

# פתרון בגריות במתמטיקה לשאלון 582

## פרק 7

### פתרון בודאו של בחינות 2017

1	מועד חורף
5	קיץ מועד א
10	קיץ מועד ב

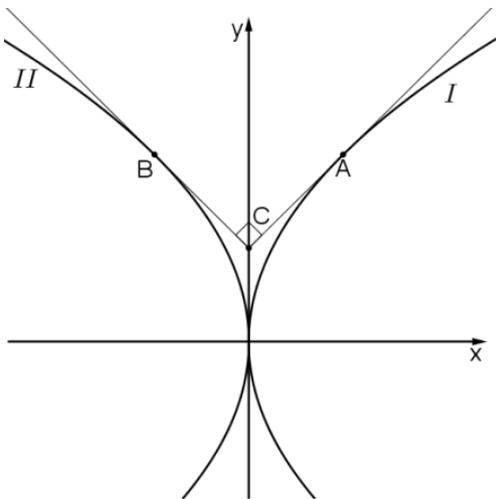
## בגרות חורף 2017:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ( $66\frac{2}{3}$  נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



(1) נתונות שתי פרבולות:

$$I. y^2 = 4x$$

$$II. y^2 = -4x$$

A היא נקודה על פרבולה I.

B היא נקודה על פרבולה II.

הנקודות A ו-B נמצאות על ציר ה-x.

העבירו לפרבולות I ו-II משיקים דרך

הנקודות A ו-B, בהתאמה, כמתואר בציור.

נתון ששני המשיקים מאונכים זה לזה

ונחתכים בנקודה C, הנמצאת על ציר ה-y.

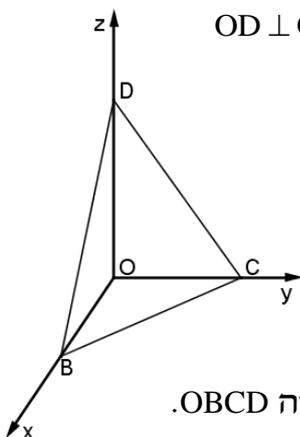
א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. נתון: A, B, C, הם שלושה מקדקודיו של ריבוע ACBM.

(1) מצא את שיעורי הקדקוד M.

(2) נתון מעגל שמערכו M. המעגל משיק לישרים AC ו-BC.

מצא את משוואת המעגל, והסבר מדוע A ו-B הן נקודות ההשקה.



(2) נתונה פירמידה משולש OBCD שבה  $OD \perp OC$ ,  $OC \perp OB$ ,  $OB \perp OD$

כמתואר בציור. נתון:  $OD = 6$ ,  $OC = 4$ ,  $OB = 3$ .

הנקודות K ו-P נמצאות על המקצועות OB

ו-OD בהתאמה, כך שמתקיים:

$$OP : PD = 1 : 1, \quad OK : KB = 2 : 1$$

דרך הנקודות K ו-P עובר מישור המקביל למקצוע CD

וחותך את OC בנקודה Q.

א. מצא את היחס בין OQ ל-QC. נמק את תשובתך.

ב. מצא את היחס בין נפח הפירמידה OKPQ לנפח הפירמידה OBCD.

ג. מצא את הזווית בין הישר CB למישור KPQ.

3)  $z$  הוא מספר מרוכב. נתונים שני מקומות גיאומטריים:

$$I. \quad z\bar{z} + i(z - \bar{z}) + z + \bar{z} = 0 \quad II. \quad |z|^2 + i(\bar{z} - z) = 0$$

א. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.

המקומות הגאומטריים הנתונים נחתכים בשתי נקודות  $A(x_1, y_1)$

ו-  $B(x_2, y_2)$  ( $x_1 < x_2$ ).

ב. מצא את השיעורים של הנקודות A ו-B.

ג. נתונה הנקודה  $P(x_0, y_0)$ . הנקודה P נמצאת במרחק שווה מכל הנקודות

שעל המקום הגאומטרי I. נתון:  $z_0 = x_0 + y_0 \cdot i$ .

הוכח שהמספר הצמוד ל-  $z_0$  נמצא על המקום הגאומטרי II.

ד. נתון:  $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$  הם שיעורי הנקודה A שמצאת בסעיף ב).

נתונה סדרה חשבונית שבה האיבר הראשון הוא  $5z_1$  וההפרש הוא  $z_0$ .

מצא את כל ערכי  $n$  שעבורם  $S_n$  (סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה)

הוא מספר ממשי (אם יש כאלה).

### פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

#### ולוגריתמיות ( $33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{ax^2+bx+2}$ ,  $a$  ו-  $b$  הם פרמטרים.

נתון כי הפונקציה היא זוגית.

א. מצא את  $b$ .

לפונקציה יש בדיוק שתי נקודות פיתול.

ב. הוכח כי  $a < 0$ .

ג. הפונקציה הנתונה קעורה כלפי מטה  $\cap$  בתחום:  $-0.5 < x < 0.5$  וקעורה

כלפי מעלה  $\cup$  בתחומים:  $x > 0.5$  ו-  $x < -0.5$ .

ד. מצא את  $a$ .

ה. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ו. סרטט סקיצה של גרף הנגזרת  $f'(x)$ .

ז. נתונה הפונקציה  $h(x) = f'(x) \cdot f''(x)$ . מהו התחום שבו הפונקציה  $h(x)$  חיובית?

5 נתונות שתי פונקציות:

$$f(x) = \ln(ae^x - be^{2x}), g(x) = \ln(2 - e^x)$$

הם פרמטרים. נתון:  $b > 0, a > 0$ .

ידוע שלשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה. הוכח:  $a = 2b$ .  
ידוע שלשתי הפונקציות יש נקודה משותפת אחת בלבד.

נקודה זו היא נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה  $f(x)$ .

א. חשב את  $a$ , את  $b$  ואת שיעורי נקודת הקיצון של  $f(x)$ .

ב. הוכח כי  $g(x)$  יורדת וקעורה כלפי מטה  $\cap$  בכל תחום הגדרתה.

ג. הוכח שההפרש בין הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  הוא פונקציה קווית.

ד. (1) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  (אם יש כאלה).

(2) סרטט על מערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של שתי הפונקציות.

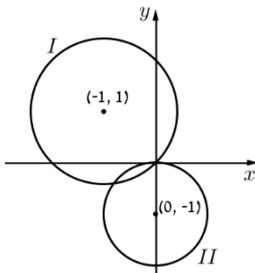
בסרטוט הדגש את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

תשובות סופיות:

(1) א.  $A(1,2), B(-1,2)$  ב. i.  $M(0,3)$  ב. ii.  $x^2 + (y-3)^2 = 2$

(2) א. 1 ב.  $\frac{1}{6}$  ג.  $7.35^\circ$

(3) א. סקיצה בצד. ב.  $A(-0.8, -0.4), B(0,0)$

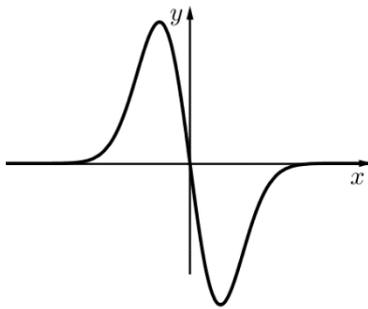


ג. הוכחה

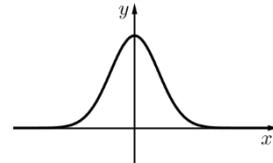
ד.  $n = 5$

(4) א.  $b = 0$  ב. הוכחה ג.  $a = -2$  ד. i.  $y = 0$

ה. להלן סקיצה:



ד. ii. להלן סקיצה:



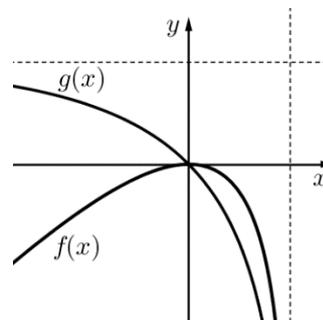
ו.  $0 < x < \frac{1}{2}, x < -\frac{1}{2}$

(5) א. הוכחה

ב.  $a = 2, b = 1, \max(0,0)$

ה. i.  $f(x): x = \ln 2, g(x): y = \ln 2, x = \ln 2$

ה. ii. להלן סקיצה:



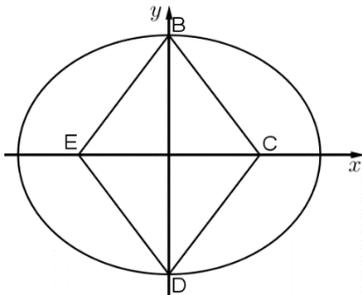
## בגרות קיץ 2017 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ( $66\frac{2}{3}$  נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



1) נתון מעוין BCDE.

הקדקודים B ו-D נמצאים על ציר ה- $y$ .

הקדקודים C ו-E נמצאים על ציר ה- $x$ .

נתון: אורך צלע המעוין הוא 5,

אורך גובהו הוא 4.8 ואורך האלכסון BD

גדול מאורך האלכסון CE.

דרך הקדקודים B ו-D עוברת אליפסה קנונית

(ראה ציור), שמוקדה הם הנקודות C ו-E.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את השיעורים של קדקודי המעוין.

ii. מצא את משוואת האליפסה.

פרבולה שמשוואתה  $y^2 = 2px$  חותכת את האליפסה ברביע הראשון בנקודה M.

נתון: שיעור ה- $y$  של M הוא  $\sqrt{15}$ .

ב. הוכח שמוקד הפרבולה נמצא בנקודה C.

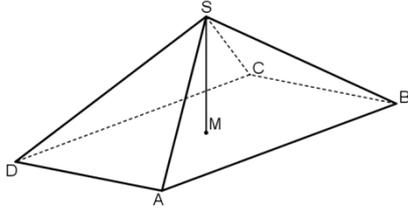
ג. דרך הנקודה E מעבירים ישר המקביל לציר ה- $y$ .

P היא נקודה על הפרבולה שמרחקה מהישר הזה הוא  $k$ .

מצא את היחס  $\frac{PC}{k}$ . הסבר.

2) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ABCD הוא ריבוע.

$$\vec{SM} = \frac{1}{2}\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{SC}$$



א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הוכח:  $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

ii. הוכח ש- $\vec{SM}$  מאונך ל- $\vec{AC}$ .

iii. נמק מדוע SM הוא גובה בפירמידה.

נתון:  $A(\sqrt{3}, 1, 0)$ ,  $C(-\sqrt{3}, -1, 0)$ , הנקודות B ו-D נמצאות במישור  $z = 0$

ונפח הפירמידה SABCD הוא 16.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את שיעורי הנקודה M.

ii. מצא את שיעורי הקדקוד S (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הנקודות שמצאת בתת-סעיף ב (ii) ב- $S_1$  וב- $S_2$ .

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת המישור  $AS_1S_2$ .

ii. האם הנקודה C נמצאת על המישור  $AS_1S_2$ ? נמק.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את המספרים המרוכבים  $z$  המקיימים  $z^3 = -1$ .

נסמן את פתרונות המשוואה מסעיף א ב- $z_1, z_2, z_3$ .

נתון כי  $z_2$  הוא ממשי.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה ש- $z_1, z_2, z_3$  הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.

ii.  $z_1, z_2, z_3$  הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית  $z_n$ .

מצא את  $z_5$ , האיבר החמישי בסדרה.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i.  $z_{13}, z_{14}, z_{15}$  (האיברים ה-13, ה-14 וה-15 בסדרה  $z_n$  שמצאת בסעיף ב)

מיוצגים על ידי הנקודה A, B ו-C במישור גאוס, בהתאמה.

חשב את שטח המשולש ABC.

ii. L, K ו-M הן שלוש נקודות במישור גאוס המייצגות שלושה איברים עוקבים

בסדרה  $z_n$ . הסבר מדוע המשולש KLM חופף למשולש שאת שטחו מצאת

בתת סעיף ג (i).

**פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות**

**ולוגריתמיות ( $33\frac{1}{3}$  נקודות)**

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^{x^2} - 2x}{e^{x^2}}$

א. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ii. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגן.
- iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .
- iv. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
- v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה הפונקציה:  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

היעזר בתשובותיך על סעיף א וענה על סעיף ב.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. הסבר מדוע הפונקציה  $g(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .
- ii. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , ומה סוגן? נמק את תשובתך.
- iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$ .
- iv. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $g(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה). נמק את תשובתך.
- v. הוסף לסרטוט של גרף הפונקציה  $f(x)$  סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

(5) נתונה הפונקציה:  $h(x) = \frac{x+3}{x}$

א. מצא את תחום ההגדרה של  $h(x)$ .

ב. מצא את התחום שבו  $h(x) > 0$ .

בתחום שבו  $h(x) > 0$  נתונה הפונקציה  $f(x)$  המקיימת:  $f'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$ .

נתון שגרף הפונקציה  $f(x)$  עובר דרך הנקודה  $(3, \ln 2)$ , וידוע שלפונקציה  $f(x)$  יש אסימפטוטה אופקית אחת.

ג. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ד. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

### תשובות סופיות:

(1) א. (i)  $B(0,4), C(3,0), D(0,-4), E(-3,0)$       א. (ii)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

ב. מוקד הפרבולה  $C(3,0)$       ג.  $\frac{PC}{k} = 1$

(2) א. (i) הוכחה      א. (ii) הוכחה.

א. (iii) שמחברים את קדקוד הפירמידה הישרה עם מרכז המעגל החוסם את

הבסיס מקבלים את גובה הפירמידה.      ב. (i)  $M(0,0,0)$

ב. (ii)  $S(0,0,6)$  או  $S(0,0,-6)$

ג. (i)  $x - \sqrt{3}y = 0$       ג. (ii)  $C$  נמצאת על המישור.

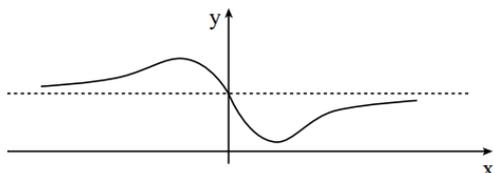
(3) א.  $z_1 = \text{cis}60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $z_2 = \text{cis}180^\circ = -1$ ,  $z_3 = \text{cis}300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ב. (i) הוכחה.      ב. (ii)  $z_5 = \text{cis}180^\circ = -1$       ג. (i)  $S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

(4) א. (i) לכל  $x$  . א. (ii)  $\min\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0.142\right), \max\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1.858\right)$  .

א. (iii) עלייה:  $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ירידה:  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$  .

א. (iv)  $y = 1$  . א. (v) להלן סקיצה:

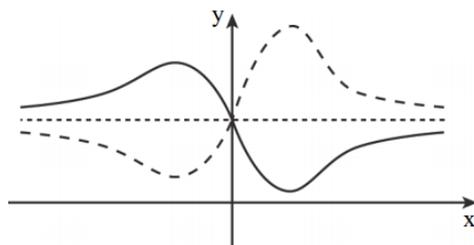


ב. (i)  $f(x)$  שונה לכל  $x$ ,  $\frac{1}{f(x)}$  שונה לכל  $x$  .

ב. (ii)  $\min\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0.538\right), \max\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 7.031\right)$  .

ב. (iii) עלייה:  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ירידה:  $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$  . ב. (iv)  $y = 1$  .

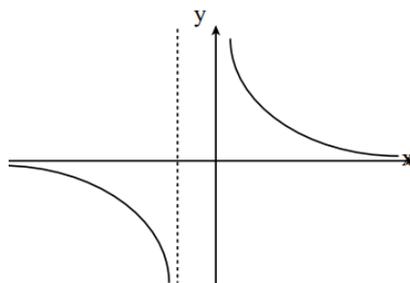
ב. (v) להלן סקיצה:



(5) א.  $x \neq 0$  . ב.  $x < -3, x > 0$  . ג.  $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x}\right)$  .

ד.  $y = 0, x = -3, x = 0$  . ה. ירידה:  $x < -3, x > 0$ , עלייה: אף  $x$  .

ו. להלן סקיצה:



## בגרות קיץ 2017 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ( $66\frac{2}{3}$  נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1 נתונה הנקודה  $A(20,0)$ .

B היא נקודה שנמצאת על ציר ה- $y$  ואינה ראשית הצירים.

דרך הנקודה B מעבירים ישר  $l_1$ , המקביל לציר ה- $x$ .

דרך ראשית הצירים O, מעבירים ישר  $l_2$ , שמאונך לישר AB.

הישרים  $l_1$  ו- $l_2$  נחתכים בנקודה C.

א. הוכח שהמקום הגאומטרי של הנקודות C הנבנות כמתואר נמצא על פרבולה, ומצא את משוואתה.

ב. D היא נקודה כלשהי הנמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת בסעיף א.

הנקודה F היא מוקד הפרבולה. נתון הישר  $x=k$ ,  $k < 0$  הוא פרמטר.

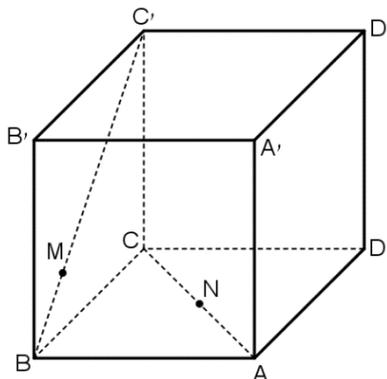
דרך הנקודה D העבירו ישר המקביל לציר ה- $x$  וחותך את הישר  $x=k$  בנקודה N.

קיים ערך של  $k$  שעבורו כל משולש NDF שנבנה כמתואר הוא שווה שוקיים.

i. מצא את הערך של  $k$ . נמק.

ii. נתון: הנקודה D נמצאת ברביע הראשון.

מצא את שיעורי הנקודה D שעבורה המשולש NDF הוא שווה צלעות.



2 נתונה קובייה ABCDA'B'C'D'

נסמן:  $\vec{CC'} = \vec{w}$ ,  $\vec{CD} = \vec{v}$ ,  $\vec{CB} = \vec{u}$

נתון:  $\vec{BM} = t \cdot \vec{BC'}$ ,  $\vec{AN} = s \cdot \vec{AC}$

א. מצא את היחס  $\frac{s}{t}$  שעבורו MN

מקביל למישור AA'B'B ( $t \neq 0$ ).

נתון:  $t = \frac{1}{4}$ ,  $s = \frac{1}{2}$

ב. חשב את הזווית שבין MN ובין המישור ABCD.

ג. מהו המצב ההדדי של הישרים AB ו-MN? נמק.

- (3) במעגל שמרכזו בראשית הצירים במישור גאוס חסום משולש שווה צלעות ABC. הקדקוד A מתאים למספר המרוכב:  $z_1 = a - \sqrt{3} \cdot a \cdot i$  ( $a > 0$  הוא פרמטר ממשי). נתון: הקדקוד B נמצא ברביע הראשון.
- א. הבע באמצעות  $a$  את המספרים המרוכבים  $z_2$  ו- $z_3$  המתאימים לקדקודים B ו-C בהתאמה.
- נתון:  $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$ .
- ב. מצא את  $a$ .
- ג. המספר  $z_1^{6n+5}$  מתאים לנקודה P במישור גאוס.  $n$  הוא מספר שלם. הנקודה O היא ראשית הצירים. הראה שהנקודה B נמצאת על הקרן OP.

### פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות

#### ולוגריתמיות ( $33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- (4) נתונה הפונקציה  $g(x) = 2x^2 + c$ .  $c$  הוא פרמטר. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת כך:  $f(x) = e^{g(x)}$ . הגרפים של פונקציות הנגזרת,  $f'(x)$  ו- $g'(x)$ , נחתכים בנקודה ששיעור ה- $x$  שלה הוא 2.
- א. מצא את  $c$ .
- ב. ענה על הסעיפים הבאים:
- i. הוכח ש- $f'(x)$  היא פונקציה אי-זוגית.
- ii. מצא את שיעורי כל הנקודות בהן הגרפים של הפונקציות  $f'(x)$  ו- $g'(x)$  חותכים זה את זה.
- iii. עבור אילו ערכי  $x$   $f'(x) > g'(x)$ ?
- iv. סרטט סקיצה של הגרפים של הפונקציות  $f'(x)$  ו- $g'(x)$  באותה מערכת צירים.
- ג. נתון:  $M(2,8)$ ,  $N(-2,-8)$ .
- MN הוא אלכסון של מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. הראה שגרף הפונקציה  $f'(x)$  מחלק את המלבן לשני חלקים שווים בשטחם.

5 נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + m \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ . הוא פרמטר  $m$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
נתון שלפונקציה  $f(x)$  יש נקודת קיצון.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום הערכים של  $m$ .

ii. הבע את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  באמצעות  $m$ ,  
וקבע את סוגה.

ג. הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  ושיעוריה אינם תלויים ב- $m$ .

i. מצא את שיעורי הנקודה P.

ii. מצא את הערך של  $m$  שעבורו הנקודה P היא נקודת המינימום  
של הפונקציה  $f(x)$ .

הצב את  $m$  שמצאת בתת-סעיף ג (ii) וענה על הסעיפים ד-ה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ה. נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{f(x) - x}{x}$ . חשב את  $\int_1^e g(x) dx$ .

### תשובות סופיות:

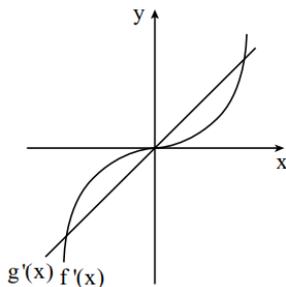
1 א.  $y^2 = 20x$  ב. (i)  $k = -5$  ב. (ii)  $D(15, 10\sqrt{3})$  ג. מצטלבים.

2 א.  $\frac{s}{t} = 1$  ב.  $24.09^\circ$  ג. מצטלבים.

3 א.  $z_1 = a - \sqrt{3}ai = 2a \cdot \text{cis}300^\circ$ ,  $z_2 = a + \sqrt{3}ai = 2a \cdot \text{cis}60^\circ$ ,  $z_3 = -2ai = 2a \cdot \text{cis}180^\circ$  ב.  $a = 1$  ג. הוכחה.

4 א.  $c = -8$  ב. (i) הוכחה ב. (ii)  $(0, 0)$ ,  $(2, 8)$ ,  $(-2, -8)$  ג. הוכחה.  
ב. (iii)  $-2 < x < 0$ ,  $x > 2$  ג. הוכחה.

ב. (iv) להלן סקיצה:



5 א.  $x > 0$  ב. (i)  $m > 0$  ג. (ii)  $\min(m, m(1 - \ln m))$  ג. (i)  $P(1, 1)$  ד. להלן סקיצה: ה.  $-\frac{1}{2}$

ג. (ii)  $\min(m, m(1 - \ln m))$

ג. (i)  $P(1, 1)$

ד. להלן סקיצה:

ה.  $-\frac{1}{2}$

