

# פתרון בגריות במתמטיקה לשאלון 482

## פרק 4

### פתרון בודאו של בחינות 2020

1	מועד חורף
4	קיץ מועד א
8	קיץ מועד ב

## בגרות חורף 2020:

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ( $33\frac{1}{3}$  נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

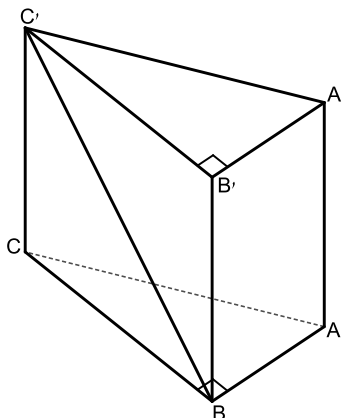
שים לב! אם תענה על שתי השאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(1) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא  $\frac{1}{4}$  וסכומה  $9\frac{1}{3}$ .

- מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- בין כל שני איברים סמוכים בסדרה הוסיפו איבר חדש כך שהתקבלה סדרה הנדסית אין-סופית חדשה, בכל האיברים בה חיוביים.
- מהי המנה של הסדרה החדשה? נמק.
- עבור כל אחת מן הטענות i-ii שלפניך קבע אם היא נכונה או אינה נכונה. נמק את קביעותיך.
  - האיבר החמישי בסדרה החדשה שווה לאיבר העשירי בסדרה הנתונה.
  - סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה החדשה הוא  $\frac{1}{2}$  מסכום הסדרה הנתונה.

(2)  $ABCA'B'C'$  היא מנסרה משולשת ישרה (ראה ציור).

בסיס המנסרה,  $ABC$ , הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים ( $AB = BC, \angle ABC = 90^\circ$ ). נתון כי גובה המנסה הוא 8 ואורך היתר של בסיס המנסרה שווה ל- $4\sqrt{2}$ .



- מצא את גודל הזווית בין אלכסון הפאה הצדדית  $BB'C'C$  ובין בסיס המנסרה.
- מצא את גודל הזווית  $AC'B$ .
- מצא את שטח המשולש  $AC'B$ .

- הנקודה D היא אמצע הצלע CB.
- חשב את אורך הקטע  $A'D$ .

**פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה (  $\frac{2}{3}$  נקודות)**

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

**(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin 2x$ , המוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .**

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה הפונקציה  $g(x) = 2\sin x$ , המוגדרת גם היא בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $g(x)$

עם גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. נתון: בתחום הנתון, מלבד הנקודות שמצאת בסעיף ב, גרף הפונקציה  $g(x)$

נמצא מעל גרף הפונקציה  $f(x)$ .

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  בתחום הנתון.

**(4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 9 - (\ln x)^2$ .**

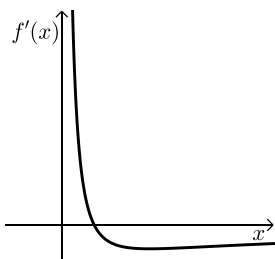
א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ?

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים

(אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגה.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .



הציור שלפניך מתאר את הגרף של פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ .

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית

הנגזרת,  $f'(x)$ , על ידי הישר  $x = e$  ועל ידי ציר ה- $x$ .

5) הכמות של חומר רדיואקטיבי דועכת בקצב מעריכי. ביום מסוים נמדדה כמות התחלתית של חומר זה.

שנה לאחר יום המדידה הראשון נשארה מן החומר כמות של  $\left(\frac{1}{3}\right)^2$  ק"ג.

5 שנים לאחר יום המדידה הראשון נשארה מן החומר כמות של  $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$  ק"ג.

א. מצא את קצב הדעיכה של החומר ואת הכמות התחלתית שלו.

נתונה הפונקציה:  $g(x) = 3^{-2x}$  המוגדרת לכל  $x \geq 0$ .

הפונקציה  $g(x)$  מתארת את כמות החומר  $x$  שנים לאחר יום המדידה הראשון.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $g(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$  (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$  בעבור  $x \geq 0$ .

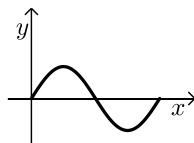
### תשובות סופיות:

- |   |                     |  |                      |
|---|---------------------|--|----------------------|
| ג. ii. כן.  | ג. i. לא.           | ב. 0.5   | א. 7 (1)             |
| ד. $\sqrt{84}$ סמ"ר.  | ג. $8\sqrt{5}$ סמ"ר | ב. $24.09^\circ$   | א. $63.43^\circ$ (2) |
| א. (2) $\max\left(\frac{\pi}{4}, 1\right), \min\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$ |                     | א. (1) $(\pi, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), (0, 0)$ (3) |                      |

א. (3) להלן סקיצה בצד:

ב.  $(0, 0), (\pi, 0)$

ג. 4 יח"ר.

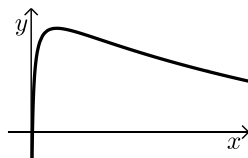


א. (1)  $x > 0$  (4) א. (2)  $(e^3, 0), \left(\frac{1}{e^3}, 0\right)$

א. (3)  $\max(1, 9)$

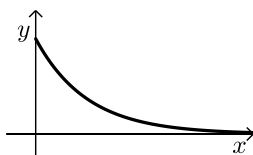
א. (4) להלן סקיצה בצד:

ב. 1 יח"ר.



א.  $M_0 = 1, q = \frac{1}{9}$  (5) ב.  $(0, 1)$  ג. ירידה:  $x > 0$ , אין עלייה.

ד. להלן סקיצה בצד:



## בגרות קיץ 2020 מועד א':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ( $33\frac{1}{3}$  נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על שתי השאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) נתונים האיברים הכלליים של שתי סדרות:  $a_n = -8n + 5$ ,  $b_n = -4n + 3$ .

א. מצא את  $a_1$  ואת  $b_1$ .

נתונה סדרה חדשה,  $c_n$ , כך ש-  $c_n = a_n + b_n$ .

ב. הוכח כי הסדרה  $c_n$  היא סדרה חשבונית, ומצא את האיבר הראשון שלה,  $c_1$ , ואת ההפרש שלה.

ג. נתון:  $a_k = -75$ .

חשב את סכום  $k$  האיברים הראשונים של הסדרה החדשה,  $c_n$ .

2) SABCD היא פירמידה ישרה שבסיסה, ABCD, הוא מלבן (ראה ציור).

נתון כי אורך אלכסון הבסיס הוא  $4a$  ואורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא  $3a$ .

$a > 0$  הוא פרמטר.

SO הוא גובה בפירמידה.

א. הבע באמצעות  $a$  את אורך הגובה SO.

SE הוא הגובה לצלע BC בפאה SBC.

נתון:  $\angle CAB = 60^\circ$ .

ב. (1) הבע את אורך הצלע AB באמצעות  $a$ .

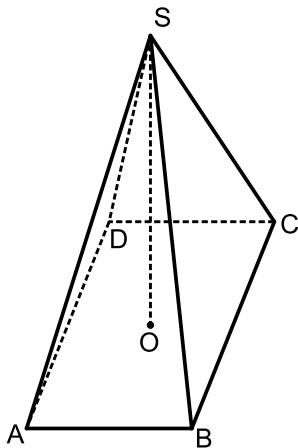
(2) הבע באמצעות  $a$  את אורך הגובה SE.

ג. חשב את הזווית שבין הקטע SE ובין בסיס הפירמידה.

SG הוא הגובה לצלע AD בפאה SAD.

נתון כי שטח המשולש SGE הוא  $\sqrt{80}$ .

ד. מצא את  $a$ .



**פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ( $\frac{2}{3}$  נקודות) 66**

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

**(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ , המוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ .**

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום הנתון.

א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

ב. מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ ?

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודת המינימום הפנימית שלה.

ה. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי המשיק שאת משוואתו מצאת ועל ידי ציר ה- $y$ .

**(4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x \cdot \ln x$ .**

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ה. נתונה הפונקציה:  $g(x) = -2f(x)$ , שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

א. הוסף סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$  למערכת הצירים שבה סרטטת את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. מהו המרחק בין נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  ובין נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ ?

5 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ae^{2x}}{e^x - 1}$ .  $a$  הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

הגרף שלפניך הוא הגרף של פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ , והוא חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = \ln 2$ .

ב. הסתמך על הגרף, קבע מהו שיעור ה- $x$  של נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגה.

נתון: שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = \ln 3$  הוא 9.

ג. מצא את  $a$ .

הצב  $a = 4$  וענה על הסעיפים ד-ה.

ד. (1) האם לגרף הפונקציה  $f(x)$  יש נקודות

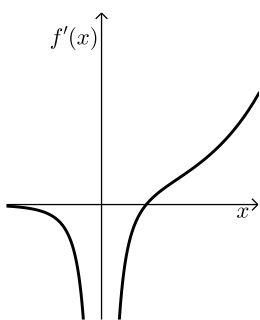
חיתוך עם הצירים? נמק.

(2) מהי משוואת האסימפטוטה של הפונקציה  $f(x)$

המאונכת לציר ה- $x$ ?

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ה. בעבור אילו ערכי  $x$  גם הפונקציה  $f(x)$  שלילית וגם הפונקציה  $f'(x)$  שלילית?

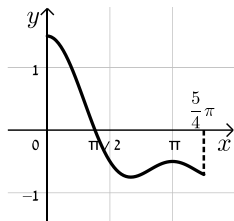


תשובות סופיות:

א.  $a_1 = -3, b_1 = -1$  ב. הוכחה. ג. -580. (1)

א.  $SO = a\sqrt{5}$  ב.  $AB = 2a$  (1) ג.  $SE = a\sqrt{6}$  (2) ד.  $a = 2$ . (2)

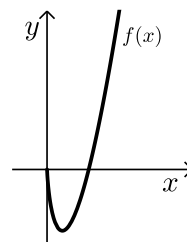
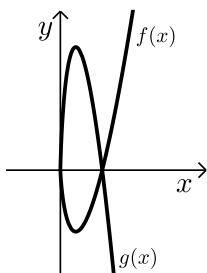
א.  $\max\left(\frac{5}{4}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  קצה,  $\min\left(\frac{2}{5}\pi, \frac{3}{4}\right)$  קצה, ב. להלן סקיצה: (3)



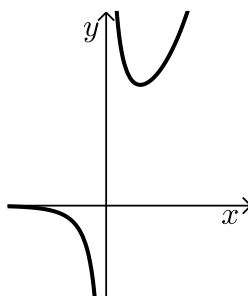
א.  $y = -\frac{3}{4}$  (1) ג.  $S = 2.22$  (2)

א.  $x > 0$  (1) א.  $(1, 0)$  (2) א.  $\min\left(\frac{1}{e}, -\frac{4}{e}\right)$  (3) ג.  $d = \frac{12}{e} \approx 4.414$

א. (4) להלן סקיצה: ב. להלן סקיצה:



א.  $x \neq 0$  (5) ב.  $\min, x = \ln 2$  ד. (3) סקיצה. ג.  $a = 4$  ד. (1) לא. ד.  $x = 0$  (2) ה.  $x < 0$





## בגרות קיץ 2020 מועד ב':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ( $33\frac{1}{3}$  נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על שתי השאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1 נתונות שתי סדרות חשבוניות: (1)

$$a_n : 3, 10, 17, 24, \dots$$

$$b_n : 17, 38, 59, 80, \dots$$

א. (1) חשב את  $b_{30}$ .

ב. (2) עבור איזה ערך של  $n$  מתקיים  $a_n = b_{30}$ ? נמק. ( $n$  הוא מספר טבעי).

ג. עבור כל אחד משני ההיגדים II-I שלפניך כתוב אם הוא נכון או לא נכון. נמק את קביעותיך.

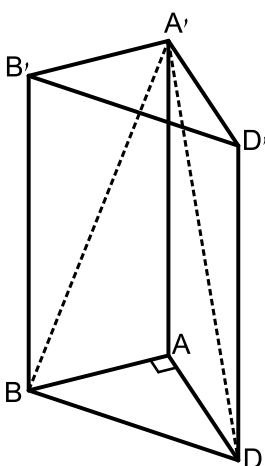
I. לכל  $n$  טבעי  $3a_n = b_n$ .

II. לכל  $n$  טבעי  $a_{3n} = b_n$ .

ד. נתון כי ההפרש בין סכום  $k$  האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$  ובין סכום  $k$

האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$  הוא 924 ( $k$  הוא מספר טבעי).

מצא את  $k$ .



2 נתונה מנסרה משולשת  $ABDA'B'D'$  שבסיסה  $ABD$ ,

הוא משולש שווה שוקיים וישר זווית ( $\angle BAD = 90^\circ$ ).

אורך השוק של משולש  $ABD$  הוא 3.

א. מצא את אורך המקצוע  $BD$ .

ב. הסבר מדוע  $AB = A'D$ .

נתון: שטח המשולש  $BA'D$  הוא  $15\sqrt{2}$ .

ג. מצא את גודל הזווית שבין הגובה לבסיס המשולש  $BA'D$

ובין בסיס המנסרה,  $ABD$ .

ד. חשב את נפח המנסרה  $ABDA'B'D'$ .

**פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ( $\frac{2}{3}$  נקודות)**

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה  $\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

**3** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin(2x) + 4$  המוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

- מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ , עם הצירים?
- סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ .
- חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ , על ידי ציר ה- $y$  ועל ידי הישר  $x = \pi$ .

**4** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{e^{2x}}{a-x}$ ,  $a$  הוא פרמטר.

- הבע באמצעות  $a$  את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
  - נתון: לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת קיצון בנקודה ששיעור ה- $x$  שלה הוא 1.
  - מצא את  $a$ , וקבע אם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודות קיצון נוספות.
- הצב:  $a = \frac{1}{2}$  בפונקציה  $f(x)$ , וענה על סעיפים ג-ד.
- כתוב את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה  $f(x)$ , המאונכת לציר ה- $x$ .
  - מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).
  - מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
  - נתונה הפונקציה:  $g(x) = -2f(x)$ .
  - מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$  (אם יש כאלה). נמק.

5 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 5 \cdot \ln(x^2 - 2x + 1)$ .

א. הראה כי תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$  הוא  $x \neq 1$ .

2 מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה  $f(x)$ , המאונכת לציר ה- $x$ .

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$  הוא  $x \neq 1$ .  $g'(x) = f(x)$  בכל תחום ההגדרה.

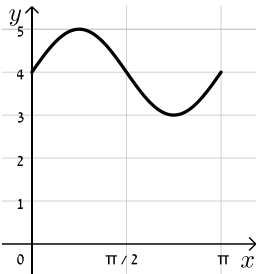
ה. מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , וקבע את סוגן.

### תשובות סופיות:

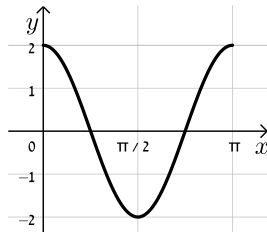
1 א.  $b_{30} = 626$  (1) א.  $n = 90$  (2) ב. I לא נכון. II נכון. ג.  $k = 11$ .

2 א.  $BD = 3\sqrt{2}$  ב. הסבר. ג.  $\angle AEA = 77.75^\circ$  ד. 43.976 יח"נ.

3 א.  $\max(\pi, 4)$  קצה,  $\min\left(\frac{3}{4}\pi, 3\right)$ ,  $\max\left(\frac{\pi}{4}, 5\right)$ ,  $\min(0, 4)$  קצה ב. להלן סקיצה:



ד. להלן סקיצה:



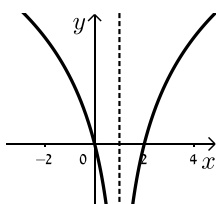
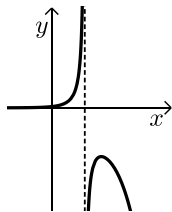
ג.  $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ ,  $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ ,  $(0, 2)$

ה.  $S = 4\pi$ .

4 א.  $x \neq a$  ב.  $a = 1$ ,  $\max(1, -2e^2)$  ג. (1)  $x = \frac{1}{2}$

ג. (2)  $(0, 2)$  ג. (3) עולה:  $\frac{1}{2} < x < 1$ , יורדת:  $x > 1$ .

ד.  $\min(1, 4e^2)$  ג. (4) סקיצה בצד.



5 א. (1) הוכחה. א. (2)  $x = 1$  ב. עולה:  $x > 1$ , יורדת:  $x < 1$ .

ג.  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  ד. סקיצה בצד.

ה.  $x_{\max} = 0$ ,  $x_{\min} = 2$ .