שאלון 571 לתלמידי קידום

פרק 37

פתרון בוידאו של בחינות שנת 2025

מועד חורף 1
קיץ מועד א 9
קיץ מועד ב 18

בגרות חורף 2025:

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתון כי השוויון $8+24+48+\ldots+n(n+2)=\frac{n(n+a)(n+4)}{6}$ מתקיים בעבור $n=2$.

a הוא פרמטר.

מצאו את הערך של a.

בעבור הערך של a שמצאתם, הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי זוגי.

ב. כל המועמדים ללימודים באוניברסיטה נבחנים בשני מבחנים.

נמצא כי מספר המועמדים שהצליחו רק במבחן הראשון קטן פי 4 ממספר המועמדים שהצליחו בשני המבחנים. $\frac{8}{9}$ מן המועמדים שהצליחו במבחן השני, הצליחו גם במבחן הראשון.

נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי מועמד שהצליח רק במבחן הראשון.

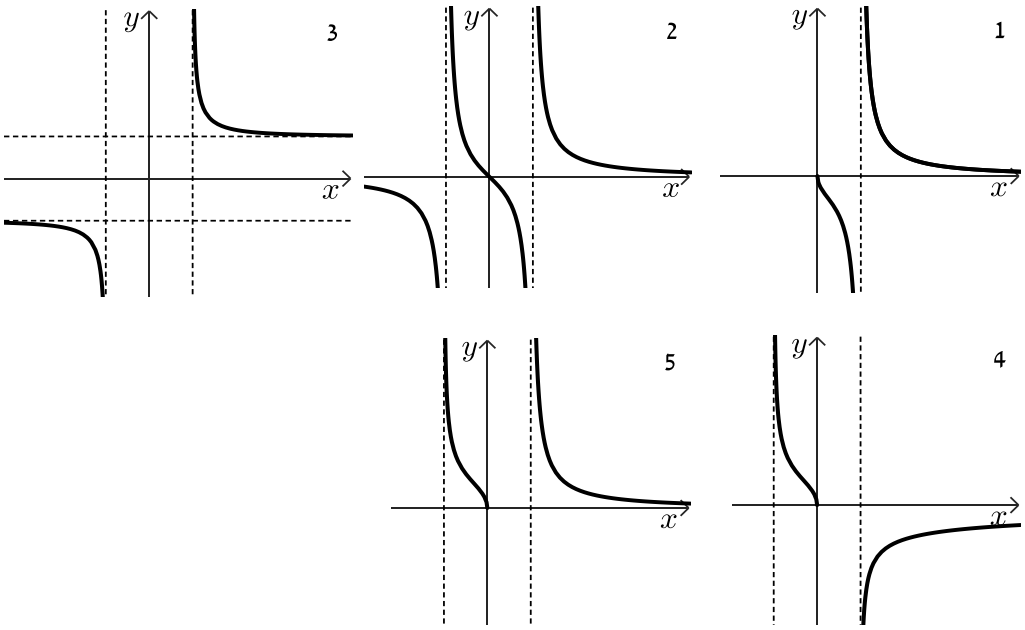
(1) הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי מועמד שהצליח לפחות במבחן אחד.

(2) ידוע שנבחר באקראי מועמד שהצליח לפחות במבחן אחד.
מה ההסתברות שהמועמד שנבחר הצליח בשני המבחנים?

ג. נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$, $h(x)=\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$.

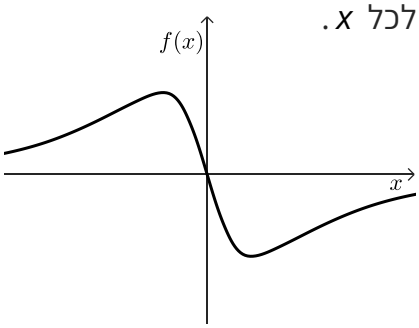
(1) מצאו את תחום ההגדרה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$.

(2) התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$, את הגרף המייצג אותה מבין הגרפים 1-5 שלפניכם. נמקו את קביעותיכם.



ד. הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$, מוגדרות לכל x.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.



נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית, ויש לה נקודת מינימום אחת בלבד ששיעוריה הם: $(-6,3)$.

לפונקציה $f(x)$ ולפונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y=0$.

(1) סרטטו סקיצה אפשרית של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f^2(x)\cdot f'(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x.

(3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ובה m איברים (m הוא מספר טבעי גדול מ-4).

נתון: כל איברי הסדרה A הם שליליים.

סכום $m-4$ האיברים האחרונים בסדרה הוא פי 16 מסכום $m-4$ האיברים הראשונים בסדרה.

א. (1) מצאו את מנת הסדרה A.

(2) האם הסדרה A עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת? נמקו את תשובתכם.

המשיכו את הסדרה A כך שנוצרה סדרה הנדסית אין-סופית.

נתונה סדרה אין סופית B שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{k^n}{a_n}$ לכל n טבעי. k הוא פרמטר שונה מ-0.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את המנה שלה באמצעות k.

נתון כי סכום הסדרה B מתכנס.

ג. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k.

נתון: מנת הסדרה B היא $\frac{1}{4}$.

סכום הסדרה B הוא 3- .

ד. מצאו את הערך של k ואת הערך של b_1.

בסדרה B מחקו כל איבר שלישי $(b_3, b_6, b_9, \ldots)$.

ה. מצאו את סכום האיברים הנותרים.

3) בכד א' יש 10 כדורים אדומים ו־ 15 כדורים צהובים, ובכד ב' יש רק כדורים אדומים.
דנה בוחרת באקראי כד ומוציאה ממנו באקראי כדור.
אם הכדור צהוב, היא מוציאה באקראי כדור שני מאותו הכד (הוצאה ללא החזרה).
אם הכדור הראשון אדום, היא מחזירה את הכדור לכד ושוב מוציאה באקראי כדור מאותו הכד.

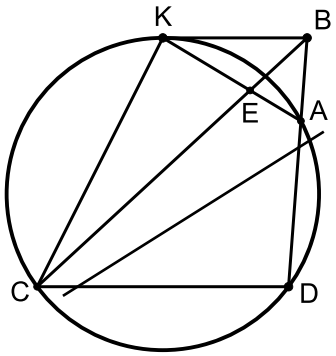
א. ידוע שדנה הוציאה שני כדורים באותו הצבע. מהי ההסתברות ששניהם צהובים?
דנה מחזירה לַכד את הכדורים שהוציאה.
יעל מבצעת את התהליך הזה:
היא בוחרת באקראי כד, מוציאה ממנו באקראי כדור אחד ומחזירה אותו לַכד.
יעל חוזרת על תהליך זה עד שהיא מוציאה כדור אדום, מחזירה אותו לַכד ומפסיקה להוציא כדורים.

ב. מצאו את ההסתברות שיעל ביצעה תהליך זה 6 פעמים בדיוק.
העבירו חלק מן הכדורים מכד ב' לכד א'.
לאחר מכן בחרו באקראי כד והוציאו ממנו באקראי כדור אחד.
נתון כי לאחר ההעברה ההסתברות שהכדור שהוציאו היה אדום היא $\frac{13}{16}$.

ג. האם ייתכן שלפני ההעברה היו בכד ב' 14 כדורים? נמקו את תשובתכם.

פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) במרובע BKCD הצלע KB מקבילה לצלע CD.
הצלע CD היא מיתר במעגל והצלע KB משיקה למעגל בנקודה K.
הצלע BD חותכת את המעגל בנקודה A.
האלכסון BC חותך את המיתר AK בנקודה E (ראו סרטוט).



א. הוכיחו כי $\Delta ABK \sim \Delta AKC$.

ב. הוכיחו כי $\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CE}$.

נתון: $BE=\frac{1}{4}CE$.

ג. מצאו את היחס $\frac{AK}{AB}$.

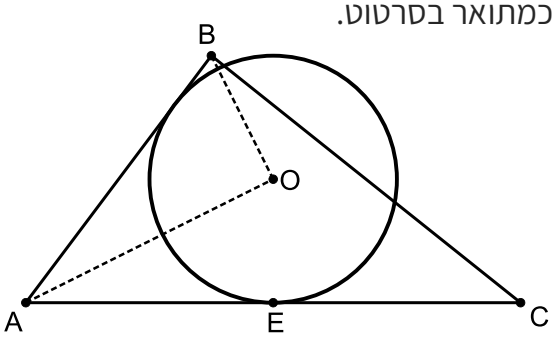
נתון: שטח המרובע ABKC הוא 30.
נסמן ב- S את שטח המשולש AEB.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש KEC.

5) נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

מן הנקודה A העבירו שני ישרים AB ו-AC המשיקים למעגל.

הנקודה E היא נקודת ההשקה של הישר AC למעגל, כמתואר בסרטוט.



נתון: $AE = CE$, $BO \perp AO$.

נסמן ב- 2β את הזווית BAC .

א. הביעו באמצעות R ו- β את האורך של AB.

נתון כי האורך של AB הוא $2.5R$,

והזווית BAC היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של β.

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש AOB.

נתון כי האורך של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 14.

ד. מצאו את הערך של R.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתון כי $f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-a^2)^3}$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$. a הוא פרמטר חיובי.

הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$ מוגדרות באותו התחום.

בסעיפים א-ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$.

ג. מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת תנאים אלה.

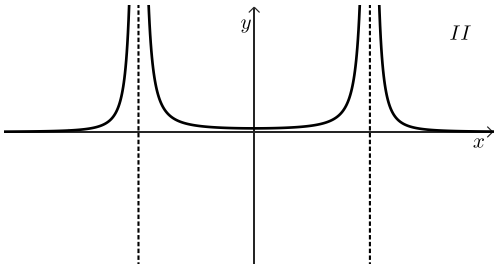
נתונות הפונקציה $g(x)=\frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}$ והפונקציה $h(x)=\frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}$.

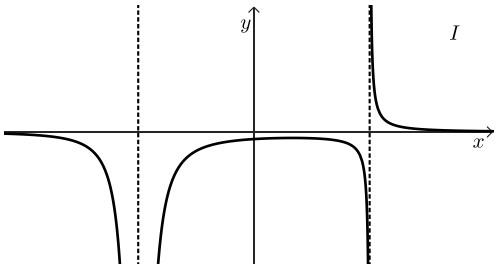
הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו-$h(x)$ מוגדרות באותו התחום.

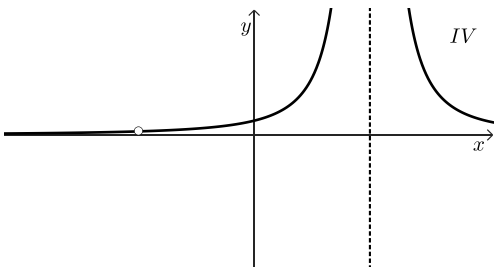
ד. התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו-$h(x)$ גרף אפשרי המייצג אותה מבין הגרפים I-IV שבסוף השאלה. נמקו את תשובותיכם.

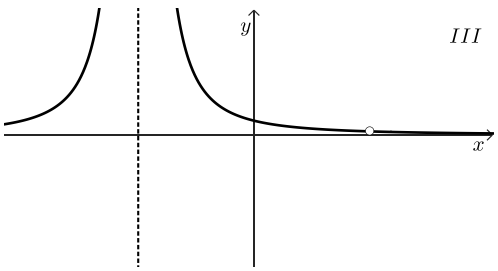
נתון כי לפונקציה $h(x-9)$ יש אסימפטוטה שמשוואתה $x=0.8a$.

ה. מצאו את הערך של a.









7) נתונה הפונקציה $f(x)=\cos x+\frac{4}{(\cos x)^2}+a$, בתחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

a הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לישר $y=4$ בשתי נקודות.

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$ וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציה $g(x)=f(x)-k$ והפונקציה $h(x)=\frac{1}{g(x)}$,

שתיהן בתחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

k הוא פרמטר, $k\ne4$, $k\ne6$.

ו. מצאו את הערך של k שבעבורו גרף הפונקציה $g(x)$ וגרף הפונקציה $h(x)$ נפגשים בכל אחת מנקודות הקיצון שלהן.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{8-x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון פנימית אחת ואין לה נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקציה $f(x)$.

הנקודה C היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם החלק החיובי של ציר ה- x .

מן הנקודה A העבירו שני אנכים:

אנך אחד לציר ה- x החותך אותו בנקודה B , ואנך נוסף לישר $x=8$ החותך אותו בנקודה D.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן ABCD הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

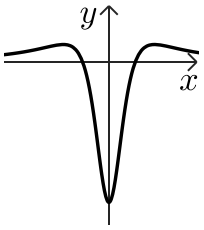
1) א. (1) $a=2$ א. (2) ראו סרטון.

ב. (1) $5.5p$ ב. (2) $\frac{8}{11}$.

ג. (1) $f(x): x<-1 , x>1 , g(x): x\ge 0 , x\ne 1 , h(x): -1<x\le 0 , x>1$.

ג. (2) $f(x)$: גרף 3, $g(x)$: גרף 1, $h(x)$: גרף 5.

ד. (1) להלן סרטוט: ד. (2) $(3,0)$, $(0,0)$, $(-3,0)$ ד. (2) 144.



2) א. (1) $q=2$ א. (2) יורדת ב. $q_B=\frac{k}{2}$ ג. $-2<k<2 , k\ne 0$.

ד. $b_1=-2.25 , k=\frac{1}{2}$ ה. $-2\frac{6}{7}$.

3) א. $\frac{35}{151}$ ב. 0.001701 ג. לא ייתכן.

4) א. שאלת הוכחה ב. שאלת הוכחה ג. $\frac{AK}{AB}=2$ ד. $S_{\Delta KEC}=24-4S$.

5) א. $AB=\frac{2R}{\sin 2\beta}$ ב. $\beta=26.565°$ ג. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AOB}}=\frac{16}{5}=3.2$ ד. $R\approx 7$.

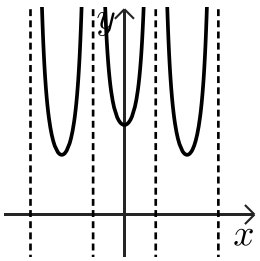
6) א. $x\ne \pm a$ ב. עלייה: $0<x<a$, $x<-a$, ירידה: $x>a$, $-a<x<0$.

ג. $f(x)=\frac{1}{\left(x^2-a^2\right)^2}$ ד. $f(x)$: גרף II, $g(x)$: גרף I, $h(x)$: גרף III ה. $a=5$.

7) א. $x\ne \pm\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ ב. זוגית ג. $a=1$.

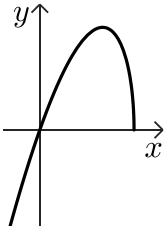
ד. $\min(\pi,4)$, $\min(0,6)$, $\min(-\pi,4)$ ה. להלן סרטוט:

ו. $k=5$.



8) א. (1) $x\le 8$ א. (2) חיובית: $0<x<8$, שלילית: $x<0$ ב. להלן סרטוט:

ג. $A(4,8)$.



בגרות קיץ 2025 מועד א':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. (1) הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots+(2n)^2=\frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$

(2) חשבו את הערך של הסכום: $4^2+6^2+8^2+\ldots+90^2$.

ב. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ $(AB\parallel CD)$.

הנקודה O היא מפגש אלכסוני הטרפז.

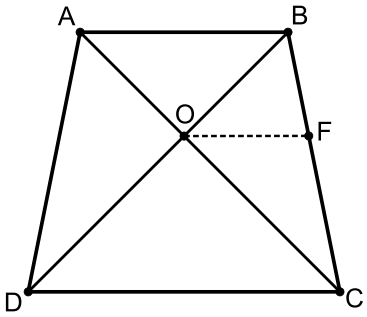
נתון: $\sphericalangle BAO=\sphericalangle CDO$.

(1) הוכיחו כי הטרפז $ABCD$ הוא שווה שוקיים.

הנקודה F נמצאת על הצלע BC כך שהקטע OF מקביל לבסיסי הטרפז.

נתון כי אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה, $DO=12$, $BO=9$.

(2) מצאו את אורך הקטע OF.



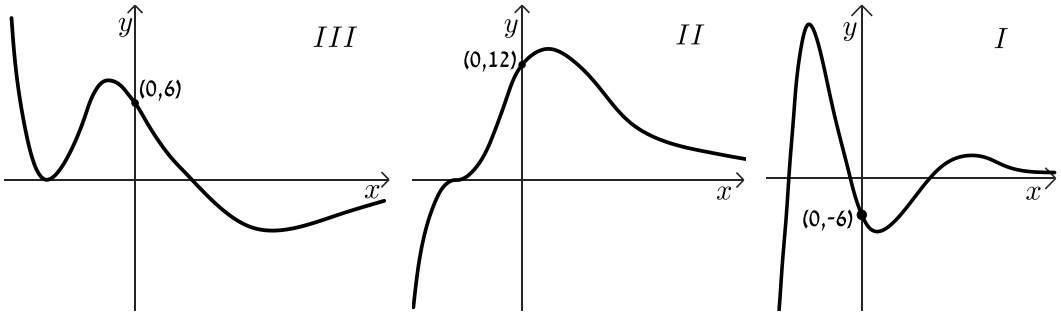
ג. הפונקציה $f(x)$, פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ מוגדרות לכל x.

לפניכם שלושה גרפים I-III. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$,

אחד את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ואחד את פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

בכל אחד מן הגרפים מופיעות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך שלו עם ציר ה- x.

על כל אחד מן הגרפים כתובים שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- y.



(1) התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ את הגרף המתאר אותה.
נמקו את תשובתכם.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.
שיעורי נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ הם $(a,15)$.

(3) מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי גרף הפונקציה $f''(x)$, על ידי הישר $x=a$ ועל ידי ציר ה- y.

ד. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$, המוגדרת בתחום: $x\neq 0\ ,\ x\neq -2$.

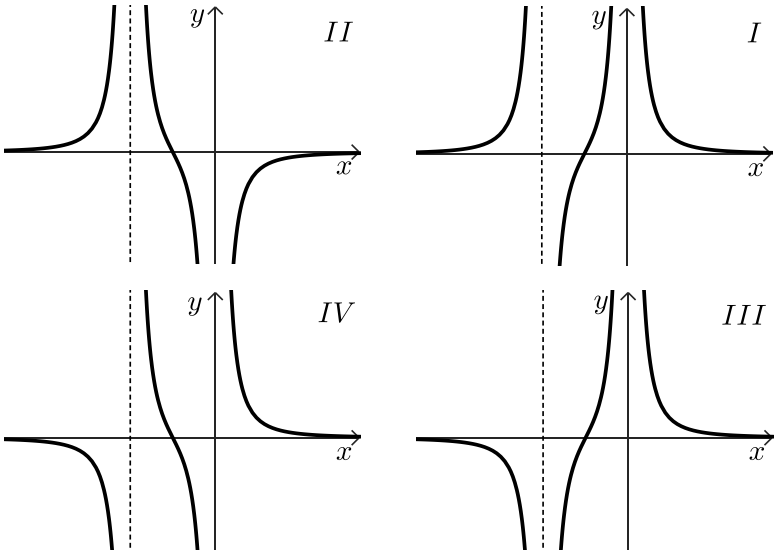
(1) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקציה $f(x)$.

(2) קבעו איזה מבין הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.

(3) חשבו את השטח הכלוא על ידי הגרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים $x=1$ ו- $x=3$.



2) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שאיבריה הם $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$.

נתון: $2a_2 + 8 = a_4$, $\frac{a_4}{a_2} = 4$.

א. מצאו את הערך של a_3 (מצאו את שתי האפשרויות).

נתון כי הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה אין סופית חדשה B.

נתון כי איברי הסדרה B מקיימים $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה הנדסית אין-סופית נוספת C .

איברי הסדרה C הם: $\frac{k}{a_1 \cdot a_2} , \frac{k}{a_3 \cdot a_4} , \frac{k}{a_5 \cdot a_6} , \ldots$. $k \neq 0$ הוא פרמטר.

ג. (1) מצאו את מנת הסדרה C.

(2) מצאו בעבור אילו ערכים של k הסדרה C עולה. נמקו את תשובתכם.

נסמן ב- S_B את סכום הסדרה B , וב- S_C את סכום הסדרה C.

נתון $S_C = 12 \cdot S_B$.

ד. מצאו את הערך של k.

3) במדינה גדולה התקיימו בחירות. המצביעים בבחירות אלה יכולים להצביע למפלגה א' או למפלגה ב' בלבד.

נסמן ב- p את ההסתברות שמצביע שנבחר באקראי הצביע למפלגה א' $(0 < p < 1)$.

בוחרים באקראי 3 מצביעים.

נתון כי ההסתברות שבדיוק אחד מהם הצביע למפלגה א' גדולה פי 2 מן ההסתברות ששלושתם הצביעו למפלגה ב'.

א. מצאו את הערך של p.

בוחרים באקראי 4 מצביעים.

ב. ידוע כי ארבעתם הצביעו לאותה המפלגה. מהי ההסתברות שהם הצביעו למפלגה א'?

חלק מן המצביעים הם מבוגרים והשאר צעירים.

נתון כי 49% מן המצביעים המבוגרים הצביעו למפלגה ב' ו-18% מן המצביעים הצעירים הצביעו למפלגה א'.

ג. מהי ההסתברות לבחור באקראי מצביע צעיר אחד מבין כל המצביעים?

לאחר הבחירות נערך סקר טלפוני בקרב המצביעים. דני, אחד הסוקרים התקשר באקראי למצביעים צעירים בלבד. הוא התקשר אליהם בזה אחר זה והפסיק מייד לאחר שראיין צעיר אחד שהצביע למפלגה אחת וצעיר נוסף שהצביע למפלגה האחרת.

ד. מהי ההסתברות שדני התקשר ל-5 צעירים בדיוק?

פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

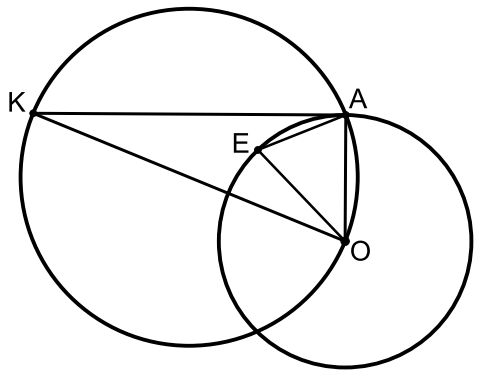
4) בסרטוט שלפניכם מעגל גדול שרדיוסו R ומעגל קטן שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r.

הנקודה O נמצאת על המעגל הגדול.

הנקודה A היא אחת מנקודות החיתוך של שני המעגלים, כמתואר בסרטוט.

דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל הקטן. המשיק חותך את המעגל הגדול בנקודה K.

הנקודה E נמצאת על המעגל הקטן בתוך המשולש KAO.



א. הוכיחו כי $\sphericalangle AOE = 2\sphericalangle KAE$.

המשך קטע AE חותך את הקטע OK בנקודה M.

נתון כי הנקודה M היא אמצע הקטע OK.

ב. הוכיחו כי הנקודה M היא מרכז המעגל הגדול.

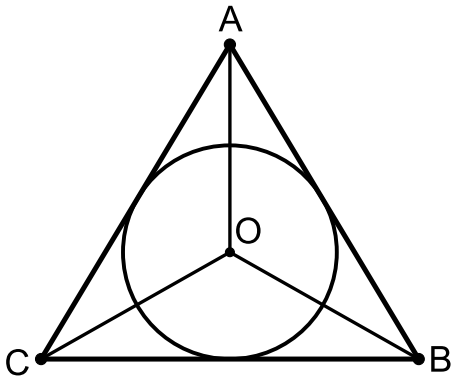
ג. הוכיחו כי $\Delta MOA \sim \Delta OEA$.

נתון: $R = 1.5r$.

נסמן ב- S את שטח המשולש MEO.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש OKA.

5) במשולש שווה שוקיים ABC $(AC = AB)$ חסום מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r (ראו סרטוט).



נסמן: $\sphericalangle ACB = 2\alpha$.

א. (1) הביעו באמצעות r ו- α את אורך הקטע CO.

(2) הביעו באמצעות r ו- α את אורך הצלע AC.

נתון כי אורך הצלע AC גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הקטע CO.

ב. מצאו את הערך של α.

הציבו $\alpha = 30°$ וענו על הסעיפים ג-ד.

המעגל חותך את הקטע BO בנקודה K.

נתון כי אורך הקטע CK הוא $\sqrt{63}$.

ג. מצאו את הערך של r.

הנקודה E נמצאת על הצלע CB.

נתון כי שטח המשולש CKE הוא 6.

ד. חשבו את אורך הקטע BE.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על הסעיפים א-ו. הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

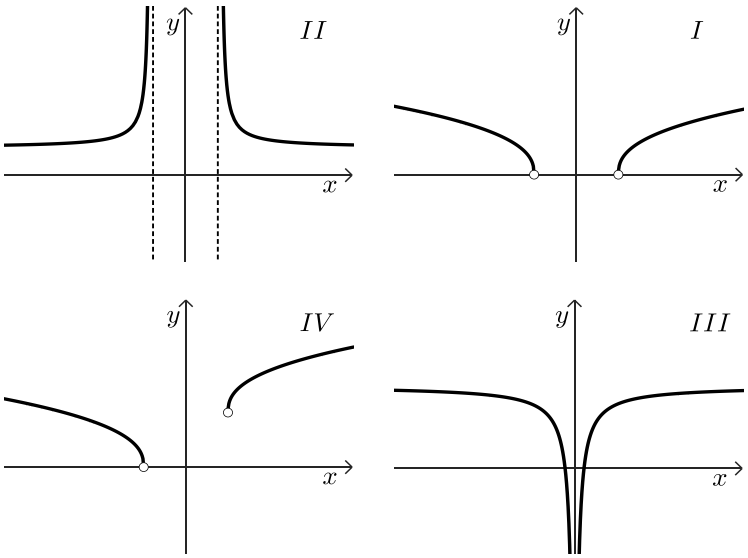
ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה. (1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(2) קבעו איזה מן הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקציה $g(x)$.

נמקו את קביעתכם.



נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x, ועל ידי הישרים $x=2a$ ו- $x=3a$, הוא 2.5.

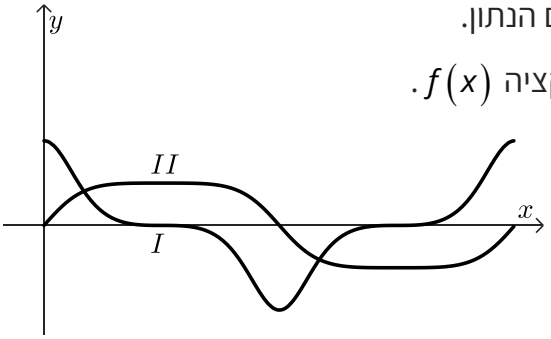
ו. מצאו את הערך של a.

7) בסרטוט שלפניכם נתונים שני גרפים I-II, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

אחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$,

ואחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות לכל x בתחום הנתון.



א. קבעו איזה מן הגרפים I-II מתאר את הפונקציה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.

נתון כי $f(x)=\frac{\sin x}{1+(\sin x)^2}$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

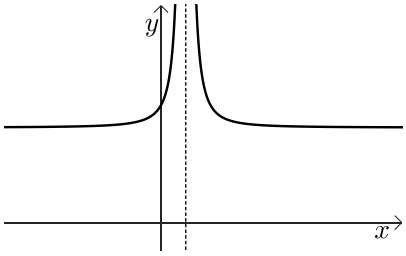
נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)-0.4|$ המוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x.

ד. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

8) בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+6$.



הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \ne 1$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות

לצירים של הפונקציה $f(x)$.

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, ושיעור ה- x שלה הוא 2.

דרך הנקודה C העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת הישר $x=1$ בנקודה B.

D היא נקודה ששיעוריה הם $(1,0)$.

ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB.

ד. מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.

תשובות סופיות:

1) א. (1) ראו סרטון א. (2) 125,576.

ב. (1) שאלת הוכחה ב. (2) $\frac{36\sqrt{2}}{7}=7.273$.

ג. (1) גרף I: $f''(x)$, גרף II: $f(x)$, גרף III: $f'(x)$ ג. (2) 3 נקודות ג. (3) $S=9$.

ד. (1) $-1<x<0$, $x>0$ ד. (2) גרף III ד. (3) $\frac{4}{15}=0.267$.

2) א. $a_3=\pm 8$ ב. $\frac{1}{4}$ ג. (1) $\frac{1}{16}$ ג. (2) $k>0$ ד. $k=15$.

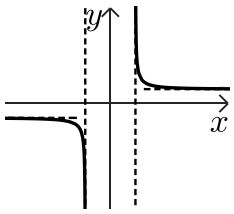
3) א. $\frac{2}{5}$ ב. $\frac{16}{97}$ ג. $\frac{1}{3}$ ד. 0.08224.

4) א. שאלת הוכחה ב. שאלת הוכחה ג. שאלת הוכחה ד. $3.6S$.

5) א. (1) $\frac{r}{\sin\alpha}$ א. (1) $\frac{r\cos\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha}$ ב. $\alpha=30°$ ג. $r=3$ ד. $BE=2.39$.

6) א. (1) $x<-a$, $x>a$ א. (2) $x=-a$, $x=a$, $y=-1$, $y=1$ ב. ראו סרטון.

ג. עלייה: אין, ירידה: $x<-a$, $x>a$ ד. להלן סרטוט:



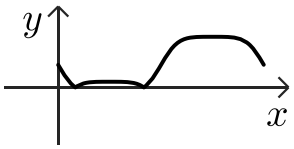
ה. (1) עלייה: $x>a$, ירידה: $x<-a$.

ה. (2) גרף I ו. $a=3$.

7) א. (1) $f(x)$: גרף II, $f'(x)$: גרף I ב. (1) $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(2\pi,0)$.

ב. (2) $\max\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(\frac{3\pi}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\min(0,0)$, $\max(2\pi,0)$ ג. $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$.

ד. (1) להלן סרטוט:



ד. (2) $\max\left(\frac{\pi}{2},0.1\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{6},0\right)$, $\max(0,0.4)$, $\min(2\pi,0.4)$, $\max\left(\frac{3\pi}{2},0.9\right)$, $\min\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$.

8) א. $x=1$, $y=6$ ב. $y=-2ax+5a+6$ ג. $S_{ADB}=\frac{(3a+6)^2}{4a}$ ד. $a=2$.

בגרות קיץ 2025 מועד ב':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

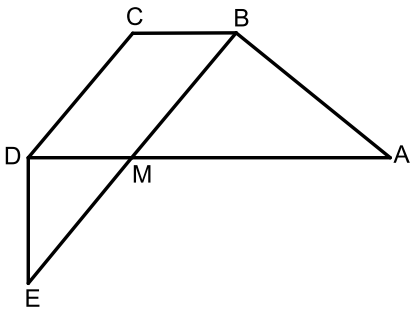
פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\ldots+\frac{4n-2}{3^n}=2-\frac{2n+2}{3^n}$$

ב. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ וטרפז $BCDE$ $(CD \parallel BE)$.



הנקודה M היא נקודת החיתוך של הצלעות AD ו-BE.

נתון: $EM=BM$, $ED \perp AD$, $AB \perp BM$.

אורך הקטע AM גדול פי 2.5 מאורך הקטע DM.

נסמן: $\sphericalangle EMD=\alpha$.

(1) מצאו את הערך של α.

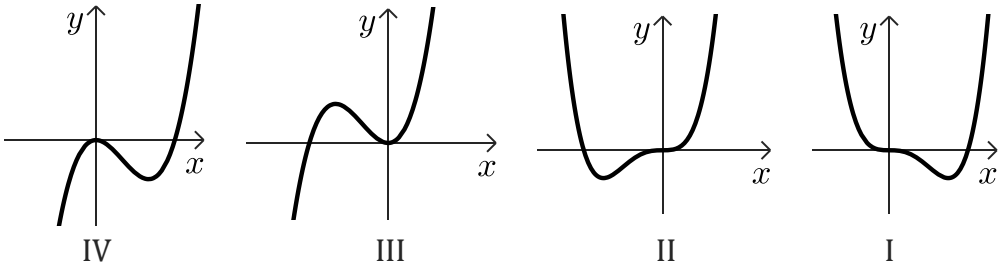
נתון: $DM=6$.

(2) חשבו את שטח הטרפז ABCD.

ג. נתונות הפונקציות $f(x)=x^n(x-1)$ ו- $g(x)=x^n(x+1)$, המוגדרות לכל x.

הוא פרמטר טבעי גדול מ-1.

כל אחד מן הגרפים I-IV לפניכם מייצג אחת מן הפונקציות בעבור n זוגי או n אי-זוגי.



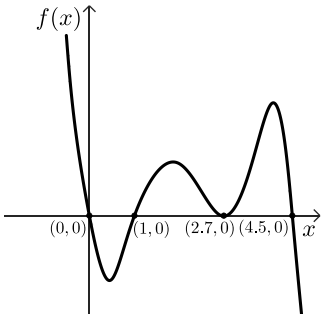
(1) התאימו לכל אחד מן הגרפים I-IV את הפונקציה, $f(x)$ או $g(x)$, המתאימה לו בעבור n זוגי או n אי-זוגי.

(2) הציבו $n=2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x.

ד. בסרטוט שלפניכם מתוארת הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.

בסרטוט מצוינים כל שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.

פונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $x\geq 0$, ומקיימת $g(x)=\int_0^x f(t)dt$.



(1) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $1\leq x\leq 2.7$.

נתון: $g(2.7)=0$, $g(4.5)=3\cdot S$.

(2) הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x, בתחום $0\leq x\leq 4.5$.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית עולה שמנתה היא q, $0 < q < 1$.

א. קבעו אם כל איברי הסדרה a_n הם חיוביים או שליליים. נמקו את קביעתכם.

b_n היא סדרה הנדסית אין-סופית וגם מנתה היא q.

c_n היא סדרה אין-סופית המקיימת לכל n טבעי $c_n = 2b_n - a_n$, $(c_n \neq 0)$.

ב. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q.

נתון כי $c_1 = 6\frac{2}{3}$, וכי סכום איברי הסדרה c_n גדול פי 8 מסכום איברי הסדרה b_n.

ג. מצאו את הערך של a_1.

נתון כי סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה a_n גדול ב-4 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה a_n.

ד. מצאו את הערך של q.

3) בבית אריזה גדול אורזים שני סוגי פירות בלבד: לימונים ותפוזים.
חלק מן הפירות מיועדים לייצוא והשאר אינם מיועדים לייצוא.
ההסתברות לבחור באקראי שני תפוזים מבין כל הפירות בבית האריזה היא 0.4096.
בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

א. מהי ההסתברות שנבחר לימון?

ההסתברות לבחור באקראי תפוז מבין הפירות שמיועדים לייצוא היא $\frac{3}{5}$.

ההסתברות לבחור באקראי לימון מבין הפירות שאינם מיועדים לייצוא היא $\frac{1}{5}$.

בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

ב. מהי ההסתברות שנבחר פרי המיועד לייצוא?

בוחרים באקראי שני פירות מבין כל הפירות בבית האריזה.

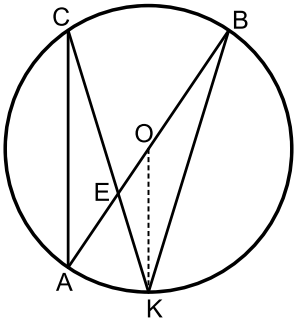
ג. ידוע שנבחרו שני לימונים.
מהי ההסתברות שאחד מהם מיועד לייצוא והאחר אינו מיועד לייצוא?

בוחרים באקראי 4 פירות מבין כל הפירות בבית האריזה. ידוע שלפחות אחד מהם מיועד לייצוא.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 3 מבין הפירות שנבחרו מיועדים לייצוא?

פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.



המיתר CK חותך את הרדיוס AO בנקודה E (ראו סרטוט).

נתון: $\sphericalangle EKO = \sphericalangle ABK$.

א. הוכיחו כי $\Delta OKE \sim \Delta ACE$.

המשך הקטע KO חותך את המיתר CB בנקודה P.

נתון כי $PO = 7$, וכי רדיוס המעגל הוא 8.4.

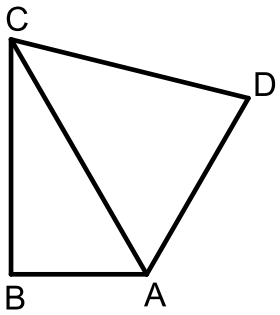
ב. (1) הוכיחו כי PO הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

(2) מצאו את אורך הקטע EO.

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ACE ובין שטח המשולש AOK.

5) בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC $\left(\sphericalangle ABC = 90°\right)$.

על הצלע AC בנו משולש נוסף ACD כך ש-AC הוא חוצה זווית BAD.



נסמן: $AB = k$, $\sphericalangle CAB = \alpha$.

א. הביעו באמצעות k ו- α את האורך של AC.

נתון: $AD = 1.5 \cdot k$, $CD = \sqrt{3.25} \cdot k$.

ב. חשבו את הערך של α.

הציבו $\alpha = 60°$ וענו על סעיפים ג–ד.

הנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

ג. הביעו באמצעות k את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC.

הנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

נתון: $ME = 4$.

ד. חשבו את הערך של k.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2ax}{(x^2-16)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ שפונקציית הנגזרת שלה היא $g'(x)=f(x)+1$.

תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ ושל פונקציית הנגזרת $g'(x)$

זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-2$.

ב. מצאו את הערך של a.

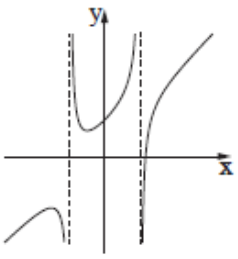
הציבו את הערך של a שמצאתם בפונקציה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג–ד.

נתון כי הפונקציה $g(x)$ עוברת בנקודה $(2,7)$.

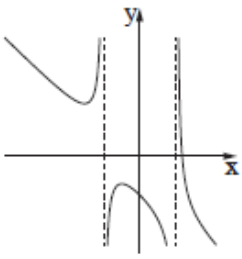
ג. כתבו ביטוי אלגברי אפשרי לפונקציה $g(x)$.

ד. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם הוא גרף אפשרי של הפונקציה $g(x)$.

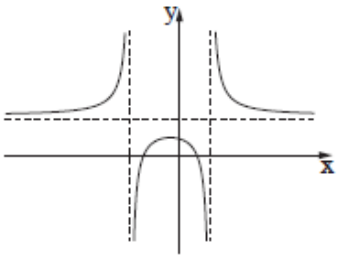
נמקו את קביעתכם.



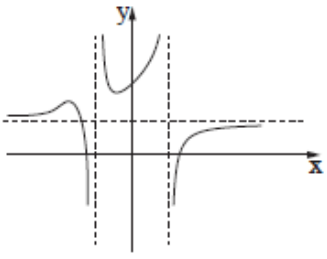
II



I



IV



III

7) נתונה הפונקציה $f(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$.

ב. קבעו אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית. נמקו את קביעתכם.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

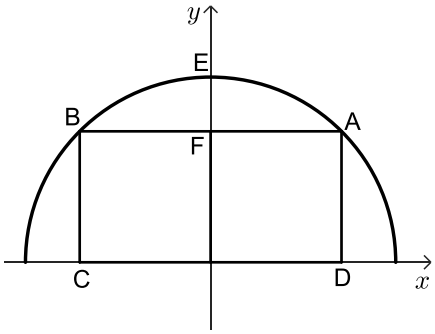
נתונה הפונקציה $g(x)=2\cos x+\frac{2\sin x}{\sin(2x)}$, בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הראו כי $g(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos x}$, בעבור כל x בתחום הגדרתה.

ו. האם קיים ערך של k שבעבורו הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ ב-3 נקודות בדיוק? אם כן, מצאו אותו. אם לא, נמקו את תשובתכם.

8) בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$,



R הוא פרמטר חיובי.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-R\le x\le R$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה- x

וחותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה נוספת B.

הנקודות C ו-D נמצאות על ציר ה- x כך שנוצר מלבן ABCD.

הנקודה F היא נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y.

הנקודה E היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y.

נתון ריבוע שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע EF.

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A.

א. (1) הביעו באמצעות R ו- t את אורך הקטע EF.

(2) הביעו באמצעות R ו- t את היקף המלבן ABCD.

ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן ABCD לבין היקף הריבוע הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

1) א. ראו סרטון.

ב. (1) $\alpha = 50.708$ (2) $S_{ABCD} = 99.2$.

ג. (1) גרף I: $n - f(x)$ אי זוגי, גרף II: $n - g(x)$ אי זוגי, גרף III: $n - g(x)$ זוגי, גרף IV: $n - f(x)$ זוגי (2) $\frac{1}{12}$.

ד. (1) מקסימום: $x = 0$, מינימום: $x = 1$, מקסימום: $x = 4.5$ (2) $5S$.

2) א. שליליים ב. $q_C = q$ ג. $a_1 = -5$ ד. $q = \frac{1}{4}$.

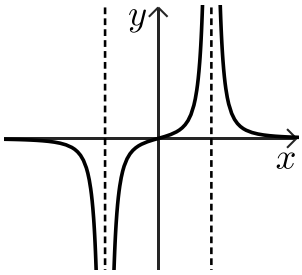
3) א. 0.36 ב. 0.8 ג. $\frac{16}{81}$ ד. $\frac{23}{39}$.

4) א. שאלת הוכחה ב. (1) שאלת הוכחה ב. (2) 3.15 ג. $\frac{25}{24}$.

5) א. $\frac{k}{\cos\alpha}$ ב. $60°$ ג. $\frac{\sqrt{3}k}{3+\sqrt{3}}$ ד. 7.73.

6) א. (1) $x \neq \pm 4$ א. (2) $x = \pm 4$, $y = 0$.

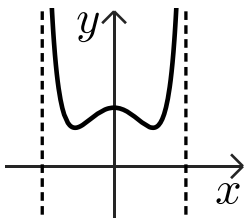
א. (3) עליה: $-4 < x < 4$, ירידה: $x > 4$, $x < -4$ א. (4) להלן סרטוט:



ב. $a = 36$ ג. $g(x) = \frac{-36}{x^2 - 16} + x + 2$ ד. גרף II.

7) א. (1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ א. (2) $x \neq -\frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ ב. זוגית.

ג. $\min\left(-\frac{\pi}{4}, 2.82\right)$, $\max(0,3)$, $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2.82\right)$ ד. להלן סרטוט:



ה. (1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$ ה. (2) ראו סרטון ו. לא.

8) א. (1) $R - \sqrt{R^2 - t^2}$ א. (2) $4t + 2\sqrt{R^2 - t^2}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{13}}R$.