

פתרון בגרונות במתמטיקה לשאלון 582

פרק 9

פתרון בודאו של בחינות 2015

| | |
|---|------------|
| 1 | מועד חורף |
| 4 | קיץ מועד א |
| 7 | קיץ מועד ב |

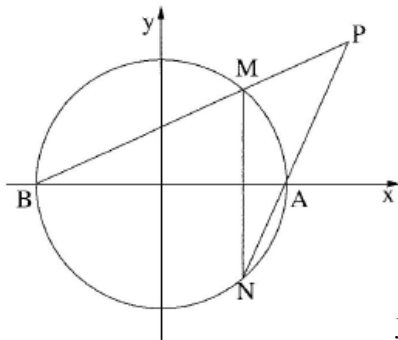
בגרות חורף 2015:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



(1) נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 25$.

המעגל חותך את ציר ה- x בנקודות A ו-B.

MN הוא מיתר במעגל, המאונך לציר ה- x .

א. הישרים MB ו-NA נפגשים

בנקודה $P(x, y)$ כמתואר בציור

(MN אינו מונח על ציר ה- y).

(1) נסמן: $M(x_0, y_0)$. הבע באמצעות x_0 ו- y_0

את משוואת הישר MB, ואת משוואת הישר NA.

(2) הראה כי המקום הגאומטרי של הנקודות $P(x, y)$, הנוצרות באופן

שתואר, מקיים את המשוואה: $y^2 = x^2 - 25$.

ב. אם המיתר MN מונח על ציר ה- y , מצא את רדיוס המעגל החסום

במרובע MBNA.

הערה: הפתרון של סעיף ב אינו תלוי בפתרון של סעיף א.

(2) נתון משולש שקדקודיו הם: $A(-10, 3, 11)$, $B(-2, -5, -5)$, $C(1, 1, 1)$.

גובה המשולש לצלע AB הוא CD.

א. מצא את השיעורים של הנקודה D.

ב. נתונה הנקודה $E(-1, 5, -2)$.

מהי הזווית בין הישר CE:

(1) לישר AB ?

(2) לישר BC ?

(3) למישור ABC ?

ג. חשב את הזווית בין הישר ED לבין המישור ABC. נמק.

3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה: $|z|i + 2z = \sqrt{3}$, z הוא מספר מרוכב

ב. המספר המרוכב z_1 הוא הפתרון של המשוואה שבסעיף א.

z_1 הוא קדקוד הראש של משולש שווה-שוקיים, החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים. z_2 ו- z_3 הם שני הקדקודים האחרים של המשולש.

נתון: $z_2 = 1$. המספר המרוכב w מקיים: $w = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$.

חשב את הסכום: $w + w^2 + w^3 + w^4 + \dots + w^{4n}$.

n הוא מספר טבעי.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2^{x-m} + 2^{m-x}}$ ונתונה הפונקציה $g(x)$

המקיימת: $g(x) = f'(x) \cdot f(x)$, $g(2) = -\frac{3}{4} \ln 2$, m הוא פרמטר.

ידוע כי הפונקציה $g(x)$ עולה לכל x .

מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הצירים (מצא ערך מספרי).

(5) נתונה פונקציית הנגזרת: $f'(x) = \frac{\ln(-x)+2}{x}$

א. מצא את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ וקבע את סוגה.

ג. מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה. לפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ יש אותו תחום הגדרה.

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$

היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא:
 (1) את תחום ההגדרה של $g(x)$.

(2) את השיעורים של נקודת הקיצון של $g(x)$, וקבע את סוגה.

תשובות סופיות:

(1) א. i. $MB: y = \frac{y_0}{x_0+5}x + \frac{5y_0}{x_0+5}$, $NA: y = \frac{y}{5-x_0}x - \frac{5y_0}{5-x_0}$

א. ii. הוכחה $\sqrt{12.5} = 3.535$ ב.

(2) א. $D(-4.5, -2.5, 0)$ ב. i. 90° ב. ii. 90° ב. iii. 90°

ג. 39.23°

(3) א. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ב. 0

(4) 3.0625

(5) א. $x < 0$ ב. $\min\left(-\frac{1}{e}, -e\right)$ ג. $x_{\min} = -\frac{1}{e^2}$

ד. i. $x \neq -\frac{1}{e^2}, x < 0$ ii. $\min\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

בגרות קיץ 2015 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) נתונה פרבולה המקיימת $y^2 = 2px$, $p > 0$.

נקודה D נמצאת על הפרבולה ברביע הראשון במרחק 8 מציר ה-x.

א. הבע באמצעות p את המרחק של הנקודה D מן המדריך של הפרבולה.

מעבירים שני מעגלים:

מעגל ראשון שמרכזו בנקודה D ורדיוסו $p+4$,

מעגל שני שמרכזו במוקד F של הפרבולה.

המעגל השני משיק מבחוץ למעגל הראשון ומשיק גם לציר ה-y.

ב. היעזר בסעיף א, ומצא את משוואת הפרבולה.

ג. נקודה K נמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת.

דרך הנקודה K העבירו משיק לפרבולה ואנך למשיק.

המשיק והאנך חותכים את ציר ה-x בנקודות T ו-S בהתאמה.

המרחק בין הנקודה T לנקודה S הוא 16.

מצא את השיעורים של הנקודה K. (מצא את שתי האפשרויות).

בתשובתך תוכל להשאיר שורש במידת הצורך.

(2) נתון ישר l שמשוואתו $\underline{x} = (1, 2, -4) + t(1, -2, 2)$.

מישור π מאונך לישר l , וחותך את ציר ה-x בנקודה A.

נקודה A נמצאת על הקרן החיובית של ציר ה-x במרחק 8 מראשית הצירים O.

נקודות B ו-C הן נקודות החיתוך של המישור π עם ציר ה-y ועם ציר ה-z בהתאמה.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את האורך של כל אחד מששת המקצועות של הפירמידה OABC.

ii. האם הפירמידה OABC היא ישרה? נמק.

ב. נקודה D נמצאת על הקטע AC כך ש-OD חוצה-זווית AOC.

מהו המצב ההדדי בין הישר OD לישר BC? נמק.

- 3) נתונה המשוואה $z^n = 8$, z הוא מספר מרוכב, $n > 2$.
- א. הוכח כי n הפתרונות של המשוואה הם קדקודים של מצולע משוכלל. המספרים z_0, z_1, z_2, z_3 הם ארבעה קדקודים עוקבים מבין n הקדקודים של המצולע שבסעיף א (לפי סדר המספרים הרשום).
 z_0 הוא מספר ממשי וחיובי. נמצא במישור גאוס ברביע הראשון.
 נתון: $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\sqrt{8}i$
 ב. מצא את הערך של n .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

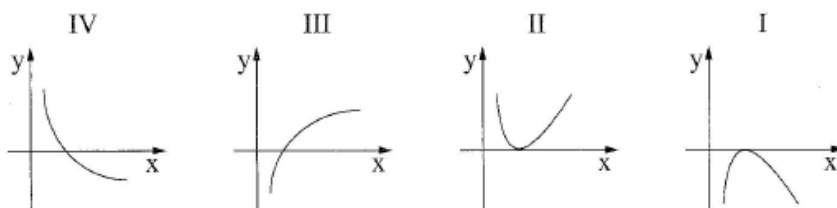
ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- 4) נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$ המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר גדול מ-0.
- א. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.
 ב. ענה על הסעיפים הבאים:
- i. הבע באמצעות a (במידת הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
 ii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=1$ ו- $x=-1$, אם נתון כי $a=2$.
 ד. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = [f(x)]^2$.
 מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

5 נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot x \cdot \ln x - x^2$, הוא פרמטר גדול מ-0.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. הראה כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד, והבע את שיעור ה- x שלה באמצעות a .
- ג. איזה מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניך מתאים לגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$? נמק.



ד. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. אם שיפוע המשיק בנקודת הפיתול של $f(x)$ שווה ל-0, מצא את הערך של a .
- ii. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור הערך של a שמצאת.
- iii. האם עבור הערך של a שמצאת, יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון? נמק.
- ה. מצא עבור אילו ערכים של a שיפוע המשיק בנקודת הפיתול של $f(x)$ גדול מ-0.

תשובות סופיות:

1. א. $\frac{32}{p} + \frac{p}{2}$ ב. $y^2 = 8x$ ג. $(6, -\sqrt{48}), (6, \sqrt{48})$

2. א. (i). $BC = \sqrt{32}, AB = AC = \sqrt{80}, BO = CO = 4, AO = 8$ א. (ii). הפרמידה אינה ישרה. ב. מצטלבים.

3. א. הוכחה. ב. $n = 8$

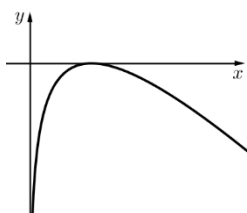
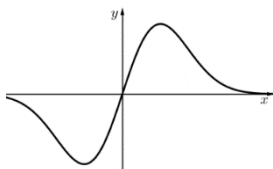
4. א. הוכחה. ב. (i). $\max\left(2, \frac{2a}{\sqrt{e}}\right), \min\left(-2, \frac{-2a}{\sqrt{e}}\right)$ ב. (ii). להלן סקיצה:

ג. 1.88 ד. $x_{\max} = -2, x_{\min} = 0, x_{\max} = 2$

5. א. $x > 0$ ב. $x = \frac{a}{2}$ ג. גרף IV.

ד. (i). $a = 2$ ד. (ii). להלן סקיצה:

ד. (iii). לא. ה. $a > 2$



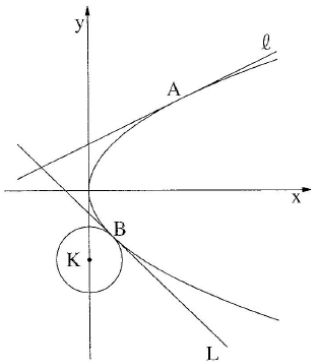
בגרות קיץ 2015 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



(1) נתונה הפרבולה $y^2 = 4x$.

הישרים l ו- L משיקים לפרבולה בנקודות A ו-B בהתאמה. הנקודה A נמצאת ברביע הראשון והנקודה B נמצאת ברביע הרביעי, כמתואר בציור. המשיקים נפגשים בנקודה $(-2, 1)$.

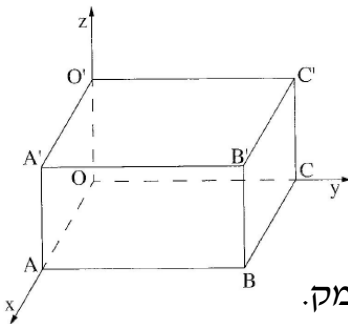
א. מצא את השיעורים של הנקודה A, ואת השיעורים של הנקודה B.

ב. הפרבולה משיקה בנקודה B למעגל שמרכזו K ונמצא על ציר ה- y (ראה ציור). מעגל שמרכזו M משיק לציר ה- y בראשית הצירים ומשיק מבחוץ למעגל שמרכזו K. המרכז M נמצא משמאל לציר ה- y .

i. מצא את השיעורים של המרכז K.

ii. מצא את משוואת המעגל שמרכזו M.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.



(2) המקצועות OA, OC ו- OO' של התיבה $OABCO'A'B'C'$ מונחים על הצירים כמתואר בציור.

נתון כי המישור $2x + y + 2z - 2m = 0$

עובר דרך הקדקודים A, C, O' . m הוא פרמטר גדול מ-0.

א. האם הישר BC' מקביל למישור הנתון או חותך אותו? נמק.

ב. הישר $O'M$ נמצא במישור הנתון, ואינו מתלכד עם הישר $O'A$.

i. האם הישרים BC' ו- $O'M$ מקבילים? נמק.

ii. הבע באמצעות m את המרחק בין הישרים BC' ו- $O'M$.

דרך הקדקודים C' ו-B העבירו אנכים למישור ACO' .

האנכים חותכים את המישור בנקודות E ו-F. אורך הקטע EF הוא $2\sqrt{2}$.

ג. מצא את הערך של m .

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. סרטט במערכת צירים את המקום הגאומטרי המקיים: $|z^2 - 3i| = |z^2 - i|$.

z הוא מספר מרוכב.

ב. שני מספרים מרוכבים שונים, z_1 ו- z_2 , נמצאים על המקום הגיאומטרי שסרטטת.

המרחק של z_1 מראשית הצירים שווה למרחק של z_2 מהראשית.

נתון: $z_1 = 1 + iy_1$ (הוא מספר ממשי). מצא את הארגומנט של z_2 .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = \ln \frac{a+x}{a-x}$. a הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

i. את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ii. את שתי האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .

iii. את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

iv. את השיעורים של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. הישר $y = x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה.

לפונקציה $f(x)$ ולפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש אותו תחום הגדרה.

סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ציין בגרף את הערכים המספריים של האסימפטוטות ושל נקודות החיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).

5 נתונה הפונקציה $f(x) = -\frac{4e^x}{e^x - 2} + e^x + 4$

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ii. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

iv. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$, על ידי

הישר $x = -1$, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y .

ג. נתונה פונקציה המקיימת $F(x) = \int f(x) dx$ בתחום $x > \ln 2$.

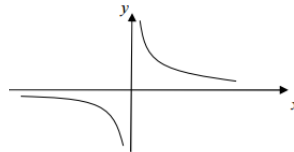
מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $F(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

תשובות סופיות:

1 א. $A(4,4)$, $B(1,-2)$ ב. (i) $K(0,-3)$ ב. (ii) $(x+2.47)^2 + y^2 = 6.125$

2 א. מקביל. ב. (i) מצטלבים. ב. (ii) $\frac{2m}{3}$ ג. 2

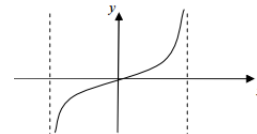
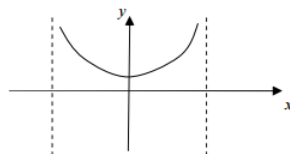
3 א. להלן סקיצה: ב. 225°



4 א. (i) $-a < x < a$ א. (ii) $x = a$, $x = -a$

א. (iii) עלייה: $-a < x < a$, ירידה: אין. א. (iv) $(0,0)$

ב. להלן סקיצה: ג. להלן סקיצה:



5 א. (i) $x \neq 0.693$ א. (ii) $y = 4$ (עבור $x \rightarrow -\infty$), $x = 0.693$

א. (iii) עלייה: $x > 0.693$, $x < 0.693$, ירידה: אין.

א. (iv) $(0,9)$, $(1.386,0)$ א. (v) להלן סקיצה:

ב. 6.59 ג. $x_{\min} = 1.386$

