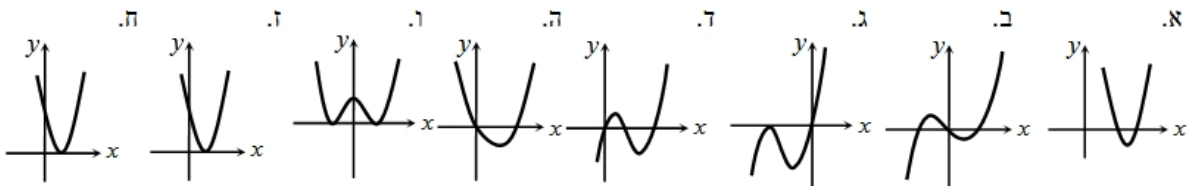
4. $(0, 0)$, $(\sqrt[3]{4}, 0)$ ו. 1. כל $x + 2$. 4. $Min(\pm 1, 0)$, $Max(0, 0.25)$.

3. עולה: $x > 1$, $-1 < x < 0$ יורד: $-1 < x < 0$, $x < -1$ ז. 1. כל x . 2. $Min(\frac{1}{3}, 0)$.

3. עולה: $x > \frac{1}{3}$ יורד: $x < \frac{1}{3}$. 4. $(\frac{1}{3}, 0)$, $(0, 1)$ ח. 1. כל x . 2. $Min(6, 0)$.

3. עולה: $x > 6$ יורד: $x < 6$. 4. $(6, 0)$, $(0, 6^8)$.

סקיצות:



61 א. $a = -3$ ב. $(1, 4)$ ג. לא. ד. עולה בכל תחום הגדרתה חוץ מ- $x = 1$.

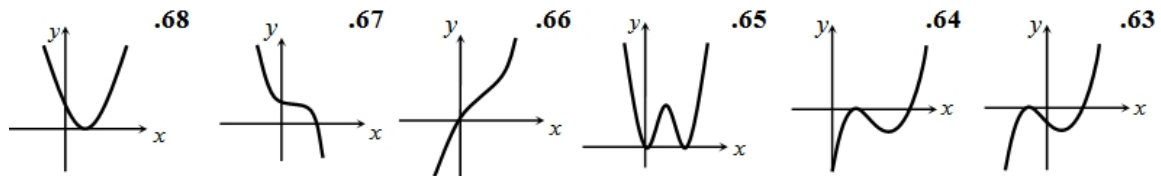
62 א. $a = 0$ ב. $Min(0, 0)$, $Max(-\frac{1}{4}, \frac{5}{256})$, $Min(-2, -4)$ ג. עולה: $x > 0$, $-2 < x < -\frac{1}{4}$,

יורדת: $x < -2$, $-\frac{1}{4} < x < 0$.

63 א. $Max(-1, 0)$, $Min(1, -4)$ ב. עולה: $x < -1$, $x > 1$ יורדת: $-1 < x < 1$.

- ג. $(-1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$. א (64) . $Max(2,0)$, $Min(2\frac{2}{3}, -\frac{4}{27})$.
- ב. עולה: $x < 2$, $x > 2\frac{2}{3}$; יורדת: $2 < x < 2\frac{2}{3}$. ג. $(2,0)$, $(3,0)$, $(0,-12)$.
- א (65) . $y = 2x^2(x-4)^2$, $a = -4$. ב. $(0,0)$, $(2,32)$, $(4,0)$. ג. עולה: $0 < x < 2$, $x > 4$; יורדת: $x < 0$, $2 < x < 4$. ד. $(4,0)$, $(0,0)$.
- א (66) . $k = 10$. ב. $(-1,-15)$. ג. $(0,0)$. ד. לא. ה. עולה בכל תחום הגדרתה.
- א (67) . $d = 8$. ב. לא. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה. ד. $(0,8)$.
- א (68) . $Min(1\frac{2}{3}, 0)$. ב. עולה בתחום: $x > 1\frac{2}{3}$; יורדת בתחום: $x < 1\frac{2}{3}$. ג. $(1\frac{2}{3}, 0)$, $(0,1875)$.

סקיצות של שאלות 63-68:



תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית:

תרגילים העוסקים בנגזרות יסודיות:

גזור את הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{x}{6} + \frac{6}{x} \quad (3)$$

$$y = \frac{4x-1}{x} \quad (2)$$

$$y = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$y = \frac{(x+3)^2}{x^2} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2-3x+4}{x^2} \quad (5)$$

$$y = \frac{x^2+5x+4}{x} \quad (4)$$

$$y = \frac{x+6}{x^2-6} \quad (9)$$

$$y = \frac{6}{x^2+8x+12} \quad (8)$$

$$y = \frac{3x}{2x+1} \quad (7)$$

$$y = \frac{x^2}{(x^2+4)^2} \quad (12)$$

$$y = 3 + \frac{(x-9)^2}{(x+9)^2} \quad (11)$$

$$y = \frac{x^2-6x+8}{x^2+2x+1} \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+7x+12}{x^4} \quad (14)$$

$$y = \frac{x^3+x}{x^2-1} \quad (13)$$

תשובות סופיות:

$$y' = \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3} \quad (5) \quad y' = 1 - \frac{4}{x^2} \quad (4) \quad y' = \frac{1}{6} - \frac{6}{x^2} \quad (3) \quad y' = \frac{1}{x^2} \quad (2) \quad y' = -\frac{1}{x^2} \quad (1)$$

$$y' = -\frac{6(2x+8)}{(x^2+8x+12)^2} \quad (8) \quad y' = \frac{3}{(2x+1)^2} \quad (7) \quad y' = -\frac{6}{x^2} - \frac{18}{x^3} \quad (6)$$

$$y' = \frac{36(x-9)}{(x+9)^3} \quad (11) \quad y' = \frac{8x^2-14x-22}{(x^2+2x+1)^2} \quad (10) \quad y' = -\frac{x^2+12x+6}{(x^2-6)^2} \quad (9)$$

$$y' = -\frac{2x^2+21x+48}{x^5} \quad (14) \quad y' = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2} \quad (13) \quad y' = \frac{2x(4-x^2)}{(x^2+4)^3} \quad (12)$$

תרגילים העוסקים במציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה לפי הכלל: $f'(x_0) = m$.

15) חשב את שיפוע המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

א. $x = 1$, $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$
 ב. $x = 2$, $f(x) = \frac{x^2}{3x^2-2}$
 ג. $x = -2$, $f(x) = \frac{3x}{(x-1)^2}$
 ד. $x = 0$, $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{3x^2-x-2}$

16) לפניך מספר פונקציות. מצא את הנקודות שבהן שיפוע הפונקציה הוא m :

א. $m = -3$, $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$
 ב. $m = \frac{5}{9}$, $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$
 ג. $m = \frac{1}{36}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+8}$
 ד. $m = 4$, $f(x) = x^2 + 4x - \frac{x-16}{x}$

תרגילים העוסקים במציאת משוואת משיק לפי הנוסחה: $y - y_1 = m(x - x_1)$, כאשר: (x_1, y_1) - נקודת ההשקה ו- m שיפוע המשיק.

17) מצא את משוואת המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

א. $x = -1$, $y = \frac{x^2+2x}{x+3}$
 ב. $x = 2$, $y = \frac{2x+5}{x^2+5}$
 ג. $x = 7$, $y = 3x - \frac{x+6}{x^2-12x+36}$
 ד. $x = 3$, $y = \frac{(x+3)^2}{x^2}$

18) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \frac{2x+4}{(x+1)^2}$ העובר דרך נקודת

החיתוך שלה עם ציר ה- x .

19) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x}{2} + \frac{4}{x^2}$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

(20) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

מעבירים לגרף הפונקציה משיק בנקודה שבה $x = 3$.

- א. מצא את משוואת המשיק.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
- ג. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק לצירים.

(21) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+4}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x}$.

- א. האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x ?
- ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$.
- ג. האם יש לגרף הפונקציה משיק נוסף המקביל למשיק שמצאת בסעיף הקודם? אם כן – כתוב את משוואתו.

(22) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x-1}{x+1}$.

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- ב. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק שמצאת לצירים.

(23) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{4x+2}{2x}$, $g(x) = x^3 + 2$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.
- ב. מצא את משוואות המשיקים לכל פונקציה העוברים דרך הנקודה הנמצאת ברביע הראשון.

תרגילים העוסקים במציאת משוואת המשיק כאשר נתון מידע הקשור לשיפוע:

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x-6}{x}$.

- א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה שהשיפוע שלהם הוא 6.
- ב. מצא את המרחק בין שתי נקודות החיתוך של שני המשיקים עם ציר ה- y .

(25) א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ המקבילים לישר: $y + 3x = 10$.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ המקבילים לישר: $y + 3x = 10$.

תרגילים עם פרמטרים:

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + kx - 5}{x}$. הישר $y = 6x - 14$ משיק לגרף הפונקציה

בנקודה שבה $x = 1$.

- מצא את הפרמטר k .
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- האם קיים עוד משיק לגרף הפונקציה המקביל למשיק זה? אם כן, מצא את משוואתו.

(27) המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + A}$ בנקודה שבה $x = 1$ מקביל לציר ה- x .

מצא את A .

(28) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2 + kx + 3}{x^2}$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 1$.

- מצא את הפרמטר k .
- האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בעוד נקודות? אם כן, מצא אותן.
- מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך עם ציר ה- x .

(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{12}{9 - ax^2}$.

הישר $x = 3$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

- מצא את הפרמטר a .
- האם יש לגרף הפונקציה עוד אסימפטוטות?
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 0$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{8x + 4}{x^2 + a}$.

הישר $x = 4$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

- מצא את הפרמטר a .
- האם יש לגרף הפונקציה עוד אסימפטוטות?
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלו עם הישר: $4y + 2x + 1 = 0$ הנמצאת על ציר ה- x .

(31) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{mx^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית : $y = 3$.

א. מצא את m .

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם

האסימפטוטה האופקית $y = 3$.

(32) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3} + A$

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית : $y = 3$.

א. מצא את A .

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם

האסימפטוטה האופקית $y = 3$.

(33) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+2} + A$

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית : $y = 5$.

א. מצא את A .

ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.

(34) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{Ax^2+1}{x^2+1} + B$

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית : $y = 1$.

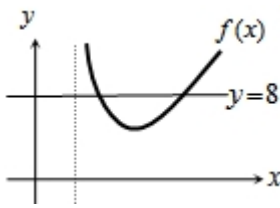
כמו כן, שיפוע הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 1.

א. מצא את A ואת B .

ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.

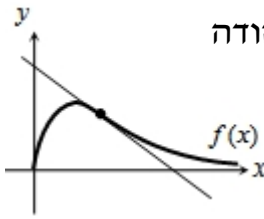
תרגילים שונים – שימושי הנגזרת:

(35) באיור שלפניך נתונות הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2}{2x-3}$ והישר: $y=8$.



- א. מצא את נקודות החיתוך של הישר והפונקציה.
- ב. כתוב את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ העוברים דרך נקודות החיתוך שלה עם הישר.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של שני המשיקים.
- ד. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים לישר $y=8$.

(36) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$. מעבירים לפונקציה משיק בנקודה



שבה $x=2$. חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק לצירים.

(37) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

- א. הראה כי הפונקציה עולה תמיד.
- ב. מצא את משוואת המשיק המאונך לישר: $y=-9x$ העובר דרך נקודת ההשקה הנמצאת ברביע ראשון.

(38) א. מצא את שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+3}{x}$ בנקודה שבה: $x=1$.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $g(x) = \frac{x^2-4x}{x+2}$

המקבילים למשיק שאת שיפועו מצאת בסעיף א'.

ג. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $h(x) = \frac{x^2+1}{x+7}$ המאונכים

למשיק שאת שיפועו מצאת בסעיף א'.

תרגילים העוסקים בחקירה מלאה של פונקציה רציונאלית:

חקור את הפונקציות שבעמוד הבא לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x} \quad (40)$$

$$y = 1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} \quad (42)$$

$$y = 1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2} \quad (44)$$

$$y = \frac{3}{x^2 - 10x + 25} \quad (46)$$

$$y = \frac{6}{x^2 - 9} \quad (48)$$

$$y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5} \quad (50)$$

$$y = -\frac{16x^2 - 3x + 4}{x} \quad (39)$$

$$y = \frac{x^2 + 10x + 25}{x} \quad (41)$$

$$y = 5 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \quad (43)$$

$$y = \frac{3x}{5} - \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{x} \quad (45)$$

$$y = \frac{4}{3x^2 - 6x - 9} \quad (47)$$

$$y = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} \quad (49)$$

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

- א. תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{(x+4)^2}{3x-5} \quad (52)$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 8} \quad (54)$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 - 5x + 4} \quad (51)$$

$$f(x) = 1.5x - \frac{5x+1}{x+5} \quad (53)$$

(55) נתונה הפונקציה: $y = ax + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x}$, a פרמטר).

ידוע כי גרף הפונקציה עובר בנקודה (3,7.5).

- א. מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

56) נתונה הפונקציה: $y = \frac{-9}{10 + ax - 2x^2}$.

ידוע כי יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית: $x = 5$.

- א. מצא את ערך הפרמטר a .
- ב. האם יש לפונקציה עוד אסימפטוטות? אם כן, מהן?
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

57) נתונה הפונקציה: $y = \frac{a}{2x^2 + 5}$, (a פרמטר).

ידוע שהפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 2$.

- א. מצא את הפרמטר a .
- ב. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x ? אם כן – מצא אותן.

58) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{9 - x^2}{x^2 - k}$ יש נקודת קיצון

שנמצאת על ציר ה- y .

- ב. ידוע כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא 3. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y = -1$. נמק את תשובתך.

59) לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2}$, (a פרמטר) יש נקודת קיצון שבה $x = -8$.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

60 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$, a פרמטר).

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה $(0.5, 3)$.

- א. מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. היעזר בגרף הפונקציה וקבע לאלו ערכים של k הישר: $f(x)$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

61 הפונקציה: $f(x) = \frac{ax - 30}{x^2 - 6x + a}$, a פרמטר) מוגדרת לכל x .

ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x = 2$.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

62 נתונה הפונקציה: $y = \frac{a^2x - 4}{2x^2 - 1}$, a פרמטר).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא $m = 4$.

- א. מצא את כל הערכים האפשריים בעבור a .
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

63 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + ax + 6}{x - 2}$, a פרמטר).

ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .

- א. מצא את הערך של הפרמטר a .
- ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א' ומצא:
 1. את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 2. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 3. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 4. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
- ג. לאלו ערכי x הפונקציה שלילית?

ד. נתון הישר: $y = k$. לאלו ערכי k אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

64 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, $a \neq 1$ פרמטר.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .
- ד. 1. מצא לאלו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.
2. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$.
מצא את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x .

65 נתונה הפונקציה: $y = \frac{x+3}{x-2} + A$, A פרמטר.

- א. מצא את ערך הפרמטר A .
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל x .
- ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. נתון הישר: $y = k$. האם קיים ערך של k בעבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

66 נתונה הפונקציה: $y = \frac{x^2 - m}{ax - 4}$, $a > 0$, m פרמטרים.

- א. מצא את הערך של הפרמטר m .
- ב. הצב את הערך של m שמצאת בסעיף א' והבע באמצעות a את:
 1. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 2. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 3. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות a בסעיף הקודם.

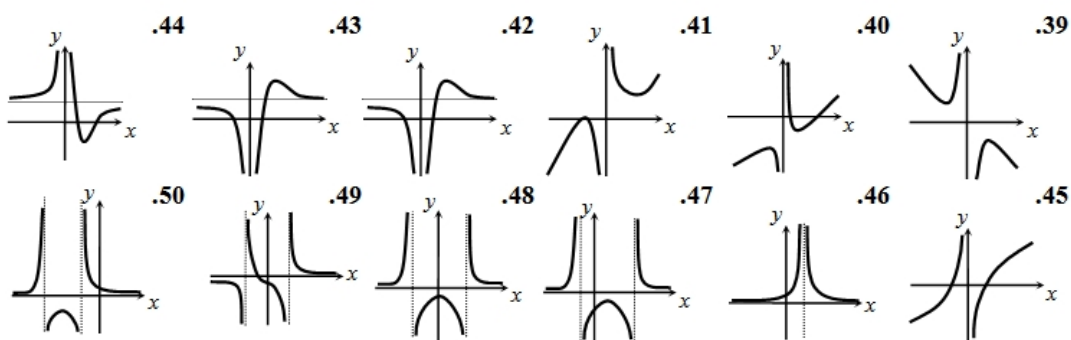
ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- y , נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר a .
ה. נתון הישר: $y = k$. מצא לאלו ערכים של k אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

תשובות סופיות:

- (15) א. -1 ב. $-\frac{2}{25}$ ג. $-\frac{1}{9}$ ד. $-\frac{1}{4}$ (16) א. $(1.5, -1.5)$, $(4.5, 13.5)$ ב. $(2, 3\frac{1}{3})$
- ג. $(-2, -\frac{1}{6})$, $(2, \frac{1}{6})$ ד. $(2, 19)$ (17) א. $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ ב. $y = -\frac{2}{9}x + 1\frac{4}{9}$
- ג. $y = 28x - 188$ ד. $y = -\frac{4}{3}x + 8$ (18) $y = 2x + 4$
- (19) א. $(-2, 0)$ ב. $y = 1.5x + 3$
- (20) א. $y = 4 - x$ ב. $(0, 4)$, $(4, 0)$ ג. 8 (21) א. לא ב. $y = -2x + 7$ ג. $y = -2x - 3$
- (22) א. $y = 2x - 1$ ב. $\frac{1}{4}$ (23) א. $(-1, 1)$, $(1, 3)$ ב. $y = 4 - x$, $y = 3x$
- (24) א. $y = 6x + 16$, $y = 6x - 8$ ב. 24
- (25) $y = -3x + 9$, $y = -3x + 1$ ב. $y = -3x - 18$, $y = -3x - 2$
- (26) א. $k = -4$ ב. $(-1, 0)$, $(5, 0)$ ג. כן. $y = 6x + 6$ (27) $A = 1$
- (28) א. $k = -5$ ב. כן. $(1.5, 0)$ ג. $9y = 4x - 6$, $y = -x + 1$
- (29) א. $a = 1$ ב. כן. $x = -3$, $y = 0$ ג. $y = \frac{4}{3}$
- (30) א. $a = -16$ ב. $y = 0$, $x = -4$ ג. $63y + 32x + 16 = 0$ (31) א. $m = 3$ ב. $y = 2x + 3$
- (32) א. $A = 3$ ב. $y = -0.5x + 2.5$ (33) $A = 3$
- (34) א. $A = 3$, $B = -2$ (35) א. $(2, 8)$, $(6, 8)$ ב. $9y = 8x + 24$, $y = -8x + 24$ ג. $(2.4, 4.8)$
- ד. 6.4 (36) $S = 17\frac{1}{15}$ (37) א. לכל x מתקיים: $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$ ולכן
- הפונקציה עולה תמיד. ב. $9y = x + 5$
- (38) א. -2 ב. $y = -2x - 8$, $y = -2x$ ג. $y = 0.5x - 20.5$, $y = 0.5x - 0.5$
- (39) א. $x \neq 0$ ב. $Max(0.5, -13)$, $Min(-0.5, 19)$ ג. עולה: $-0.5 < x < 0.5$, $x \neq 0$
יורדת: $x < -0.5$, $x > 0.5$ ה. $x = 0$
- (40) א. $x \neq 0$ ב. $Min(1, -1)$, $Max(-1, -9)$ ג. עולה: $x < -1$, $x > 1$
יורדת: $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ ה. $(0.5, 0)$, $(2, 0)$ ה. $x = 0$
- (41) א. $x \neq 0$ ב. $Max(-5, 0)$, $Min(5, 20)$ ג. עולה: $x < -5$, $x > 5$

- יורדת: $x \neq 0$, $-5 < x < 5$. ד. $(-5, 0)$. ה. $x = 0$.
- (42)** א. $x \neq 0$. ב. $\max(2.5, 1.8)$. ג. עולה: $0 < x < 2.5$. ד. $(-5, 0)$, $(1, 0)$. ה. $x = 0$, $y = 1$.
- יורדת: $x < 0$, $x > 2.5$. ד. $(-5, 0)$, $(1, 0)$. ה. $x = 0$, $y = 1$.
- (43)** א. $x \neq 0$. ב. $\max(3, 5\frac{1}{3})$. ג. עולה: $0 < x < 3$. ד. $x < 0$, $x > 3$.
- ד. $(0.6, 0)$, $(-1, 0)$. ה. $x = 0$, $y = 5$. **(44)** א. $x \neq 0$. ב. $\min(2\frac{2}{3}, -\frac{1}{8})$.
- ג. עולה: $x < 0$, $x > 2\frac{2}{3}$. יורדת: $0 < x < 2\frac{2}{3}$. ד. $(2, 0)$, $(4, 0)$. ה. $x = 0$, $y = 1$.
- (45)** א. $x \neq 0$. ב. אין נקודות קיצון. ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד. $(2, 0)$, $(-2, 0)$. ה. $x = 0$.
- (46)** א. $x \neq 5$. ב. אין נקודות קיצון. ג. עולה: $x < 5$. יורדת: $x > 5$. ד. $(0, 0.12)$.
- ה. $y = 0$, $x = 5$. **(47)** א. $x \neq -1, 3$. ב. $\max(1, -\frac{1}{3})$. ג. עולה: $x < -1$, $x > 3$.
- יורדת: $x > 1$, $x \neq 3$. ד. חיתוך עם ציר ה- y : $(0, -\frac{4}{9})$. ה. $y = 0$, $x = -1, 3$.
- (48)** א. $x \neq \pm 3$. ב. $\max(0, -\frac{2}{3})$. ג. עולה: $x < -3$, $x > 3$. יורדת: $x > 0$, $x \neq 3$.
- ד. חיתוך עם ציר ה- y : $(0, -\frac{2}{3})$. ה. $y = 0$, $x = \pm 3$.
- (49)** א. $x \neq -3, 2$. ב. אין נקודות קיצון. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה. ד. $(-0.5, 0)$, $(0, -\frac{1}{6})$. ה. $y = 0$, $x = -3, 2$.
- (50)** א. $x \neq -1, -5$. ב. $\max(-3, -1)$. ג. עולה: $x < -3$, $x > -5$. יורדת: $x > -1$, $x < -5$.
- ד. $(0, 0.8)$. ה. $y = 0$, $x = -1, -5$.

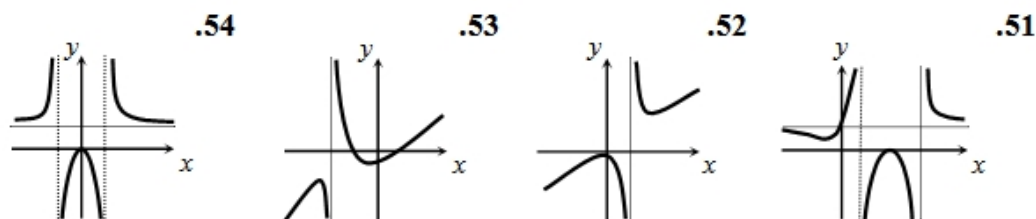
סקיצות של שאלות 39-50:



- (51)** א. $x \neq 1, 4$. ב. $\max(2, 0)$, $\min(-2, 1\frac{7}{19})$. ג. עולה: $-2 < x < 2$. ד. $(0, 2)$, $(2, 0)$. ה. $x = 1, 4$, $y = 2$.
- יורדת: $x < -2$, $x > 2$, $x \neq 4$. ד. $(0, 2)$, $(2, 0)$. ה. $x = 1, 4$, $y = 2$.
- (52)** א. $x \neq \frac{5}{3}$. ב. $\min(7\frac{1}{3}, 7\frac{5}{9})$, $\max(-4, 0)$. ג. עולה: $x < -4$, $x > 7\frac{1}{3}$.
- יורדת: $-4 < x < 7\frac{1}{3}$, $x \neq \frac{5}{3}$. ה. $(0, -3.2)$, $(-4, 0)$. ד. $x \neq \frac{5}{3}$, $-4 < x < 7\frac{1}{3}$.

- 53) א. $x \neq -5$ ב. $Min(-1, -0.5), Max(-9, -24.5)$ ג. עולה: $x < -9, x > -1$
 יורדת: $-9 < x < -1, x \neq -5$ ד. $(-2, 0), (\frac{1}{3}, 0), (0, -0.2)$ ה. $x = -5$
- 54) א. $x \neq \pm 2$ ב. $Max(0, 0)$ ג. יורדת: $x > 0, x \neq 2$ עולה: $x < 0, x \neq -2$ ד. $(0, 0)$
 ה. $x = \pm 2, y = 1.5$

סקיצות של שאלות 51-54:



- 55) א. $a = 2, y = 2x + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x}$ ב. $Min(1.5, 6), Max(-1.5, -6)$ ג. עולה: $x < -1.5, x > 1.5$
 יורדת: $-1.5 < x < 1.5, x \neq 0$
- 56) א. $a = 8$ ב. כן. $x = -1, y = 0$ ג. $Max(2, -0.5)$ ד. עולה: $x < 2, x \neq -1$
 יורדת: $x > 2, x \neq 5$ 57) א. $a = 10$ ב. כל x ג. $Max(0, 2)$
- ד. אין חיתוך עם ציר ה- x 58) ב. מתקבל: $k = -3$ ג. $(3, 0), (-3, 0)$
 ד. $y = -1$ ה. באף נקודה. הגרף שואף לישר ואינו חותך אותו.
- 59) א. $a = 1, f(x) = \frac{x+4}{x^2}$ ב. עולה: $-8 < x < 0$, יורדת: $x < -8, x > 0$ ג. $(-4, 0)$
- 60) א. $a = 3, f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}$ ב. $Min(3, -\frac{1}{3}), Max(-2, 8)$
 ג. עולה: $x < -2, x > 3$ יורדת: $-2 < x < 3$ ד. $(2, 0), (0, 4\frac{2}{3}), (4\frac{2}{3}, 0)$
 ו. $k = 8, -\frac{1}{3}, 3$
- 61) א. $a = 10, y = \frac{10x - 30}{x^2 - 6x + 10}$ (הפתרון: $a = -6$ נפסל). ב. כן - $(4, 5)$
 ג. עולה: $2 < x < 4$ יורדת: $x < 2, x > 4$ ד. $(0, -3), (3, 0)$
- 62) א. $a = \pm 2$ ב. $(1, 0), (0, 4)$ ג. המשיק: $y = -4x + 4$ אשר עובר בנקודה $(1, 0)$
- 63) א. $a = -3$ ב. 1. $x \neq 2$ 2. $(0, -3)$ 3. $Max(0, -3), Min(4, 5)$ 4. $x = 2$
- ג. $x < 2$ ד. $-3 < k < 5$ 64) א. $x \neq 1$ ב. $x = 1, y = 1$ ג. $(a, 0), (0, a)$
 ד. 1. $a > 1$ 2. $a = 2$

65) א. $A = -1$. ב. $x \neq 2$. ג. הנגזרת בנויה ממנה של מספר שלילי בחיובי ולכן תמיד

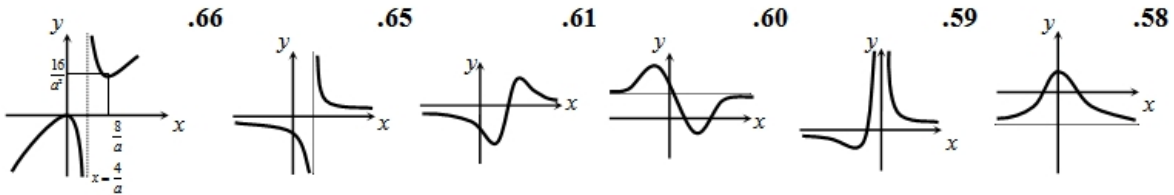
$$\text{שלילית: שלילי} \rightarrow \left[\begin{array}{c} (-) \\ (+) \end{array} \right] = \frac{-5}{(x-2)^2} = y' \quad \text{ד. } (0, -2.5)$$

ו. לא. אין נקודות על גרף הפונקציה בעלות שיעור y זהה.

66) א. $m = 0$ (מתקבל: $am = 0$ וידוע כי: $a > 0$ לכן נותרנו עם הפתרון הנ"ל).

ב. 1. $x \neq \frac{4}{a}$. 2. $\text{Min}\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$, $\text{Max}(0, 0)$. 3. $x = \frac{4}{a}$. ד. $a = 2$. ה. $0 < k < 4$.

סקיצות של שאלות: 65-66 ו- 58-61:



תרגילים העוסקים בפונקצית שורש (אי-רציונאלית):

תרגילים העוסקים בנגזרות יסודיות:

גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 y = x^2 - 16\sqrt{x} & \text{(3)} & y = x - 3\sqrt{x} & \text{(2)} & y = \sqrt{x} & \text{(1)} \\
 y = \frac{x+1}{\sqrt{x}} & \text{(6)} & y = x^2\sqrt{x} & \text{(5)} & y = (2x-1)\sqrt{x} & \text{(4)} \\
 y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} & \text{(9)} & y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-2} & \text{(8)} & y = \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-1} & \text{(7)} \\
 y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2} & \text{(12)} & y = (x^2+4)\sqrt{x-2} & \text{(11)} & y = x\sqrt{5x-2} & \text{(10)} \\
 y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} & \text{(15)} & y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} & \text{(14)} & y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} & \text{(13)} \\
 y = x\sqrt{x^4+6x^2-8} & \text{(18)} & y = (3x+1)^8\sqrt{x^2+x} & \text{(17)} & y = (x+10)^6\sqrt{x} & \text{(16)} \\
 y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{(21)} & y = \sqrt{x + \frac{1}{x}} & \text{(20)} & y = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} & \text{(19)}
 \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll}
 y' = 2\sqrt{x} + \frac{2x-1}{2\sqrt{x}} & \text{(4)} & y' = 2x - \frac{8}{\sqrt{x}} & \text{(3)} & y' = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x}} & \text{(2)} & y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{(1)} \\
 y' = -\frac{3x^2+4x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2} & \text{(7)} & y' = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}} & \text{(6)} & y' = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} & \text{(5)} \\
 y' = \sqrt{5x-2} + \frac{5x}{2\sqrt{5x-2}} & \text{(10)} & y' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} & \text{(9)} & y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-2}} & \text{(8)} \\
 y' = -\frac{x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} & \text{(13)} & y' = \frac{8-3x}{2x^3\sqrt{x-2}} & \text{(12)} & y' = 2x\sqrt{x-2} + \frac{x^2+4}{2\sqrt{x-2}} & \text{(11)} \\
 y' = 6(x+10)^5\sqrt{x} + \frac{(x+10)^6}{2\sqrt{x}} & \text{(16)} & y' = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+x+1)^3}} & \text{(15)} & y' = -\frac{4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} & \text{(14)} \\
 y' = \frac{3x^4+12x^2-8}{\sqrt{x^4+6x^2-8}} & \text{(18)} & y' = 24(3x+1)^7\sqrt{x^2+x} + \frac{(2x+1)(3x+1)^8}{2\sqrt{x^2+x}} & \text{(17)} \\
 y' = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}} & \text{(21)} & y' = \frac{x^2-1}{2x^2\sqrt{x+\frac{1}{x}}} & \text{(20)} & y' = -\frac{3}{2(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} & \text{(19)}
 \end{array}$$

תרגילים העוסקים במציאת תחום ההגדרה של פונקציות:

(22) לפניך מספר פונקציות, מצא את תחום ההגדרה שלהן. תזכורת:

- תחום הגדרה של פונקציה המכילה ביטוי עם שורש: $y = \sqrt{f(x)}$ הוא: $f(x) \geq 0$
- תחום הגדרה של פונקציה אי-רציונאלית: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ הוא: $g(x) \neq 0$.

- | | |
|--|-------------------------------------|
| א. $y = \sqrt{x}$ | ב. $y = \sqrt{x-5}$ |
| ג. $y = \sqrt{7-2x}$ | ד. $y = \sqrt{x^2-1}$ |
| ה. $y = \sqrt{x^2+2x}$ | ו. $y = \sqrt{x^2-4x-5}$ |
| ז. $y = x^2 - 3\sqrt{x}$ | ח. $y = \sqrt{x^3-3x^2-4x}$ |
| ט. $y = 2x\sqrt{2-x}$ | י. $y = (x^2-3)\sqrt{x^2+x}$ |
| יא. $y = \frac{4-\sqrt{x}}{x+2}$ | יב. $y = \frac{\sqrt{x}}{x-5}$ |
| יג. $y = \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-16}$ | יד. $y = \frac{x+6}{\sqrt{x}}$ |
| טו. $y = \frac{x^2}{\sqrt{3x-8}}$ | טז. $y = \frac{4}{\sqrt{x^2-25}}$ |
| יז. $y = \frac{2x}{\sqrt{81-4x^2}}$ | יח. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ |
| יט. $y = \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$ | כ. $y = \sqrt{\frac{25x-x^2}{x+2}}$ |

- (23) א. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{kx^2-18}$, (k פרמטר).
 ידוע כי תחום ההגדרה שלה הוא: $x \leq -3$, $x \geq 3$. מצא את ערך הפרמטר k .
- ב. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{k-3x^2}$, (k פרמטר).
 ידוע כי תחום ההגדרה שלה הוא: $-1 \leq x \leq 1$. מצא את ערך הפרמטר k .
- ג. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$, (k פרמטר).
 לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית: $x = 7$. מצא את ערך הפרמטר k .
- ד. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{6}{\sqrt{x^2+k}}$, (k פרמטר).
 לפונקציה יש אסימפטוטות אנכיות: $x = \pm 4$. מצא את k .

24) נתונה הפונקציה הבאה: $y = ax + \sqrt{x-b}$, (a, b) פרמטרים) ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה: $(2, 2)$ וכי תחום הגדרתה הוא: $x \geq 2$. מצא את a ואת b .

25) נתונה הפונקציה הבאה: $y = ax^2 + \sqrt{bx+3}$, (a, b) פרמטרים). ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה: $(1, 4)$ וכי תחום הגדרתה הוא: $x \geq -3$. מצא את a ואת b .

26) נתונה הפונקציה: $y = \sqrt{ax^2 + bx + 12}$, (a, b) פרמטרים). ידוע כי הפונקציה אינה מוגדרת בתחום: $-4 < x < -3$. מצא את a ואת b .

תרגילים העוסקים במציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה לפי הכלל: $f'(x_0) = m$.

27) חשב את שיפוע המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

א. $x = 1$, $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ ב. $x = 4$, $f(x) = (x+2)\sqrt{x}$

ג. $x = 9$, $f(x) = (x^2 - 4)\sqrt{x}$ ד. $x = 1$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$

ה. $x = 3$, $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x}$ ו. $x = 2$, $f(x) = x\sqrt{x^2 + 4x + 8}$

28) לפניך מספר פונקציות. מצא את שיעורי הנקודות עבורם שיפוע המשיק הוא המצוין לידה.

א. $m = 1.5$, $f(x) = \sqrt{3x-2}$ ב. $m = \frac{2}{5}$, $f(x) = \sqrt{4x-7}$

ג. $m = \frac{1}{4}$, $f(x) = x - \frac{1}{4}\sqrt{x}$ ד. $m = 2$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 12}$

ה. $m = 2$, $f(x) = x\sqrt{x-1}$ ו. $m = 5$, $f(x) = (x+3)\sqrt{x}$

29) א. מצא נקודה על גרף הפונקציה: $y = 2x\sqrt{4x+5}$ אשר המשיק העובר דרכה מקביל לישר: $y + 2x = 2$.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה: $y = 3x + \sqrt{3x^2 + 24}$ אשר המשיק העובר דרכה מקביל לישר: $y = 4x - 7$.

- 30 א. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{x^2 + 24}$. מצא את שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x = 2$.
- ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{3x^2 + 240}$. מצא נקודה על גרף הפונקציה שבה שיפוע המשיק העובר דרכה שווה לשיפוע הפונקציה שמצאת בסעיף א'. האם קיימת יותר מנקודה אחת? אם כן, מצא את כולן. אם לא, נמק.
- ג. הראה כי לשתי הפונקציה יש את אותו השיפוע בעבור: $x = 0$. מהו השיפוע?

- 31 נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{x-3}$ ו- $g(x) = 2 - \sqrt{5-x}$.
- א. מצא את שיעור ה- x בעבורו לשתי הפונקציות יש את אותו השיפוע.
- ב. הראה כי הפונקציות גם נחתכות בנקודה זו.

- 32 נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{2x+6}$ ו- $g(x) = 6 - \sqrt{9-x}$.
- א. מצא את שיעור ה- x בעבורו לשתי הפונקציות יש את אותו השיפוע.
- ב. הראה כי הפונקציות גם נחתכות בנקודה זו.

- 33 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 5\sqrt{4x-3} + \frac{1}{3}\sqrt{36x-27}$.
- מצא נקודה על גרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכה שווה ל-12. הנחייה: לאחר הגזירה הוצא גורם משותף בתוך השורש שבמכנה השני וסמן: $t = 4x - 3$ ופתור משוואה בעבור t .

- 34 מצא שתי נקודות על גרף הפונקציה $y = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ ששיפוע המשיק העובר דרכן הוא: $m = -1$.

תרגילים העוסקים במציאת משוואת משיק לפי הנוסחה: $y - y_1 = m(x - x_1)$, כאשר: (x_1, y_1) - נקודת ההשקה ו- m שיפוע המשיק.

- 35 מצא את משוואת המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

- א. $x = 1$, $y = 3x^2 - \sqrt{x}$
- ב. $x = 7$, $y = \sqrt{2x-5}$
- ג. $x = 4$, $y = (2x^2 - 8)\sqrt{x}$
- ד. $x = 2\frac{2}{3}$, $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

$$\begin{array}{ll} \text{ו.} & x=3, y=\frac{\sqrt{x+6}}{x} \\ \text{ז.} & x=2, y=x\sqrt{x^2+5} \\ \text{ח.} & x=1, y=\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}} \\ \text{ט.} & x=6, y=\frac{x^2}{\sqrt{x-2}} \end{array}$$

(36) נתונה הפונקציה הבאה: $y = x - 4\sqrt{x}$.

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x שאינה בראשית הצירים.

(37) נתונה הפונקציה הבאה: $y = 2x - \frac{1}{3}\sqrt{x}$.

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x שאינה בראשית הצירים.

(38) לגרף הפונקציה: $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ מעבירים משיק בנקודה שבה $y = 3$.

- מצא את משוואת המשיק.
- מצא את נקודות החיתוך של משיק זה עם הצירים.
- חשב את שטח המשולש שנוצר בין המשיק לצירים.

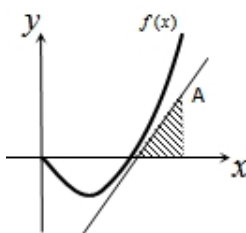
(39) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{x^2 - 4x + 9}$.

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

(40) נתונה הפונקציה הבאה: $y = 3x - \sqrt{25 - 2x^2} + 1$.

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

(41) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$.



- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הנמצאת ברביע הראשון.
- מהנקודה A שנמצאת על המשיק מורידים אנך לציר ה- x .

כך שנוצר משולש בין המשיק, האנך וציר ה- x (ראה איור).
 ידוע כי שטח המשולש הוא $S = 12$. מצא את שיעורי הנקודה A.

(42) נתונה הפונקציה הבאה: $y = x\sqrt{x^2 + 4}$.

- מעבירים לגרף הפונקציה משיק בנקודה $x = 1.5$.
- מצא את משוואת המשיק.
 - מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- y .
 - מעבירים אנך לציר ה- y מנקודת ההשקה של המשיק. חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק, האנך וציר ה- y .

(43) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x - 12}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הראה כי המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 3$ עובר בראשית הצירים.

(44) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{2x+3}$.

- מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 11$.
- כתוב את משוואת המשיק הנ"ל.
- האם יש לגרף הפונקציה משיק נוסף המקביל למשיק שמצאת בסעיף הקודם? אם כן – כתוב את משוואתו.

(45) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{x}$.

- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$.
- חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק שמצאת לצירים.

(46) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

- מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך עם ציר ה- y .
- חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק שמצאת לצירים.

47 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y = 2x$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון. הנחייה: השווה בין שני הביטויים והעלה בריבוע את המשוואה ופתור משוואה דו-ריבועית על ידי סימון: $x^2 = t$.
- ב. מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

תרגילים העוסקים במציאת משוואת המשיק כאשר נתון מידע הקשור לשיפוע:
תזכורת:

בחלק מהתרגילים יש להיעזר בתכונות השיפועים של ישרים מקבילים ומאונכים:

- ישרים מקבילים הם בעלי אותו השיפוע ולהפך.
 - מכפלת השיפועים של ישרים מאונכים תמיד -1.
- כגון שני ישרים בעלי שיפועים: m_1, m_2 אזי: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

48 א. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = 4\sqrt{x} - 2$ המקביל לישר: $2y - x = 3$.

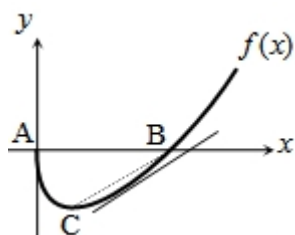
ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \sqrt{10x+7}$ המקביל לישר: $y = 5x$.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ המאונך לישר: $4y = 5 - x$.

ד. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \sqrt{4x+3} - 2x$ המאונך לישר: $y = x$.

49 נתונה הפונקציה: $f(x) = 8\sqrt{x} - x$.

- א. מצא על גרף הפונקציה $f(x)$ נקודה שבה שיפוע המשיק העובר דרכה הוא 3.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודה שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך עם ציר ה- x שאינה ראשית הצירים.



50 נתונה הפונקציה: $f(x) = x - 10\sqrt{x}$ באיור הסמוך.

- א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B - נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. מצא את שיעורי הנקודה C המקיימת: $f'(x) = 0$.
- ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר BC.

51) נתונות הפונקציה הבאות: $f(x) = x^2\sqrt{x}$, $g(x) = 4\sqrt{2x+3}$.

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בעל השיפוע $m = 20$.
ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק שמצאת בסעיף הקודם והפונקציה $g(x)$.
ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

52) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = 4\sqrt{3x-2}$, $g(x) = 2x\sqrt{x}+3$.
הראה כי לשתי הפונקציות משיק משותף ששיפועו הוא 3.

53) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 4x\sqrt{10-x}$.

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המאונך לישר: $y = -0.5x + 51$.
ב. הראה כי הישר הנתון בסעיף הקודם הוא נורמל לפונקציה בנקודת ההשקה.

54) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
ג. מצא את הנקודה אשר שיפוע המשיק לגרף הפונקציה העובר דרכה הוא 0.
ד. כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות שמצאת בסעיפים ב' ו-ג'.

55) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? אם כן, באיזו נקודה?
ג. הראה כי לא קיים ישר המשיק לגרף הפונקציה ומקביל לישר: $y = 6$.

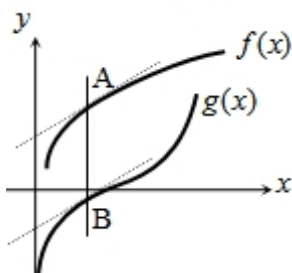
56) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

- א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- x ? מצא אותן.
ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

57) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{3-3x}$.

- מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.
- הראה כי הגרפים מאונכים זה לזה בנקודת החיתוך שמצאת.
- מצא את משוואות המשיקים לכל פונקציה בנקודת החיתוך שמצאת.
- מהנקודות A ו-B הנמצאות על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בהתאמה מעבירים ישר המקביל לציר ה- y . ידוע כי הפונקציות מאונכות זו לזו בנקודות A ו-B. מצא את הנקודות A ו-B.

58) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x-2}$, $g(x) = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{10-x}$.



מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ונקודה B על גרף הפונקציה $g(x)$ כמתואר באיור.

- ידוע כי הישר AB מקביל לציר ה- y . מעבירים מהנקודות A ו-B משיקים לכל פונקציה. ידוע כי המשיקים מקבילים.
- מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
- מצא את משוואות המשיקים.

תרגילים עם פרמטרים:

59) ענה על השאלות הבאות:

- נתונה הפונקציה: $f(x) = A\sqrt{x} + 3x^2$ (A פרמטר). ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 4$ הוא 25. מצא את A.
- נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{5x+A}$ (A פרמטר). ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 2$ הוא 1. מצא את A.
- נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 + Ax + 25}$ (A פרמטר). ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y הוא 2. מצא את A.
- נתונה הפונקציה: $f(x) = (x+A)\sqrt{x+1}$ (A פרמטר). ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x = 3$ הוא 3. מצא את A.
- נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+A}$ (A פרמטר). ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$ הוא $\frac{1}{18}$. מצא את A. הבחן בין שני מקרים.

ו. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + Ax + 4}}$ (A פרמטר).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y הוא 4.
מצא את A.

60) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{2x + A} + Bx$ (A, B פרמטרים).
משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y
היא: $y = 3x + 1$. מצא את A ואת B.

61) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{x^2 + Ax + B}$ (A, B פרמטרים).
משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת שבה: $x = 1$ היא: $y = x + 2$.
מצא את A ואת B.

62) נתונה הפונקציה: $f(x) = a\sqrt{x-3}$, פרמטר a .
ידוע כי הפונקציה עוברת ב- $A(12, a+4)$.

- א. מצא את ערך הפרמטר a .
- ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A.
- ג. חשב את השטח שנוצר בין המשיק לצירים.

63) נתונה הפונקציה: $f(x) = a\sqrt{3x+16}$, פרמטר a .
ידוע כי הישר $y = 2x - 8$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 11$.

- א. מצא את נקודת החיתוך.
- ב. מצא את ערך הפרמטר a .
- ג. האם הישר חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודה? אם כן, מהי?
- ד. האם הישר הנתון הוא המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף א'?
אם כן, נמק. אם לא, מצא את משוואת המשיק.

64) הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 - 2x + 5$ ו- $g(x) = x^2 - k\sqrt{x}$ (k פרמטר)
נחתכים בנקודה שבה: $x = 6.25$.

- א. מצא את ערך הפרמטר k .
- ב. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
- ג. האם הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים בעוד נקודות?
אם כן – מצא אותן.
- ד. מצא את משוואות המשיקים לגרפים של שתי הפונקציות
בנקודות החיתוך שלהם.

65) נתונות שתי הפונקציות הבאות: $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$ (פרמטר k).

ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x = 0.8$.

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה?

אם כן – מצא אותה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 0.52$.

66) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x+A}}{x+B}$ (פרמטרים A, B).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: $(0, -\frac{1}{3})$ הוא: $-\frac{1}{18}$.

א. מצא את A ואת B .

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y והראה כי בעבור

שני המקרים מתקבלת אותה הנקודה.

67) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{Ax^2+Bx}}$ (פרמטרים A, B).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: $(1, \frac{1}{2})$ הוא: $\frac{1}{8}$. מצא את A ואת B .

68) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x\sqrt{Ax+3}$. ידוע כי: $f'(1) = 2.25$.

א. מצא את ערך הפרמטר A .

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$.

ג. כתוב את משוואת הישר המאונך לגרף הפונקציה ועובר דרך נקודת

ההשקה הנ"ל (נורמל לפונקציה).

69) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x+7}}{x^2+A}$ פרמטר A .

ידוע כי לגרף הפונקציה יש אסימפטוטה אנכית: $x = 4$.

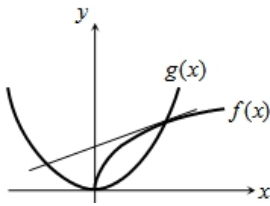
א. מצא את A ואת האסימפטוטה האנכית הנוספת של גרף הפונקציה.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: $x = 2$.

ג. מצא את נקודת החיתוך של המשיק והאסימפטוטה: $x = 4$.

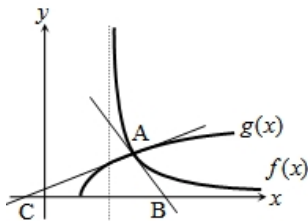
תרגילים שונים – שימושי הנגזרת:

70 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{x}$ ו- $g(x) = x^2 - 1$.



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

71 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$ ו- $g(x) = \sqrt{x-3.5}$.



- מצא את הנקודה A - נקודת החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואות המשיקים לכל גרף העוברים דרך נקודת החיתוך.
- המשיקים חותכים את ציר ה- x בנקודות B ו-C כך שנוצר המשולש ABC. חשב את שטח המשולש.

72 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{kx - \sqrt{x}}{2}$. ידוע כי: $f'(9) = \frac{5}{12}$.

- מצא את k וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שבה x חיובי שמצאת בסעיף הקודם.

73 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + 4}}$, A פרמטר.

- הראה כי הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- x כלל.
- מצא את A אם ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 5$.
- כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

74 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{\sqrt{x}}$, (A, B פרמטרים).

- מעבירים לגרף הפונקציה שני משיקים. משיק אחד עובר דרך הנקודה שבה $x = 4$ ושיפועו הוא: $m = \frac{3}{8}$. משיק שני מעבירים דרך הנקודה שבה $x = 1$ וידוע כי הוא מקביל לישר: $2y = 5x + 3$. מצא את A ואת B.

75) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$.

- א. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את הצירים כלל.
 ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר הוא 0.
 ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 5$.

76) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- x ?
 נמק והראה חישוב מתאים.
 ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
 ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק לצירים.

תרגילים העוסקים במציאת נקודות קיצון לפי הכלל: $f'(x) = 0$, סיווג ומציאת תחומי עלייה וירידה:

77) לפניך הפונקציות הבאות:

מצא את נקודות הקיצון שלהן (כולל נקודות קיצון קצה במידה וישנן) וקבע את סוגן (זכור למצוא תחילה את תחום ההגדרה ולפסול נקודות שאינן נמצאות בו).

א. $y = x - \sqrt{x}$	ב. $y = x^2 \sqrt{x+2}$	ג. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 25}$
ד. $y = \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}$	ה. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$	ו. $y = \frac{\sqrt{x}}{x-3}$
ז. $y = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}$	ח. $y = \frac{x}{\sqrt{3x^2 - x - 2}}$	

78) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה (כולל נקודות קיצון קצה)?
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

79) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4.5}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה (כולל נקודות קיצון קצה)?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

80) נתונה הפונקציה: $y = \sqrt{x^2 + 3x} - x$.

- א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון מקומיות כלל.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תרגילים העוסקים בחקירה מלאה של פונקציה אי-רציונאלית:

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$y = 2\sqrt{x} - x \quad (81) \qquad y = 2x - \frac{\sqrt{16x-1}}{4} \quad (82)$$

$$y = x^2\sqrt{4x+5} \quad (83) \qquad y = \sqrt{x^3-x} \quad (84)$$

$$y = x\sqrt{x^2+5x+7} \quad (85) \qquad y = \sqrt{x+8} + \sqrt{x-1} \quad (86)$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x+2} \quad (87) \qquad y = \frac{\sqrt{x}}{x-2} \quad (88)$$

$$y = \frac{\sqrt{x+8}}{x^2} \quad (89) \qquad y = \frac{x}{\sqrt{10-x}} \quad (90)$$

$$y = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+3}} \quad (91) \qquad y = \frac{x^2-4}{\sqrt{9-x^2}} \quad (92)$$

93) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{16x - x^2}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיים וקצוות).
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

94) נתונה הפונקציה: $f(x) = -2\sqrt{36x - x^2}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיים וקצוות).
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

95) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצוות).
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

96) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 + 24x - 25}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- כתוב את נקודות קיצון הקצה של הפונקציה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

97) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 16} + k$, פרמטר k .

- ידוע כי לפונקציה יש נקודת מקסימום הנמצאת על ציר ה- x .
- מצא את ערך הפרמטר k .
 - מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן. אם לא, נמק מדוע והראה חישוב מתאים.
 - כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

98) נתונה הפונקציה: $f(x) = k\sqrt{9-x^2}$.

ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון שבה: $y = 12$.

- מצא את ערך הפרמטר k .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן. אם לא, נמק מדוע והראה חישוב מתאים.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

99) נתונה הפונקציה: $f(x) = x+1-2\sqrt{x+1}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

100) נתונה הפונקציה: $f(x) = x+k-\sqrt{11-2x}$, k פרמטר.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה (5,6).

- מצא את ערך הפרמטר k .
- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן ואם לא, נמק מדוע.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

101) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x+k\sqrt{x}$, k פרמטר.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 16$.

- מצא את ערך הפרמטר k .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

102) נתונה הפונקציה: $f(x) = k\sqrt{x} - x$, k פרמטר.

ידוע כי הישר $y = 3$ חותך את הפונקציה בנקודה שבה $x = 9$.

- מצא את ערך הפרמטר k .
- האם הישר $y = 3$ חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודות? אם כן, מצא אותן.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

103 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{8} - 4\sqrt{x}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

104 נתונה הפונקציה: $f(x) = kx + k\sqrt{x} - 4$. פרמטר k .

- ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה: $(4, 4k)$.
- א. מצא את ערך הפרמטר k .
- ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

105 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{16-x}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

106 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{kx} - \sqrt{4-x}$. פרמטר k .

- ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 2$.
- א. מצא את ערך הפרמטר k .
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x בעוד נקודות?
אם כן, מצא אותן ואם לא נמק.
- ד. האם יש לפונקציה נקודות קיצון? אם כן, מצא אותן ואם לא, נמק.

107 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9-2x} + m$. פרמטר m .

- א. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את m אם ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(3, 2)$.
- ד. מצא את נקודות קיצון הקצה של הפונקציה.

108 נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \sqrt{16 - x^2}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

109 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{8 - x^2} + kx$, k פרמטר.

הישר $y = -2x + 4$ משיק לפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

- א. מצא את ערך הפרמטר k .
- ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

110 נתונה הפונקציה: $y = \frac{\sqrt{x-2}}{4} + \frac{x}{16}$.

- א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון מקומיות (פנימיות)? אם כן, מצא אותן.
- ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.
- ד. האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים? אם כן, מצא אותן.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. נתון הישר: $y = m$. לאלו ערכים של m יש לישר ולגרף הפונקציה נקודה משותפת אחת בלבד?

111 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x^2}$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודת קיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

112 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, פרמטר a .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y - x = 0$.
- מצא את ערך הפרמטר a .
 - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
 - כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

113 לפניך שלוש פונקציות:

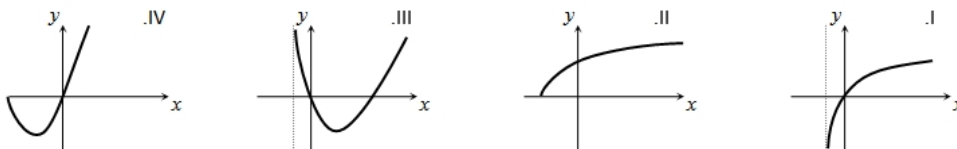
$$f(x) = \sqrt{x+k} \quad ; \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}} \quad ; \quad h(x) = x\sqrt{x+k} \quad ; \quad (k > 0)$$

- א. קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו לא נכונות והצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
- לכל הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.
 - כל הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
 - כל הפונקציות חותכות את ציר ה- x פעם אחת בלבד.

מעבירים משיקים לגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודת החיתוך שלהם עם ציר ה- y . ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $g(x)$ גדול

ב- $\frac{1}{4}$ משיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

- בטא באמצעות k את שיפועי המשיקים לכל פונקציה.
 - מצא את k .
- ג. לפניך 4 איורים, קבע איזה איור מייצג כל פונקציה. נמק את בחירותיך.



*הערה: בשאלה הבאה נדרש ידע בפתרון אי-שוויונים ממעלה גבוהה.

$$(114) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. גזור את הפונקציה $f(x)$.

מגדירים פונקציה נוספת $g(x)$ המקיימת: $g(x) = (f(x))^2$.

לפי כללי הגזירה של פונקציה מורכבת ניתן לכתוב את הנגזרת

של $g(x)$ באופן הבא: $g'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$.

ג. כתוב את הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ לפי המכפלה הנייל

וצמצמם במידת האפשר.

$$\text{הראה כי הביטוי הסופי של הנגזרת הוא: } g'(x) = -\frac{4+x^2}{(x^2-4)^2}$$

ד. באופן כללי, לפי כלל הגזירה הנייל, אלו נקודות על גרף הפונקציה $f(x)$

הן נקודות החשודות לקיצון בעבור $g(x)$?

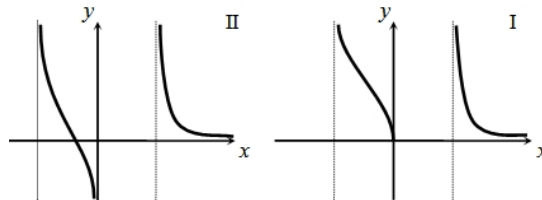
ה. 1. האם לגרף הפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון במקרה שלנו?

נמק על פי הסעיף הקודם.

2. מה ניתן לומר על גרף הפונקציה $f(x)$ לפי זה?

ו. לפניך שתי סקיצות:

קבע איזו סקיצה מתארת את גרף הפונקציה $f(x)$. נמק את בחירתך.



תשובות סופיות:

- (22) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 5$ ג. $x \leq 3.5$ ד. $x \leq -1, x \geq 1$ ה. $x \leq -2, x \geq 0$
 ו. $x \leq -1, x \geq 5$ ז. $x \geq 0$ ח. $x \geq 0, x \geq 4$ ט. $-1 \leq x \leq 0, x \geq 4$ י. $x \leq -1, x \geq 0$
 יא. $x \geq 0$ יב. $x \geq 0, x \neq 5$ יג. $x \neq \pm 4$ יד. $x > 0$ טו. $x > 2\frac{2}{3}$ טז. $x < -5, x > 5$
 יז. $-4.5 < x < 4.5$ יח. $x < -3, x \geq 1$ יט. $x \geq 0$ כ. $x < -2, 0 \leq x \leq 25$
 (23) א. 2 ב. 3 ג. -7 ד. -16 (24) א. $a=1, b=2$ (25) א. $a=2, b=1$ (26) א. $a=1, b=7$
 (27) א. 3.5 ב. 3.5 ג. $66\frac{5}{6}$ ד. $\frac{1}{16}$ ה. $-\frac{2}{9}$ ו. $\frac{28}{\sqrt{20}}$
 (28) א. (1,1) ב. (8,5) ג. $(\frac{1}{36}, -\frac{1}{72})$ ד. (4,2) ה. $(\frac{10}{9}, \frac{10}{27})$ ו. (2,2) ז. $(\frac{1}{9}, \frac{28}{27})$ ח. (9,36)
 (29) א. (-1,-2) ב. (2,12) (30) א. $m = \frac{2}{\sqrt{28}}$ ב. $(2, \sqrt{252})$. הנקודה $x = -2$ נפסלת
 עקב העלאה בריבוע. ג. $m = 0$ (31) א. (4,1) (32) א. (5,4) (33) (1,6)
 (34) (0,0), (2.25,4.5) (35) א. $y = 5.5x - 3.5$ ב. $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ ג. $y = 38x - 104$
 ד. $y = 1.25x - 2$ ה. $y = 4\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$ ו. $y = -\frac{5}{18}x + 1\frac{5}{6}$
 ז. $y = 3.75x - 4.5$ ח. $y = -2x + 4$ (36) א. (16,0), (0,0) ב. $y = 0.5x - 8$
 (37) א. (0,0) ב. $(\frac{1}{36}, 0)$ ג. $y = x - \frac{1}{36}$ (38) א. $y = \frac{2}{3}x - 3$ ב. (4.5,0), (0,-3) ג. 6.75
 (39) א. (0,3) ב. $y = -\frac{2}{3}x + 3$ (40) א. (0,-4) ב. $y = 3x - 4$ (41) א. (1,0), (0,0)
 (42) א. $y = 1.5x - 1.5$ ג. A(5,6) (43) א. $y = 3.4x - 1.35$ ב. (0,-1.35) ג. 3.825
 (43) א. $2 \leq x \leq 6$ ב. משוואת המשיק: $y = \frac{\sqrt{5}}{3}x$. הגרף עובר בראשית הצירים.
 (44) א. $m = 2.4$ ב. $y = 2.4x - 8\frac{1}{15}$ ג. לא. מתקבל פתרון שנפסל עקב העלאה בריבוע.
 (45) א. $y = -1\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{4}$ ב. 4.225 (46) א. (0,1) ב. $y = -x + 1$ ג. 0.5
 (47) א. y ב. $y = -1.5x + 3.5$ (48) א. $y = 0.5x + 6$ ב. $y = 5x + 4$ ג. $y = 4x + 0.25$
 ד. $y = -x + 1.75$ (49) א. (1,7) ב. (64,0), (0,0) ג. $9y + x = 64$
 (50) א. (100,0), (0,0) ב. (25,-25) ג. $y = \frac{x}{3} - 37.5$ (51) א. $y = 20x - 48$ ב. (3,12)
 ג. $y = \frac{4}{3}x + 8$ (52) א. $y = 3x + 2$ (53) א. $y = 2x + 36$ (54) א. $x \geq -2$ ב. (-2,0)
 ג. (-1,0.5) ד. $y = 0.5x + 1$ (55) א. $x \leq 4, x \neq 0$ ב. (4,0)

56 א. $x \geq 0, x \neq 1$ ב. $(9,6)$ ג. $y=6$ ד. $(0.75, \sqrt{0.75})$ א.

ג. $y = -\sqrt{3}x + 1.25\sqrt{3}$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ד. $A(0.25, 0.5)$, $B(0.25, 1.5)$ א.

58 א. $A(6, 2\sqrt{6} + 4)$, $B(6, 2\sqrt{6} - 4)$ ב. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2}\right)x + \sqrt{6} - 7$, $y = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2}\right)x + \sqrt{6} + 1$ א.

59 א. 4 ב. 15 ג. 20 ד. 1 ה. 2,5 ו. -64 ז. 60 א. 1, B=2 ב. 61 א. B=4 א.

62 א. $a=2$ ב. $y = \frac{1}{3}x + 2$ ג. $S=6$ ד. 63 א. $(11,14)$ ב. $a=2$ ג. לא ד. $7y - 3x = 65$ א.

64 א. $k=3$ ב. $x \geq 0$ ג. אין עוד נקודות חיתוך בניהם.

ד. $y = 11.9x - 42.8125$, $y = 10.5x - 34.0625$ א.

65 א. $k=0.48$ ב. כן. $(0.6, 0.57)$ ג. $y = 0.74x + 0.1352$ א.

66 א. $A=9, B=-9$ ב. $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ 67 א. $A=B=2$ א.

68 א. $A=1$ ב. $y = 2.25x - 0.25$ ג. $y = -\frac{4}{9}x + 2\frac{4}{9}$ א.

69 א. $A=-16, x=-4$ ב. $y = -\frac{7}{72}x - \frac{1}{18}$ ג. $\left(4, -\frac{4}{9}\right)$ א.

70 א. $(1,1), (0,0)$ ב. $y = 0.5x + 0.5$ ג. y א.

71 א. $A(5.5, \sqrt{2})$ ב. $y = 6.5\sqrt{2} - \sqrt{2}x$, $y = \frac{x}{\sqrt{8}} - \frac{3}{4\sqrt{2}}$ ג. $S = \frac{5}{\sqrt{2}}$ א.

72 א. $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{2}$, $k=1$ ב. $(1,0), (0,0)$ ג. $y = 0.25x - 0.25$ ד. 73 א. $A=10$ ג. $y=5$ א.

74 א. $A=1, B=-7$ ב. $\left(3, \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$ ג. $y = 0.125x + 2.375$ ד. 76 א. $(2,0)$ א.

ב. לא, מאחר שאין פתרון למשוואה: $f'(x) = 0$ ג. $y = \frac{4}{\sqrt{2}}x - 4\sqrt{2}$ ד. $S = 4\sqrt{2}$ א.

77 א. $Min(0,0), Min(0.25, -0.25)$ ב. $Max(0,0), Min(-2,0)$ ג. $Max(-1.6, 1.619)$, $Min(0,0)$ א.

ג. $Min(2, \sqrt{21})$ ד. $Min(-2,0), Min(2,0), Max(0,4)$ ה. $Max\left(3, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ א.

ו. $Max(0,0)$ ז. אין קיצונים כלל. ח. $Max\left(-4, \frac{-4}{\sqrt{50}}\right)$ א.

78 א. $x \leq -4, x \geq 1$ ב. $Min(-4,0), Min(1,0)$ ג. עולה: $x > 1$ יורדת: $x < -4$ א.

79 א. כל x ב. $Min(-1.5, 1.5)$ ג. עולה: $x > -1.5$ יורדת: $x < -1.5$ א.

80 א. $x \leq -3, x \geq 0$ ג. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < -3$ א.

81 א. $x \geq 0$ ב. $Max(1,1), Min(0,0)$ ג. עולה: $0 < x < 1$ יורדת: $x > 1$ א.

ד. $(0,0), (4,0)$ ה. אין.

(82) א. $x \geq \frac{1}{16}$ ב. $Max\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right), Min\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ ג. עולה: $x > \frac{1}{8}$ יורדת: $\frac{1}{16} < x < \frac{1}{8}$ ד. $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ ה. אין.

(83) א. $x \geq -\frac{5}{4}$ ב. $Min\left(-\frac{5}{4}, 0\right), Max(-1, 1), Min(0, 0)$ ג. עולה: $x > 0, x < -1$ יורדת: $-1 < x < 0$ ד. $(0, 0), \left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ ה. אין.

(84) א. $-1 \leq x \leq 0, x \geq 1$ ב. $Min(-1, 0), Min(0, 0), Min(1, 0), Max(-0.57, 0.62)$ ג. עולה: $-1 < x < -0.57, x > 1$ יורדת: $-0.57 < x < 0$ ד. $(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$ ה. אין.

(85) א. כל x ב. $Max(-2, -2), Min(-1.75, -2.004)$

ג. עולה: $x < -2, x > -1.75$ יורדת: $-2 < x < -1.75$ ד. $(0, 0)$ ה. אין.

(86) א. $x \geq 1$ ב. $Min(1, 3)$ ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד. אין. ה. אין.

(87) א. $x \geq 0$ ב. $Max\left(2, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), Min(0, 0)$ ג. עולה: $0 < x < 2$ יורדת: $x > 2$ ד. $(0, 0)$ ה. אין.

(88) א. $x \geq 0, x \neq 2$ ב. $Max(0, 0)$ ג. יורדת בכל תחום הגדרתה. ד. $(0, 0)$ ה. $x = 2$.

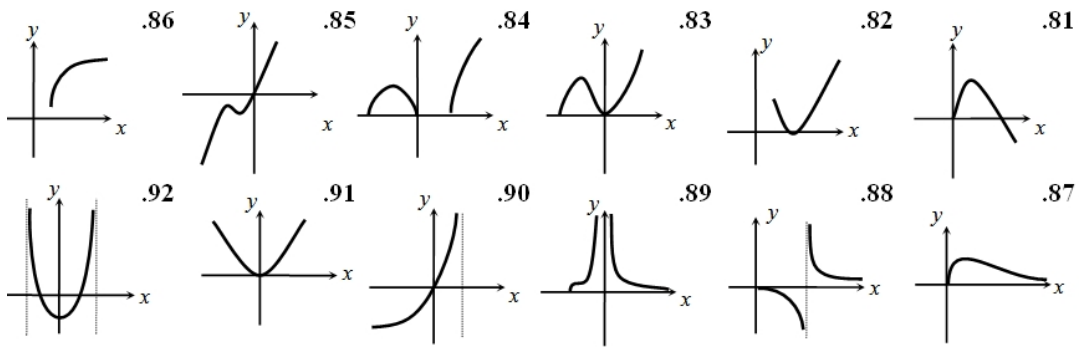
(89) א. $x \geq -8, x \neq 0$ ב. $Min(-8, 0)$ ג. עולה: $-8 < x < 0$ יורדת: $x > 0$ ד. $(-8, 0)$ ה. $x = 0$.

(90) א. $x < 10$ ב. אין קיצון. ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד. $(0, 0)$ ה. $x = 10$.

(91) א. כל x ב. $Min(0, 0)$ ג. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$ ד. $(0, 0)$ ה. אין.

(92) א. $-3 < x < 3$ ב. $Min\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ ג. עולה: $0 < x < 3$ יורדת: $-3 < x < 0$ ד. $(\pm 2, 0), \left(0, -\frac{4}{3}\right)$ ה. $x = \pm 3$.

סקיצות של שאלות 81-92:



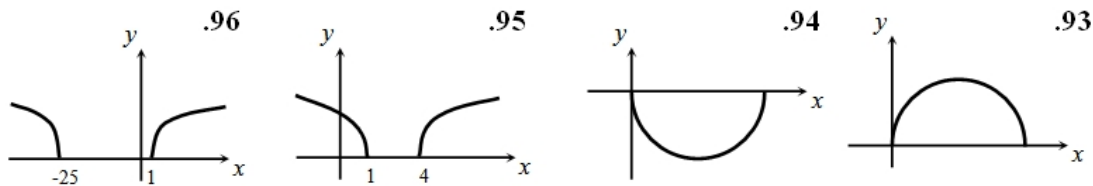
(93) א. $0 \leq x \leq 16$. ב. $Min(0,0)$, $Min(16,0)$, $Max(8,8)$. ג. עולה: $0 < x < 8$. יורדת: $8 < x < 16$.

(94) א. $0 \leq x \leq 36$. ב. $Max(0,0)$, $Max(36,0)$, $Min(18,-36)$. ג. עולה: $18 < x < 36$. יורדת: $0 < x < 18$.

(95) א. $x \leq 1$, $x \geq 4$. ב. $Min(1,0)$, $Min(4,0)$. ג. עולה: $x > 4$. יורדת: $x < 1$. ד. $(0,2)$.

(96) א. $x \leq -25$, $x \geq 1$. ב. $Min(1,0)$, $Min(-25,0)$. ג. עולה: $x > 1$. יורדת: $x < -25$.

סקיצות של שאלות 93-96:



(97) א. $k = -3$. ב. $2 \leq x \leq 8$. ג. כן – ישנן נקודות קיצון קצה: $Min(2,-3)$, $Max(8,-3)$. ד. עולה: $2 < x < 5$. יורדת: $5 < x < 8$.

(98) א. $k = 4$. ב. $-3 \leq x \leq 3$. ג. כן – ישנן נקודות קיצון קצה: $Min(-3,0)$, $Max(3,0)$. ד. עולה: $-3 < x < 0$. יורדת: $0 < x < 3$.

(99) א. $x \geq -1$. ב. $Min(0,-1)$, $Max(-1,0)$. ג. $(-1,0)$, $(3,0)$. ד. עולה: $x > 0$. יורדת: $-1 < x < 0$.

(100) א. $k = 2$. ב. $x \leq 5.5$. ג. כן – ישנה נקודת קיצון קצה: $(5.5, 7.5)$.

לא קיימת נקודת קיצון מקומית מאחר ש- $x = 5$ המתקבל בעת השוואת הנגזרת לאפס נפסל כי אינו מקיים את המשוואה המקורית. ד. $(1,0)$.

הנקודה שבה $x = -7$ אינה מקיימת את המשוואה המקורית ולכן נפסלת.

(101) א. $k = -12$. ב. $Max(0,0)$, $Min(4,-12)$. ג. עולה: $x > 4$. יורדת: $0 < x < 4$.

(102) א. $k = 4$. ב. $(1,3)$. ג. $Max(4,4)$, $Min(0,0)$. ד. $(0,0)$, $(16,0)$.

(103) א. $x \geq 0$. ב. $Max(0,0)$, $Min(4,-6)$. ג. עולה: $x > 4$. יורדת: $0 < x < 4$.

ד. $(0,0)$, $(\sqrt[3]{1024}, 0)$.

104 א. $k=2$. ב. יש קיצון קצה - $(0, -4)$. ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד. $(1, 0)$.

105 א. $0 \leq x \leq 16$. ב. $Min(0, 4)$, $Max(8, 2\sqrt{8})$, $Min(16, 4)$. ג. עולה: $0 < x < 8$, יורדת: $8 < x < 16$.

106 א. $k=1$. ב. $0 \leq x \leq 4$. ג. לא. ד. אין קיצונים.

107 א. יש להראות כי הנגזרת מורכבת מחיבור של שני ביטויים שחיוביים תמיד ומכאן שסימן הנגזרת חיובי והפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{9-2x}}$$

108 א. $0 \leq x \leq 4.5$. ג. $m=2$. ד. $Min(0, -1)$, $Max(4.5, 2 + \sqrt{4.5})$.

109 א. $-4 \leq x \leq 4$. ב. $Min(4, 4)$, $Max(\sqrt{8}, 2\sqrt{8})$, $Min(-4, -4)$. ג. $(-\sqrt{8}, 0)$, $(0, 4)$.

109 א. $k=-1$. ב. $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$. ג. $Min(\sqrt{8}, -\sqrt{8})$, $Max(-2, 4)$, $Min(-\sqrt{8}, \sqrt{8})$.

ד. עולה: $-\sqrt{8} < x < -2$, יורדת: $-2 < x < \sqrt{8}$.

110 א. $x \geq 2$. ב. אין נקודות קיצון. ג. $(2, \frac{1}{8})$. ד. אין נקודות חיתוך עם הצירים.

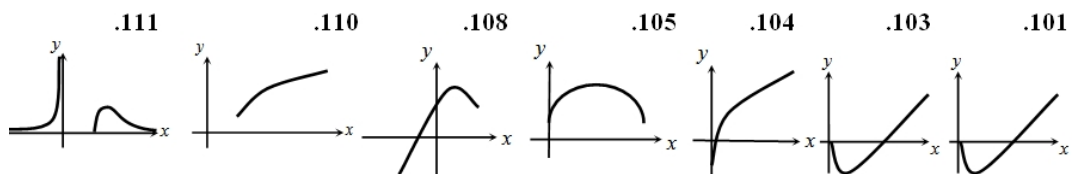
$$m \geq \frac{1}{8}$$

111 א. $x < 0, x \geq 2$. ב. $Max(3, \frac{1}{\sqrt{27}})$, $Min(2, 0)$. ג. $(2, 0)$.

112 א. $a=1$. ב. $-3 < x < 3$. ג. $(-1.5, \sqrt{3})$.

ד. יורדת: $-3 < x < -1.5$. עולה: $-1.5 < x < 3$.

סקיצות של שאלות 101-111 (אלו שיש בהן גרף):



(113) א 1. הטענה אינה נכונה.

תחומי ההגדרה הם: $f(x): x \geq -k$; $g(x): x > -k$; $h(x): x \geq -k$.

2. הטענה אינה נכונה.

הפונקציה: $f(x)$ עולה תמיד שכן: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+k}} > 0$.

הפונקציה: $g(x)$ גם עולה תמיד שכן: $g'(x) = \frac{x+2k}{(x+k)^{1.5}} > 0$.

כי הנקודה $x = -2k$ אינה בתחום ההגדרה וערך הנגזרת בתחום ההגדרה חיובי. לפונקציה: $h(x)$ יש נקודת מינימום ב- $x = -\frac{2}{3}k$ אשר בתוך תחום

הגדרתה ולכן היא יורדת בעבור: $-k < x < -\frac{2}{3}k$.

3. הטענה אינה נכונה.

נקודות החיתוך: $(0,0)$, $h(x): (-k,0)$, $g(x): (0,0)$; $f(x): (-k,0)$.

ב. 1. $g'(0) = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{k}}$. 2. $k = 4$. ג. $IV = h(x)$, $II = f(x)$, $I = g(x)$.

(114) א. $-2 < x \leq 0$, $x > 2$. ב. $f'(x) = -\frac{x^2+4}{2(x^2-4)^2 \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}}$.

ד. נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x ונקודות המאפסות

את הנגזרת של $f(x)$.

ה. 1. לא. ל- $f(x)$ אין נקי קיצון והנקודה $(0,0)$ אינה קיצון בעבור $g(x)$.

2. יורדת בכל תחום הגדרתה. ו. I.

תרגילים העוסקים בפונקציות טריגונומטריות:

מעבר בין מעלות לרדיאנים:

להלן נוסחאות המעבר בין זווית הנתונה במעלות לזווית הנתונה ברדיאנים ולהיפך:

$\alpha^R = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$	ממעלות לרדיאנים:
$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^R$	מרדיאנים למעלות:

1) לפיך מספר זוויות הנתונות ברדיאנים, כתוב את ערכן במעלות:

א. π	ב. 0.5π	ג. $\frac{\pi}{3}$	ד. $\frac{\pi}{4}$
ה. $\frac{\pi}{5}$	ו. $\frac{\pi}{6}$	ז. $\frac{\pi}{9}$	ח. $\frac{\pi}{12}$
ט. $\frac{5\pi}{12}$	י. $\frac{3\pi}{2}$	יא. $\frac{7\pi}{3}$	יב. $\frac{7\pi}{6}$

2) לפיך מספר זוויות הנתונות במעלות, כתוב את ערכן ברדיאנים:

א. 90°	ב. 45°	ג. 30°	ד. 20°	ה. 10°
ו. 115°	ז. 135°	ח. 225°	ט. 315°	י. 345°

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	ב. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	ג. $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$	ד. $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
ה. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	ו. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	ז. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$	ח. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
ט. $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$	י. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	יא. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$	יב. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

4) הצב בכל פונקציה את הערכים שלידה וחשב (הזווית נתונה ברדיאנים):

א. $x = \pi, -\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{2} : y = 2 \sin x$ ב. $x = \pi, -\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{2} : y = 3 \cos x$

ג. $x = -\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{8} : y = \sin 2x$ ד. $x = -\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{8} : y = \cos 2x$

ה. $x = \pi, 0, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} : y = 3 \sin x - \cos 3x$

$$x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = 4 \cos x + \sin 4x \quad \text{ו.}$$

$$x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \sin^2 x \quad \text{ז.}$$

$$x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \cos^2 x \quad \text{ח.}$$

$$x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \sin^2 2x \quad \text{ט.}$$

$$x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \cos^2 2x \quad \text{י.}$$

$$x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \tan x \quad \text{יא.}$$

$$x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \tan 2x \quad \text{יב.}$$

$$x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \tan^2 x \quad \text{יג.}$$

$$x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \sin x + \tan x \quad \text{יד.}$$

$$x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \cos x + \tan x \quad \text{טו.}$$

5) חשב את ערכי הביטויים הבאים (הזווית נתונה ברדיאנים):

$x = 1, 2, 3 : y = \cos x$ ב.	$x = 1, 2, 3 : y = \sin x$ א.
$x = -1, -2.5, -5 : y = \sin x$ ד.	$x = 1, 2, 3 : y = \tan x$ ג.
$x = -1, -2.5, -5 : y = \tan x$ ו.	$x = -1, -2.5, -5 : y = \cos x$ ה.
$x = -1, -0.5, 3 : y = \cos 2x + \sin 2x$ ח.	$x = 2, 4, 5 : y = \tan 2x - \sin 3x$ ז.

6) הצב בפונקציות הבאות את ערכי הזוויות שלידן (הזוויות ברדיאנים):

$x = 0, 1, 2 : y = x + \cos x$ ב.	$x = 0, 1, 2 : y = x + \sin x$ א.
$x = 1.5, 2.5, -3 : y = x^2 - \cos x$ ד.	$x = 1.5, 2.5, -3 : y = x^2 - \sin x$ ג.
$x = -6, 0.3, 0.25 : y = (x - \sin x)^2$ ו.	$x = 1, -3, 0.5 : y = x^2 + \tan x + 1$ ה.

$$\begin{array}{ll}
 x = 1, 2, 3 : y = x \sin x & \text{ח.} & x = -0.5, 1, 2, 6 : y = (2x + \cos 2x)^2 & \text{ז.} \\
 x = 1, -1, 2, -2, 3, -3 : y = x \tan x & \text{י.} & x = 1, 2, 3 : y = x \cos x & \text{ט.} \\
 x = 1, -1, 2, -2, 3, -3 : y = x^2 \cos x & \text{יב.} & x = 1, -1, 2, -2, 3, -3 : y = x^2 \sin x & \text{יא.}
 \end{array}$$

תרגילים העוסקים בנגזרות יסודיות:

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 y = 2 \cos x & \text{ב.} & y = 3 \sin x & \text{א.} \\
 y = \cos x + 5 \sin x & \text{ד.} & y = 2 \tan x & \text{ג.} \\
 y = \tan x + 3 \sin x & \text{ה.} & y = 4 \sin x - 3 \cos x & \text{ה.} \\
 y = x^2 - 2 \cos x & \text{ח.} & y = \sin x + 2x & \text{ז.} \\
 y = \sin x + 3 \cos x + x & \text{י.} & y = 3x - 3 \tan x & \text{ט.}
 \end{array}$$

(8) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 y = \cos 4x & \text{ב.} & y = \sin 3x & \text{א.} \\
 y = \sin 3x + 2 \cos 5x & \text{ד.} & y = \tan 2x & \text{ג.} \\
 y = \tan 5x + \sin 3x & \text{ה.} & y = 4 \sin 3x - \cos 2x & \text{ה.} \\
 y = 3x - 3 \cos 2x & \text{ח.} & y = \sin 3x + x^2 - 3x & \text{ז.} \\
 y = \cos(0.4\pi - 4x) & \text{י.} & y = \sin(3x - \pi) & \text{ט.}
 \end{array}$$

(9) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 y = x \cos x & \text{ב.} & y = x \sin x & \text{א.} \\
 y = x^2 \cos x & \text{ד.} & y = 2x \tan x & \text{ג.} \\
 y = x(3 - \sin x) & \text{ה.} & y = 2x \sin x + 4 \tan x & \text{ה.} \\
 y = (\cos x + 1) \cdot (\sin x - 2) & \text{ח.} & y = \cos x \cdot \sin x & \text{ז.} \\
 y = (\cos x - 1) \cdot (\tan x - 1) & \text{י.} & y = \cos x (\sin x + 1) & \text{ט.} \\
 y = (x^2 - 3) \tan 4x & \text{יב.} & y = \sin 3x \cdot (\cos 2x - 1) & \text{יא.}
 \end{array}$$

$$y = \frac{\sin x}{\cos x + 2} \quad \text{יד.}$$

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad \text{יג.}$$

$$y = \frac{\sin x}{\sin x - 5} \quad \text{טז.}$$

$$y = \frac{\cos x}{\tan x - 3} \quad \text{טו.}$$

$$y = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} \quad \text{יח.}$$

$$y = \frac{\cos x + 2}{\sin x} \quad \text{יז.}$$

$$y = \frac{\sin x}{\sin x + 1} \quad \text{כ.}$$

$$y = \frac{\cos 3x + 1}{\sin x + 2} \quad \text{יט.}$$

10) גזור את הפונקציות הבאות :

$$y = \cos^2 x \quad \text{ב.}$$

$$y = \sin^2 x \quad \text{א.}$$

$$y = \sin^3 x \quad \text{ד.}$$

$$y = \tan^2 x \quad \text{ג.}$$

$$y = \tan^2 4x \quad \text{ו.}$$

$$y = 2 \cos^4 x \quad \text{ה.}$$

$$y = \cos^2 2x \quad \text{ח.}$$

$$y = \sin^3 2x \quad \text{ז.}$$

$$y = x \sin^2 x \quad \text{י.}$$

$$y = (x \cos x)^2 \quad \text{ט.}$$

$$y = \sin^2 x - \cos^2 x \quad \text{יב.}$$

$$y = x^2 \sin x - \cos^2 x \quad \text{יא.}$$

$$y = \sin^4 2x - \cos^4 2x \quad \text{יד.}$$

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x \quad \text{יג.}$$

$$y = x(3 - \sin x)^2 \quad \text{טז.}$$

$$y = (x + \sin x)^2 \quad \text{טו.}$$

$$y = \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} \quad \text{יח.}$$

$$y = \frac{\cos^2 x + 1}{\sin x} \quad \text{יז.}$$

שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת :

11) מצא את שיפוע הפונקציה : $y = \sin x$ בנקודות הבאות :

$$x = -0.5\pi \quad \text{ג.}$$

$$x = \pi \quad \text{ב.}$$

$$x = 0 \quad \text{א.}$$

12) מצא את שיפוע הפונקציה : $y = 3 \cos 2x$ בנקודות הבאות :

$$x = \pi \quad \text{ג.}$$

$$x = 0.5\pi \quad \text{ב.}$$

$$x = 0 \quad \text{א.}$$

(13) מצא את שיפוע הפונקציה $y = \tan x - \cos x$ בנקודות הבאות :

א. $x = 0$ ב. $x = \frac{\pi}{3}$ ג. $x = \frac{\pi}{4}$

(14) מצא את שיפוע הפונקציה $y = x + \sin 3x$ בנקודות הבאות :

א. $x = \frac{\pi}{6}$ ב. $x = -\frac{2\pi}{3}$ ג. $x = \frac{\pi}{4}$

(15) חשב את הזווית הנוצרת בין שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x}{2} - \cos 2x$

בנקודה שבה : $x = \frac{\pi}{3}$ וציר ה- x .

(16) חשב את הזווית הנוצרת בין שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \sin x - \tan x$

בנקודה שבה : $x = \frac{\pi}{4}$ והכיוון החיובי של ציר ה- x .

(17) מצא את הזווית הנוצרת בין המשיק לגרף הפונקציה $y = \sin x - \cos x$ בנקודות הבאות והכיוון החיובי של ציר ה- x :

א. $x = 0$ ב. $x = \frac{\pi}{2}$ ג. $x = \frac{\pi}{4}$ ד. $x = \frac{\pi}{6}$

(18) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = \cos x$ בנקודה שבה : $x = \frac{\pi}{6}$.

(19) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = \sin 2x$ בנקודה שבה : $x = \frac{\pi}{2}$.

(20) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = \tan 3x$ בנקודה שבה : $x = \frac{\pi}{9}$.

(21) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{\sin x + 1}{2}$ בנקודה שבה : $x = \frac{\pi}{4}$.

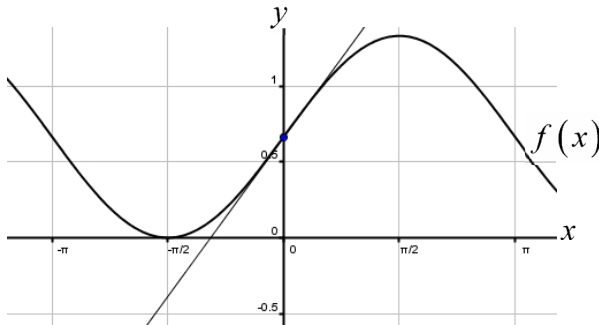
(22) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = \tan 3x - x$ בנקודה שבה : $x = \frac{\pi}{4}$.

(23) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x^2 \cos x$ בנקודה שבה : $x = \frac{\pi}{2}$.

24) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = (\sin x + \cos x)^2$ בנקודה שבה: $x = \pi$.

25) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \frac{\sin x}{\sin x + 1}$ בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{4}$.

26) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2 \sin x + 2}{3}$ בתחום: $[-\pi; \pi]$.



מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$

מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

א. מצא את שיעורי נקודת החיתוך

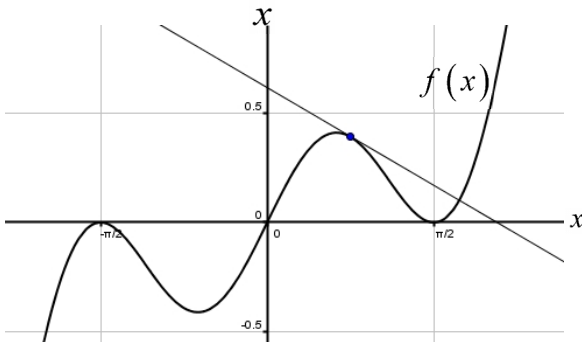
של הפונקציה עם ציר ה- y .

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. מצא את נקודת החיתוך של

המשיק עם ציר ה- x .

27) נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cos^2 x$ בתחום: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$

מהנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{4}$.

א. כתוב את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודות החיתוך של

המשיק עם הצירים.

28) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 4 \sin^2 x$ בנקודות החיתוך

של הפונקציה עם הישר $y = 1$ בתחום: $[0; \pi]$.

29) נתונות הפונקציות: $f(x) = 4 \cos x$ ו- $g(x) = \sin 2x$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך שלהן בתחום הנתון.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ העוברים דרך נקודות

החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

30 נתונות הפונקציות: $f(x) = 2\sin^2 x$ ו- $g(x) = \sin x + 1$ בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

- א. מצא את נקודות החיתוך שלהן בתחום הנתון.
ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ העוברים דרך נקודות החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

31 מצא את משוואות המשיקים לגרפים של הפונקציות הבאות בעלי השיפוע הנתון:

- א. בתחום: $\left[0: \frac{\pi}{2}\right]$; $f(x) = 2\sin x$; $m = 2$.
ב. בתחום: $\left[0: \frac{\pi}{4}\right]$; $f(x) = \sin 4x$; $m = 2$.
ג. בתחום: $\left[-\frac{\pi}{2}: \frac{\pi}{2}\right]$; $f(x) = 3x - \cos x$; $m = 2$.
ד. בתחום: $\left[0: \frac{\pi}{2}\right]$; $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x$; $m = 1.5\sqrt{3}$.

32 נתונה הפונקציה: $f(x) = 1 - \sin 2x$. מצא עבורו אלו ערכים של x בתחום: $[0: 2\pi]$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא -1.

33 מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \cos 2x + 3$ המקביל לישר: $y = x\sqrt{3} + \pi$ בתחום: $[0: \pi]$.

34 מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = 3\tan x - 2$ המקביל לישר: $y = 3x + 2\pi$ בתחום: $[0: \pi]$.

35 מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{3}{2}\cos 2x$ בתחום: $[0: \pi]$ בעלי השיפוע -1.

שאלות עם פרמטרים – שימושי הנגזרת:

36 נתונה הפונקציה: $f(x) = a\sin x + \cos 3x$ (a פרמטר) בתחום: $[0: 2\pi]$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{3}$ הוא 2. מצא את a .

37) נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cos 2x + \cos 3x$ (פרמטר a) בתחום: $[0: 2\pi]$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{3}$ הוא $\sqrt{3}$. מצא את a .

38) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = a \tan x$ בנקודה שבה $x = \pi$ הוא 3.

א. מצא את a .

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \pi$.

39) לגרף הפונקציה: $f(x) = \sin x + a \cos x$ (פרמטר a) מעבירים משיק מנקודת

החיתוך שלה עם ציר ה- y .

א. הבע באמצעות a את משוואת המשיק.

ב. מצא את a אם ידוע כי שיפוע המשיק הוא 1 וכתוב את משוואת המשיק.

40) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\sin x + k}$ (פרמטר חיובי). k

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{6}$ הוא: $-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

א. מצא את k וכתוב את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

ג. חשב את שטח המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים.

41) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{k}{\cos x} + 2 \sin 2x$ (פרמטר חיובי). k

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = \frac{2\pi}{3}$.

א. הבע באמצעות k את שיפוע המשיק.

ב. המשיק מאונך לישר: $8y = x + 4$. מצא את k .

ג. כתוב את משוואת המשיק.

42) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{2}{a \tan x}$ (פרמטר a).

א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = -\frac{2}{a \sin^2 x}$.

ב. ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = -\frac{\pi}{6}$ הוא -4.

מצא את a .

חקירות פונקציה טריגונומטרית:

תחומי הגדרה:

(43) כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום $[0: 2\pi]$:

א. $y = \sin 2x - 5$ ב. $y = \sqrt{3} \cos x$

ג. $y = \tan x$ ד. $y = \tan x + \sin x$

ה. $y = \tan 2x - 2 \cos x$ ו. $y = \tan^2 x + \tan x$

ז. $y = \frac{1}{\sin 2x}$ ח. $y = \frac{3}{\cos x}$

ט. $y = \frac{x}{\sin x - 1}$ י. $y = \frac{\sin x}{\sin 2x + 0.5}$

יא. $y = \frac{\cos x}{4 \sin^2 x - 3}$ יב. $y = \frac{\cos x + 2}{\cos^2 x - 1}$

יג. $y = \frac{x^2 - 4 \sin x + \cos x}{\sin^2 x + 1}$ יד. $y = \frac{6}{\cos^2 x + 4}$

טו. $y = \frac{12}{\tan x}$ טז. $y = \frac{7}{\tan 2x}$

יז. $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ יח. $y = \frac{1}{\sin x \cos x}$

(44) הפונקציה: $y = \tan ax + 3$ (פרמטר a) אינה מוגדרת עבור: $x = \frac{\pi}{4}$. מצא את a .

(45) הפונקציה: $y = \frac{2}{\sin x + a}$ (פרמטר a) אינה מוגדרת עבור: $x = \frac{\pi}{6}$. מצא את a .

(46) הפונקציה: $y = \frac{\sin x}{a^2 - \cos^2 x}$ (פרמטר חיובי a) אינה מוגדרת עבור: $x = 0$. מצא את a .

נקודות קיצון:

(47) מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

א. $[0: 2\pi]: y = \sin x$ ב. $[0: 2\pi]: y = \cos x$

ג. $[-\pi: \pi]: y = \tan x$ ד. $[0: \pi]: y = 2 \sin 2x$

ה. $[0: 0.5\pi]: y = 2 \cos 3x - 3x$ ו. $[0: \pi]: y = 2 \sin x - x\sqrt{3}$

48) מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $y = \frac{2}{\sin x}$ בתחום: $[0: 2\pi]$.

49) מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $y = \frac{4}{\cos x}$ בתחום: $[-\pi: \pi]$.

50) מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $y = \sin^2 x$ בתחום: $[0: \pi]$.

51) מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $y = \cos^2 x + 2$ בתחום: $[0: \pi]$.

52) מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה: $y = \sin x + \cos x$ בתחום: $[0: 2\pi]$ וקבע את סוגן.

53) מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה: $y = \sin x - \frac{x}{2}$ בתחום: $[0: 2\pi]$ וקבע את סוגן.

54) מצא את נקודות הקיצון המקומיות וקיצון הקצה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

א. $[0: \pi]: y = 3 \sin 2x$ ב. $[0: \pi]: y = 2 \cos x + x$

ג. $[0: \pi]: y = \sin^2 x - 5$ ד. $[0: \pi]: y = \cos^2 x - \cos x$

55) מצא את נקודות הקיצון המקומיות וקיצון הקצה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון וקבע את סוגן.

א. $[0: 0.5\pi]: y = \cos 4x + 3$ ב. $[0: \pi]: y = \sin x + \cos x$

ג. $[0: \pi]: y = \sin^2 x - 2 \cos x$ ד. $[0: 0.5\pi]: y = \cos^2 x + \sqrt{2} \sin x$

56) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x) = \sin^2 2x - x$ בתחום: $[0: \frac{2}{3}\pi]$.

57) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{3} \sin^3 x - 2 \sin x$ בתחום: $[0: 1.5\pi]$.

58) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$ בתחום: $[0: 2\pi]$.

59) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = \sin 2x$ בתחום $[0: \pi]$.

60) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x - 1}{3}$ בתחום $[0: \pi]$.

61) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = \tan x - \sin x$ בתחום $0 < x < \pi$.

62) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = \cos^2 x$ בתחום $[-\pi: \pi]$.

63) הוכח כי הפונקציה $f(x) = \tan x - \sin x$ אינה יורדת כלל.

64) הוכח כי הפונקציה $f(x) = \sin x - 2x$ יורדת לכל x .

65) נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x + ax$ (a פרמטר).

א. מצא תחום ערכים של a עבורם הפונקציה תמיד עולה.

ב. מצא תחום ערכים של a עבורם הפונקציה תמיד יורדת.

ג. האם בקצוות התחומים שמצאת עבור a בסעיפים הקודמים, הנקודות שמקיימות: $f'(x) = 0$ הן נקודות קיצון?

66) נתונה הפונקציה $f(x) = a \cos x + x\sqrt{3}$ (a פרמטר).

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x = \frac{2\pi}{3}$. מצא את a .

67) נתונה הפונקציה $f(x) = a \sin 2x - \cos x$ (a פרמטר).

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x = \frac{\pi}{6}$. מצא את a .

68) לפונקציה $f(x) = a \sin x + b \sin^3 x$ יש נקודת קיצון ששיעוריה הם: $\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

אסימפטוטות אנכיות:

69 מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציות הבאות בתחום המצוין לידן:

א. $[0: \pi] : f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$

ב. $[0: \pi] : f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$

ג. $[-\pi: \pi] : f(x) = \tan x$

70 לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin ax - 0.5}$ (פרמטר בתחום: $[0: 3]$) אסימפטוטה אנכית: $x = \frac{\pi}{6}$.

א. מצא את a .

ב. הראה כי אם האסימפטוטה הייתה: $x = \frac{\pi}{18}$ אז היה מתקבל ערך a הגדול פי

3 מזה שמצאת בסעיף הקודם.

71 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\cos 2x + a}$ (פרמטר).

א. הסבר מדוע עבור: $a > 1$ הפונקציה מוגדרת לכל x .

ב. האם הפונקציה מוגדרת לכל x עבור תחום ערכים נוסף של a ? אם כן – מהו? אם לא – נמק.

ג. מצא את a אם ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית: $x = 0.5\pi$.

72 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\cos x}{a \sin^2 x - 3}$ (פרמטר) בתחום: $[-0.5\pi: 0.5\pi]$.

א. מצא את a אם ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית: $x = \frac{\pi}{3}$.

ב. הראה כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית הנגדית ל- $x = \frac{\pi}{3}$ בתחום הנתון.

חקירות חלקיות שונות ללא פרמטרים:

73 נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{3} - 2\sin^2 x$ בתחום: $[-0.5\pi : 0.5\pi]$.

- א. הוכח כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin 2x$.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה) וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

74 נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cos x - x$ בתחום: $[-3\pi : 3\pi]$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x מאפסות את הנגזרת של הפונקציה.
- ג. קבע אלו נקודות מנקודות החיתוך הן קיצון ואלו אינן קיצון. מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

75 נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sin^2 2x - \sin 4x$ בתחום: $[0 : \pi]$.

- א. בכמה נקודות חותך גרף הפונקציה את ציר ה- x בתחום הנתון?
- ב. כמה נקודות קיצון יש לגרף הפונקציה בתחום הנתון? מצא אותן וקבע את סוגן.

76 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$ בתחום: $[-0.5\pi : 0.5\pi]$.

- א. מצא את כל הנקודות על גרף הפונקציה בתחום הנתון ששיפוע המשיק העובר דרכן הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- ב. הראה כי הערך המקסימלי של הפונקציה בתחום הנתון הוא 1.
- ג. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך נקודת המקסימום המוחלטת של הפונקציה בתחום הנתון ודרך הנקודה שמצאת בסעיף א' הנמצאת ברביע השני.

77 נתונה הפונקציה: $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$.

- א. הראה כי הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x) = 2\cos 2x$.
- ב. הוכח כי גרף הפונקציה לא יורד מתחת לציר ה- x .
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום: $[-2\pi : 2\pi]$.

78 נתונה הפונקציה: $f(x) = (x + \sin x)(x - \sin x)$.

- הראה כי הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x) = 2x - \sin 2x$.
- הראה כי הנקודה שבה $x = 0$ היא נקודת מינימום של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפרבולה: $g(x) = x^2$ בתחום: $[-1.2\pi; 1.2\pi]$.

79 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x^2 + \cos^2 x$; $g(x) = x^2 + \sin^2 x$.

- הוכח כי ההפרש: $f(x) - g(x)$ שווה ל- $\cos 2x$.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $[-\pi; \pi]$.
- ישר $x = t$ (פרמטר בתחום: $0 < t < 1$) חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות A ו-B בהתאמה. דרך הנקודות A ו-B מעבירים משיקים לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ ושיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ הוא 1. מצא את כל הערכים האפשריים עבור t .

חקירות חלקיות שונות עם פרמטרים:

80 נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cos 2x + 2 \sin x$ (פרמטר a) בתחום: $[0; \pi]$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{4}$ הוא: $m = \sqrt{2} - 2$.

- מצא את a .
- מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

81 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + a \sin x$ (פרמטר a) בתחום: $[0; \pi]$.

ידוע כי לגרף הפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x = \frac{\pi}{4}$.

- מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- מצא את שאר נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

82) נתונה הפונקציה: $f(x) = -\frac{1}{a} \sin x + \cos ax$ (פרמטר שלם ושונה מ-0).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = \pi$ הוא 0.5.

א. מצא את a .

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. מצא את נקודת הקיצון המקומית של גרף הפונקציה בתחום: $0 < x < \pi$.

83) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^3 x + k \sin x$ (פרמטר k) בתחום: $[-\pi : \pi]$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{3}$ הוא $-\frac{3}{8}$.

א. מצא את k .

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. היעזר בסעיפים הקודמים וקבע האם יש למשוואה: $\sin^3 x - 3 \sin x = 3$ יש פתרון. אם כן מהו?

84) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos x + \frac{1}{m} \sin mx$, פרמטר בתחום: $1 < m < 3$.

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר: $x = -0.5\pi$.

א. מצא את m .

ב. האם הנקודה שבה: $x = -0.5\pi$ היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה. אם לא נמק מדוע.

ג. מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום: $0 < x < 2\pi$.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום: $0 < x < 2\pi$.

85) נתונה הפונקציה: $f(x) = a \sin^2 x - 5 \sin x + ax$ (פרמטר a) בתחום: $[0 : \pi]$.

ידוע כי הישר: $y = ax - 2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{6}$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא 2.

ג. האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק העובר דרכן הוא 2? נמק את תשובתך.

ד. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

חקירת מלאות:

86) חקור את הפונקציות הבאות בתחום המצוין לידן לפי הסעיפים הבאים:

1. תחום הגדרה. 2. נקודות קיצון (מקומיות וקצה). 3. תחומי עלייה וירידה.
4. נקודות חיתוך עם הצירים (במידה ויש) 5. אסימפטוטות אנכיות 6. שרטוט.

* הערה: אין צורך למצוא נקודות חיתוך עם ציר ה- x בסעיפים א' ו-ג'.

א. $[0:2\pi] : f(x) = x + 2 \cos x$ ב. $[-\pi:\pi] : f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$

ג. $\left[-\frac{\pi}{6}:\frac{2\pi}{3}\right] : f(x) = 4x - 3 \tan x$ ד. $[0:\pi] : f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$

87 נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 1 - 2 \sin x$ בתחום: $[0:2\pi]$.

- א. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

88 נתונה הפונקציה: $f(x) = 2 \sin^2 x + \sin x - 1$ בתחום: $[0:1.5\pi]$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- ב. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

89 נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$ בתחום: $[0:2\pi]$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ב. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

90 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$ בתחום: $\left[-\frac{3\pi}{8}:\frac{5\pi}{8}\right]$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

91 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{3} \sin 3x + x\sqrt{2}$ בתחום: $0 < x < \pi$.

- מצא את נקודות הקיצון המקומיות של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בתחום הנתון?
- היעזר בסעיפים הקודמים וקבע כמה פתרונות יש למשוואה: $\frac{2}{3} \sin 3x + x\sqrt{2} = 1$?

92 נתונה הפונקציה: $f(x) = (\sin x + 1) \cos x$ בתחום: $[0:1.5\pi]$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של גרף הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה: $(\sin x + 1) \cos x = 1$ עבור x בתחום הנתון?

93 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + 2}$ בתחום: $-\pi < x < \pi$.

- מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה בתחום הנתון.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

94 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x}$ בתחום: $-0.5\pi < x < 0.5\pi$.

- מצא את האסימפטוטה אנכית של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו בתחום הנתון.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

(1) א. 180° ב. 90° ג. 60° ד. 45° ה. 36° ו. 30° ז. 20° ח. 15° ט. 75° י. 270°
יא. 420° יב. 210°

(2) א. $\frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{4}$ ג. $\frac{\pi}{6}$ ד. $\frac{\pi}{9}$ ה. $\frac{\pi}{18}$ ו. $\frac{23}{36}\pi$ ז. $\frac{3}{4}\pi$ ח. $\frac{5}{4}\pi$ ט. $\frac{7}{4}\pi$ י. $\frac{23}{12}\pi$

(3) א. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. -1 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. 0 ז. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ח. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ט. $\sqrt{3}$ י. \emptyset יא. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ יב. 1

(4) א. $0, 0, \sqrt{3}, 2$ ב. $0, -3, -1.5, 0$ ג. $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ד. $1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

ה. $1, -1, -1.59, 3, -3$ ו. $0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0$ ז. $-4, -4, 4, 0, 0, 0, 0, 0$

ח. $0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1$ י. $1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0$

ט. $0, 0, 0, 1, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0, 0, 0$ י. $1, 1, 1, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0$

יא. $0, 0, 0, 1, -1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset$ יב. $0, 0, 0, \emptyset, \emptyset, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0, 0, 0, 0$

יג. $0, 0, 0, 1, 1, 3, 3, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset$ יד. $0, 0, 0, 1, 1, 3, 3, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset$

טו. $-1, -1, 1, 1.707, -0.2928, 2.23, -1.23, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset$

(5) א. $0.841, 0.9, 0.141$ ב. $0.54, -0.416, -0.989$ ג. $1.55, -2.18, -0.142$

ד. $-0.841, -0.598, 0.958$ ה. $0.54, -0.801, 0.283$ ו. $-1.55, 0.747, 3.38$

ז. $1.43, -6.26, 0$ ח. $-1.325, -0.301, 0.68$

(6) א. $0, 1.84, 2.909$ ב. $1, 1.54, 1.583$ ג. $1.252, 5.651, 9.14$ ד. $2.179, 7.05, 9.989$

ה. $3.55, 10.14, 1.796$ ו. $39.43, 0, 0$ ז. $0.211, 2.5, 32.132$ ח. $0.841, 1.818, 0.423$

ט. $0.54, -0.832, -2.969$ י. $1.557, 1.557, -4.37, -4.37, -0.427, -0.427$

יא. $0.84, -0.84, 3.63, -3.63, 1.27, -1.27$ יב. $0.54, 0.54, -1.66, -1.66, -8.9, -8.9$

(7) א. $y' = 3 \cos x$ ב. $y' = -2 \sin x$ ג. $y' = \frac{2}{\cos^2 x}$ ד. $y' = -\sin x + 5 \cos x$

ה. $y' = 4 \cos x + 3 \sin x$ ו. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + 3 \cos x$ ז. $y' = \cos x + 2$

ח. $y' = 2x + 2 \sin x$ ט. $y' = 3 - \frac{3}{\cos^2 x}$ י. $y' = \cos x - 3 \sin x + 1$

$$y' = 3 \cos 3x - 10 \sin 5x \quad \cdot \text{т} \quad y' = \frac{2}{\cos^2 2x} \quad \cdot \text{л} \quad y' = -4 \sin 4x \quad \cdot \text{б} \quad y' = 3 \cos 3x \quad \cdot \text{л} \quad (8)$$

$$y' = 3 \cos 3x + 2x - 3 \quad \cdot \text{г} \quad y' = \frac{5}{\cos^2 5x} + 3 \cos 3x \quad \cdot \text{д} \quad y' = 12 \cos 3x + 2 \sin 2x \quad \cdot \text{н}$$

$$\cdot y' = 4 \sin(0.4\pi - 4x) \quad \cdot \text{е} \quad y' = 3 \cos(3x - \pi) \quad \cdot \text{в} \quad y' = 3 + 6 \sin 2x \quad \cdot \text{п}$$

$$y' = 2 \tan x + \frac{2x}{\cos^2 x} \quad \cdot \text{л} \quad y' = \cos x - x \sin x \quad \cdot \text{б} \quad y' = \sin x + x \cos x \quad \cdot \text{л} \quad (9)$$

$$y' = 2(\sin x + x \cos x) + \frac{4}{\cos^2 x} \quad \cdot \text{н} \quad y' = 2x \cos x - x^2 \sin x \quad \cdot \text{т}$$

$$y' = \cos 2x + \cos x + 2 \sin x \quad \cdot \text{п} \quad y' = \cos 2x \quad \cdot \text{г} \quad y' = 3 - \sin x - x \cos x \quad \cdot \text{д}$$

$$y' = \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} + \sin x \quad \cdot \text{е} \quad y' = \cos 2x - \sin x \quad \cdot \text{в}$$

$$y' = 2x \tan 4x + \frac{4(x^2 - 3)}{\cos^2(4x)} \quad \cdot \text{ж} \quad y' = 3 \cos 3x(\cos 2x - 1) - 2 \sin 3x \sin 2x \quad \cdot \text{л}$$

$$\cdot y' = \frac{3 \sin x \cos x - \sin^2 x - 1}{\cos x(\tan x - 3)^2} \quad \cdot \text{л} \quad y' = \frac{1 + 2 \cos x}{(\cos x + 2)^2} \quad \cdot \text{т} \quad y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \quad \cdot \text{л}$$

$$\cdot y' = -2 \frac{\sin 2x + 1}{(1 + \sin 2x)^2} \quad \cdot \text{п} \quad y' = -\frac{1 + 2 \cos x}{\sin^2 x} \quad \cdot \text{г} \quad y' = \frac{-5 \cos x}{(\sin x - 5)^2} \quad \cdot \text{в}$$

$$\cdot y' = \frac{\cos x}{(\sin x + 1)^2} \quad \cdot \text{б} \quad y' = -\frac{3 \sin 3x \sin x + 6 \sin 3x + \cos x \cos 3x + \cos x}{(\sin x + 2)^2} \quad \cdot \text{в}$$

$$\cdot y' = 3 \sin^2 x \cos x \quad \cdot \text{т} \quad y' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \quad \cdot \text{л} \quad y' = -\sin 2x \quad \cdot \text{б} \quad y' = \sin 2x \quad \cdot \text{л} \quad (10)$$

$$\cdot y' = 6 \sin^2 2x \cos 2x \quad \cdot \text{г} \quad y' = \frac{8 \sin 4x}{\cos^3 4x} \quad \cdot \text{д} \quad y' = -8 \cos^3 x \sin x \quad \cdot \text{н}$$

$$\cdot y' = x \sin 2x + \sin^2 x \quad \cdot \text{е} \quad y' = 2(x \cos x)(\cos x - x \sin x) \quad \cdot \text{в} \quad y' = -2 \sin 4x \quad \cdot \text{п}$$

$$\cdot y' = -\sin 4x \quad \cdot \text{л} \quad y' = 2 \sin 2x \quad \cdot \text{б} \quad y' = 2x \sin x + x^2 \cos x + \sin 2x \quad \cdot \text{л}$$

$$\cdot y' = 2(x + \sin x)(1 + \cos x) \quad \cdot \text{л} \quad y' = 4 \sin 4x \quad \cdot \text{т}$$

$$\cdot y' = -\frac{\sin 2x \sin x + \cos^3 x + \cos x}{\sin^2 x} \quad \cdot \text{г} \quad y' = (3 - \sin x)^2 - 2x(3 - \sin x) \cos x \quad \cdot \text{в}$$

$$\cdot y' = \frac{\cos^3 x + \cos x + \sin 2x \sin x}{(\cos^2 x + 1)^2} \quad \cdot \text{д}$$

$$.2.7 \text{ .} \lambda 4.866 \text{ .} \sqcup 1 \text{ .} \aleph \text{ (13) } .0 \text{ .} \lambda 0 \text{ .} \sqcup 0 \text{ .} \aleph \text{ (12) } .0 \text{ .} \lambda -1 \text{ .} \sqcup 1 \text{ .} \aleph \text{ (11)$$

$$.127.72^\circ \text{ (16) } .65.86^\circ \text{ (15) } -1.12 \text{ .} \lambda 4 \text{ .} \sqcup 1 \text{ .} \aleph \text{ (14)$$

$$.y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (18) } .53.8^\circ \text{ .} \top 54.73^\circ \text{ .} \lambda 45^\circ \text{ .} \sqcup 45^\circ \text{ .} \aleph \text{ (17)$$

$$.y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + 0.603 \text{ (21) } .y = 12x + \sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \text{ (20) } .y = -2x + \pi \text{ (19)$$

$$.y = 2x + 1 - 2\pi \text{ (24) } .y = -\frac{\pi^2}{4}x + \frac{\pi^3}{8} \text{ (23) } .y = 5x - 1 - 1.5\pi \text{ (22)$$

$$.(-1,0) \text{ .} \lambda y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \text{ .} \sqcup \left(0, \frac{2}{3}\right) \text{ .} \aleph \text{ (26) } .y = 0.2426x + 0.2236 \text{ (25)$$

$$(2.164,0), (0,0.6168) \text{ .} \sqcup y = -0.285x + 0.6168 \text{ .} \aleph \text{ (27)$$

$$y = 2\sqrt{3}x - 0.813, y = -2\sqrt{3}x + 10.06 \text{ (28)$$

$$y = 4x - 6\pi, y = -4x + 2\pi \text{ .} \sqcup \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}\pi, 0\right) \text{ .} \aleph \text{ (29)$$

$$y = 2, y = x\sqrt{3} - 5.848 \text{ .} \sqcup \left(\frac{\pi}{2}, 2\right), \left(\frac{7}{6}\pi, \frac{1}{2}\right) \text{ .} \aleph \text{ (30)$$

$$.y = 1.5\sqrt{3}x + 3.97, y = 1.5\sqrt{3}x - 1.51 \text{ .} \top y = 2x - 0.5\pi \text{ .} \lambda y = 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \text{ .} \sqcup y = 2x \text{ .} \aleph \text{ (31)$$

$$.y = \sqrt{3}x - 1.034, y = \sqrt{3}x + 2.5 - \frac{2}{\sqrt{3}}\pi \text{ (33) } .x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \text{ (32)$$

$$.y = 3x - 2, y = 3x - 3\pi - 2 \text{ (34)$$

$$.y = 3x - 3\pi \text{ .} \sqcup a = 3 \text{ .} \aleph \text{ (38) } a = -1 \text{ (37) } a = 4 \text{ (36) } y = -x - 0.009, y = -x + 1.657 \text{ (35)$$

$$.a = 2, y = x + 2 \text{ .} \sqcup y = x + a \text{ .} \aleph \text{ (39)$$

$$S = 0.868 \text{ .} \lambda (0,0.613), (2.83,0) \text{ .} \sqcup y = -\frac{\sqrt{3}}{8}x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{48}\pi, k = 1.5 \text{ .} \aleph \text{ (40)$$

$$.y = -8x + \frac{16\pi}{3} - 3\sqrt{3} \text{ .} \lambda k = \sqrt{3} \text{ .} \sqcup -2(k\sqrt{3} + 1) \text{ .} \aleph \text{ (41)$$

(42) ב. $a=2$.א כל x ב. כל x ג. $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ ד. $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ ה. $x \neq \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$.

ו. $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ ז. $x \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ח. $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ ט. $x \neq \frac{\pi}{2}$.

י. $x \neq \frac{19\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$.יא. $x \neq \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$.יב. $x \neq 0, \pi, 2\pi$.יג. כל x .

יד. כל x טו. $x \neq 0, \pi, 2\pi$ טז. $x \neq 0, 0.5\pi, \pi, 1.5\pi, 2\pi$.

יז. $x \neq 0, 0.5\pi, \pi, 1.5\pi, 2\pi$.יח. $x \neq 0, 0.5\pi, \pi, 1.5\pi, 2\pi$.

(44) $a=2$ (45) $a=-\frac{1}{2}$ (46) $a=1$ (47) .א $\left(\frac{3}{2}\pi, -1\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.ב $(0,1), (2\pi,1), (\pi, -1)$.

ג. אין ד. $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \left(\frac{3}{4}\pi, -2\right)$.ה $\left(\frac{7}{18}\pi, -5.39\right)$.ו $\left(\frac{\pi}{6}, 0.09\right)$.

(48) $\left(\frac{3\pi}{2}, -2\right), \left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ (49) $(-\pi, -4), (\pi, -4), (0, 4)$ (50) $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (0, 0), (\pi, 0)$.

(51) $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right), (\pi, 3), (0, 3)$.

(52) $\min(0,1)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, $\min\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$, $\max(2\pi, 1)$ קצה.

(53) $\min(0,0)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$, $\min\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)$, $\max(2\pi, -\pi)$ קצה.

(54) .א $\max(\pi, 0)$ קצה, $\min\left(\frac{3}{4}\pi, -3\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$, $\min(0, 0)$ קצה.

ב. $\max(\pi, \pi - 2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, 0.886\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, 2.25\right)$, $\min(0, 2)$ קצה.

ג. $\min(\pi, -5)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{2}, -4\right)$, $\min(0, -5)$ קצה.

ד. $\max(\pi, 2)$ קצה, $\min\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{4}\right)$, $\max(0, 0)$ קצה.

(55) .א $\max(0, 4)$ קצה, $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{2}, 4\right)$ קצה.

ב. $\max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, $\min(0, 1)$ קצה, $\min(\pi, -1)$ קצה.

ג. $\min(0, -2)$ קצה, $\max(\pi, 2)$ קצה.

ד. $\min\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{4}, 1.5\right)$, $\min(0, 1)$ קצה.

(56) $\max\left(\frac{5\pi}{24}, 0.28\right)$ מוחלט. $\min\left(\frac{13\pi}{24}, -1.63\right)$ מוחלט.

(57) $\min\left(\frac{\pi}{2}, -2\frac{2}{15}\right)$ מוחלט, $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 2\frac{2}{15}\right)$ מוחלט (58) $\max\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ מוחלט.

(59) עולה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$, יורדת: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$ (60) יורדת בכל התחום.

(61) עולה בכל התחום. (62) עולה: $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{3}{4} < x < -\frac{\pi}{2}$, יורדת: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$, $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{3}{4}$.

יורדת: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{4}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $-\pi < x < -\frac{3}{4}\pi$ (65) א. $a > 1$. ב. $a < -1$. ג. לא.

(66) $a = 2$ (67) $a = -\frac{1}{2}$ (68) $a = 3, b = -4$.

(69) א. $x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$. ב. $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$. ג. $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

(70) א. $a = 1$. ב. $a = 3$ (71) ג. $a = 1$ (72) א. $a = 4$.

(73) ב. $\max\left(\frac{\pi}{2}, 0.72\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{3}, 0.314\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.4\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{2}, -4.72\right)$.

ג. עולה: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$, יורדת: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$.

(74) א. $(0, 0), (2\pi, 0), (-2\pi, 0)$. ג. $(0, 0), \max(2\pi, 0), \min(-2\pi, 0)$, פיתול. $(0, 0)$.

(75) א. 5 נקודות שונות.

ב. $\min\left(\frac{\pi}{16}, -0.414\right)$, $\max\left(\frac{5}{16}\pi, 2.41\right)$, $\min\left(\frac{9}{16}\pi, -0.414\right)$, $\max\left(\frac{13}{16}\pi, 2.41\right)$.

(76) א. $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{3}{4}\right)$. ג. $y = \frac{9}{7\pi}x + \frac{5}{14}$.

(77) ג. $(-1.25\pi, 0), (-0.25\pi, 0), (0.75\pi, 0), (1.75\pi, 0)$.א (78) ג. $(\pi, \pi^2), (-\pi, \pi^2)$.

(79) ב. $\left(\frac{\pi}{4}, 1.11\right), \left(-\frac{3\pi}{4}, 6.05\right)$.א $t = \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi$.

(80) א. $a = 1$.ב $\min(0, 1), \max\left(\frac{\pi}{6}, 1.5\right), \min\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \max\left(\frac{5}{6}\pi, 1.5\right), \min(\pi, 1)$.

ג. עולה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi < x < \pi$: יורדת: $0 < x < \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$.

(81) א. $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x, a = -\sqrt{2}$.

ב. $\max(0, 0), \min\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right), \max\left(\frac{\pi}{2}, -0.414\right), \min\left(\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{2}\right), \max(\pi, 0)$.

ג. $(0, 0), (\pi, 0)$.

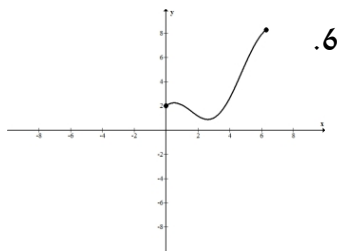
(82) א. $a = 2$.ב $y = 0.5x - 0.57$.ג $(0.5\pi, -1.5)$.

(83) א. $k = -3$.ב $\min(-\pi, 0), \max(-0.5\pi, 2), \min(0.5\pi, -2), \max(\pi, 0)$.ג לא.

(84) א. $m = 2$.ב פיתול. הנגזרת חיובית לפנייה ואחריה. ג. 2 נקודות

ד. $(0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0)$.

(85) א. $f(x) = 2\sin^2 x - 5\sin x + 2x, a = 2$.ב $\left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right)$.ג לא. ד. $y = 2x - 3$.

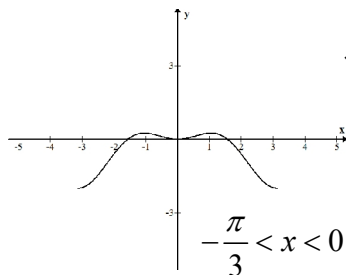


(86) א. 1. $0 < x < 2\pi$.

2. $\max(2\pi, 2\pi + 2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$,

$\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$, $\min(0, 2)$ קצה.

3. עולה: $0 < x < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < x < 2\pi$: יורדת: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$. 4. $(0, 2)$. 5. אין.

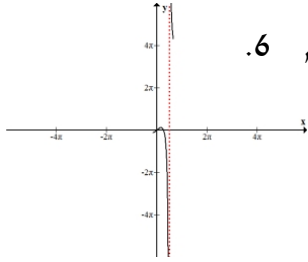


1. $-\pi < x < \pi$. 2. $\min(\pi, -2)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$, 6.

$\min(-\pi, -2)$ קצה, $\max\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$, $\min(0, 0)$

3. עולה: $0 < x < \frac{\pi}{3}, -\pi < x < -\frac{\pi}{3}$: יורדת: $-\frac{\pi}{3} < x < 0, \frac{\pi}{3} < x < \pi$.

4. $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), (0, 0)$. 5. אין.

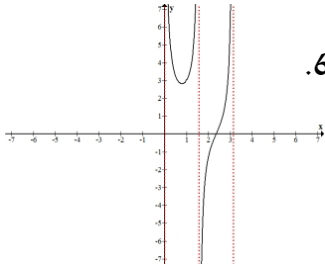


ג. 1. $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$.2 $\min\left(\frac{2\pi}{3}, 13.57\right)$ קצה , 6.

$\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$ קצה $\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$

3. עולה: $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$: יורדת: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$

4. $(0, 0)$.5 $x = \frac{\pi}{2}$



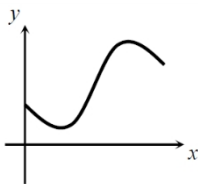
6.

ד. 1. $0 < x < \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$.2 $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$

3. עולה: $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$ יורדת: $0 < x < \frac{\pi}{4}$

4. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$.5 $x = \frac{\pi}{2}$

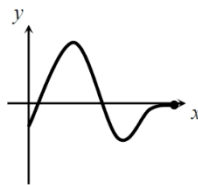
87) א. $\max\left(\frac{5}{3}\pi, 7.96\right), \min(2\pi, 7.28)$ $\max(0, 1), \min\left(\frac{\pi}{3}, 0.315\right)$



ג.

ב. עולה: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$ יורדת: $0 < x < \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$

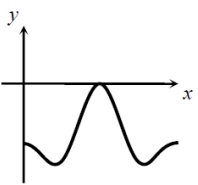
88) א. $(0, -1), \left(\frac{\pi}{6}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right), (1.5\pi, 0)$



ב. $\min(0, -1), \max(0.5\pi, 2), \min(1.08\pi, -1.24), \max(1.5\pi, 0)$.ד

ג. עולה: $0 < x < 0.5\pi, 1.08\pi < x < 1.5\pi$ יורדת: $0.5\pi < x < 1.08\pi$

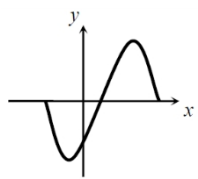
89) א. $(\pi, 0), (0, -2)$.ב. $\max(2\pi, -2), \min\left(\frac{3}{2}\pi, -2.25\right), \max(\pi, 0)$



ד.

ג. עולה: $\frac{\pi}{3} < x < \pi, \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ $\max(0, -2), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$

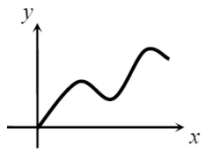
יורדת: $0 < x < \frac{\pi}{3}, \pi < x < \frac{3}{2}\pi$



ג.

90) א. $\left(-\frac{3\pi}{8}, 0\right), \left(\frac{\pi}{8}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{8}, 0\right)$

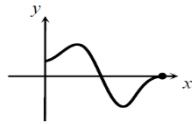
ב. $\min\left(-\frac{\pi}{8}, -1.41\right), \max\left(\frac{3}{8}\pi, 1.41\right)$



ב.

(91) א. $\max\left(\frac{\pi}{4}, 1.58\right), \min\left(\frac{5\pi}{12}, 1.38\right), \max\left(\frac{11\pi}{12}, 4.54\right)$

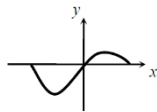
ג. לא. ד. פתרון אחד.



ג.

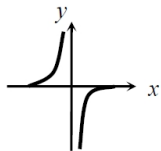
(92) א. $(0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0)$ ב. $\max(1.5\pi, 0)$, $\min\left(\frac{5}{6\pi}, -1.29\right)$

ד. 2 פתרונות. $\min(0, 1), \max\left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right)$



ג.

(93) א. $\min(-0.5\pi, -1), \max\left(0.5\pi, \frac{1}{3}\right)$ ב. $(0, 0)$



ג.

(94) א. $x = 0$

פרק 17 - בעיות מקסימום ומינימום - תרגילים מסכמים:

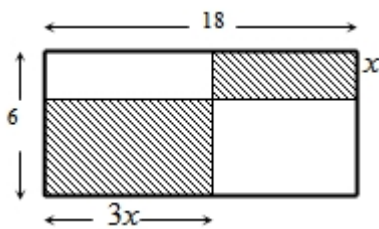
תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית:

- (1) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 45. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני (במקום זהה לו)?
ג. באיזה מקרה (א' או ב') המכפלה תהיה גדולה יותר? הראה דרך חישוב.

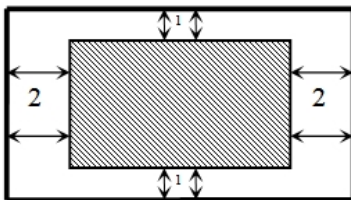
- (2) א. מבין כל המספרים המקיימים: $3x + y = 60$ מצא את המספרים x ו- y שמכפלת ריבועיהם מקסימלית.
ב. מהי המכפלה הנ"ל?

- (3) סכום שלושה מספרים הוא 11. ידוע כי המספר הראשון גדול ב-4 מהמספר השני. הראה כי המספרים שמכפלתם היא מקסימלית מקיימים:
א. מכפלת שני המספרים הקטנים שווה למספר הגדול.
ב. ערך המכפלה של שלושת המספרים שווה לריבוע המספר הגדול מבניהם.

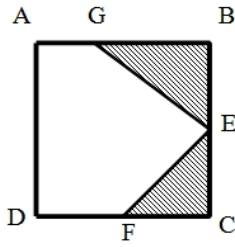
- (4) סכום שלושה מספרים הוא 26. מספר אחד גדול פי 3 מהשני. מצא את שלושת המספרים שסכום ריבועיהם הוא מינימלי.



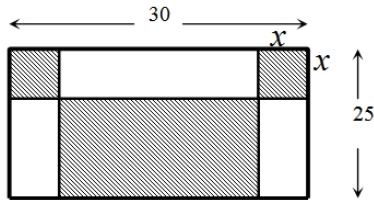
- (5) במלבן שצלעותיו הן 6 ס"מ ו-18 ס"מ חסומים שני מלבנים מקווקווים. אורך אחד המלבנים המקווקווים גדול פי 3 מרוחב המלבן השני.
א. מה צריך להיות האורך x כדי שסכום שטחי שני המלבנים יהיה מקסימלי.
ב. בעבור ה- x שמצאת מהו סכום השטחים הללו?



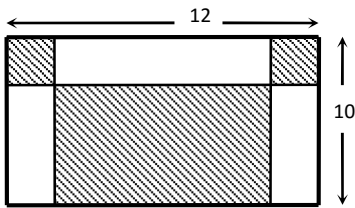
- (6) יוסי רוצה לקנות דף מחשב צבעוני ומיוחד בעל היקף של 60 ס"מ כדי להכין ברכה ליום הולדתה של חברתו רחל. המדפסת של יוסי אינה מדפיסה עד גבולות הדף אלא משאירה מרחק של ס"מ אחד מקצות הדף העליון והתחתון, ומרחק של 2 ס"מ מצדי הדף (ראה איור). יוסי רוצה לבחור דף שבו השטח שהמדפסת תוכל להדפיס יהיה מקסימלי. מה הן מידות הדף שיוסי צריך לקנות כדי שהשטח המודפס יהיה מקסימלי?



- 7) בריבוע ABCD חסומים שני משולשים ישרי-זווית GBE ו-ECF כמתואר באיור. ידוע שאורך הקטע AG הוא 5 ס"מ ואורך צלע הריבוע ABCD הוא 13 ס"מ. המשולש ECF הוא משולש ישר זווית ושיש (CE=CF).
 א. מצא מה צריך להיות אורך שוק המשולש ECF בעבורו סכום שטחי שני המשולשים הנ"ל יהיה מינימלי.
 ב. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?

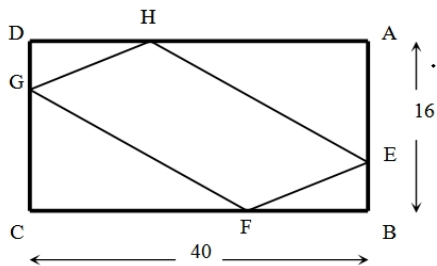


- 8) במלבן שצלעותיו הן 30 ס"מ ו-25 ס"מ חסומים שני ריבועים ומלבן (המסומנים) כמתואר באיור. מסמנים את צלע הריבוע ב- x .
 א. מצא מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום השטחים של שני הריבועים והמלבן יהיה מינימלי.
 ב. בעבור אורך הצלע שמצאת מהו סכום השטחים המינימלי?



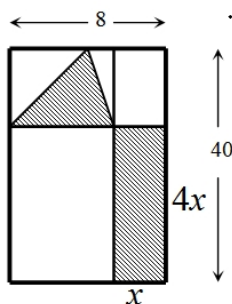
- 9) במלבן שמידותיו הן 12 ס"מ ו-10 ס"מ חסומים בצדדים למעלה שני ריבועים ומלבן מתחתיהם במרכז.
 א. מצא מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום השטחים של שני הריבועים והמלבן יהיה מינימלי.
 ב. מה יהיה השטח שלהם במקרה זה?

- 10) במלבן ABCD שמידותיו הן 40 ס"מ ו-16 ס"מ מקצים נקודות על צלעות המלבן כך שמתקיים: $AE = BF = CG = DH = x$.

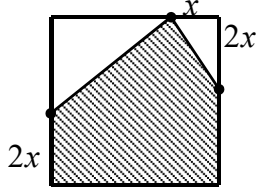


- א. הבע באמצעות x את שטחי ארבעת המשולשים: $\triangle AEH + \triangle BEF + \triangle CGF + \triangle DGH$.
 ב. מצא מה צריך להיות x בעבורו שטח המרובע EFGH יהיה מינימלי.
 ג. מה יהיה שטח המרובע EFGH במקרה זה?

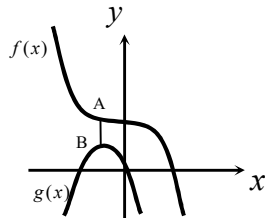
- 11) נתון מלבן שמידותיו הן 8 ס"מ על 40 ס"מ.



- מעבירים ישרים המקבילים לצלעות המלבן כך שנוצרים 4 מלבנים. מסמנים צלע אחת של המלבן הימני ב- x , כך שהצלע הסמוכה לה גדולה פי 4 ממנה כמתואר באיור ובמלבן השמאלי בונים משולש.
 א. בטא באמצעות x את סכום השטחים של המלבן והמשולש המקווקווים.
 ב. מצא מה צריכות להיות מידות המלבן הימני כדי שסכום השטחים הנ"ל יהיה מינימלי.
 ג. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?



12 נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ. מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה ושני קטעים שאורכם הוא $2x$ על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור, כך שנוצר המחומש המקווקו. מצא מה צריך להיות ערכו של x בעבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.

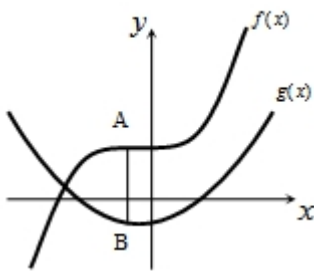


13 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = 16 - 2x^3, \quad g(x) = -6x^2 - 18x$$

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע השני ומותחים ממנה ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

- א. מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה מינימלי.
 ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



14 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

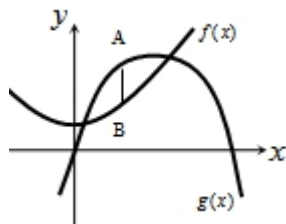
$$f(x) = x^3 + 8, \quad g(x) = x^2 + x - 6$$

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ומורידים ממנה ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

- א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי.
 ב. מה יהיה האורך המקסימלי?

15 באיור שלפניך מתוארות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 20x - x^2$

מעבירים קטע AB המקביל לציר ה- y כך שהנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.



- א. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t . הבע באמצעות t את אורך הקטע AB.
 ב. מה צריך להיות t כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?
 ג. מהו האורך AB במקרה זה?

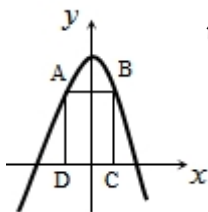
16 מעבירים ישר AB המקביל לציר ה- x כך שהנקודות A ו-B נמצאות

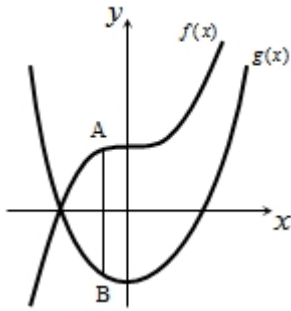
על גרף הפונקציה $f(x) = 48 - x^2$. מהנקודות A ו-B מורידים אנכים

לציר ה- x כך שנוצר מלבן ABCD.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה B בעבורם שטח המלבן ABCD יהיה מקסימלי.

ב. בעבור שיעורי הנקודה B שמצאת מה יהיה השטח?





17) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = x^3 + 8$

ו- $g(x) = 6x^2 - 24$ הנקודה A נמצאת על גרף

הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף

הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

א. מצא את שיעורי הנקודה A בתחום: $x_A < 4$.

בעבורם הקטע AB יהיה מקסימלי.

ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

18) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 + x + 7$

ו- $g(x) = 2x - 5$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ונקודה B נמצאת

על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

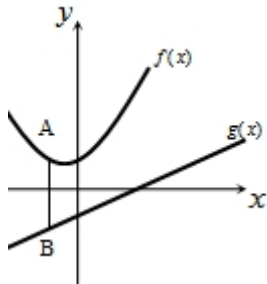
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את t בעבורו אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

ג. בעבור הערך של t שמצאת בסעיף הקודם, מה

יהיה אורך הקטע AB?



19) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 7x$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון.

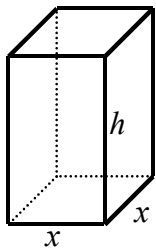
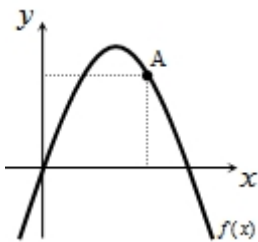
מהנקודה A מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם

היקף המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם

היקף המלבן יהיה מינימלי?



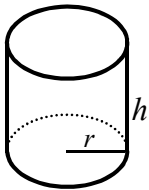
20) נתונה תיבה שבסיסה הוא ריבוע. ידוע כי סכום כל המקצועות

הוא 60 ס"מ. נסמן את אורך צלע הבסיס ב- x ואת גובה התיבה ב- h .

א. הבע את h באמצעות x .

ב. מצא את מידות התיבה עבורן נפחה הוא מקסימלי.

ג. מה הוא הנפח המקסימלי של התיבה?



21) נתון גליל שרדיוס בסיסו הוא r וגובהו h .

ידוע כי סכום הרדיוס והגובה הוא 6 ס"מ.

מצא את מידות רדיוס הגליל וגובהו בעבורם

נפח הגליל יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות:

- (1) א. 15, 15, 15. ב. 10, 20, 15. ג. מקרה א'. (2) א. $y=30$, $x=10$. ב. $M=90000$.
- (3) המספרים: 2, 3, 6. (4) 4, 10, 12. (5) א. $x=3$. ב. $S=54$.
- (6) 14 ס"מ, 16 ס"מ. (7) א. 4 ס"מ. ב. $S=125$. (8) א. $x=10$. ב. $S=350$.
- (9) א. 4 ס"מ. ב. $S=56$. (10) א. $-2x^2+56x$. ב. $x=14$. ג. $S=248$.
- (11) א. $6x^2-36x+160$. ב. 3 ס"מ על 12 ס"מ. ג. $S=214$. (12) א. $x=6$.
- (13) א. $A(-1,18)$. ב. 6. (14) א. $A(-\frac{1}{3}, 7\frac{26}{27})$. ב. $AB=14\frac{5}{27}$.
- (15) א. $-2t^2+20t-3$. ב. $t=5$. ג. $AB=47$. (16) א. $B(4,32)$. ב. $S=256$.
- (17) א. $A(0,8)$. ב. $AB=32$. (18) א. $B(t,2t-5)$. ב. $t=0.5$. ג. $AB=11.75$.
- (19) א. $A(4,12)$. ב. $A(0,0)$. (20) א. $h=15-2x$. ב. $5 \times 5 \times 5$. ג. $V=125$.
- (21) $r=4$, $h=2$.

תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית:

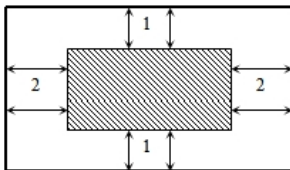
- (1) נתונים שני מספרים x ו- y שמקיימים: $2x^2y=27$.
- א. הבע את y באמצעות x .
- ב. מה צריכים להיות המספרים כדי שסכומם יהיה מינימלי?
- (2) א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים ששטחם הוא 128 סמ"ר מצא את אורך הבסיס ואורך גובהו במשולש שבו סכום אורך הבסיס וגובהו הוא מינימלי.
- ב. מה יהיה הסכום במשולש זה?
- (3) מכפלת שלושה מספרים היא 27. ידוע כי המספר הראשון זהה לשני. נסמן ב- x את המספר הראשון.
- א. הבע באמצעות x את המספר השלישי.
- ב. מצא את שלושת המספרים שסכומם מינימלי.
- (4) נתונים שני מספרים חיוביים. ידוע כי המספר הראשון גדול פי 4 מהמספר השני. מחברים את המספר השני עם ההופכי של המספר הראשון.
- א. מצא מה יהיו המספרים בעבורם חיבור זה יהיה מינימלי.
- ב. מה הוא ערך החיבור?

- 5) נתונים שלושה מספרים חיוביים כך שהמספר השני גדול פי 3 מהמספר הראשון והמספר השלישי גדול פי 9 מהמספר הראשון. המספר הראשון יסומן ב- x .
- הבע באמצעות x את המספרים השני והשלישי.
 - הבע באמצעות x את הסכום בין המספר הראשון למספרים ההופכיים של המספרים השני והשלישי.
 - מצא את שלושת המספרים בעבורם הסכום שהבעת בסעיף הקודם הוא מינימלי.

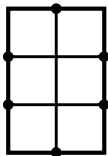
- 6) נתונים שני מספרים. ידוע כי המספר הראשון גדול ב- 14 מהמספר השני. סמן ב- x את המספר הקטן. מצא את המספרים בעבורם ההפרש בין המספר ההופכי של המספר הקטן למספר ההופכי של המספר הגדול הוא מקסימלי.

- 7) x ו- y הם שני מספרים חיוביים המקיימים: $xy + y = 16$.
- הבע את y באמצעות x .
 - מצא מה צריכים להיות x ו- y בעבורם הסכום: $x + y$ יהיה מינימלי.
 - מה יהיה הסכום במקרה זה?

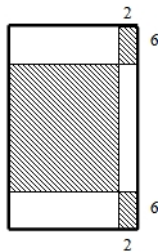
- 8) בבית הדפוס "עמירן" רוצים לעצב גלויה על גבי קרטון ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר. הנהלת החברה החליטה שיש להשאיר רווחים של ס"מ אחד מקצות הדף העליון והתחתון ו-2 ס"מ מצידי הדף.



- מצא מה צריכות להיות מידות הקרטון כדי שהשטח של התמונה יהיה מקסימלי.
- מה יהיה השטח במקרה זה?

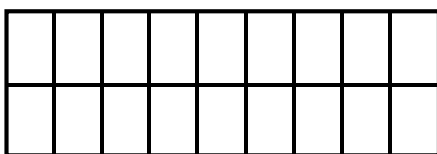


- 9) בחלון מלבני ששטחו הכולל הוא 192 מ"ר בונים סורגי מתכת מ-7 מוטות: 3 מאונכים ו-4 אופקיים (ראה איור). מצא מה צריכים להיות אורכי המוטות המינימליים שיחסמו את חלון זה.

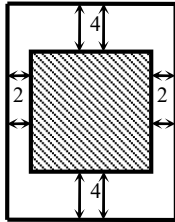


- 10) נתון מלבן ששטחו 1176 סמ"ר. מקצים בצדדי המלבן העליון והתחתון קטעים שאורכם 2 ס"מ ובצדדי המלבן הימניים קטעים שאורכם 6 ס"מ כך שנוצרים שישה מלבנים. מסמנים שלושה מלבנים כמתואר באיור. חשב מה צריכות להיות מידות המלבן כדי שסכום שטחי המלבנים המסומנים יהיה מקסימלי.

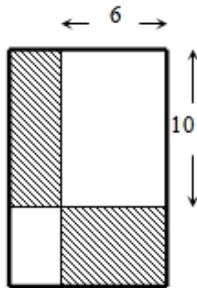
- 11) בתור תשתית לקיר עץ, קנו רפי וחבריו מוטות מתכת. מחיר המוטות נקבע בהתאם לאורכם. החבורה העמידה 10 מוטות מתכת מאונכים ולאחר מכן תפסו אותם עם שלושה מוטות נוספים אופקים כמתואר בתרשים.



אחד מחבריו של רפי מדד וגילה ששטח המלבן שנוצר הוא 120 מ"ר.
 רפי בתגובה שמח ואמר "איזה יופי! עכשיו אני יודע שהשקעתנו הייתה
 מינימלית". מצא מה צריכים להיות אורכי המוטות המינימליים בעבור
 השטח שמדד חברו של רפי.

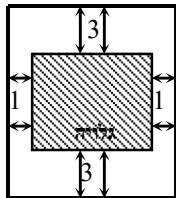


12 לרותי צבעי מים ומשטח עץ ששטחו הכולל הוא 162 סמ"ר.
 רותי רוצה לצייר מלבן במרכז המשטח כך שמרחקו מצידי
 המשטח 2 ס"מ ומהקצוות העליון והתחתון של המשטח - 4 ס"מ.
 רותי ראתה שהמשטח שברשותה לא עומד בתנאים אלו ולכן
 החליטה לקנות משטח חדש. כשהגיעה רותי לנגר הוא אמר לה
 שמחיר העץ נקבע לפי מידותיו. איזה מידות רותי צריכה לבקש
 כדי לקבל משטח שבו היא תוכל לצייר מלבן בעל שטח מקסימלי לפי
 דרישותיה?



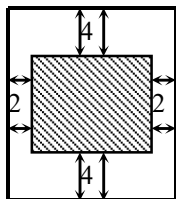
13 נתון מלבן ששטחו הוא 135 סמ"ר.
 מעבירים ישרים המקבילים לצלעות המלבן ומקצים עליהם
 קטעים באורכים של 6 ו-10 ס"מ (ראה איור). על ידי הקצאת
 קטעים אלו נוצרים מלבנים נוספים המסומנים באיור.
 א. מצא מה צריכות להיות מידות המלבן הנתון בעבורם
 סכום שטחי מלבנים אלו יהיה מינימלי.
 ב. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?

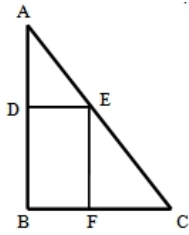
14 לדני גלויה מלבנית במידות לא ידועות ששטחה הכולל הוא 12 סמ"ר.
 דני רוצה לקנות קרטון כדי להדביק את הגלויה במרכזו.
 כשהלך דני לחנות כלי מלאכה אמר לו המוכר שניתן לבחור
 קרטון על פי שטח. דני הדגיש למוכר שהוא רוצה שהגלויה
 תהיה מודבקת במרכז הקרטון כך שמרחקה מצידי הקרטון
 יהיה 1 ס"מ בלבד ומרחקה מהקצוות העליון והתחתון
 יהיה 3 ס"מ. המוכר נתן לדני קרטון בעל שטח מינימלי בעבור
 הגלויה שלו.



א. מה הן מידות הגלויה בעבורן שטח הקרטון הוא מינימלי?
 ב. מה הוא שטח הקרטון שנתן המוכר לדני?

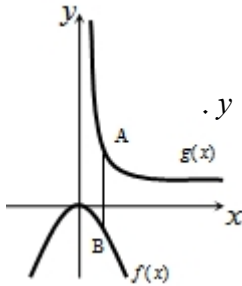
15 לרבקה קרטון מלבני ששטחו הכולל הוא 162 סמ"ר.
 רבקה רוצה לחתוך מלבן במרכז הקרטון כדי שתוכל להשתמש
 בשארית הקרטון כמסגרת לתמונה. כדי שהקרטון לא יקרע
 רבקה צריכה לשמור על רווחים של 2 ס"מ מצידי הקרטון
 ו-4 ס"מ מקצותיו העליון והתחתון. מה הן מידות הקרטון
 בעבורן שטח המלבן שרבקה תחתוך יהיה מקסימלי?



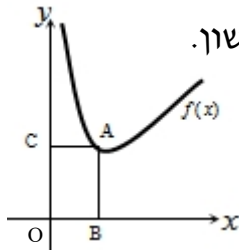


- 16) במשולש הישר זווית ABC חוסמים מלבן BDEF כמתואר באיור.
 מידות המלבן הן: $DE = 6$, $EF = 12$.
 מסמנים את אורך הצלע AB ב- x .
 א. הבע באמצעות x את אורך הצלע BC.
 ב. מצא את אורכי הניצבים AB ו-BC של המשולש בעל השטח המינימלי?

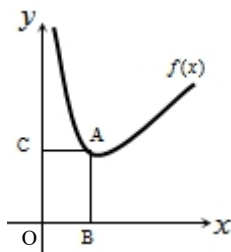
17) נתונות הפונקציות: $f(x) = -\frac{x^2}{16}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$



- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
 א. מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה מינימלי.
 ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

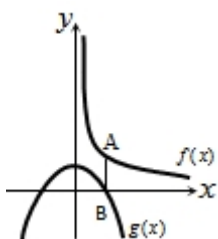


- 18) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x) = x + \frac{16}{x^3}$ ברביע הראשון.
 מהנקודה A מורידים אנכים לצירים כפי שמתואר באיור כך שנוצר המלבן ABOC. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מינימלי.



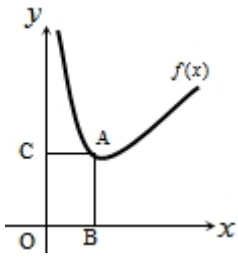
- 19) באיור שלפניך נתונה הפונקציה $f(x) = x + \frac{8}{x}$ ברביע הראשון.
 מנקודה A שעל גרף הפונקציה מורידים אנכים לצירים כך שמתקבל מלבן ABOC.
 א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן ABOC יהיה מינימלי.
 ב. מה הוא ההיקף המינימלי?

20) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{x}$ ו- $g(x) = -4x^2 + 1$.



- מעבירים ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.
 א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה בעל אורך מינימלי.
 ב. מה יהיה האורך AB במקרה זה והיכן תמוקם הנקודה B?

21) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = x + \frac{16}{x^2}$ ברביע הראשון.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים שיוצרים את המלבן ABOC (ראשית הצירים).

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A.

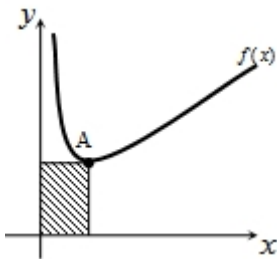
א. בטא באמצעות t את שיעור ה- y של הנקודה A

ואת שטח המלבן ABOC.

ב. מצא מה צריך להיות ערכו של t בעבורו שטח המלבן יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?

22) באיור שלפניך נתון גרף הפונקציה: $f(x) = x + \frac{8}{x^2} + 3$ ברביע הראשון.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

מנקודה זו מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן (בעל השטח המקווקו).

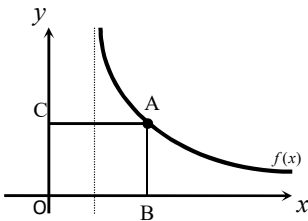
הנקודה A תסומן ב- $A\left(t, t + \frac{8}{t^2} + 3\right)$.

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן.

ב. מצא את ערכו של t בעבורו היקף המלבן יהיה מינימלי.

ג. בעבור הערך של t שמצאת בסעיף הקודם, מה יהיה שטחו של המלבן?

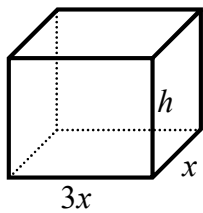
23) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+5}{x-4}$ ברביע הראשון.



מהנקודה A שעל גרף הפונקציה מורידים אנכים לצירים כך

שנוצר המלבן ABOC. מצא מה צריכים להיות שיעורי

הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מינימלי.



24) נתונה תיבה שבסיסה מלבן ונפחה הוא $V = 288$.

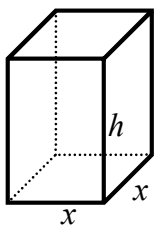
ידוע כי אורך הבסיס גדול פי 3 מרוחבו (ראה איור).

מסמנים ב- x את מקצוע המלבן הקטנה וב- h את גובה התיבה.

א. הבע את h באמצעות x .

ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x .

ג. מצא את מידות התיבה בעבורם שטח הפנים של התיבה יהיה מינימלי.



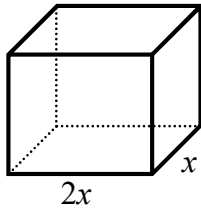
25) נפח תיבה שבסיסה ריבוע הוא 729 סמ"ר.

נסמן ב- x את אורך מקצוע הבסיס וב- h את גובה התיבה.

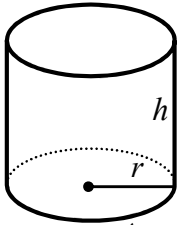
א. הבע את h באמצעות x .

ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x .

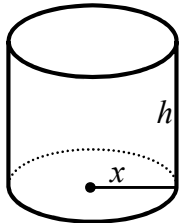
ג. מה צריך להיות x בעבורו שטח הפנים של התיבה יהיה מינימלי?



- 26) נפח קופסה בצורת תיבה הפתוחה מלמעלה הוא 36 סמ"ר. בסיס הקופסה הוא מלבן שרוחבו גדול פי 2 מאורכו.
 א. מצא את מידות בסיס הקופסה בעבור שטח הפנים שלה יהיה מינימלי.
 ב. מה יהיה גובה הקופסה במקרה זה?



- 27) נתון גליל שרדיוסו r וגובהו h . ידוע כי רדיוס הגליל וגובהו מקיימים: $r^2 \cdot h = 128$.
 א. 1. הבע באמצעות r את גובה הגליל.
 2. הבע באמצעות r את שטח הפנים של הגליל.
 ב. מצא את אורך הרדיוס בעבורו שטח הפנים של הגליל יהיה מינימלי.
 ג. מה יהיה נפח הגליל במקרה זה?



- 28) הנפח של קופסת עפרונות בצורת גליל הוא $V = 512\pi$. ידוע כי הקופסה פתוחה מלמעלה.
 רדיוס הקופסה יסומן ב- x וגובה הקופסה יסומן ב- h .
 א. הבע באמצעות x את גובה הקופסה ואת שטח הפנים שלה.
 ב. מצא את רדיוס הקופסה בעבורו שטח הפנים שלה יהיה מינימלי.
 ג. מה יהיה שטח הפנים של הקופסה במקרה זה?

תשובות סופיות:

- 1) א. $y = \frac{27}{2x^2}$. ב. $x = 3, y = 1.5$. 2) א. 16, 16. ב. 32. 3) א. $\frac{27}{x^2}$. ב. 3, 3, 3.
 4) א. 2, $\frac{1}{2}$. ב. 1. 5) א. $3x, 9x$. ב. $S = x + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9x}$. ג. 2, $\frac{2}{3}$. 6) א. 7, -7.
 7) א. $y = \frac{16}{x+1}$. ב. $x = 3, y = 4$. ג. $S = 7$. 8) א. 11 ס"מ ו-22 ס"מ. ב. $S = 162$.
 9) 12 ו-16 מטרים. 10) 14 ס"מ ו-84 ס"מ. 11) 6 ו-20 מטרים.
 12) 9 ס"מ על 18 ס"מ. 13) א. 15 ס"מ על 9 ס"מ. ב. $S = 75$.
 14) א. 2 ס"מ על 6 ס"מ. ב. $S = 48$. 15) א. $BC = \frac{6x}{x-12}$. ב. 12 ס"מ ו-24 ס"מ.
 16) 9 ס"מ על 18 ס"מ. 17) א. $A(2, 0.25)$. ב. $AB = \frac{1}{2}$. 18) $A(2, 4)$.
 19) א. $A(2, 6)$. ב. $p = 16$. 20) א. $A(0.5, 2)$. ב. $AB = 2$, הנקודה B על ציר ה- x .
 21) א. $t + \frac{16}{t^2}$. ב. $S = t^2 + \frac{16}{t}$. ג. $S = 12$.
 22) א. $P = 4t + \frac{16}{t^2} + 6$. ב. $t = 2$. ג. $S = 14$. 23) $A(10, 2.5)$.

(24) א. $h = \frac{96}{x^2}$. ב. $S = 6x^2 + \frac{768}{x}$. ג. $x = 4 \rightarrow 4, 12, 6$.

(25) א. $h = \frac{729}{x^2}$. ב. $S = 2x^2 + \frac{2916}{x}$. ג. $x = 9$. (26) א. $3, 6$. ב. $h = 2$.

(27) א. 1. $h = \frac{128}{r^2}$. 2. $S = \frac{256\pi}{r} + 2\pi r^2$. ב. $r = 4$. ג. $V = 128\pi$.

(28) א. $h = \frac{512}{x^2}$, $S = \frac{1024\pi}{x} + \pi x^2$. ב. $x = 8$. ג. $S = 192\pi$.

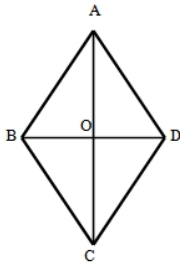
תרגילים העוסקים בפונקצית שורש :

(1) x ו- y הם שני מספרים המקיימים : $x + y = 15$.

- א. הבע את y באמצעות x .
 ב. מצא את x ו- y בעבורם סכום השורשים שלהם יהיה מקסימלי .

(2) נתונים שני מספרים חיוביים x ו- y המקיימים : $3x + y = 36$.

- א. הבע את y באמצעות x .
 ב. מצא את המספרים בעבורם סכום השורשים שלהם מקסימלי .
 ג. מה יהיה סכום השורשים שלהם במקרה זה?



(3) נתון המעוין ABCD. ידוע כי סכום אורכי האלכסונים של המעוין

הוא 80 ס"מ. הנקודה O היא נקודת פגישת האלכסונים במעוין. הקטע AO יסומן ב- x .

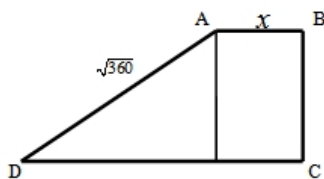
- א. הבע את אורכי האלכסונים באמצעות x .
 ב. מה צריך להיות ערכו של x בעבורו אורך צלע המעוין היא מינימלית?

(4) באיור שלפניך מתואר טרפז ABCD המחולק למלבן ומשולש

ישר זווית. גובה הטרפז BC גדול פי 3 מהבסיס הקטן AB

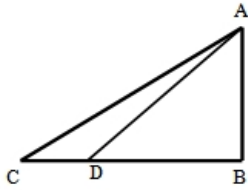
ואורך השוק הארוכה AD הוא $\sqrt{360}$.

הבסיס הקטן יסומן ב- x .



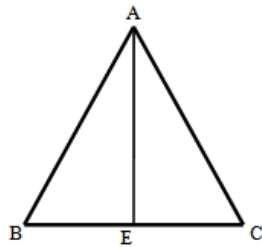
- א. הבע באמצעות x את אורך הבסיס הגדול DC .
 ב. מצא את ערכו של x בעבורו אורך הבסיס DC יהיה מקסימלי .

- 5) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית. הנקודה D נמצאת על הניצב BC כך שהקטע BD גדול פי 2 מהקטע CD. ידוע כי סכום הניצבים הוא 13 ס"מ.



- א. מצא את אורכי הניצבים בעבורם אורך הקטע AD יהיה מינימלי.
 ב. מה יהיה אורך היתר AC במקרה זה?

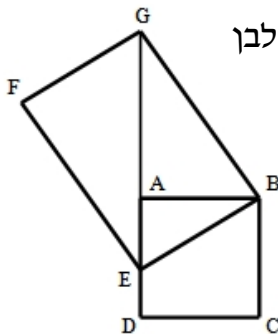
- 6) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB=AC$).



- הקטע AE הוא גובה לבסיס BC. ידוע כי סכום אורכי הבסיס והגובה הוא 20 ס"מ. הגובה AE יסומן ב- x .

- א. הבע באמצעות x את היקף המשולש ABC.
 ב. מצא את x בעבורו ההיקף שהבעת בסעיף הקודם הוא מינימלי.
 ג. בעבור הערך של x שמצאת בסעיף הקודם מה הוא השטח של המשולש?

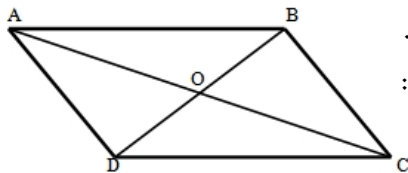
- 7) המרובע ABCD הוא ריבוע. הנקודה E נמצאת על הצלע AD של הריבוע



- והנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD. מעבירים את הקטעים BE ו-BG ומוסיפים את הנקודה F, כך שהמרובע BEFG הוא מלבן כמתואר באיור. הקטע AG גדול פי 2 מהצלע BE של המלבן וסכום הצלע BE ואלכסון המלבן GE הוא 16 ס"מ. הקטע BE יסומן ב- x .

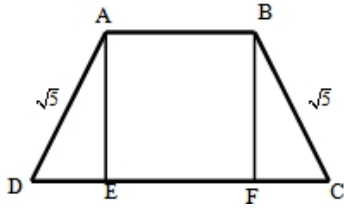
- א. הבע באמצעות x את אורך הקטע AE.
 ב. מצא את x בעבורו אורך צלע הריבוע תהיה מקסימלית (היעזר במשולש ABE).
 ג. מצא את x בעבורו אורך צלע הריבוע תהיה מינימלית.

- 8) המרובע ABCD הוא מקבילית. הנקודה O היא פגישת האלכסונים AC ו-BD.

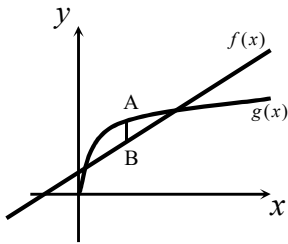


- ידוע כי האלכסון BD מאונך לצלעות BC ו-AD של המקבילית. כמו כן האלכסון AC גדול ב-27 ס"מ מהצלע BC. סמן את הצלע BC ב- x וענה על השאלות הבאות:

- א. הבע באמצעות x את אורך הקטע CO.
 ב. הבע באמצעות x את אורך הקטע BO.
 ג. מצא בעבור איזה ערך של x יהיה אורך הקטע BO מקסימלי.



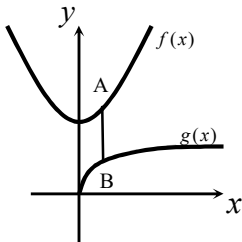
9) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים. מורידים את הגבהים לטרפז AE ו-BF כך שהמרובע ABFE הוא ריבוע. ידוע כי אורך שוק בטרפז הוא $\sqrt{5}$ ס"מ. מצא מה צריך להיות אורך הבסיס הקטן AB בעבורו אורך הבסיס DC יהיה מקסימלי.



10) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x + 3$ ו- $g(x) = 4\sqrt{x}$. מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $g(x)$ ונקודה B על גרף הפונקציה $f(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
 א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם אורך הקטע AB יהיה מקסימלי.
 ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

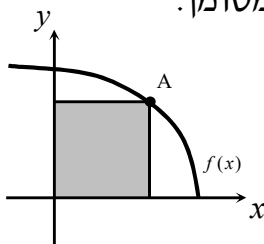
11) נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 2x^2 + 30$ ו- $g(x) = 8\sqrt{x}$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .



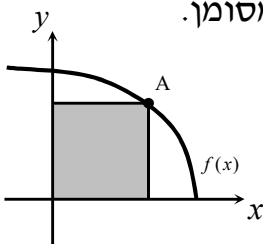
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
 א. הבע באמצעות t את:
 1. שיעורי הנקודה B.
 2. אורך הקטע AB.
 ב. מצא את t בעבורו אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

12) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{4-x}$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון. מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן המסומן.

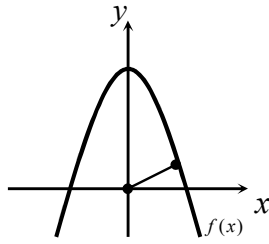


מסמנים את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
 א. הבע באמצעות t את היקף המלבן.
 ב. מצא את t בעבורו היקף המלבן יהיה מינימלי.
 ג. מה יהיה היקף המלבן במקרה זה?

13) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4\sqrt{5-x}$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון. מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן המסומן.

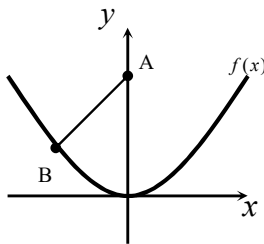


מסמנים את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
 א. הבע באמצעות t את היקף המלבן.
 ב. מצא את t בעבורו היקף המלבן יהיה מינימלי.
 ג. מה יהיה היקף המלבן במקרה זה?



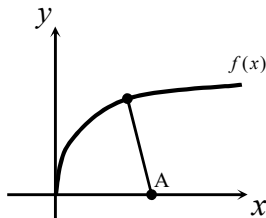
14) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 6\frac{3}{4} - x^2$.

- א. מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הראשון שמרחקה מראשית הצירים הוא מינימלי.
 ב. האם קיימת נקודה על גרף הפונקציה שמרחקה מראשית הצירים הוא מקסימלי? אם כן היכן היא ממוקמת?



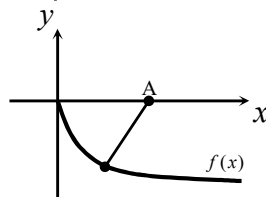
15) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

- הנקודה $A(0,6)$ נמצאת על ציר ה- y והנקודה B היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה ברביע השני. מצא את שיעורי הנקודה B בעבורם המרחק בין A ל- B יהיה מינימלי.



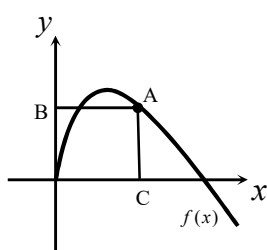
16) נתון גרף הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{x}$.

- מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הראשון שמרחקה מהנקודה $A(6,0)$ מינימלי.



17) נתון גרף הפונקציה: $f(x) = -3\sqrt{x}$.

- מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הרביעי שמרחקה מהנקודה $A(5.5,0)$ הוא מינימלי.



18) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 8\sqrt{x} - 2x$.

- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים AB ו- AC כמתואר באיור. מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם סכום הקטעים $AB + AC$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות:

(1) א. $y = 15 - x$. ב. $x = y = 7.5$.

(2) א. $y = 36 - 3x$. ב. $x = 3$, $y = 27$. ג. $4\sqrt{3} \sim 6.92$.

(3) א. $AC = 2x$, $BD = 80 - 2x$. ב. $x = 20$.

(4) א. $DC = x + 3\sqrt{40 - x^2}$. ב. $x = 2$.

(5) א. $AB = 4$, $BC = 9$. ב. $AC = \sqrt{97}$.

(6) א. $P = 2\sqrt{1.25x^2 - 10x + 100} + 20 - x$. ב. $x = 8$. ג. 48 .

(7) א. $AE = 16 - 3x$. ב. $x = 6$.

(8) א. $CO = 0.5x + 13.5$. ב. $BO = \sqrt{-\frac{3x^2}{4} + \frac{27x}{2} + 182\frac{1}{4}}$. ג. $x = 9$.

(9) $AB = 1$.

(10) א. $A(4, 8)$. ב. $AB = 1$.

(11) א. 1 . ב. $B(t, 8\sqrt{t})$. ג. $AB = 2t^2 - 8\sqrt{t} + 30$. ד. $t = 1$.

(12) א. $P = 2t + 4\sqrt{4 - t}$. ב. $t = 3$. ג. $P = 10$.

(13) א. $P = 2t + 8\sqrt{5 - t}$. ב. $t = 1$. ג. $P = 18$.

(14) א. $A(2.5, 0.5)$. ב. כן, הנקודה $(0, 6.75)$ והיא נמצאת על ציר ה- y .

(15) $B(-4, 4)$. (16) $(4, 4)$. (17) $(1, -3)$. (18) $(16, 0)$.

פרק 18 – חשבון אינטגרלי - תרגילים מסכמים:

תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית:

מצאת פונקציה קדומה:

- (1) נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{3x-1}{x}$ ונתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$:
 $f'(x) = kx^2 + 3x$ (פרמטר k). ידוע ששיפוע המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$ זהה לשיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = -4$.
א. מצא את ערך הפרמטר k .
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע שהפונקציות נחתכות בנקודה שבה $x = 1$.

- (2) נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = kx + 2$, פרמטר k .
ידוע כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את הפונקציה $g(x) = \frac{6x-1}{x}$ בנקודה שבה $y = 5$ וכי שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלהן הוא $m = 4$.
א. מצא את ערך הפרמטר k .
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

- (3) הפונקציה $f(x)$ משיקה לפונקציה: $g(x) = \frac{4x-1}{x}$.
בנקודת ההשקה העבירו משיק שמשוואתו $y = x + 2$.
הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = x$.
א. מצא את נקודת ההשקה.
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.
- (4) נתונה הנגזרת של הפונקציה: $f(x) = ax^2 - 5x + b$, פרמטרים a, b .
לפונקציה יש קיצון בנקודה שבה $x = 1$. ידוע ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{3x-16}{x}$ בנקודה שבה $x = 2$ זהה לשיפוע המשיק של גרף הפונקציה $f(x)$ באותה נקודה.
א. מצא את a ואת b .
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע שהיא עוברת בראשית הצירים.
ג. הראה שאין לפונקציה $f(x)$ עוד נקודות חיתוך עם ציר ה- x מלבד ראשית הצירים.

5) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = kx + 7\frac{3}{4}$, פרמטר k . ידוע כי

לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x) = \frac{4x+4}{x}$ יש משיק משותף בנקודה שבה $x=4$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את ערך הפרמטר k .

ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

6) נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = ax^2 + 3x$, פרמטר a .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ היא $y = -3x + 8.5$.

א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. האם יש לגרף הפונקציה עוד משיקים בעלי שיפוע זהה למשיק זה?
אם כן – מצא אותם, אם לא, נמק.

7) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = ax^3 + bx$, פרמטרים a, b .

ידוע כי משוואת המשיק לפונקציה באחת מנקודות החיתוך שלה עם ציר

ה- x היא: $y = 16x - 32$.

כמו כן מתקיים גם: $f'(1) = -4$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x^2 + kx - 3$, פרמטר k .

ידוע כי ערך הנגזרת בנקודה שבה $x=1$ הוא -4 .

כמו כן הישר $y=4$ חותך את גרף הפונקציה בנקודת החיתוך של עם ציר ה- y .

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. האם הישר $y=4$ חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודות? אם כן, מהן?

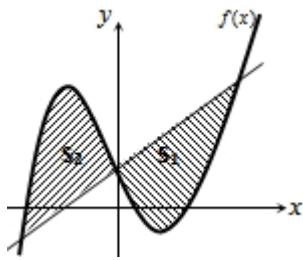
9) הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא: $f''(x) = 12x$.

לפונקציה יש נקודת קיצון על ציר ה- x שבה $x=2$.

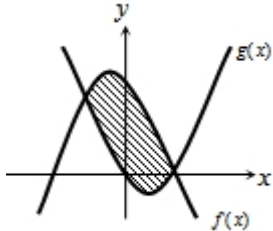
א. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון?

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

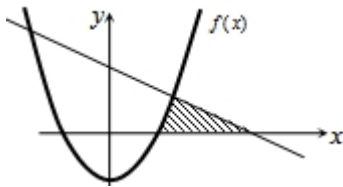
חישובי שטחים (ללא מציאת פונקציה קדומה):



- (10) לפניך הגרפים של הפונקציות:**
 $y = 13x + 1$, $f(x) = x^3 - 12x + 1$
 הוכח: $S_1 = S_2$.



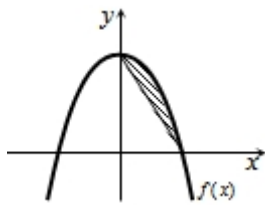
- (11) לפניך נתונות שתי הפונקציות הבאות:**
 $g(x) = 3x^2 - 12x$, $f(x) = -1.5x^2 - 3x + 36$
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.
 ב. חשב את השטח הנוצר בין שתי הפונקציות.



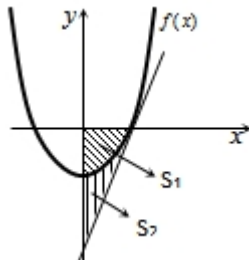
- (12) נתונות הפונקציה:** $f(x) = x^2 - 16$
 והישר: $y = -x + 14$
 א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
 ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים ברביע הראשון.

- (13) נתונה הפונקציה:** $f(x) = -x^3 + 4x$

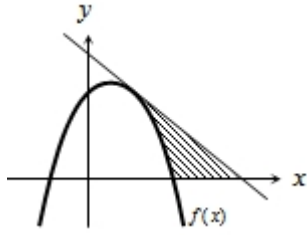
- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. הוכח שציר ה- x מחלק את השטח הכלוא בינו לבין הפונקציה לשני חלקים שווים.



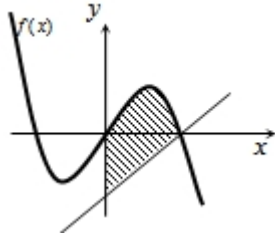
- (14) לגרף הפונקציה:** $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 8$ מעבירים ישר העובר דרך נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים ושיפועו שלילי.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ב. מצא את משוואת הישר.
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לישר.



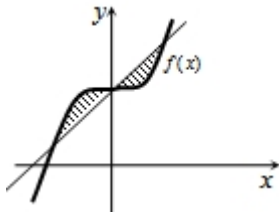
- (15) לגרף הפונקציה:** $f(x) = x^2 - 3x - 4$ מעבירים משיק בעל שיפוע חיובי דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x כמתואר באיור.
 א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. חשב את יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$ המסומנים באיור.



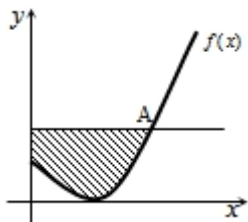
- 16** לגרף הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ מעבירים משיק בנקודה שבה: $x = 2$ (ראה איור).
 א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- x .



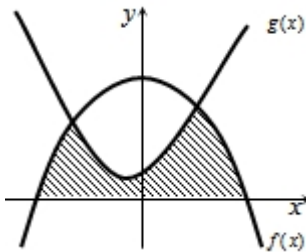
- 17** באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה: $f(x) = 4x - x^3$ והישר: $y = 4x - 8$.
 א. מצא את נקודת החיתוך בין שני הגרפים.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר וציר ה- y (המסומן).



- 18** באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה: $f(x) = x^3 + 8$ והישר: $y = x + 8$.
 א. מצא את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שתי הפונקציות.

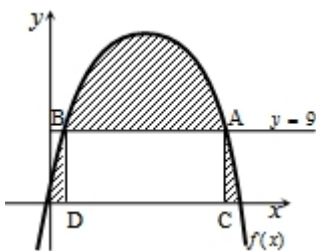


- 19** הישר $y = 4$ חותך את גרף הפונקציה: $f(x) = (x-1)^2$ בנקודה A שברביע הראשון.
 חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- y (המסומן).

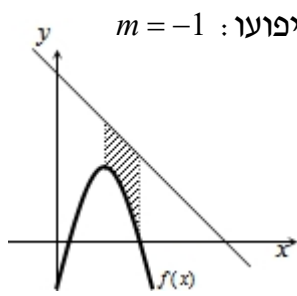


- 20** באיור שלפניך מתוארות הפונקציות:
 $f(x) = 16 - x^2$ ו- $g(x) = x^2 + 2x + 4$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים לציר ה- x .

- 21** נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 10x$. הישר: $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות A ו-B כמתואר באיור. מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x כך שנוצר מלבן ABCD.



- א. מצא את נקודות החיתוך של הישר $y = 9$ עם גרף הפונקציה $f(x)$.
 ב. מצא את שטח המלבן ABCD.
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).



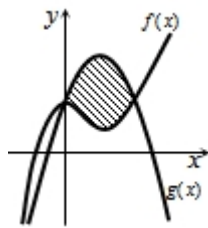
(22) נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. מעבירים ישר ששיפועו: $m = -1$

וחותך את ציר ה- x שנקודה שבה: $x = 8$. מישר זה מורידים אנך לגרף הפונקציה לנקודת המקסימום שלה ומעלים אנך מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

א. מצא את משוואת הישר.

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי הישר וגרף הפונקציה.



(23) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ ו- $g(x) = -2x^2 + bx + 2$

(b פרמטר). הפונקציות נחתכות בנקודה שבה: $x = 2$.

א. מצא את ערך הפרמטר b .

ב. מצא את שאר נקודות החיתוך של שתי הפונקציות.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות (השטח המתואר באיור).

(24) לגרף הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 4x + 21$ מעבירים משיקים בנקודות

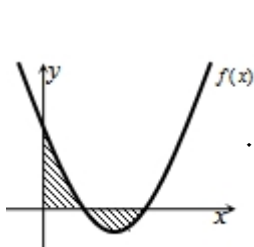
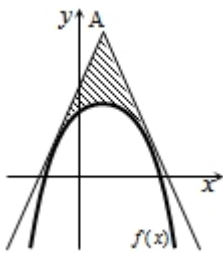
שבהן: $y = 9$ כמתואר באיור. משיקים אלו נחתכים בנקודה A .

א. כתוב את משוואות המשיקים.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A .

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיקים לגרף

הפונקציה (השטח המסומן).



(25) א. חשב את האינטגרל הבא: $\int_0^6 (x^2 - 8x + 12) dx$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- y

וציר ה- x .

ג. הסבר מדוע התוצאה שקיבלת אינה תואמת את זו של סעיף א'.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = 9 - x^2$. מהנקודה $A(1, 8)$ שעל הגרף

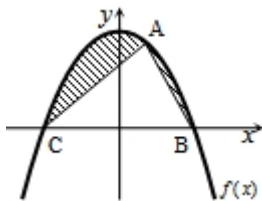
הפונקציה מעבירים ישרים לנקודות החיתוך של

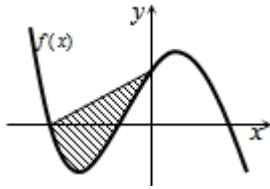
הפונקציה עם ציר ה- x ו- B ו- C כך שנוצר המשולש ABC .

א. מצא את שיעורי הנקודות B ו- C .

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה

למשולש ABC (השטח המסומן).



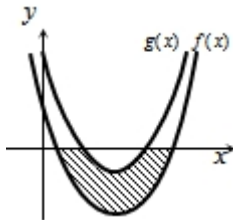


(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 18x + 40$.

ידוע כי לפונקציה יש נקודת חיתוך עם ציר ה- x שבה $x = -5$. מנקודה זו מעבירים ישר החותך את הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y (ראה איור).

א. כתוב את משוואת הישר.

ב. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לישר (השטח המסומן).



(28) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 7x + 10$

ו- $g(x) = x^2 - 7x + 12$.

א. מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות עם ציר ה- x ?

ב. חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- x .

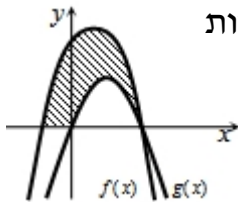
(29) באיור שלפניך מתוארות הפונקציות: $f(x) = -x^2 + 2x + k$

ו- $g(x) = 4x - x^2$. ידוע כי אחת מנקודות החיתוך של הפונקציות

עם ציר ה- x היא זהה ואינה ראשית הצירים.

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים של הפונקציות וציר ה- x .



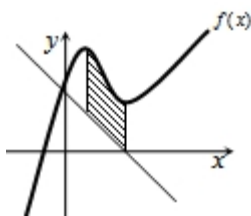
(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$.

מהנקודה $(3, 0)$ שעל ציר ה- x מעבירים ישר החותך את גרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

א. מצא את משוואת הישר.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר שמצאת בסעיף א' ואנכים לציר ה- x מנקודות הקיצון.



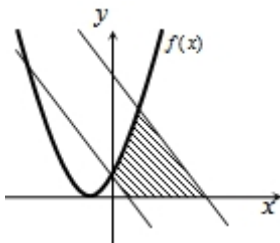
(31) באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x) = (x+1)^2$.

מנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y מעבירים ישר l_1 ששיפועו הוא $m = -2$. כמו כן מעבירים ישר נוסף l_2 המקביל לישר l_1 וחותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -5$.

א. מצא את משוואות הישרים l_1 ו- l_2 .

ב. מצא את שאר נקודות החיתוך של הישרים הנ"ל עם הפונקציה.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישרים וציר ה- x (השטח המסומן).



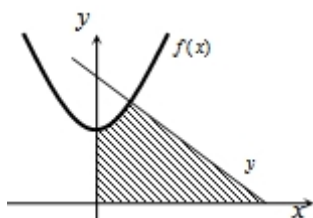
חישובי שטחים (כולל מציאת פונקציה קדומה):

(32) נתונה הנגזרת: $f'(x) = 6x$.

- ידוע שהפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 5$.
- מצא את הפונקציה $f(x)$.
 - חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לציר ה- x .

(33) לגרף הפונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא: $f'(x) = -x^2 + x + 2$ מעבירים משיק מנקודת המקסימום שלה. ידוע שמשיק זה חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודה והיא $(-2.5, 3)$.

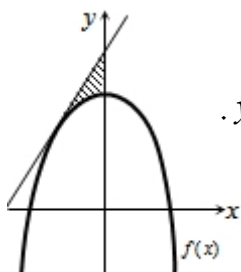
- מצא את נקודת המקסימום.
- מצא את הפונקציה.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה למשיק (עגל לשתי ספרות אחרי הנקודה).



(34) הנגזרת של פרבולה מרחפת $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x$.

מהנקודה $(2, 10)$ שעל גרף הפרבולה מעבירים ישר y המאונך למשיק שם (נורמל) (ראה איור).

- מצא את משוואת הפרבולה.
- מצא את משוואת הישר y .
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפרבולה, הישר והצירים.



(35) נתונה הנגזרת: $f'(x) = -2x + 3$.

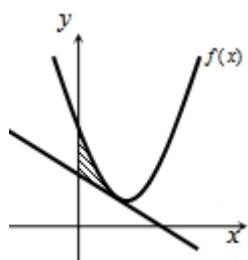
ידוע שגרף הפונקציה חותך את ציר ה- y בנקודה שבה: $y = 4$.

- מצא את הפונקציה $f(x)$.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לצירים.

(36) הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא: $f''(x) = 4$.

לפונקציה יש נקודת מינימום $(1, -8)$.

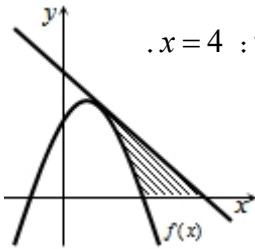
- מצא את הפונקציה $f(x)$.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לציר ה- x .



(37) משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 2$ היא: $y = -x + 3$.

נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = x - 3$.

- מצא את הפונקציה $f(x)$.
- חשב את השטח המוגבל בין המשיק לגרף הפונקציה (ראה איור).



(38) הישר $y = -x + 16$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 4$.

נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = -x + 3$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

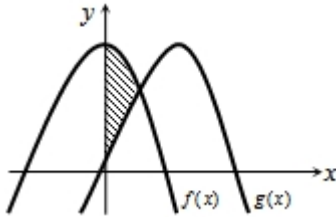
ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (ראה איור).

(39) הנגזרות של הגרפים $f(x)$ ו- $g(x)$ הן: $f'(x) = -2x$, $g'(x) = 10 - 2x$.

הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה $(2.5, 18.75)$.

א. מצא את הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

ב. היעזר באיור וחשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- y .

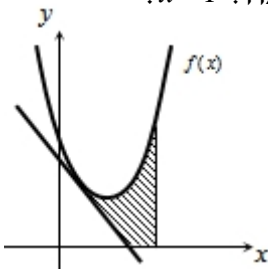


(40) הישר $y = -2x + 5$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 1$.

נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = 2x - 4$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר: $x = 3$. (ראה איור)



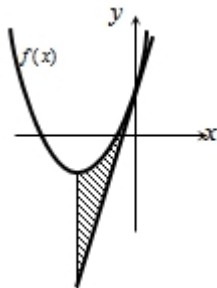
(41) הנגזרת של הפרבולה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x + 6$.

ידוע שהפרבולה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 5$.

מנקודה זו מעבירים משיק לגרף הפרבולה (ראה איור).

א. מצא את $f(x)$.

ב. חשב את השטח מוגבל בין גרף הפרבולה, המשיק וישר היוצא מנקודת הקיצון של הפרבולה (ראה איור).



תשובות סופיות:

1. א. $k=1$. ב. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1.5x^2 + \frac{1}{6}$. א. $k=2$. ב. $f(x) = x^2 + 2x + 2$.

3. א. $(1,3)$. ב. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}$. א. $a=3, b=2$. ב. $f(x) = x^3 - 2.5x^2 + 2x$.

5. א. $y = -0.25x + 6$. ב. $k = -2$. ג. $f(x) = -x^2 + 7\frac{3}{4}x - 10$.

6. א. $a = -6$. ב. $f(x) = -2x^3 + 1.5x^2 + 6$. ג. $y = -3x + 5\frac{1}{8}$.

7. א. $a = 4, b = -8$. ב. $f(x) = x^4 - 4x^2$.

8. א. $k = -4$. ב. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$. ג. $(-1,4)$, $(3,4)$.

9. א. $k = -4$. ב. $f(x) = 2x^3 - 24x + 32$. א. $(4,0)$, $(-2,36)$. ב. 162 יח"ש.

12. א. $(-6,20)$, $(5,9)$. ב. $S = 44\frac{5}{6}$. א. $(-2,0)$, $(0,0)$, $(2,0)$.

14. א. $(0,8)$, $(4,0)$, $(-4,0)$. ב. $y = -2x + 8$. ג. $S = 5\frac{1}{3}$.

15. א. $y = 5x - 20$. ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{7}{8}$.

16. א. $y = -2x + 7$. ב. $S = \frac{7}{12}$. א. $(2,0)$. ב. 12 יח"ש.

18. א. $(-1,7)$, $(0,8)$, $(1,9)$. ב. $S = \frac{1}{2}$. א. 9 יח"ש.

20. א. $(-3,7)$, $(2,12)$. ב. $S = 43\frac{2}{3}$.

21. א. $(1,9)$, $(9,9)$. ב. $S_{ABCD} = 72$. ג. $S = 94\frac{2}{3}$.

22. א. $y = -x + 8$. ב. $Max(3,4)$. ג. $S = 2\frac{2}{3}$.

23. א. $b = 4$. ב. $(-2,-14)$, $(0,2)$. ג. $S = 4$.

24. א. $y = -8x + 57$, $y = 8x + 25$. ב. $A(2,41)$. ג. $S = 42\frac{2}{3}$.

25. א. 0 . ב. $S = 21\frac{1}{3}$. ג. האינטגרל של סעיף א' מכיל ערכים חיוביים ושלייליים יחדיו.

פעולת האינטגרל מחסרת בין השניים ומכיוון שהגדלים החיוביים והשלייליים שווים בערך מוחלט (וזאת ניתן לראות לפי החישוב של סעיף ב') התקבל הסכום 0.

26. א. $C(-3,0)$, $B(3,0)$. ב. $S = 12$. א. $y = 8x + 40$. ב. $S = 93\frac{3}{4}$.

28. א. $(2,0)$, $(3,0)$, $(4,0)$, $(5,0)$. ב. $S = 4\frac{1}{3}$. א. $k = 8$. ב. $S = 25\frac{1}{3}$.

$$.S = 8 \quad \text{ג.} \quad \text{Max}(1,7) , \text{Min}(3,3) \quad \text{ב.} \quad y = 3 - x \quad \text{א.} \quad (30)$$

$$.S = 6\frac{1}{12} \quad \text{ג.} \quad (1,4) , (-4,9) \quad \text{ב.} \quad y_2 = -2x + 6 , y_1 = -2x + 1 \quad \text{א.} \quad (31)$$

$$.S = 500 \quad \text{ב.} \quad f(x) = 3x^2 - 75 \quad \text{א.} \quad (32)$$

(33) א. $(2,3)$. משיק בנקודת המקסימום מקביל לציר ה- x ולכן משוואתו תהיה מהסוג $y = k$. מאחר שהנקודה הנוספת היא $(-2.5,3)$ ניתן להבין שמשוואת

המשיק היא $y = 3$ ולכן נקודת המקסימום תהיה $(2,3)$.

$$.S = 11\frac{25}{64} \approx 11.391 \quad \text{ג.} \quad f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{3} \quad \text{ב.}$$

$$.S = 214\frac{2}{3} \quad \text{ג.} \quad 4y + x = 42 \quad \text{ב.} \quad f(x) = x^2 + 6 \quad \text{א.} \quad (34)$$

$$.S = 20\frac{5}{6} \quad \text{ב.} \quad f(x) = -x^2 + 3x + 4 \quad \text{א.} \quad (35)$$

$$.S = 21\frac{1}{3} \quad \text{ב.} \quad f(x) = 2x^2 - 4x - 6 \quad \text{א.} \quad (36)$$

$$.S = 1\frac{1}{3} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \quad \text{א.} \quad (37)$$

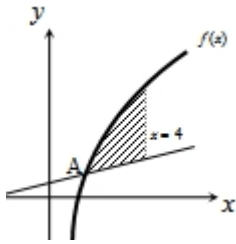
$$.S = 42\frac{2}{3} \quad \text{ב.} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 8 \quad \text{א.} \quad (38)$$

$$.S = 31\frac{1}{4} \quad \text{ב.} \quad f(x) = 25 - x^2 , g(x) = 10x - x^2 \quad \text{א.} \quad (39)$$

$$.S = 2\frac{5}{12} \quad \text{ב.} \quad f(x) = x^2 - 4x + 6 \quad \text{א.} \quad (40)$$

$$.S = 9 \quad \text{ב.} \quad f(x) = x^2 + 6x + 5 \quad \text{א.} \quad (41)$$

תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית:

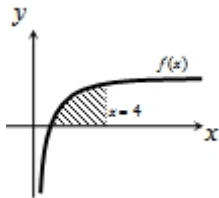


(1) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{12}{x^4} + 3$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הנמצאת ברביע הראשון היא: $y = 15x - 16$.
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
מעבירים ישר $y = 2.75x$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A הנמצאת ברביע הראשון.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לישרים: $y = 2.75x$ ו- $x = 4$.



(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2 - \frac{16}{x^3}$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

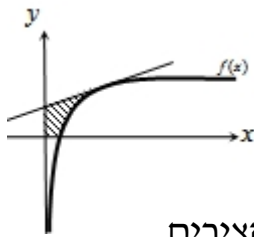
ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x

והישר: $x = 4$.

(3) א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{27}{x^2} + 3x + 1$.

בנקודה שבה: $x = 1$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק והישר: $x = 4$.



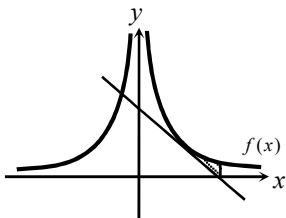
(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 8 - \frac{a}{x^3}$ בתחום: $x > 0$, (a פרמטר).

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

שבה: $x = 1$ היא: $y = 3x + 4$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק והצירים.



(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a + x^2}{x^2}$, (a פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x = a$ הוא: $-\frac{2}{9}$.

א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. כתב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = a$.

ג. היעזר בסרטוט שבצד וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק

ואנך לציר ה- x מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

6 הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 4 + \frac{6}{x^4}$. ידוע כי משוואת המשיק

לגרף הפונקציה בנקודה הנמצאת ברביע הראשון היא: $y = 10x - 6$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

מעבירים את הפונקציה: $g(x) = -64x^2 + 4x + 2$. הגרפים נחתכים בנקודה A.

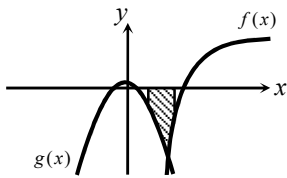
ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

ג. הוכח כי גרף הפונקציה $f(x)$ שלילי עבור $x = 0.7$

וכי גרף הפונקציה $g(x)$ שלילי עבור: $x = 0.25$.

ד. היעזר בסקיצה שבצד וחשב את השטח הכלוא בין

שני הגרפים, ציר ה- x והישרים: $x = 0.7$ ו- $x = 0.25$.



7 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ב. כתוב את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x

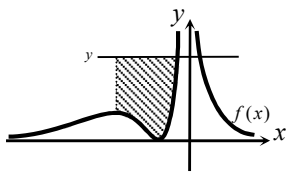
היוצא מנקודת המקסימום של הפונקציה.

8 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^4}$.

א. הוכח כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודת הקיצון שלו.

ב. כתוב את נקודות הקיצון של הפונקציה.

מעבירים את הישר: $y = \frac{4}{81}$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A ברביע השני.



ג. מצא את שיעורי הנקודה A.

ד. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר

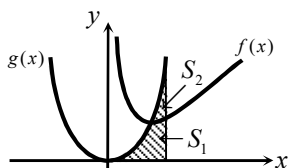
ואנך לישר מנקודת המקסימום של הפונקציה.

9 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{4}{x^2} + x + 1$.

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

מעבירים פרבולה: $g(x) = Ax^2$ (A פרמטר) דרך נקודת הקיצון של הפונקציה.

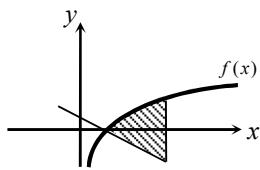
ב. מצא את ערך הפרמטר A.



- ג. מעבירים אנך לציר ה- x : $x = 3$, כך שנוצרים השטחים :
 S_1 – שבין הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ וציר ה- x .
 S_2 – שבין הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ והאנך.
 חשב את יחס השטחים : $\frac{S_2}{S_1}$.

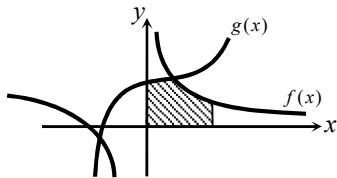
10 נתונה הפונקציה : $f(x) = k - \frac{80}{x^4}$, (k פרמטר).

גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בשתי נקודות שהמרחק ביניהן הוא 4 יחידות.



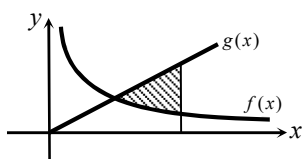
- א. מצא את k .
 ב. כתוב את משוואת הנורמל לפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x ברביע הראשון.
 ג. היעזר באיור שלפניך וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הנורמל והישר : $x = 4$.

11 נתונות הפונקציות הבאות : $f(x) = \frac{162}{3x^3} + 2$, $g(x) = 6x^3 + 50$.



- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.
 ב. היעזר באיור שלפניך וחשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות, הצירים והאנך : $x = 2$.

12 נתונות הפונקציות הבאות : $f(x) = \frac{a}{x^3}$, $g(x) = 2x$, (a פרמטר).



- ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה $x = -2$.
 א. מצא את ערך הפרמטר a .
 ב. האם הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות נוספות? אם כן מצא אותן.
 ג. מעבירים אנך $x = k$ (חיובי) החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח S .
 היעזר באיור שלפניך ומצא את k עבורו מתקיים : $S = 2\frac{7}{9}$.

13) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = a - \frac{3}{x^3}$, (פרמטר a). מעבירים לגרף הפונקציה

משיק מנקודת החיתוך שלו עם ציר ה- x . מסמנים נקודה A על המשיק ונקודה B על גרף הפונקציה ומעבירים את הישר AB.

א. מצא את ערך הפרמטר a אם ידוע כי לפונקציה $f(x)$

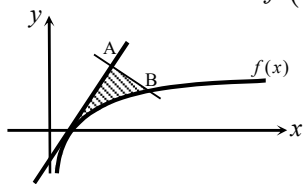
יש אסימפטוטה אופקית: $y = 3$.

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. ידוע כי: $x_B = 3, x_A = 2$.

היעזר באיור שלפניך וחשב את השטח הכלוא

בין גרף הפונקציה, המשיק והישר AB.



14) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{4x^3 + kx + 1}{x^3}$, (פרמטר k)

ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון שבה: $x = -0.5$.

א. מצא את ערך הפרמטר k וקבע את סוג הקיצון.

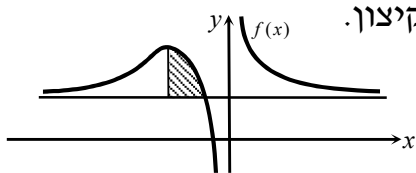
ב. הוכח כי לגרף הפונקציה אין נקודות קיצון נוספות.

ג. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

ד. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה והאסימפטוטה האופקית שלו.

מעבירים אנך לאסימפטוטה דרך נקודת הקיצון.

חשב את השטח הנוצר באופן זה.



תשובות סופיות:

(1) א. $f(x) = -\frac{4}{x^3} + 3x$ ב. $A(2, 5.5)$ ג. $S = 1.125$

(2) א. $(2, 0)$ ב. $S = 2.5$

(3) א. $y = -51x + 82$ ב. $S = 182.25$

(4) א. $a = 1$, $f(x) = 8 - \frac{1}{x^3}$ ב. $S = 3$

(5) א. $a = 3$ ב. $y = -\frac{2}{9}x + 2$ ג. $S = 2\frac{2}{3}$

(6) א. $y = 4x - \frac{2}{x^3} + 2$ ב. $A(0.5, -12)$ ד. $S = 2.537$

(7) א. $\min(1, 0)$, $\max\left(2, \frac{1}{16}\right)$ ב. $x = 0$, $y = 0$ ג. סקיצה למטה. ד. $S = \frac{1}{24}$

(8) א. $\min(-2, 0)$, $\max\left(-4, \frac{1}{64}\right)$ ג. $\left(-1.5, \frac{4}{81}\right)$ ד. $S = \frac{125}{1296} = 0.0964$ ב.

(9) א. $\min(2, 4)$ ב. $A = 1$ ג. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{13}{41}$

(10) א. $k = 5$ ב. $y = -0.1x + 0.2$ ג. $S = \frac{437}{60} = 7.283$

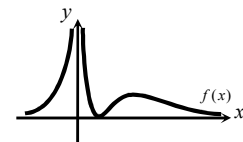
(11) א. $(-2, -4)$, $(1, 56)$ ב. $S = 73.75$

(12) א. $a = 32$ ב. כן - $(2, 4)$ ג. $k = 3$

(13) א. $a = 3$ ב. $y = 9x - 9$ ג. $S = 5\frac{7}{9}$

(14) א. $k = 3$ ג. $y = 4$ ד. $S = 0.5$

סקיצה לשאלה 7:



תרגילים העוסקים בפונקציות שורש:

(1) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{k}{2\sqrt{x}} - 2x$, פרמטר k .

- ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 4$ הוא: $m = -7.75$.
- מצא את ערך הפרמטר k .
 - מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי המשיק לגרף הפונקציה משיק לה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

(2) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = kx - \frac{1}{\sqrt{x}}$, פרמטר k .

- נתונה הפונקציה: $g(x) = 2x^2 - 9x - 4$. ידוע כי המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה: $x = 3$ מקביל למשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 1$.
- מצא את ערך הפרמטר k .
 - מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי היא חותכת את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה: $y = 77$.

(3) א. מצא על גרף הפונקציה: $g(x) = 2\sqrt{x}$ נקודה שבה שיעור ה- x שווה לשיעור ה- y .

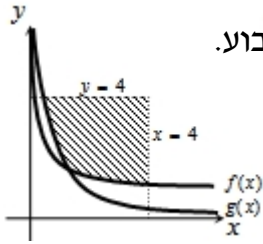
ב. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$.

- ידוע כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את הפונקציה $g(x)$ בנקודה שמצאת בסעיף הקודם. מצא את הפונקציה $f(x)$.
- ג. האם הגרפים של הפונקציה $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים בנקודות נוספות? אם כן, מצא אותן.

(4) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + k$, פרמטר k .

- ידוע כי גרף הפונקציה עולה בתחום: $0 < x < 4$ ויורד בתחום: $x > 4$.
- מצא את ערך הפרמטר k .
 - מצא את הפונקציה אם ידוע כי ערכה המרבי הוא: 8.
 - מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

5) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = \frac{1}{x^2}$.



- א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
 ב. מעבירים את הישרים: $x = 4$ ו- $y = 4$ כך שנוצר ריבוע.

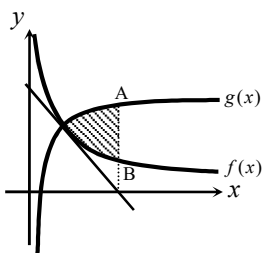
1. חשב את השטח הכלוא בין הישרים הנ"ל והגרפים של שתי הפונקציות.
 2. חשב את היחס בין השטח שמצאת בסעיף הקודם לשטח הריבוע.

6) נתונות הפונקציות הבאות: $g(x) = kx$; $f(x) = \frac{64k}{\sqrt{x}}$ (k פרמטר).

- א. הבע באמצעות k את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציות.
 ב. ידוע כי השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות, ציר ה- x והאנך: $x = 25$ הוא 1024. מצא את k .

7) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $g(x) = \frac{9}{16} - \frac{1}{x^2}$.

ברביע הראשון. מנקודת החיתוך של הגרפים מעבירים משיק לפונקציה $f(x)$.

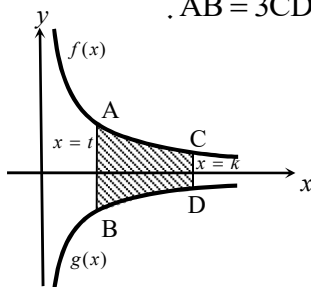


- א. הראה כי הגרפים נחתכים בנקודה שבה: $x = 4$.
 ב. כתוב את משוואת המשיק.

- ג. מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x מעלים אנך החותך את הגרפים של הפונקציות בנקודות A ו-B. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישר AB.

8) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$; $g(x) = -\frac{5}{\sqrt{x}}$.

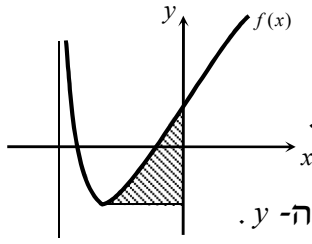
מעבירים שני ישרים: $x = k$ ו- $x = t$ ($k > t$) אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD. ידוע כי: $AB = 3CD$.



- א. הראה כי: $k = 9t$.

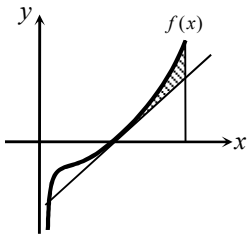
- ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים: $x = t$ ו- $x = k$ הוא: $S = 80$. מצא את k .

9 נתונה הפונקציה: $f(x) = 16x + \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$

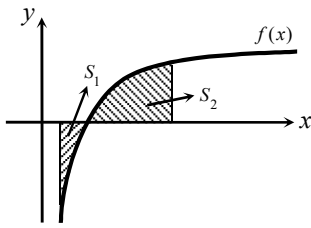


- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
 ג. מעבירים אנך לציר ה- y ומנקודת הקיצון. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך וציר ה- y .

10 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 - \frac{32}{\sqrt{x}}$



- א. הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
 ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק והאנך $x = 9$ כמתואר באיור שלפניך.



11 א. מצא עבור איזה ערך של a יתקיים:

$$\int_3^a \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2x-5}}\right) dx = 0$$

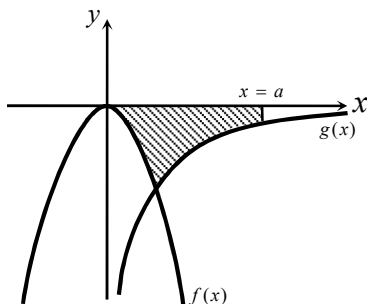
באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2x-5}}$

מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x = 3$ ו- $x = 7$ כך שנוצרים השטחים: S_1 ו- S_2 .

- ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. 1. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנך $x = 3$, (S_1) .

2. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח S_2 . נמק את טענתך.

12 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = -6x^2$ ו- $g(x) = \frac{-6}{\sqrt{x}}$



- ברביע הראשון. מעבירים ישר $x = a$, $(a$ פרמטר) החותך את גרף הפונקציה $g(x)$ ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר (השטח המסומן). ידוע כי שטח זה שווה ל- $S = 14$. מצא את ערך הפרמטר a .

13 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x\sqrt{x} + k}{\sqrt{x}}$, k פרמטר.

עבור: $x = 1$ מתקיים כי: $f^2(1) = 676$.

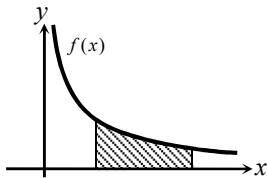
- מצא את ערך הפרמטר k אם ידוע כי ידוע כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- חשב את השטח כלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנך: $x = 36$.

14 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{k}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2x}}$, k פרמטר.

א. הוכח כי גרף הפונקציה לא חותך את הצירים לכל ערך של k .

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.

מעבירים את האנכים: $x = 4$, $x = 8$ כך שנוצר השטח המסומן. ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנכים וציר ה- x שווה ל: $42\sqrt{2} - 44$. מצא את k .



15 הנגזרת של פונקציה: $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{6x-5}}$. ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- x בנקודה הנמצאת על הישר: $18y - 12x = -10$.

א. מצא את הפונקציה: $f(x)$.

מגדירים פונקציה חדשה: $g(x) = (f(x))^2 + f'(x)$. ענה על השאלות הבאות:

- כתוב את הפונקציה $g(x)$ בצורה מפורשת.
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה- x והאנכים: $x = 1$ ו- $x = 5$.

תשובות סופיות – פונקציה אי-רציונאלית:

(1) א. $k = 1$ ב. $f(x) = \sqrt{x} - x^2 + 14$

(2) א. $k = 4$ ב. $f(x) = 2x^2 - 2\sqrt{x} - 79$

(3) א. $(4,4)$ ב. $f(x) = x - 3\sqrt{x} + 6$ ג. כן - $(9,6)$

(4) א. $k = -2$ ב. $f(x) = 8\sqrt{x} - 2x$ ג. $(0,0)$, $(16,0)$

(5) א. $(1,1)$ ב. 1. $S = 11$ 2. $\frac{11}{16}$

(6) א. $(16,16k)$ ב. $k = 4$ ג. $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$ ד. $S = 8\frac{1}{3} - 4\sqrt{3} \approx 1.405$

(8) א. $k = 36$ ב. $x > -0.5$ ג. $\min(-0.375, -2)$ ד. $S = \frac{5}{8}$

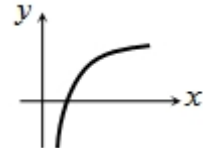
(10) א. $y = 10x - 40$ ב. $S = 32\frac{2}{3}$

(11) א. $a = 7$ ב. $(4.5, 0)$ ג. 1. $S_1 = \frac{1}{2}$ 2. $S_2 = \frac{1}{2}$ ד. $a = 4$ (12)

(13) א. $k = -27$ ב. $(9, 0)$ ג. סקיצה בצד. ד. $S = 445.5$

(14) א. $k = 10$ ב. $f(x) = \sqrt{6x-5}$ ג. $S = 56$ ד. $g(x) = 6x - 5 + \frac{3}{\sqrt{6x-5}}$

סקיצה לשאלה 13:



נוסחאון מתמטיקה

5 יחידות לימוד

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

אלגברה:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{השורשים:}$$

$$(a \neq 0) ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{משוואה ריבועית:}$$

סדרה הנדסית	סדרה חשבונית	<u>סדרות:</u>
$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$	כלל נסיגה:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)d$	איבר n-י:
$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ $S = \frac{a_1}{1 - q} \quad \text{סכום אינסופי:}$	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	סכום:

גדילה ודעיכה:

$$M_t = M_0 \cdot q^t \quad \text{שעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q.}$$

$$\log_a(a^b) = b \quad ; \quad a^{\log_a b} = b \quad ; \quad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \quad : (a, b, c > 0 ; a, b \neq 1) \quad \text{לוגריתמים:}$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad ; \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \quad ; \quad \log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$$

הסתברות:

נוסחת ברנולי – ההסתברות ל-k הצלחות מתוך n ניסיונות בהתפלגות בינומית כאשר ההסתברות

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{כאשר} \quad P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{להצלחה היא p}$$

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{נוסחת בייס:} \quad ; \quad P(A \cap B) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)} \quad \text{הסתברות מותנית:}$$

טריגונומטרייה:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

משפט הסינוסים: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ (R – רדיוס המעגל החוסם)

משפט הקוסינוסים: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$ (γ היא הזווית הכלואה בין a ל-b)

שטח גזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$

אורך קשת של α רדיאנים: $\ell = \alpha R$

שטח משולש: $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל-c)

גופים במרחב:

פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B \cdot h}{3}$ (B – שטח הבסיס, h – גובה הגוף)

חרוט: שטח מעטפת: $M = \pi R \ell$ (R – רדיוס העיגול, ℓ – הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי:

נגזרות:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad (x^t)' = tx^{t-1} \quad (t \text{ ממשי})$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

נגזרת של מכפלת פונקציות: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{נגזרת של מנת פונקציות:}$$

$$[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x) \quad \text{נגזרת של פונקציה מורכבת:}$$

כאשר $u'(x)$ היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית)

ו- $f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית).

$$\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + C \quad (t \neq -1, \text{ ממשי } t) \quad \text{אינטגרלים:}$$

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ אז:

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C \quad \int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + C$$

$$[R(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = R^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad \text{משפט דה מואבר:} \quad \text{מספרים מרוכבים:}$$

$$z_k = \sqrt[n]{R} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right] \quad \text{פתרונות המשוואה } z^n = R(\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ הם:}$$

$$k=0, 1, 2, \dots, n-1$$

וקטורים:

$$|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad \text{אורך של וקטור:}$$

$$\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) + s(\underline{c} - \underline{a}) \quad \text{מישור דרך קצוות הוקטורים } \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}:$$

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| \cos \alpha \quad \text{מכפלה סקלרית:}$$

$$\frac{|\underline{v} \cdot \underline{p} + e|}{|\underline{v}|} \quad \text{מרחק בין נקודה } \underline{p} \text{ למישור } \underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0:$$

$$\sin \beta = \frac{|\underline{v} \cdot \underline{b}|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{b}|} \quad \text{מציאת זווית בין הישר } \underline{a} + t\underline{b} \text{ למישור } \underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0:$$

$$\cos \alpha = \frac{|\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2|}{|\underline{v}_1| \cdot |\underline{v}_2|} \quad \text{מציאת זווית בין המישורים } \underline{v}_1 \cdot \underline{x} + e_1 = 0, \underline{v}_2 \cdot \underline{x} + e_2 = 0:$$

גאומטרייה אנליטית:

קו ישר

שיפוע, m , של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) , (x_2, y_2) :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

משוואת ישר $y = mx + b$ עם שיפוע m , העובר בנקודה (x_1, y_1) :

הנקודה C המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

ביחס $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{\ell}$ היא: $\left(\frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell} \right)$

שני ישרים, בעלי שיפועים m_1, m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם $m_1 \cdot m_2 = -1$

מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

מעגל

משוואת המשיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ בנקודה (x_0, y_0) על המעגל היא:

$$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$$

פרבולה

משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה (x_0, y_0) על הפרבולה היא: $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$

נוסחאון מורחב במתמטיקה

5 יחידות לימוד

$$S_n = \frac{n \cdot [2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

אלגברה: סכום סדרה חשבונית:

גאומטרייה אנליטית:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

המרחק d בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ משוואת אליפסה}$$

חזקות: ($b \neq 0$ $a \neq 0$)

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad ; \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad ; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad ; \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} \quad (y \neq 0 \quad a \neq 0)$$

טריגונומטריה:

$$P = 2\pi R \quad S = \pi R^2 \quad \text{שטח עיגול והיקפו:}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \text{זהויות בסיסיות:}$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

גופים במרחב:

$$(B - \text{שטח הבסיס, } h - \text{גובה הגוף}) \quad V = B \cdot h \quad \text{נפח: } \underline{\text{מנסרה ישרה וגליל ישר:}}$$

$$(P - \text{היקף הבסיס, } h - \text{גובה הגוף}) \quad M = P \cdot h \quad \text{שטח מעטפת:}$$

קטורים: מרחק בין נקודה $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ למישור $v_1x + v_2y + v_3z + e = 0$:

$$d = \left| \frac{v_1p_1 + v_2p_2 + v_3p_3 + e}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \right|$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

נגזרות:

$$(\sqrt{mx+b})' = \frac{m}{2\sqrt{mx+b}}$$

$$\left(\frac{1}{mx+b} \right)' = \frac{-1 \cdot m}{(mx+b)^2}$$

אינטגרלים:

$$\int (mx+b)^t dx = \frac{1}{t+1} \cdot \frac{(mx+b)^{t+1}}{m} + C \quad (t \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{(mx+b)^2} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{-1}{(mx+b)} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{mx+b}} dx = \frac{2}{m} \cdot \sqrt{mx+b} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos(mx+b) dx = \frac{1}{m} \sin(mx+b) + C$$

$$\int \sin(mx+b) dx = -\frac{1}{m} \cos(mx+b) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^{mx+b} dx = \frac{1}{m} e^{mx+b} + C$$

$$\int a^{mx+b} dx = \frac{a^{mx+b}}{m \cdot \ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + C \quad t \neq -1$$

$$\int \frac{1}{mx+b} dx = \frac{1}{m} \ln|mx+b| + C$$