

# פתרון בגריות במתמטיקה לשאלון 581

פרק 9

## פתרון בידאו של בחינות 2021

1	.....	חורף מועד א
6	.....	מועד נבצרים
11	.....	חורף מועד ב

## בגרות 2021 מועד חורף א':

ענה על חמש מהשאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).  
שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, תיבדקנה רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

### פרק ראשון - אלגברה והסתברות

- (1) שני שליחים, אייל וברק, יצאו בשעה 8:00 זה לקראת זה כדי למסור חבילה. אייל יצא מעיר A וברק יצא מעיר B. לאחר שאייל עבר  $\frac{1}{6}$  מן הדרך לכיוון עיר B, הוא גילה כי שכח את החבילה בעיר A. הוא חזר לעיר A, אסף את החבילה, ומיד יצא שוב לכיוון עיר B. אייל נסע כל הזמן במהירות קבועה. ברק נסע גם הוא במהירות קבועה, הגבוהה ב-20% ממהירות הנסיעה של אייל. ברק ואייל נפגשו בנקודה הנמצאת 75 ק"מ מעיר A.
- א. מצא את אורך הדרך שבין שתי הערים. אייל וברק נסעו בכבישים בין-עירוניים, שמהירות הנסיעה המותרת בהם היא מ-50 עד 110 קמ"ש. גם אייל וגם ברק נסעו במהירות מותרת.
- ב. (1) האם ייתכן שאייל וברק נפגשו בשעה 9:40? נמק. (2) האם ייתכן שאייל וברק נפגשו בשעה 10:00? נמק.

- (2)  $a_n$  היא סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא  $q$ . נתון:  $0 < q < 1$ ,  $0 < a_1$ .
- $b_n$  היא סדרה הנדסית אין-סופית עולה שהמנה שלה היא  $r$ . נתון:  $b_1 = a_6$ . הסדרה  $c_n$  מוגדרת כך:  $c_n = \frac{a_{n+5}}{b_n}$ .
- א. הסבר מדוע כל איברי הסדרות  $a_n$ ,  $b_n$  ו- $c_n$  הם חיוביים.
- ב. הוכח כי  $c_n$  היא סדרה הנדסית, ומצא את  $c_1$ .
- ג. (1) הסבר מדוע המנה של הסדרה  $c_n$  גדולה מ-0 וקטנה מ-1. (2) נתון: סכום הסדרה  $c_n$  הוא  $\frac{6}{5}$ ,  $\frac{b_2}{a_8} = 18$ .
- מצא את  $q$  ואת  $r$ .

- (3) ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיה שיער מתולתל היא  $x$ .  
 ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיו עיניים חומות היא  $2x$ .  
 ההסתברות שעניו של ילד שנולד במשפחת לוי יהיו חומות, אם ידוע ששיערו מתולתל קטנה פי 1.5 מן ההסתברות ששיערו לא יהיה מתולתל אם ידוע שעניו חומות. יונתן הוא אחד הילדים במשפחת לוי.  
 א. (1) הראה שההסתברות שעניו של יונתן הן חומות ושיערו מתולתל

$$\text{היא } \frac{1}{2}x.$$

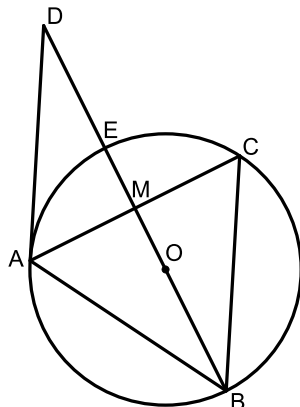
- (2) מצא את ההסתברות ששיערו של יונתן הוא מתולתל אם ידוע שעניו חומות.

- ב. (1) הבע באמצעות  $x$  את ההסתברות ששיערו של יונתן אינו מתולתל וגם עניו אינן חומות.

$$(2) \text{ נתון: } x = 0.2.$$

- במשפחת לוי נולדו ארבעה ילדים בדיוק.  
 מהי ההסתברות שלפחות שלושה מארבעת הילדים במשפחת לוי יש שיער מתולתל ועיניים חומות?

### פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור



- (4) הישר AD משיק למעגל בנקודה A.  
 הנקודה B נמצאת על המעגל כך שהקטע BD עובר דרך מרכז המעגל, O, וחותך את המעגל בנקודה נוספת, E.  
 הנקודה C נמצאת על המעגל כך ש-  $BC \parallel AD$ .  
 הישרים BD ו-AC חותכים זה את זה בנקודה M (ראה ציור).

- א. הוכח:  $AB = AC$ .  
 נתון: AE חוצה את הזווית MAD.  
 ב. הוכח:  $BM \perp AC$ .  
 ג. הוכח כי אורך הקטע AE שווה לרדיוס המעגל.  
 ד. הוכח כי ABCD הוא מעוין.

- (5) ABC הוא משולש קהה זווית ( $\angle BAC > 90^\circ$ ).  
 נתון:  $AB + AC = 4a$  ( $a$  הוא פרמטר),  $AB : AC = 3 : 5$ ,

$$\text{שטח המשולש ABC הוא } \frac{15\sqrt{3}}{16}a^2.$$

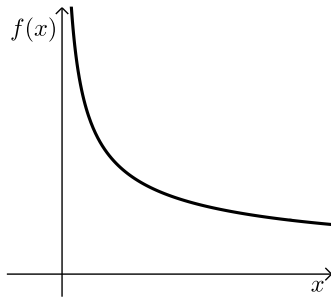
- א. (1) חשב את גודל הזווית BAC.  
 (2) חשב את גודלי הזוויות ABC ו-ACB.  
 במעגל החוסם את המשולש ABC אפשר לחסום מחומש משוכלל ששטחו הוא 100.  
 ב. חשב את  $a$ .

**פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות,  
של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש**

- (6)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 6x(x^3 - 1)^3$ , המוגדרת לכל  $x$ .  
ענה על הסעיפים א-ג. אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.
- א. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים?  
(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן (אם יש כאלה).  
(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
(4) בעבור אילו ערכים של  $k$  הישר  $y = k$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. נתונה המשוואה:  $6x(x^3 - 1)^3 = m$ .  $m$  הוא פרמטר.  
הסתמך על גרף הפונקציה  $f(x)$ , וקבע בעבור אילו ערכי  $m$  למשוואה הנתונה יש בדיוק שני פתרונות חיוביים שונים, ובעבור אילו ערכי  $m$  יש לה פתרון אחד שלילי ופתרון אחד חיובי. נמק את תשובותיך.
- ג. היעזר בסרטוט וקבע אם קיים  $a > 0$  שבעבורו האינטגרל  $\int_0^a f(x) dx$  מקבל ערך מינימלי. אם כן, מהו ערכו של  $a$  זה? נמק את תשובתך.

- (7)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2\sin^2 x - 1$ , המוגדרת לכל  $x$ .  
ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .
- א. (1) הראה כי הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.  
(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.  
(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.
- נתונה הפונקציה:  $g(x) = \frac{\cos 2x(1 - \sin x)}{\sin x - 1}$ .
- ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ ?  
(2) בעבור אילו ערכים של  $x$ :  $f(x) = g(x)$ ? נמק.  
(3) האם לפונקציה  $g(x)$  יש אסימפטוטות אנכיות? נמק.  
(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .
- ג. נתונה הפונקציה:  $h(x) = -f(x) + b$  ( $b$  הוא פרמטר), שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ . נתון:  $\int_{-\pi}^0 h(x) dx = \frac{3\pi}{2}$ .  
מצא את ערכו של הפרמטר  $b$ .

8 בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ ,



שתחום הגדרתה הוא  $x > 0$ .

מבין כל הנקודות שעל גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

הנקודה A היא הקרובה ביותר

לראשית הצירים, O.

א. (1) מצא את שיעורי הנקודה A.

(2) האם הישר AO מאונך לישר המשיק

לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה A? נמק.

נתונה הפונקציה:  $g(x) = -f(-x)$ , המוגדרת בתחום  $x < 0$ .

ענה על סעיף ב בעבור התחום  $-4 \leq x \leq -1$ .

ב. (1) מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום הנתון,

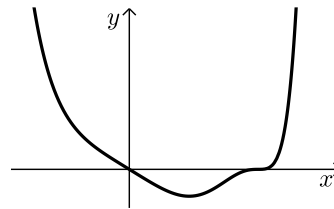
מה הם שיעורי הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים?

(2) מצא את שיעורי הנקודה הרחוקה ביותר מראשית הצירים,

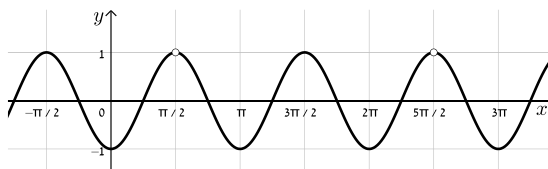
מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום הנתון.

תשובות סופיות:

- (1) א. 275 ק"מ. ב. (1). לא. ג. (2). כן.  
 (2) א. הוכחה. ב. (1). הוכחה,  $c_1 = 1$ . ג. (2).  $r = 2$ ,  $q = \frac{1}{3}$ .  
 (3) א. (1). הוכחה. א. (2).  $\frac{1}{4}$ . ב. (1).  $1 - 2\frac{1}{2}x$ . ג. (2). 0.0037.  
 (4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.  
 (5) א. (1).  $\angle BAC = 120^\circ$ . א. (2).  $\angle ABC = 38.21^\circ$ ,  $\angle ACB = 21.79^\circ$ . ג.  $a = 3.21$ .  
 (6) א. (1). (0,0), (1,0). א. (2). מינימום (0.464, -2.03).  
 א. (3). להלן סרטוט: א. (4).  $k = 0$  או  $k = -2.03$ .



- ב. שתי פתרונות חיוביים:  $-2.03 < m < 0$ , פיתרון אחד שלילי ואחד חיובי:  $m > 0$ .  
 ג.  $a = 1$ .  
 (7) א. (1). הוכחה. א. (2).  $(0, -1)$ ,  $(-\frac{3}{4}\pi, 0)$ ,  $(-\frac{1}{4}\pi, 0)$ ,  $(\frac{1}{4}\pi, 0)$ ,  $(\frac{3}{4}\pi, 0)$ .  
 א. (3).  $(\pi, -1)$  מינימום,  $(\frac{1}{2}\pi, 1)$  מקסימום,  $(0, -1)$  מינימום,  $(-\frac{1}{2}\pi, 1)$  מקסימום,  
 $(-\pi, -1)$  מינימום. ב. (1).  $x \neq \frac{1}{2}\pi$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ .  
 ב. (2).  $x \neq \frac{1}{2}\pi$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ . ב. (3). לא.  
 ב. (4). להלן סרטוט: ג.  $b = 1\frac{1}{2}$ .



- (8) א. (1).  $A(2, 2\sqrt{2})$ . א. (2). כן. ב. (1).  $(-2, -2\sqrt{2})$ . ג. (2).  $(-4, -2)$ .

## בגרות 2021 מועד חורף נבצרים:

ענה על חמש מהשאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).  
שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, תיבדקנה רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

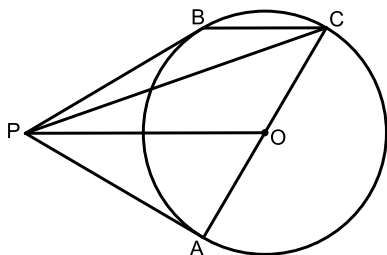
### פרק ראשון - אלגברה והסתברות

- 1) יואב ואודי רכבו על אופניים מיישוב A ליישוב B, באותה הדרך.  
יואב יצא מיישוב A וכעבור 3 שעות הגיע ליישוב B.  
זמן מה לאחר יציאתו של יואב מיישוב A, יצא גם אודי מיישוב A והגיע ליישוב B  
רבע שעה לפני יואב. יואב ואודי נפגשו בדרך ליישוב B כעבור שעה וחצי מרגע  
יציאתו של אודי מיישוב A. מהירות הרכיבה של יואב ומהירות הרכיבה של אודי  
היו קבועות.  
א. מצא כמה זמן עבר מרגע יציאתו של יואב מיישוב A ועד רגע יציאתו של  
אודי מיישוב A (מצא את שתי האפשרויות).  
ב. נתון: יואב ואודי נפגשו במרחק 12 ק"מ מיישוב B.  
מהירות הרכיבה של אודי גדולה מ-20 קמ"ש.  
מצא מהי מהירות הרכיבה של יואב ומהי מהירות הרכיבה של אודי.
- 2) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת:  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ .  
סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 4.  
מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה,  
ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה:  $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$ .  
סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא 2.4.  
א. מצא את האיבר הראשון ואת המנה של הסדרה  $a_n$  (הסדרה המקורית).  
מן האיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית:  $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \dots$ .  
נסמן את הסדרה השלישית ב-  $c_n$ .  
ב. הוכח כי הסדרה  $c_n$  היא סדרה הנדסית, מצא את המנה שלה ואת  $c_1$ .  
ג. נתון כי הסכום:  $c_{k+1} + c_{k+2} + \dots + c_{3k}$  גדול פי 4096 מסכום  $2k$  האיברים  
הראשונים בסדרה  $c_n$ . מצא את  $k$ .

- (3) בחברת תקשורת גדולה נבדקו הרגלי הצפייה של הלקוחות. נמצא כי מספר הלקוחות שצופים בערוצי מוזיקה גדול פי 1.5 ממספר הלקוחות שאינם צופים בהם.  $\frac{2}{3}$  מן הלקוחות שצופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה. 40% מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה. בוחרים באקראי לקוח מן הלקוחות של החברה.
- א. מהי ההסתברות שהלקוח שנבחר צופה גם בערוצי ספורט וגם בערוצי מוזיקה?  
 ב. נמצא שהלקוח שנבחר צופה בערוצי מוזיקה או בערוצי ספורט. מהי ההסתברות שהוא אינו צופה בערוצי מוזיקה?  
 ג. מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט, בחרו באקראי 4 לקוחות. מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם צופים בערוצי מוזיקה?

### פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

- (4) הנקודות A ו-B נמצאות על מעגל שמרכזו O. המשיקים למעגל בנקודות A ו-B נפגשים בנקודה P. ההמשך של AO חותך את המעגל בנקודה C (ראה סרטוט).  
 א. הוכח:  $PO \parallel BC$ .



$$\text{נסמן: } k = \frac{PO}{BC}$$

- ב. הבע באמצעות  $k$  את היחס בין שטח המשולש PBC ובין שטח המשולש OPC.  
 ג. נסמן ב-S את שטח המשולש PAO. הבע באמצעות S ו-k את שטח המרובע PACB.

- (5) ABCD הוא טרפז חסום במעגל ( $AB \parallel DC$ ). נתון:  $AB = a$ ,  $CD = b$ ,  $(a < b)$ ,  $\angle BCD = 60^\circ$ .
- א. הבע את האורך של שוקי הטרפז, BC ו-AD, באמצעות a ו-b.  
 נתון:  $a = 6$ , אורך האלכסון BD הוא  $6\sqrt{7}$ .  
 ב. חשב את b.  
 ג. (1) הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R.  
 (2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.  
 (3) הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r.



**פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש**

(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x^2 - 16}}$ ,  $a \neq 0$  הוא פרמטר.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
ענה על הסעיפים ב-ד בעבור  $a > 0$ .
  - ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים (אם יש צורך, הבע באמצעות  $a$ ).
  - ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).
  - ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
  - ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בעבור  $a < 0$ .
- נתונה הפונקציה:  $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$  המוגדרת בתחום שבו מוגדרות הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$ . נתון:  $a = 1$ .
- ו. (1) מצא את תחום השליליות של הפונקציה  $g(x)$ .
  - (2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$ , הישר  $x = 5$ , הישר  $x = 6$  וציר ה- $x$ .

(7) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 4$ .

- ענה על סעיפים א-ה בעבור התחום:  $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ .
- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
  - (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לציר ה- $x$ .
  - ב. הראה כי הפונקציה  $f(x)$  היא זוגית.
  - ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.
  - ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
  - ה. נתונה הפונקציה:  $g(x) = -f(-x) + b$ .  $b$  הוא פרמטר.
- נתון כי גרף הפונקציה  $g(x)$  משיק לציר ה- $x$ . מצא את  $b$ .
- ו. מצא בתחום:  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$  ועל ידי ציר ה- $x$ .

(8) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ .

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ,

ואת האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. העבירו ישר המקביל לציר ה- $x$ .

הישר חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה A ואת הישר  $y = \frac{1}{2}x$  בנקודה B.

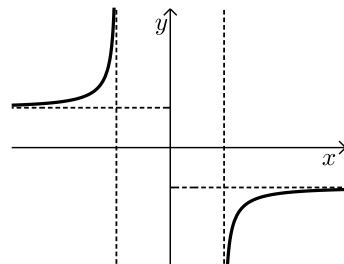
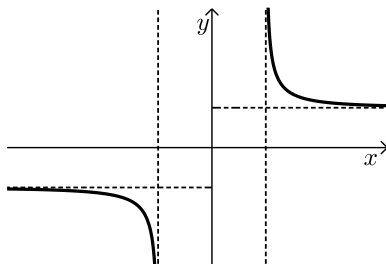
נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .

נתון:  $t < -1$ .

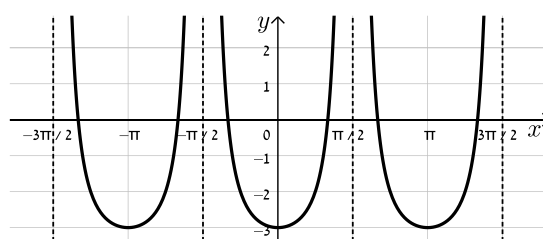
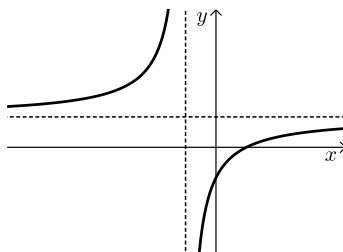
מצא את הערך של  $t$  שבעבורו האורך של הקטע AB הוא מינימלי.

תשובות סופיות:

- (1) א.  $t = \frac{1}{2}$  או  $t = \frac{3}{4}$  . ב. יואב: 16 קמ"ש, אודי: 24 קמ"ש.
- (2) א.  $a_1 = 12$  ,  $q = \frac{1}{4}$  . ב.  $q_c = 4$  ,  $c_1 = \frac{1}{48}$  . ג.  $k = 6$  .
- (3) א.  $p = \frac{1}{2}$  . ב.  $p = \frac{5}{17}$  . ג. 0.5248 .
- (4) א. הוכחה. ב.  $\frac{1}{k}$  . ג.  $S = \frac{2k+1}{k}$  .
- (5) א.  $b-a$  . ב.  $b=18$  . ג. (1).  $R = 2\sqrt{21}$  ,  $R = 9.165$  . (3).  $r = 3\sqrt{3}$  .
- (6) א.  $x > 4$  או  $x < -4$  . ב. אנכית:  $x = 4$  ,  $x = -4$  . אופקית:  $y = a$  ,  $y = -a$  . ג. עלייה: אין. ירידה:  $x > 4$  או  $x < -4$  . ד. להלן סרטוט:



- ו. (1).  $x > 4$  . ו. (2).  $\frac{22}{45}$  .
- (7) א. (1).  $-\frac{3}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$  ,  $x \neq \frac{\pi}{2}$  ,  $x \neq -\frac{\pi}{2}$  . א. (2).  $x = \frac{3}{2}\pi$  ,  $x = \frac{\pi}{2}$  ,  $x = -\frac{\pi}{2}$  ,  $x = -\frac{3}{2}\pi$  . ב. הוכחה.
- ג.  $(\pi, -3)$  מינימום,  $(0, -3)$  מינימום,  $(-\pi, -3)$  מינימום.
- ד. להלן סרטוט: . ה.  $b = -3$  . ו. 4.91 .



- (8) א. (1).  $x \neq -1$  , אסימפטוטות:  $x = -1$  ,  $y = 1$  . א. (2). עלייה:  $-1 < x$  או  $x < -1$  . ירידה: אין.
- ב.  $t = -3$  . א. (3) סרטוט לעיל:

## בגרות 2021 מועד חורף ב':

ענה על חמש מהשאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).  
שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, תיבדקנה רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

### פרק ראשון - אלגברה והסתברות

- 1) יואב ודני יצאו באותו הזמן לרכוב על אופניים.  
הם רכבו במסלול ישר שהחל בנקודה A והסתיים בנקודה B.  
לאורך המסלול רכב כל אחד מהם במהירות קבועה.  
יואב הגיע לנקודה B, ומייד חזר באותו המסלול לנקודה A.  
כאשר היה יואב בדרכו חזרה מ-B ל-A והגיע לאמצע המסלול AB, הגיע דני לנקודה B.  
א. מהו היחס בין המהירות של יואב ובין המהירות של דני? נמק.  
40 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, כאשר יואב היה בדרכו חזרה מ-B ל-A, נפגשו יואב ודני.  
ב. הבע את אורך המסלול AB באמצעות המהירות של דני.  
30 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, יואב עדיין לא הגיע לנקודה B, והמרחק של דני מן הנקודה A היה גדול ב-5 ק"מ מן המרחק של יואב מן הנקודה B.  
ג. מצא את אורך המסלול AB.  
ד. כמה זמן עבר מרגע יציאתם של יואב ודני מן הנקודה A עד שהמרחק ביניהם היה 2 ק"מ? מצא שתיים מבין שלוש האפשרויות.

- 2) הסדרה  $a_n$  היא סדרה הנדסית המקיימת לכל  $n$  טבעי את הכלל:  $3a_{n+2} + 5a_{n+1} - 2a_n = 0$ .  
נתון כי:  $a_1 \neq 0$ .  
א. מצא את שני הערכים האפשריים למנת הסדרה  $a_n$ .  
נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל ולא מתכנסת ב-  $b_1, b_2, b_3, \dots$ .  
נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל ומתכנסת ב-  $c_1, c_2, c_3, \dots$ .  
ב. הסבר מדוע הסדרה:  $b_1c_1, b_2c_2, b_3c_3, \dots$  היא סדרה הנדסית מתכנסת.  
נתון:  $b_1 = c_1 = m$ ,  $b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3, \dots = 15$ .  
ג. מצא את  $m$  (רשום את שתי האפשרויות).  
ענה על סעיף ד בעבור ה-  $m$  הקטן מבין שתי האפשרויות שמצאת בסעיף ג.  
ד. נתון:  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k = 1705$ . מצא את  $k$ .

3) בכד יש כדורים בשלושה צבעים בלבד: אדום, צהוב, כחול.  
נתון:

ההסתברות להוציא כדור אדום היא  $\frac{5}{8}$ .

מספר הכדורים הצהובים גדול פי 3 ממספר הכדורים הכחולים.

$\frac{4}{5}$  מן הכדורים האדומים שבכד ו- $\frac{8}{9}$  מן הכדורים הצהובים שבכד מחוספסים,

וכל שאר הכדורים שבכד חלקים. הוציאו באקראי כדור מן הכד והחזירו אותו לכד.  
את הפעולה הזאת (הוצאה באקראי והחזרה) עשו 8 פעמים.

א. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן הכדורים שהוציאו הם מחוספסים?  
ענה על סעיף ב בעבור כד שבו 32 כדורים.

ב. הוציאו באקראי בזה אחר זה 2 כדורים מן הכד (ללא החזרה).

(1) מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים?

(2) ידוע ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים.

מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוציאו היה בצבע אדום?

ענה על סעיף ג' בעבור כד שבו  $n$  כדורים.

נתון:  $50 < n < 100$ .

ג. מצא את  $n$  (את שתי האפשרויות).

### פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) בציור שלפניך מתוארים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.

מרכזי המעגלים הם הנקודות  $O_1$  ו- $O_2$ , והרדיוסים שלהם הם  $R_1$  ו- $R_2$

בהתאמה. מן הנקודה M, הנמצאת מחוץ לשני המעגלים, יוצאים

שני ישרים המשיקים למעגל  $O_1$  בנקודות A ו-B, ולמעגל  $O_2$

בנקודות D ו-C, כמתואר בציור.

המשיק בנקודה המשותפת לשני המעגלים חותך את

הישרים MD ו-MC בנקודות P ו-Q בהתאמה.

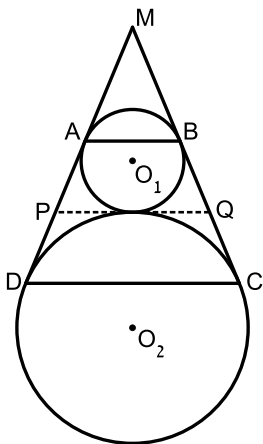
א. הוכח כי המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. הוכח כי PQ שווה לשוק הטרפז ABCD.

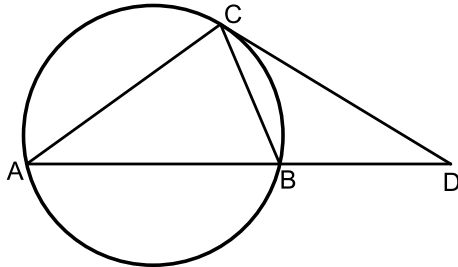
ג. הוכח כי:  $\angle O_1 Q O_2 = 90^\circ$ .

נתון:  $R_1 = 4$ ,  $R_2 = 9$ .

ד. מצא את PQ.



- 5) בציור שלפניך מתואר משולש חד-זווית ABC החסום במעגל שהרדיוס שלו הוא  $R$ . המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשיך הקטע AB בנקודה D. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא  $2R$ . נסמן:  $\angle BAC = \alpha$ .



- א. הבע את BD באמצעות  $R$  ו- $\alpha$ .  
 נתון:  $\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$ .  
 ב. מצא את  $\alpha$ .  
 נתון: שטח המשולש CBD הוא 27.  
 ג. מצא את  $R$ .

### פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

- 6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos^3(x) \cdot \sin(x)$  בתחום:  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.  
 ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 נתונה הפונקציה:  $g(x) = a \cdot f(x)$ ,  $a > 0$ , הוא פרמטר.  
 ג. הבע באמצעות  $a$  את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה שבה  $x = 0$ .  
 הישר שמצאת בסעיף ג אינו חותך את גרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה נוספת. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$ , על ידי הישר שמצאת בסעיף ג ועל ידי הישר  $x = \frac{\pi}{2}$  שווה ל- $\left(\frac{\pi^2}{2} - 1\right)$ .  
 ד. מצא את  $a$ .

7 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ ,  $a$  הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. (1) בעבור אלו ערכים של הפרמטר  $a$  אין לפונקציה  $f(x)$  נקודות קיצון? נמק.

(2) במקרים שיש לפונקציה  $f(x)$  נקודת קיצון, הבע באמצעות  $a$  את שיעוריה וקבע את סוגה.

ג. סרטט בנפרד סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  לכל אחד מן התחומים i-iii של הפרמטר  $a$  שלפניך:

i.  $a > 0$

ii.  $a < 0$

iii.  $a = 0$

נתונה הפונקציה:  $g(x) = f(x) - b$ ,  $b$  הוא פרמטר.

נתון כי גרף הפונקציה  $g(x)$  חותך את ציר ה- $x$  בשתי נקודות.

ד. (1) מצא את התחום של הפרמטר  $a$ . נמק.

(2) הבע את התחום של הפרמטר  $b$  באמצעות  $a$ . נמק.

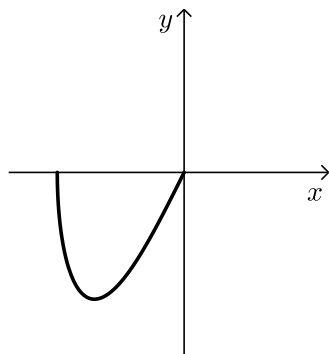
8 נתונה הפונקציה:  $f(x) = x\sqrt{a-x^2}$ ,  $a > 0$  הוא פרמטר.

א. (1) הבע באמצעות  $a$  את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) הוכח שהפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית.

(3) בסרטוט שלפניך מתואר חלק מגרף הפונקציה  $f(x)$ .

העתק את הסרטוט למחברת והשלם אותו כך שיתאר את גרף הפונקציה  $f(x)$  כולו.



דרך נקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  ברביע הראשון מעבירים אנך לציר ה- $x$ .

האנך חותך את ציר ה- $x$  בנקודה B.

ישר העובר דרך נקודה A ודרך ראשית הצירים, O, חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה נוספת, C.

דרך הנקודה C מעבירים אנך לציר ה- $x$ .

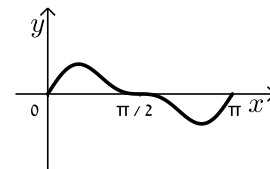
האנך חותך את ציר ה- $x$  בנקודה D.

נתון: הסכום המקסימלי של שטחי המשולשים AOB ו-COD הוא  $4\sqrt{2}$ .

ב. מצא את  $a$ .

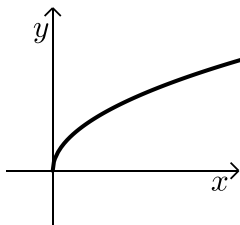
תשובות סופיות:

- (1) א. 1.5. ב.  $\frac{5}{6}$ . ג. 10 ק"מ. ד. 20 דקות, 36 דקות, 44 דקות.
- (2) א.  $q = -2$ ,  $q = \frac{1}{3}$ . ב. הוכחה. ג.  $m = -5$ ,  $m = 5$ .
- (3) א.  $\frac{189}{8,192}$ . ב. (1).  $\frac{267}{496}$ . ב. (2).  $\frac{40}{89}$ . ג.  $n = 96$ ,  $n = 64$ .
- (4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד.  $PQ = 12$ .
- (5) א.  $2R \sin \alpha \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$ . ב.  $\alpha = 36.34^\circ$ . ג. 5.696.
- (6) א.  $(0,0)$  מינימום,  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$  מקסימום,  $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$  מינימום,  $(\pi, 0)$  מקסימום. ב. להלן סרטוט: ג.  $y = ax$ . ד.  $a = 4$ .

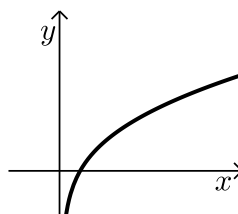


- (7) א.  $0 < x$ . ב. (1).  $a \leq 0$ . ב. (2).  $(a, 2\sqrt{a})$  מינימום.

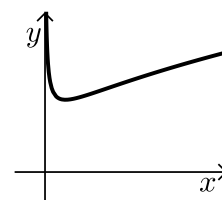
ג. iii. סרטוט:



ג. ii. סרטוט:



ג. i. סרטוט:



- ד. (1).  $0 < a$ . ד. (2).  $2\sqrt{a} < b$ .

- (8) א. (1).  $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ . א. (2). הוכחה. א. (3). להלן סרטוט: ב.  $a = 6$ .

