תרגול 5 יחידות לתלמידי קידום

פרק 69

שאלון 807 בגרויות שנת 2023

חורף 1
קיץ מועד א 6
קיץ מועד ב 11
קיץ מועד מיוחד 16

בגרות 2023 מועד חורף:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

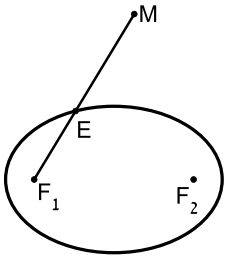
1) נתונה אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$, b הוא פרמטר חיובי.

ידוע כי המוקדים של האליפסה נמצאים על ציר ה- x.

נסמן את נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y ב- D_1 ו- D_2,

את המוקד השמאלי של האליפסה נסמן ב- F_1 ואת המוקד הימני שלה ב- F_2.

נתון כי המרובע $F_1D_1F_2D_2$ הוא ריבוע.



א. (1) מצאו את הערך של b.

(2) חשבו את שטח הריבוע $F_1D_1F_2D_2$.

הציבו במשוואת האליפסה $b^2=4.5$ וענו על סעיפים ב-ד.

נקודה E היא נקודה כלשהי על האליפסה.

מחברים באמצעות קו ישר את המוקד השמאלי F_1 עם הנקודה E

וממשיכים את הקו הישר עד לנקודה M (ראו סרטוט), כך שמתקיים $EM=EF_2$.

ב. הוכיחו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M הוא מעגל, ורשמו את משוואתו.

מזיזים את המעגל שמצאתם בסעיף ב ימינה ב- $\frac{3}{\sqrt{2}}$ יחידות, ומתקבל מעגל אחר.

מכפילים ב- $\frac{2}{3}$ את שיעור ה- y של כל אחת מן הנקודות שעל המעגל האחר,

ומתקבל עקום חדש.

ג. זהו את צורת העקום החדש, ומצאו את משוואתו.

נתון משולש ששניים מקודקודיו הם נקודות החיתוך של העקום החדש

עם ציר ה- x, והקודקוד הנוסף נמצא גם הוא על העקום החדש.

ד. מצאו את השטח הגדול ביותר האפשרי של המשולש.

נמקו את תשובתכם.

2) נתונים שני מישורים, π_1 ו-π_2:

$$\pi_1: \quad (k+2)x+y+(k+1)z+11=0$$
$$\pi_2: \quad (k+1)x+y+z-5=0$$

k הוא פרמטר.

א. הסבירו מדוע בהכרח שני המישורים נחתכים זה עם זה.

ידוע כי ישר החיתוך בין שני המישורים, ℓ_1, מקביל לישר $\ell_2: \underline{x}=(1,2,-1)+m(-1,k,k)$.

ב. (1) מצאו את הערך של k.

(2) מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ_1.

(3) מצאו את הזווית בין המישורים π_1 ו-π_2.

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ_1 ועל מישור $[yz]$.

הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של ציר ה-y עם המישורים π_1 ו-π_2 בהתאמה.

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודות P, A, ו-B.

(2) מצאו את שטח המשולש APB.

3) נתונה משוואה I: $w^6=-27$, כאשר w הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את משוואה I.

נתונה משוואה II: $\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6=-27$, כאשר z הוא מספר מרוכב.

ב. (1) היעזרו בפתרונות של משוואה I ורשמו בהצגה אלגברית את הפתרונות של משוואה II.

(2) הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס, המייצגות את הפתרונות של משוואה II, נמצאות על מעגל – ומצאו את משוואתו.

(3) הוכיחו כי כל הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס.

נתון: שני הפתרונות המדומים ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג. (1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

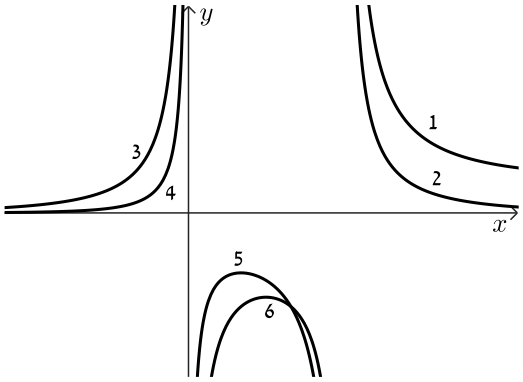
(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{5e^{x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}$, המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין גרף הפונקציה $g(x)$.

לפניכם סרטוט הגרפים של שתי הפונקציות, $f(x)$ ו-$g(x)$.
כל אחד מהחלקים של הגרפים מסומן בסרטוט בספרה אחרת.



ג. רשמו לאיזו פונקציה שייך כל אחד מהחלקים המסומנים בסרטוט.
נמקו את תשובתכם.

ד. לפניכם שני ביטויים, I-II. קבעו, בנוגע לכל אחד מהביטויים, אם הוא שלילי או חיובי. נמקו <u>ללא חישוב</u>.

I. $\int_{-4}^{-1}\left(f(x)-g(x)\right)dx$ II. $\int_{\ln\frac{8}{5}}^{\ln 2}\left(f(x)-g(x)\right)dx$

ה. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ ובין הישרים $x=\ln 9$ ו-$x=\ln 16$.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=4x\left(\ln\left(x^2\right)-1\right)$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

(3) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(2) האם יש לפונקציה $f(x)$ נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$, המאונכות לצירים.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(4) בכמה נקודות הגרפים של $f(x)$ ו-$g(x)$ נחתכים זה עם זה? נמקו את תשובתכם.

ד. כתבו דוגמה לפונקציה קדומה של $g(x)$.

תשובות סופיות:

1) א. (1) $b=\frac{3}{\sqrt{2}}=\sqrt{4.5}$ א. (2) 9. ב. מתקבל: $\left(x+\sqrt{4.5}\right)^2+y^2=36$

ג. אליפסה: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ ד. 24.

2) א. הסבר. ב. (1) $k=1$ ב. (2) למשל: $(0,21,-16)+t(-1,1,1)$.

ב. (3) $10.89°$ ג. (1) $B(0,5,0)$, $A(0,-11,0)$, $P(0,21,-16)$

ג. (2) 128.

3) א. $w_1=\sqrt{3}\,\mathrm{cis}(30°)$, $w_2=\sqrt{3}\,\mathrm{cis}(90°)$, $w_3=\sqrt{3}\,\mathrm{cis}(150°)$

$w_4=\sqrt{3}\,\mathrm{cis}(210°)$, $w_5=\sqrt{3}\,\mathrm{cis}(270°)$, $w_6=\sqrt{3}\,\mathrm{cis}(330°)$

ב. (1) $z_1=\frac{3}{2}$, $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3=-\frac{3}{2}$, $z_4=-\frac{3}{2}-\sqrt{3}i$, $z_5=-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_6=\frac{3}{2}-\sqrt{3}i$

ב. (2) להסביר. ב. (3) הוכחה. ג. (1) דלתון. ג. (2) 1.5.

4) א. (1) $x\neq 0$, $x\neq \ln 4$ א. (2) $x\to-\infty: y=0$, $x\to\infty: y=2$, $x=\ln 4$, $x=0$

א. (3) עלייה: $0<x<\ln\frac{8}{5}$, $x>\ln 4$ ירידה: $x<0$, $\ln\frac{8}{5}<x<\ln 4$

ב. $\left(\ln\frac{5}{2},-\frac{50}{9}\right)$ ג. הפונקציה $f(x)$ ב-1, 4, 5. הפונקציה $g(x)$ ב-2, 3, 6.

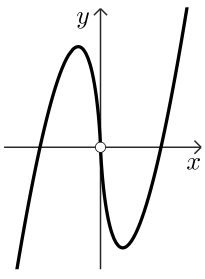
ד. ביטוי I: שלילי, ביטוי II: חיובי. ה. $\ln(4.5)\approx 1.5$.

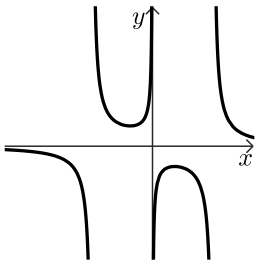
5) א. (1) $x\neq 0$ א. (2) $(\sqrt{e},0)$, $(-\sqrt{e},0)$ א. (3) הוכחה.

ב. (1) $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{8}{\sqrt{e}}\right)$, $\max\left(-\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{8}{\sqrt{e}}\right)$ ב. (2) אין פיתול.

ב. (3) להלן סקיצה: ג. (1) $x\neq 0$, $x\neq\pm\sqrt{e}$ ג. (2) $x=0$, $x=\pm\sqrt{e}$

ג. (3) להלן סקיצה: ג. (4) 6 נקודות.





ד. למשל: $G(x)=\frac{\ln\left|\ln\left(x^2\right)-1\right|}{8}$.

בגרות 2023 מועד קיץ א:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) נתונה אליפסה שמשוואתה: $\frac{x^2}{196}+\frac{y^2}{196-4k^2}=1$, $0<k<7$.

הנקודה F_1 היא המוקד הימני של האליפסה, והנקודה F_2 היא המוקד השמאלי שלה.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודות F_1 ו- F_2.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על פרבולה שמשוואתה קנונית והמוקד שלה נמצא בנקודה F_1,

כך שמתקיים: $AF_1=10k$.

ב. (1) הביעו באמצעות k את משוואת מדריך הפרבולה.

(2) הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A.

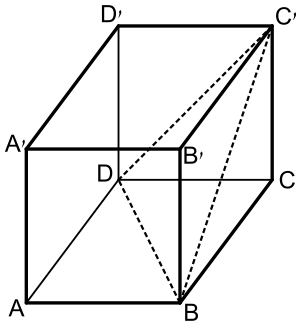
AF_1 הוא קוטר במעגל. הישר שמשוואתו: $5x+12y=138$ משיק למעגל זה.

ג. מצאו את הערך של k.

D היא נקודה על האליפסה.

ד. קבעו אם היקף המשולש F_1AF_2 גדול מהיקף המשולש F_1DF_2, קטן ממנו או שווה לו. נמקו את קביעתכם.

2) בסרטוט שלפניכם מתוארת הקובייה ABCDA'B'C'D'.



נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

א. הוכיחו כי האלכסון CA' מאונך למישור BC'D.

נקודה E היא מפגש התיכונים במשולש BC'D.

ב. (1) הביעו את הווקטור $\overrightarrow{CE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-$\underline{w}$.

(2) הוכיחו כי הנקודות C, E ו-A' נמצאות על ישר אחד.

נתון: $D(0,0,0)$, $C(6,8,0)$, $A(8,n,p)$, n ו-p הם פרמטרים.

שיעור ה-z של הנקודה C' הוא חיובי.

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודה A, והוכיחו כי ABCD נמצא במישור $z=0$.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה C'.

ℓ הוא ישר החיתוך בין המישור BC'D ובין המישור BCC'B'.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ.

ה. מצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל את הישר ℓ ואינו חותך את ציר ה-x.

3) נתונה המשוואה: $z^3=\frac{1}{z^3}$, z הוא מספר מרוכב.

נתון גם כי המספר z_0 הוא אחד מפתרונות המשוואה וכי הוא מיוצג על ידי נקודה ברביע הרביעי במישור גאוס.

א. מצאו את המספר המרוכב z_0.

הנקודות A, B ו-C' מיוצגות במישור גאוס על ידי המספרים המרוכבים:

$d\cdot z_0$, $di\cdot z_0$ ו-$d\cdot(z_0)^4$ בהתאמה. $d>0$ הוא פרמטר.

נתון כי שטח המשולש ABC הוא: $5d+6$.

ב. מצאו את הערך של d.

נגדיר: $w=\left((z_0)^2-\frac{1}{(z_0)^2}\right)(1+i)$.

ג. מצאו את $|w|$ ואת הארגומנט (הזווית) של w.

נתון כי המספר w^n (n הוא מספר טבעי) הוא מספר מדומה טהור, ונמצא מחוץ למעגל החוסם את המשולש ABC.

ד. מצאו את הערך המינימלי האפשרי של n.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה $f(x)=\left(e^x-1\right)^n-4$, המוגדרת לכל x. n הוא מספר טבעי גדול או שווה ל-2.

ענו על סעיף א עבור n זוגי ועבור n אי זוגי.

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן (אם יש כאלה).

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענו על הסעיפים ב-ג עבור $n=2$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=6e^x-10$, המוגדרת לכל x.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך שבין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x)=\left|f(x)\right|$, המוגדרת לכל x.

ג. (1) כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $h(x)$? מצאו את שיעורי הנקודות הללו, וקבעו את סוגן.

(2) מצאו את תחום הערכים של k שעבורו הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ ב-3 נקודות.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\ln(x)+\frac{1}{x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגה.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=(x+1)(1-\ln(x))$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-x.

(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה $\cup$ ואת תחום הקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x)=\frac{1}{x}\cdot g'(x)$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $g(x)$.

ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים $x=e$ ו-$x=1$.

תשובות סופיות:

1) א. $F_2(-2k,0)\ ,\ F_1(2k,0)$ ב. (1) $x=-2k$ (2) $A(8k,8k)$

ג. $k=1$ ד. היקף המשולש F_1AF_2 קטן מהיקף המשולש F_1DF_2.

2) א. הוכחה. ב. (1) $\overline{CE}=\frac{1}{3}(-\underline{u}-\underline{v}+\underline{w})$ (2). הוכחה, $\overline{CE}=\frac{1}{3}\overline{CA'}$

ג. (1) $A(3,-4,0)$ (2) $C'(4,3,5)$ ד. $\underline{x}=(7,-1,0)+t(-3,4,5)$

ה. $\underline{x}=(7,-1,0)+t(-3,4,5)+s(1,0,0)$

3) א. $z_0=1cis(-60)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ב. $d=6$

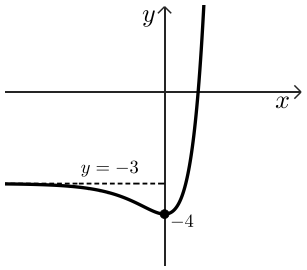
ג. $\arg(w)=-45°\ ,\ |w|=\sqrt{6}$ ד. $n=6$

4) א. (1). עבור n זוגי: כאשר $x\to\infty$: אין אופקית, כאשר $x\to-\infty$: $y=-3$.

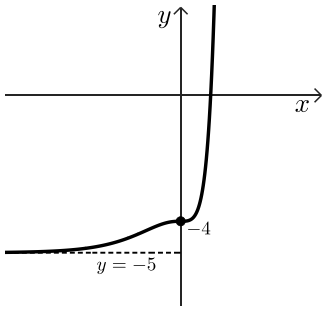
עבור n אי-זוגי: כאשר $x\to\infty$: אין אופקית, כאשר $x\to-\infty$: $y=-5$.

(2). עבור n זוגי: $\min(0,-4)$, עבור n אי-זוגי: אין.

(3). עבור n זוגי:



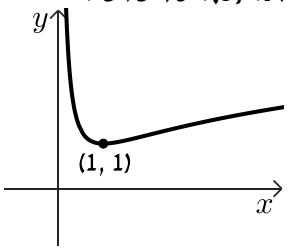
עבור n אי-זוגי:



ב. (1). $(0,-4)\ ,\ (\ln 7,32)$ (2). $24-7\ln 7\approx$ 10.378 יח"ר

ג. (1). יש 2 נקודות קיצון: $\max(0,4)\ ,\ \min(\ln 3,0)$ (2). $3<k<4$

5) א. (1) $x>0$ (2) $\min(1,1)$ (3). סרטוט:



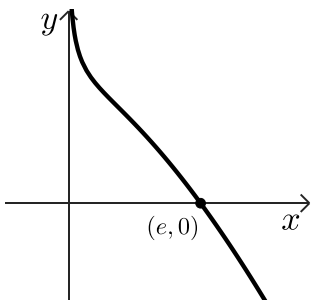
ב. (1). $(e,0)$

ב. (2). תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x>0$.

ב. (3). תחומי קעירות כלפי מעלה: $0<x<1$,

תחומי קעירות כלפי מטה: $x>1$.

ב. (4). סרטוט:



ג. 1.132 יח"ר $\frac{3}{2}-\frac{1}{e}$.

בגרות 2023 מועד קיץ ב:

ענה על <u>שלוש</u> מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) נתונות הנקודות: $B(16,0)$, $A(0,28)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות C המקיימות:

$AC^2+BC^2=1,320$.

את המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א מזיזים 8 יחידות שמאלה ו-14 יחידות למטה כך שמתקבל מקום גאומטרי חדש.

המקום הגאומטרי החדש חותך את ציר ה- y בנקודות E ו- G (E מעל G).

הנקודות F_1 ו- F_2 הן מוקדי אליפסה קנונית שעוברת דרך הנקודות E ו-G, כמתואר בסרטוט.

נתון: המרחק בין הישרים EF_1 ו- GF_2 הוא 24.

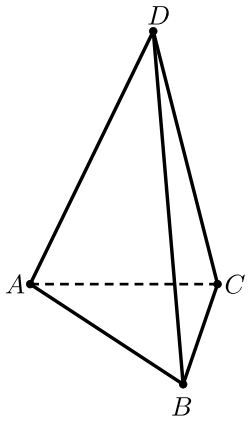
ב. (1) מצאו את שיעורי הנקודה F_1.

(2) מצאו את משוואת האליפסה.

העבירו מעגלים המשיקים לישר EF_1, לציר ה- x ולציר ה- y.

ג. מצאו משוואות של שני מעגלים כאלה הנמצאים ברביעים שונים.

2) בפירמידה ABCD, המקצוע DC מאונך למישור ABC.
הנקודה E היא אמצע המקצוע AD.



הנקודה F מקיימת: $\overrightarrow{DF}=\frac{k}{2}\cdot\overrightarrow{DB}+k\cdot\overrightarrow{DC}$, k הוא פרמטר.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{CD}=\underline{w}$.

א. הביעו באמצעות: $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-k את $\overrightarrow{EF}$.

נתון: $\overrightarrow{EF}$ מקביל למישור ABC.

ב. מצאו את הערך של k.

נתון: $A(0,0,0)$, $C(0,n,0)$, $B(p,6,0)$, n ו-p הם פרמטרים חיוביים.

$\underline{u}\cdot\underline{v}=24$, $\overrightarrow{BD}=(-8,-2,9)$.

ג. מצאו את שיעורי הנקודות B ,C ו-D.

ד. מצאו את נפח הפירמידה ABCD.

ה. מהו המצב ההדדי בין הישר EF לבין הישר AB? נמקו את קביעתכם.

3) נתונה סדרה הנדסית: $z_1, z_2, z_3, \ldots, z$ שאיבריה הם מספרים מרוכבים ומנתה היא q.

z_1 נמצא ברביע הראשון.

נתון: $-2z_1=\overline{z}_3$, $(z_1)^3=z_3$.

א. הוכיחו כי: $q=-z_1$ או $q=z_1$.

ב. מצאו את z_1.

ענו על הסעיפים ג-ד עבור: $q=z_1$.

z_{4n} ו-z_{4n-2} הם שני איברים בסדרה ההנדסית הנתונה (n הוא מספר טבעי).

ג. קבעו בעבור כל אחד מן האיברים אם הוא מדומה או ממשי. נמקו את קביעותיכם.

ד. מצאו את ערך הסכום: $\frac{z_1}{\sqrt{2}}+\frac{z_2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{z_3}{(\sqrt{2})^3}+\ldots+\frac{z_{64}}{(\sqrt{2})^{64}}$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\ln(x)+\ln(a)}{\ln(x)-\ln(a)}$, a הוא פרמטר גדול מ-1.

בסעיפים א–ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצאו את תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

לפניכם טענה: למשוואה $f(x)=f'(x)$ קיים בדיוק פתרון אחד בתחום $x>a$.

ב. קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה: $g(x)$, המקיימת: $g(x)=\ln\left(f(x)\right)$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים: $x=3$ ו-$x=5$.

נתון: $1<a<3$.

ד. הביעו באמצעות S את ערך האינטגרל: $\int_3^5 \ln\left(4\cdot f(x)\right)dx$.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x}{e^x-6}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

הפונקציות $g(x)$ ו-$f(x)$ מוגדרות באותו התחום.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית שלה ועל ידי הישרים: $x=\ln 7$ ו-$x=\ln 10$.

ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $s(x)=\int_x^{\ln 5}\left(f(t)-g(t)\right)dt$, המוגדרת בתחום: $x<\ln 5$.

ד. מצאו את שיעור ה-x של נקודת הקיצון של הפונקציה $s(x)$ וקבעו את סוגה.

תשובות סופיות:

1) א. $(x-8)^2+(y-14)^2=400$ ב. **(1)**. $F_1(15,0)$ **(2)**. $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{400}=1$

ג. $(x-5)^2+(y-5)^2=25$, $(x+15)^2+(y-15)^2=225$

2) א. $\overrightarrow{EF}=\frac{k}{2}\underline{u}+\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{2}\right)\underline{v}+\left(\frac{1}{2}-\frac{3k}{2}\right)\underline{w}$ ב. $k=\frac{1}{3}$

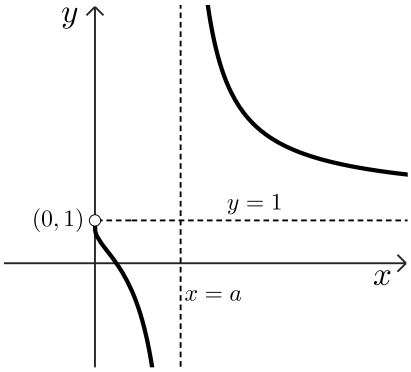
ג. $B(8,6,0)$, $C(0,4,0)$, $D(0,4,9)$ ד. 48 ה. מצטלבים.

3) א. הוכחה. ב. $z_1=\sqrt{2}\text{cis}(45°)$

ג. z_{4n} - ממשי, z_{4n-2} - מדומה. ד. 0

4) א. **(1)**. $0<x<a$ או $a<x$ א. **(2)**. $x=a$, $y=1$ א. **(3)**. $\left(\frac{1}{a},0\right)$

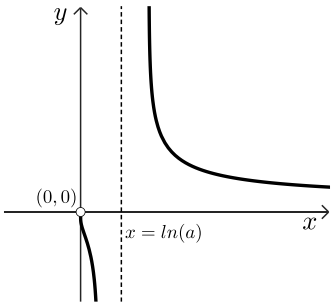
א. **(4)**. $0<x<a$ או $a<x$ א. **(5)**. סרטוט:



ב. לא נכון.

ג. **(1)**. $0<x<\frac{1}{a}$ או $a<x$

ג. **(2)**. סרטוט:

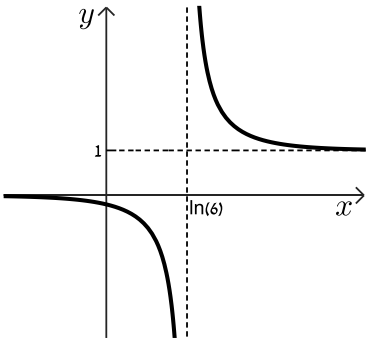


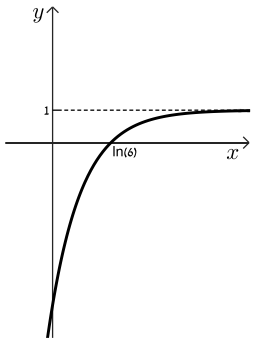
ד. $2\ln 4+S$

5) א. **(1)**. $x\neq\ln 6$ א. **(2)**. $x=0$, $y=1$, $x=\ln 6$

א. **(3)**. תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x<\ln 6$ או $\ln 6<x$.

א. **(4)**. סרטוט: ב. **(1)**. $y=1$ ב. **(2)**. סרטוט:





ב. **(3)**. $S=\frac{9}{35}$ ג. $(\ln 3,-1)$ ד. $x=\ln 3$ מינימום.

בגרות 2023 מועד מיוחד:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

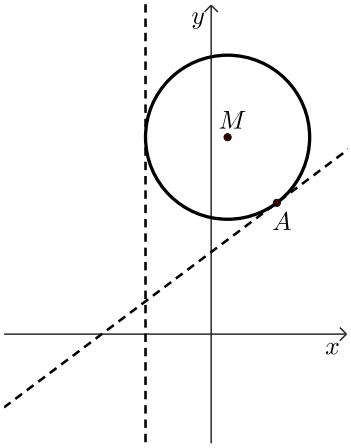
שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) נתונים הישרים שמשוואותיהם:

$\ell_1: \ 4y-3x-20=0$

$\ell_2: \ x=-4$



א. מצאו את המשוואות המתארות את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מן הישרים ℓ_1 ו-ℓ_2.

מעגל שמרכזו M משיק לישרים ℓ_1 ו-ℓ_2.

המעגל משיק לישר ℓ_1 בנקודה A שבה $x=4$.

המרכז M נמצא ברביע הראשון (ראו סרטוט)

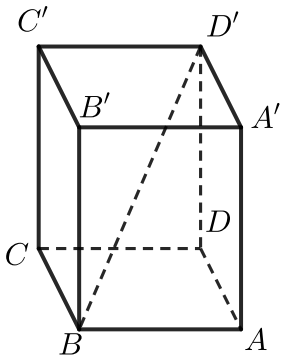
ב. מצאו את שיעורי הנקודה M.

הישר ℓ_2 הוא מדריך של פרבולה קנונית.

ג. האם הישר ℓ_1 משיק בנקודה A לפרבולה זו? נמקו את תשובתכם.

ד. מצאו את משוואת המעגל המשיק לפרבולה זו בשתי נקודות שאחת מהן היא הנקודה A.

2) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שהבסיס שלה, $ABCD$, הוא מלבן (ראו סרטוט).
הנקודה E נמצאת על המקצוע DD' כך ש- $DE:ED'=3:2$,
הנקודה F נמצאת על האלכסון BD' ומתקיים: $\overrightarrow{BF}=t\cdot\overrightarrow{BD'}$,
$0<t<1$ הוא פרמטר.



נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{BD'}$ ו- $\overrightarrow{FE}$
באמצעות: $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- t, אם יש צורך.
נתון כי FE מקביל למישור הבסיס ABCD.

ב. מצאו את t.

הנקודה C היא ראשית הצירים.
הנקודה B נמצאת על ציר ה- x בכיוון החיובי שלו,
והנקודה D נמצאת על ציר ה- y בכיוון החיובי שלו.
נתון: $F(4,12,18)$.

ג. מצאו את $|\underline{u}|$, $|\underline{v}|$, $|\underline{w}|$.

מן הנקודה F העבירו ישר המאונך למישור EFBD.
ישר זה חותך את הפאה $CDD'C'$ בנקודה P.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה P.

3) $z=x+iy$ הוא מספר מרוכב (x ו- y הם מספרים ממשיים).

א. (1) הראו כי משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס
המקיימות: $|z^2-3i|=|z^2+5i|$, היא: $y=-\frac{1}{2x}$.

(2) תנו דוגמה למספר מרוכב הנמצא על המקום הגאומטרי הזה.

ב. פתרו את המשוואה: $z^6=1$.

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב מייצגים את קודקודיו של מצולע I.
המקום הגאומטרי שמצוין בתת סעיף א(1) חותך ברביע הרביעי את המעגל
החוסם את מצולע I בנקודה A.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A.

הנקודה A היא קודקוד של מצולע משוכלל אחר החסום באותו מעגל, מצולע II.
נתון: מספר הקודקודים של מצולע II שווה למספר הקודקודים של מצולע I.

ד. מצאו את המספרים המרוכבים המייצגים את כל הקודקודים של
מצולע II.

נסמן: $w=r\cdot\text{cis}\alpha$, $0<\alpha<60°$.
כופלים את כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I במספר w,
כך שקודקודי מצולע I מתלכדים עם קודקודי מצולע II.

ה. מצאו את w.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x, ו-$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת שלה, המוגדרת גם היא לכל x.

נתון: $f'(x)=-2x\cdot e^{-\frac{x^2}{a}}$, a הוא פרמטר.

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול בנקודה שבה: $x=\sqrt{2}$.

א. מצאו את a.

נתון: $f(0)=a$.

ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $h(x)=\frac{1}{f'(x)}$, $m(x)=e^{h(x)}$.

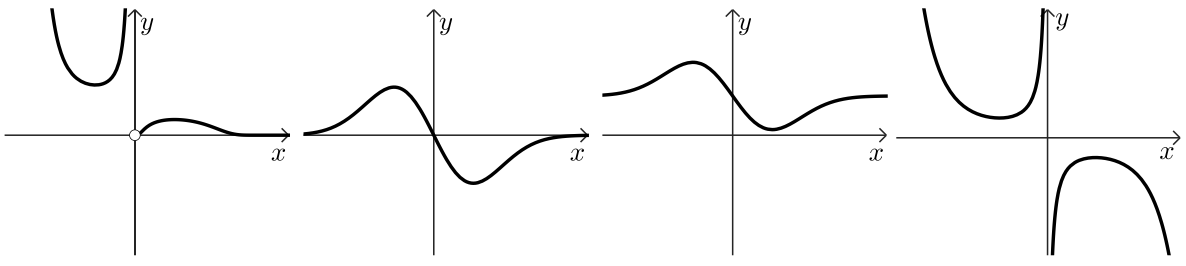
שלושה מבין הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתארים את הפונקציות: $f'(x)$, $h(x)$, $m(x)$.

ד. התאימו לכל פונקציה את הגרף המתאר אותה.

ה. (1) מצאו את תחומי הירידה של הפונקציה $m(x)$.

(2) קבעו את הביטוי: $\int_1^2 h(x)\cdot m(x)\,dx$ חיובי או שלילי.

נמקו את קביעתכם.



IV III II I

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1-\ln x}{\ln x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\ln\left(-f(x)\right)$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

(3) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נסמן ב-a את שיעור ה-x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מבין הביטויים I-III קבעו איזה ביטוי הוא הגדול ביותר ואיזה ביטוי הוא הקטן ביותר (אין צורך למצוא את הערך של a).
נמקו את תשובתכם.

I. $\int_{a+1}^{a+2}\left(g(x)-f(x)\right)dx$ II. $\int_{a+3}^{a+4}\left(g(x)-f(x)\right)dx$ III. המספר 1.

תשובות סופיות:

1) א. $y=2x+10$, $y=-\frac{1}{2}x$ ב. $M(1,12)$ ג. l_1 אינו משיק לפרבולה.

ד. $(x-12)^2+y^2=128$

2) א. $\overrightarrow{BD'}=-\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$, $\overrightarrow{EF}=(t-1)\underline{u}+(1-t)\underline{v}+\left(\frac{3}{5}-t\right)\underline{w}$ ב. $t=\frac{3}{5}$

ג. $|\underline{u}|=20$, $|\underline{v}|=10$, $|\underline{w}|=30$ ד. $P(0,10,18)$

3) א.(1). הוכחה, $y=-\frac{1}{2x}$ (2). למשל, $z=1-\frac{1}{2}i$

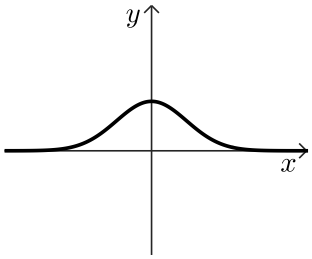
ב. $cis0°$, $cis60°$, $cis120°$, $cis180°$, $cis240°$, $cis300°$ ג. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ד. $cis15°$, $cis75°$, $cis135°$, $cis195°$, $cis255°$, $cis315°=cis(-45°)$

ה. $w=cis15°$

4) א. $a=4$ ב. $f(x)=4e^{-\frac{x^2}{4}}$ ג. (1). זוגית.

(2). $y=0$ (3). $(0,4)$ מקסימום. (4). סרטוט:



ד. גרף I: $h(x)$, גרף III: $f'(x)$, גרף IV: $m(x)$

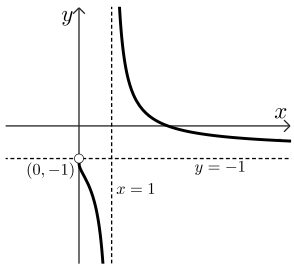
ה. (1). ירידה: $x<-\sqrt{2}$ או $\sqrt{2}<x$.

(2). שלילי.

5) א. (1) $0<x\neq 1$ (2) $x=1$, $y=-1$

(3). ירידה: $0<x<1$ או $1<x$. עלייה: אין.

(4). סרטוט:

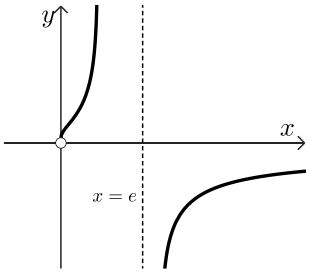


ב. (1). $0<x<1$ או $e<x$

(2). $x=1$, $x=e$, $y=0$

(3). חיובית: $0<x<1$, שלילית: $e<x$

(4). סרטוט:



ג. הביטוי הגדול ביותר – I , הביטוי הקטן ביותר – III.