תרגול 5 יחידות לתלמידי קידום

פרק 67

שאלון 807 בגרויות שנת 2021

חורף מועד א 1
מועד נבצרים 6
חורף מועד ב 10
קיץ מועד א 14
קיץ מועד מיוחד 18
קיץ מועד ב 22

בגרות 2021 מועד חורף א':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5.

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, תיבדקנה רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

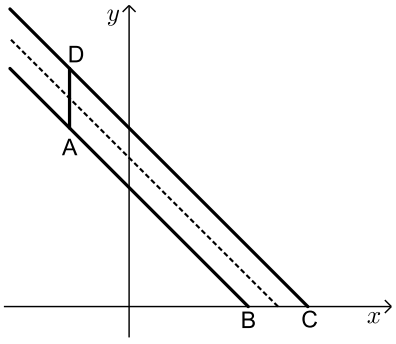
פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) ABCD הוא טרפז $(AB \| DC)$.

נתון: המרחק בין בסיסי הטרפז, AB ו-DC, הוא $\sqrt{2}$,

קטע האמצעים של הטרפז ABCD נמצא על

הישר $x+y-4=0$.



א. מצא את משוואות הישרים שבסיסי הטרפז נמצאים עליהם.

נתון: השוק BC נמצאת על ציר ה-x.

מעבירים פרבולה קנונית: $y^2=2px$ $(p>0)$

כך שהקודקודים A ו-D של הטרפז נמצאים על מדריך הפרבולה,

ומוקד הפרבולה נמצא על הקודקוד B או על הקודקוד C.

ב. (1) מהי משוואת הפרבולה שעבורה הטרפז ABCD הוא הגדול מבין שני הטרפזים האפשריים? נמק.

(2) מהי משוואת הפרבולה שבעבורה ABCD הוא הקטן מבין שני הטרפזים האפשריים?

ג. מעבירים ישר המקביל לציר ה-x וחותך את שתי הפרבולות שמצאת בסעיף ב בשתי נקודות, E ו-F. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו מונחים אמצעי הקטעים EF הנוצרים באופן זה.

2) ABC הוא משולש.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$.

נתון: $A(0,2,-1)$, $B(-3,2,2)$, הנקודה $D(-2,3,1)$ נמצאת על הקטע BC

כך ש- $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$.

א. (1) מצא את שיעורי הנקודה C והוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

(2) מצא את משוואת המישור ABC.

הנקודה E נמצאת במישור ABC כך ש-ABEC הוא מלבן. הנקודה M היא מפגש האלכסונים במלבן זה. S היא נקודה כך ש-MS מאונך למישור ABEC.

ב. (1) מצא הצגה פרמטרית לישר MS, והסבר מדוע לכל נקודה S כזו SABEC היא פירמידה ישרה.

(2) תן דוגמה לשיעורים של נקודה S כמתואר בתת-סעיף ב (1).

בעבור הנקודה S שמצאת, חשב את הזווית SAB.

(3) בעבור הנקודה S שמצאת, האם קיימת נקודה נוספת, P, כך ש-PABEC היא פירמידה ישרה שבעבורה מתקיים: $\sphericalangle SAB=\sphericalangle PAB$?

אם כן, מצא את שיעוריה. אם לא, נמק.

3) נתונה המשוואה: $i\cdot z^6=\frac{1}{64}$ (z הוא מספר מרוכב).

א. מצא את כל פתרונות המשוואה הנתונה.

פתרונות המשוואה הנתונה מתאימים לקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ב. הראה שלכל אחד מקודקודי המצולע קיים קודקוד אחד בדיוק כך שהישר שמחבר ביניהם עובר דרך ראשית הצירים.

כופלים כל אחד מפתרונות המשוואה הנתונה במספר מרוכב קבוע, w.

ג. הסבר מדוע סכום המספרים שהתקבלו הוא אפס.

נתון: $w=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

ד. כתוב משוואה שפתרונותיה הם 12 המספרים: פתרונות המשוואה הנתונה בתחילת השאלה והמספרים שהתקבלו לאחר ההכפלה ב-w.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{-4}{e^{2x}-4e^{x}+3}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הסבר מדוע לכל $b<0$ מתקיים: $\int_{b-3}^{b} f(x)dx<-4$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{k}{f(x)}$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)$. k הוא פרמטר. נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום.

ג. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור k? נמק.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\left(\ln(x)\right)^{3}-1}+1$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הישר $y=k$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ (k הוא פרמטר).

מצא את k. נמק.

ג. נגדיר: $T(x)=\int_{e^{-1}}^{x} f(x)dx$, $e^{-1}\le x<e$.

(1) לפניך שלושה ערכי x , (I-III). בעבור איזה מהם הערך של $T(x)$ הוא הכי גדול? נמק.

(I $x=\frac{1}{2}$ (II $x=1$ (III $x=2$.

(2) הסבר מדוע בעבור כל: $e^{-1}\le x<e$ מתקיים: $T(x)<1$.

תשובות סופיות:

1) א. $AB: x+y-3=0$, $CD: x+y-5=0$. ב. **(1)** $y^2=20x$.

ב. **(2)** $y^2=12x$. ג. $y^2=15x$.

2) א. **(1)** $c(0,5,-1)$, הוכחה ($AB\perp AC$). א. **(2)** $x+z+1=0$.

ב. **(1)** $(-1.5,3.5,0.5)+t(1,0,1)$.

ב. **(2)** $S(-1,3.5,1)$, $\sphericalangle SAB=38.016°$. ב. **(3)** $P(-2,3.5,0)$.

3) א. $\frac{1}{2}\text{cis}45°$, $\frac{1}{2}\text{cis}105°$, $\frac{1}{2}\text{cis}165°$, $\frac{1}{2}\text{cis}225°$, $\frac{1}{2}\text{cis}285°$, $\frac{1}{2}\text{cis}345°$.

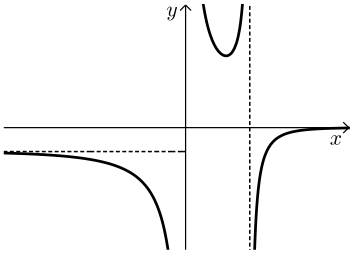
ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. $z^{12}+\frac{1}{4096}=0$.

4) א. **(1)** $x\neq 0$, $x\neq \ln 3$. א. **(2)** $x=0$, $x=\ln 3$, $y=0$, $y=-\frac{4}{3}$.

א. **(3)** מינימום $(\ln 2,4)$.

א. **(4)** עלייה: $x<\ln 3$ או $\ln 3<x$. ירידה: $\ln 2<x<\ln 3$. או $0<x<\ln 2$ או $x<0$.

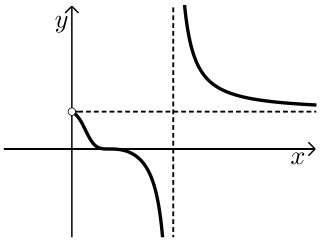
א. **(5)** להלן סרטוט: ב. הוכחה. ג. $k<0$.



5) א. **(1)** $x>0$, $x\neq e$. א. **(2)** $x=e$, $y=1$. א. **(3)** עלייה: אין.

ירידה: $x>e$ או $0<x<e$. א. **(4)** $(1,0)$.

א. **(5)** להלן סרטוט: ב. $k=1$. ג. **(1)** II. ג. **(2)** הסבר.



בגרות 2021 מועד חורף נבצרים:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5.

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, תיבדקנה רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הן שתי נקודות שונות הנמצאות על הפרבולה: $y^2=36x$

ברביע הראשון.

א. (1) הראה כי שיפוע המיתר AB הוא: $m=\dfrac{36}{y_2+y_1}$.

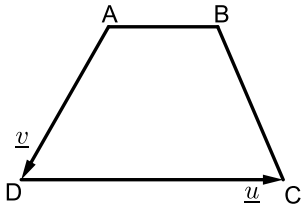
(2) הנקודה $\left(x,7\frac{1}{2}\right)$ היא אמצע המיתר AB. מצא את m.

ב. נתון: המרחק של כל נקודה על הפרבולה הנתונה מן הישר $x=a$ שווה למרחק של נקודה זו מן הנקודה $(9,0)$. מרחק הנקודה A מן הישר $x=0.75a$ הוא 7.

(1) מהו הערך של a? נמק.

(2) מצא את משוואת הישר AB.

2) נתון טרפז שווה שוקיים ABCD $(AB\parallel DC)$ (ראה סרטוט).



נתון: $\sphericalangle DAB=120°$.

נסמן: $\overrightarrow{DC}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=t\underline{u}$ (t הוא סקלר).

א. (1) הבע את t באמצעות $|\underline{u}|$ ו- $|\underline{v}|$.

(2) הבע את הווקטור $\overrightarrow{BC}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $|\underline{u}|$ ו- $|\underline{v}|$.

נתון: $\underline{u}=(8,6,-10)$, $\underline{v}=(-1,y,0)$.

ב. (1) מצא את שיעור ה- y של הווקטור $\underline{v}$ (מצא את שני הערכים).

(2) עבור איזה ערך משני הערכים של y שמצאת בתת-סעיף ב (1), הבסיס DC הוא קוטר במעגל שהטרפז חסום בו? נמק.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתון מספר מרוכב: $z = r\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$.

הסבר מדוע מתקיים: $r\left(\cos(180°+\theta)+i\sin(180°+\theta)\right) = -z$.

z_1 , z_2 ו- z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים. הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס נמצאות על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

הנקודות המייצגות את z_1 ו- z_2 נמצאות ברביע הראשון, והנקודה שמייצגת את z_3 נמצאת ברביע השלישי. נסמן: $z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

ב. הוכח כי המנה: $\frac{z_2+z_3}{z_1-z_3}$ היא מספר ממשי.

נתון גם כי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_1 ו- z_3 נמצאות על מעגל היחידה, ו- $\frac{z_2+z_3}{z_1-z_3} = \frac{5}{4}$.

ג. חשב את הערך המוחלט של z_2.

ד. z_4 הוא הצמוד של z_3.

הבע באמצעות α את שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_2 , z_3 , z_4.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4e^{\sqrt{x}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $h(x) = f\left(x^2\right)$, $g(x) = 2\cdot f'(x)$ בתחום $x>0$.

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, קבע את סוגה, והראה כי הנקודה הזאת נמצאת על גרף הפונקציה $h(x)$.

נתון: הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ נפגשים בנקודה אחת בלבד (הנקודה שמצאת בסעיף ב).

ג. סרטט את הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ באותה מערכת צירים.

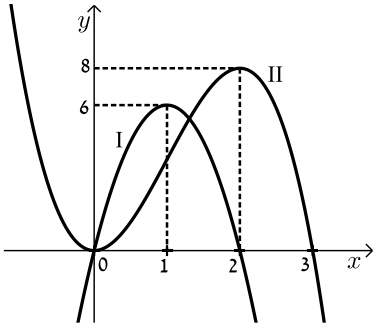
ד. נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, גרף הפונקציה $h(x)$ ועל ידי הישר $x=a$, $a>1$, שווה ל- $e^4+4e-2\cdot f(a)$.

מצא את הערך של a. תוכל להשאיר ln בתשובתך.

5) הגרפים I, II שבסרטוט שלפניך מתארים שתי פונקציות המוגדרות בתחום $-1\le x\le 4$. אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$, והאחר הוא של פונקציית הנגזרת שלה, $f'(x)$.

א. קבע מי מבין הגרפים I ו-II הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$. נמק.

הסתמך על הסרטוט וענה על סעיף ב.



ב. נתונה הפונקציה: $g(x)=\ln\left(f(x)\right)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מה הן האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לציר ה- x?

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(5) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

1) א. (1). הוכחה. א. (2). $m=2.4$. ב. (1). $a=-9$.

ב. (2). $y=2.4x+2.4$.

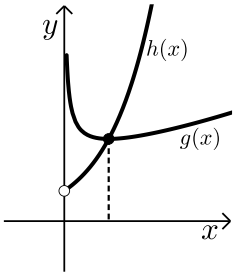
2) א. (1). $t=1-\frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}$. א. (2). $\overrightarrow{BC}=\frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}\underline{u}+\underline{v}$. ב. (1). $y=-7$, $y=\frac{1}{7}$.

ב. (2). $y=-7$.

3) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $|z_2|=3.5$.

ד. $2.25\sin 2\alpha$.

4) א. $0\le x$. ב. $(1,4e)$. ג. להלן סרטוט:



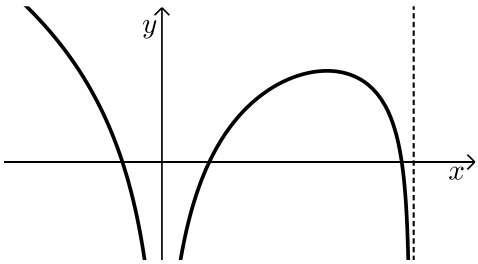
ד. $a=4-\ln 4$.

5) א. גרף II - $f(x)$, גרף I - $f'(x)$. ב. (1). $0<x<3$, $-1\le x<0$.

ב. (2). $x=3$, $x=0$. ב. (3). $(2,\ln 8)$ מקסימום.

ב. (4). עלייה: $0<x<2$. ירידה: $2<x<3$, $-1<x<0$.

ב. (5). להלן סרטוט:



בגרות 2021 מועד חורף ב':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5.

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, תיבדקנה רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) נתון: נקודה K נמצאת על הפרבולה $y^2=4px$, $(p>0)$. שיעור ה-y של נקודה K הוא 12. המרחק בין נקודה K ובין מוקד הפרבולה הוא 20.

א. מצא את p (מצא שתי אפשרויות).

נסמן את הערכים של p שמצאת בסעיף א ב-p_1 ו-p_2 . $p_1<p_2$.

ישר מן הצורה $y=mx$ $(m\neq 0)$ חותך את הפרבולה $y^2=4p_1x$ בראשית הצירים ובנקודה נוספת, A, ואת הפרבולה $y^2=4p_2x$ בראשית הצירים ובנקודה נוספת, B. הצב את הערכים p_1 ו-p_2 שמצאת, וענה על סעיפים ב-ג.

ב. הבע את שיעורי נקודה A, ואת שיעורי נקודה B באמצעות m .

בעבור כל ישר $y=mx$ $(m\neq 0)$ נסמן ב-M את אמצע הקטע AB הנוצר באופן המתואר.

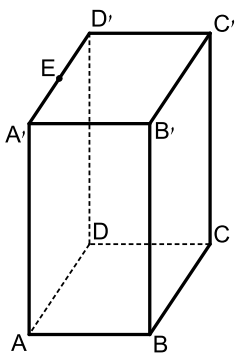
ג. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות M האלה (ללא m).

2) נתונה התיבה ABCDA'B'C'D'. הנקודה K נמצאת על המקצוע CC'.

הנקודה E היא אמצע המקצוע A'D' (ראה סרטוט).

נסמן: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{CK}=t\cdot\overrightarrow{CC'}$ הוא סקלר).

נתון: $|\underline{w}|=6\sqrt{2}$, $|\underline{v}|=6$, $|\underline{u}|=3\sqrt{2}$, $\sphericalangle EKB=90°$.



א. מצא את t .

נסמן ב-π את המישור CDA'B'.

ב. (1) הוכח כי הישר BK מאונך למישור π .

(2) הסבר מדוע הישר EK מקביל למישור π .

נתון: $B(-1,0,1)$, $K(4,5,-1)$, $\underline{w}=(2,2,-8)$.

ג. מצא את משוואת המישור π .

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה: $z^2-(1+i)z+2i+2=0$.

אחד הפתרונות של המשוואה שפתרת נמצא ברביע הרביעי והוא מיוצג על ידי הנקודה A במישור גאוס. הפתרון השני מיוצג על ידי הנקודה B במישור גאוס. דרך הנקודה B עובר מעגל שמרכזו בראשית הצירים - O. הישר AO חותך את המעגל בנקודות C ו-D. במעגל חסום מצולע משוכלל בעל n צלעות. נתון כי הנקודות B ,C ,D הן קודקודים של המצולע.

ב. מהו ה-n האפשרי הקטן ביותר? נמק את תשובתך.

ג. בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב:

(1) רשום את המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

(2) כתוב משוואה שפתרונותיה הם כל המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) הפונקציה $g(x)$ מוגדרת וגזירה לכל x. הגרף שלה חותך את ציר ה-x בראשית הצירים בלבד. נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הן $(1,1)$ ו-$(-1,-1)$ בלבד. הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ מתאפסת בעבור $x=1$ ו-$x=-1$ בלבד. ציר ה-x הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $g(x)$ בעבור x שואף לאינסוף ובעבור x שואף למינוס אינסוף.

א. (1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) רשום את תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$.

(פונקציית הנגזרת של $g(x)$).

נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{g(x)}-g(x)$.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

5) נתונה משפחת הפונקציות: $f(x)=ax-\ln\left(\frac{x}{a}\right)$, $a\neq 0$ הוא פרמטר.

ענה על סעיפים א-ג בעבור $a>0$ ובעבור $a<0$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה-x בשתי נקודות שונות.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=f'(x)$ (נגזרת של הפונקציה $f(x)$) המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$. נתון: $a>0$.

ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, הישר $x=\frac{2}{a}$ וציר ה-x, והוכח כי השטח אינו תלוי ב-a.

תשובות סופיות:

1) א. $p=2$, $p=18$. ב. $A\left(\frac{8}{m^2},\frac{8}{m}\right)$, $B\left(\frac{72}{m^2},\frac{72}{m}\right)$. ג. $y^2=40x$.

2) א. $t=\frac{1}{2}$. ב. (1). הוכחה. ב. (2). הוכחה.

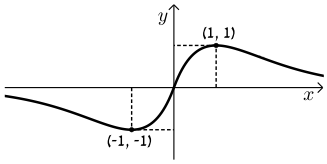
ג. $5x+5y-2z-29=0$.

3) א. $z_1=1-i$, $z_2=2i$. ב. $n=8$.

ג. (1). $(2,0)$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(0,2)$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-2,0)$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(0,-2)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

ג. (2). $z^8=256$.

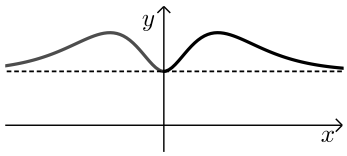
4) א. (1). סרטוט: א. (2). חיובית: $-1<x<1$, שלילית: $x<-1$, $1<x$.



ב. (1). כל x. ב. (2). $y=1$.

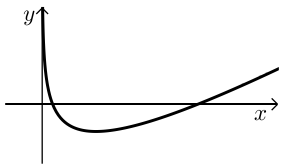
ב. (3). $(1,e-1)$ מקסימום, $(0,1)$ מינימום, $\left(-1,\frac{1}{e}+1\right)$ מקסימום.

ב. (4). סרטוט:

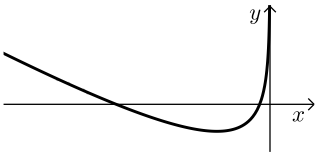


5) א. עבור $a>0$: $x>0$, ועבור $a<0$: $x<0$. ב. $\left(\frac{1}{a},1+\ln a^2\right)$.

ג. סרטוט עבור: $a>0$:



סרטוט עבור: $a<0$:



ד. $1-\ln 2$.

בגרות 2021 מועד קיץ א':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) נתון פרמטר: a , $a>0$.

א. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(a,0)$ שווה למרחק שלהן מן הישר: $x=a-1$.

ב. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(0,a)$ שווה למרחק שלהן מן הישר: $y=a-1$.

נתון כי שני המקומות הגאומטריים שמצאת בסעיפים א'-ב' נחתכים בשתי נקודות. אחת הנקודות היא $(2,2)$.

ג. (1) מצא את a.

(2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך האחרת.

מחברים את שתי נקודות החיתוך של שני המקומות הגאומטריים עם הנקודות $(3a,0)$ ו-$(0,3a)$ כך שמתקבל מרובע.

ד. (1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמק.

(2) חשב את שטח המרובע.

2) נתונה פירמידה מרובעת SABCD שבסיסה ABCD הוא מעוין.

נתון: $\overrightarrow{SA}$ מאונך לבסיס הפירמידה, $\sphericalangle BAD=60°$, $SA=BA$, $\overrightarrow{SE}=t\cdot\overrightarrow{SC}$.

$0<t<1$ הוא פרמטר. נסמן: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

א. הבע את הווקטורים $\overrightarrow{EB}$ ו-$\overrightarrow{ED}$ באמצעות: $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, t.

ב. נתון: $t=\frac{1}{2}$.

(1) הוכח כי $\overrightarrow{EB}$ מאונך ל-$\overrightarrow{ED}$.

(2) הוכח כי האנך מן הנקודה E לבסיס עובר דרך נקודת מפגש האלכסונים של המעוין.

נתון: $A(0,0,0)$, $B(6\sqrt{3},6,0)$ קודקוד D נמצא על ציר ה-y בכיוון החיובי, שיעור ה-z של הנקודה S גדול מאפס.

ג. חשב את שיעורי הקודקודים S ו-D.

ד. מצא את משוואת המישור SAB.

3) נתונה המשוואה: $z^4=-16$ (z הוא מספר מרוכב).

א. פתור את המשוואה.

נתון: פתרונות המשוואה מייצגים קודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. סרטט במערכת הצירים את המצולע שהתקבל.

כופלים ב- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודים המצולע.

ג. מצא את שיעורי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים שהתקבלו בהכפלה.

n הוא מספר טבעי, $11<n<17$ ו- c הוא מספר ממשי. כל אחד מן המספרים המרוכבים שמצאת בסעיפים הקודמים מקיים את המשוואה: $z^n=c$.

ד. מצא את n ואת c.

הנקודות במישור גאוס, המיוצגות על ידי כל הפתרונות של המשוואה: $z^n=c$ שמצאת בסעיף ד', יוצרות מצולע בעל n צלעות.

ה. מצא את שטח המצולע.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=1+ae^{-2x}$ המוגדרת לכל x. a הוא פרמטר, $a>1$.

בטא את תשובותיך באמצעות a לפי הצורך.

א. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש).

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש).

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש).

ב. נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק את תשובותך.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) ידוע כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת, המתקבלת כאשר: $x=\frac{\ln(a)}{2}$. מצא את שיעור ה- y של נקודת הפיתול, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g'(x)$.

(2) סרטט את גרף הפונקציה $g'(x)$. פרט את שיקוליך.

ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g'(x)$ ועל ידי הישרים: $x=0$, $y=\frac{1}{2}$.

5) ענה:

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\ln\left(\frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)}\right)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x)=\ln\big(f(x)\big)$.

<u>היעזר בתשובותיך על השאלות בסעיף א'</u> וענה על התת-סעיפים (1)-(3) שלפניך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרט את שיקוליך.

ג. בעבור כל x המקיים: $0<f(x)<1$, קבע אם המכפלה $f(x)\cdot g(x)$ חיובית. נמק את קביעתך.

תשובות סופיות:

1) א. $y^2=2x-2a+1$. ב. $x^2=2y-2a+1$. ג. **(1)** $a=\frac{1}{2}$. **(2)** $(0,0)$.

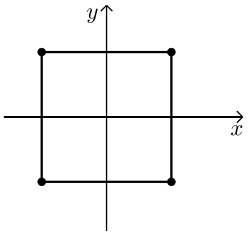
ד. **(1)** דלתון. **(2)** 3.

2) א. $\overrightarrow{EB}=(1-t)\underline{u}-t\underline{v}+(t-1)\underline{w}$, $\overrightarrow{ED}=(1-t)\underline{v}-t\underline{u}+(t-1)\underline{w}$.

ב. **(1)** הוכחה. **(2)** הוכחה. ג. $D(0,12,0)$, $S(0,0,12)$.

ד. $x-\sqrt{3y}=0$.

3) א. $2\text{cis}45°$, $2\text{cis}135°$, $2\text{cis}225°$, $2\text{cis}315°$. ב. סרטוט:



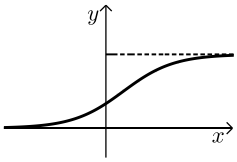
ג. $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,2)$, $(0,-2)$.

ד. $n=16$, $c=65536$.

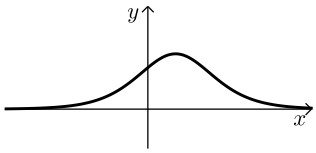
ה. $S=12.25$.

4) א. **(1)** $y=1$. **(2)** עליה: אין, ירידה: כל x. **(3)** $(0,1+a)$.

ב. **(1)** כל x. **(2)** $y=0$, $y=1$. **(3)** $y=\frac{1}{2}$ פיתול: סרטוט:



ג. **(1)** $\left(\frac{\ln a}{2},\frac{1}{2}\right)$. **(2)** סרטוט:

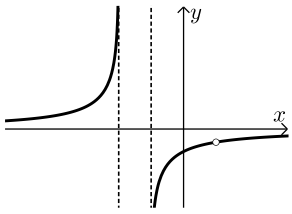


ד. $S=\frac{\ln a}{4}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{2}$.

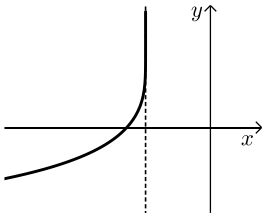
5) א. **(1)** $x<-2$ או $-1<x<1$ או $x>1$. **(2)** $x=-2$, $x=-1$, $y=0$.

(3) עליה: $x<-2$ או $-1<x<1$ או $x>1$, ירידה: אין.

(4) סרטוט: ב. **(1)** $x<-2$. **(2)** עליה: $x<-2$, ירידה: אין.



(3) סרטוט: ג. לא.



בגרות 2021 קיץ מועד מיוחד:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) נתון פרמטר a שונה מאפס.

א. הראה כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(a,-1)$ שווה למרחק שלהן מן הנקודה $(-a,1)$ הוא קו ישר.
הבע את משוואת הישר באמצעות a.

נתון הישר: $y=-ax$.

ב. מצא לאלו ערכים של a, הישר הנתון והישר שמצאת בסעיף א' ניצבים זה לזה.

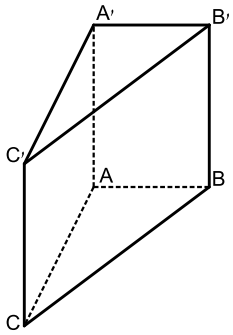
הישר שמצאת בסעיף א' והישר הנתון ניצבים זה לזה ומשיקים לשני מעגלים, M ו-N. מרכזי שני המעגלים מונחים על ציר ה-x, המעגל M נמצא מימין לציר ה-y, והמעגל N נמצא משמאל לציר ה-y. נתון כי המרחק בין מרכזי המעגלים הוא 6, והרדיוס של המעגל M גדול פי 2 מן הרדיוס של המעגל N.

ג. מצא את המשוואות של המעגלים M ו-N.

נתון הישר: $-x+\sqrt{17}y-8=0$. הישר משיק לשני המעגלים M ו-N.

ד. מצא משוואה של ישר המשיק לשני המעגלים, נוסף על הישרים המשיקים המתוארים בשאלה. נמק את תשובתך.

2) בסרטוט שלפניך מתוארת מנסרה ישרה ABCA'B'C', שהבסיס שלה הוא המשולש ABC.
נתון המספר k שבעבורו: $\overrightarrow{AB}=(k-1,k,3)$, $\overrightarrow{AC}=(k+1,0,k-3)$, $\overrightarrow{AA'}=(k-1,k-7,k+1)$.



א. מצא את ערכו של k.

המקצועות AC ו-BC מונחים על הישרים l_{AC} ו-l_{BC} בהתאמה:

l_{AC}: $\underline{x}=(8,-1,-1)+t(k+1,0,k-3)$

l_{BC}: $\underline{x}=(4,0,2)+m(k,-k,-4)$

ב. מצא את משוואת המישור A'B'C'.

ג. חשב את גודל הזווית C'A'B'.

ד. מצא את מרכז המעגל החוסם את המשולש A'B'C'. נמק.

3) נתונה משוואה I: $w^2-4iw-4+2i=0$. w הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I.

נתונה משוואה: $z^3=a+bi$. z הוא מספר מרוכב, a ו- b הם מספרים ממשיים. ידוע כי אחד מפתרונות משוואה זו מתאים לנקודה הנמצאת במישור גאוס על הציר המדומה, בחלקו השלילי.

ב. אחת מן הטענות 1-3 שלפניך נכונה. קבע איזו ונמק את קביעתך.

1. $a=0\ ,\ b>0$.
2. $a<0\ ,\ b=0$.
3. $a\neq 0\ ,\ b\neq 0$.

נתונה משוואה II: $z^3=2\left(w_1+w_2\right)$, w_2 ו- w_1 הם פתרונות של משוואה I.

ג. פתור את משוואה II.

פתרונות משוואה II מייצגים קודקודים של משולש במישור גאוס.

ד. סרטט את המשולש שהתקבל במישור גאוס.

נתון מספר מדומה: $u=di$, d הוא פרמטר ממשי.

מוסיפים את u לכל אחד מן הפתרונות של משוואה II כך שהמספרים שמתקבלים מייצגים משולש חדש.

ה. מצא את הערך של d שבעבורו המעגל החוסם את המשולש החדש עובר דרך ראשית הצירים. מצא שתי אפשרויות.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f\left(x\right)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות של הפונקציה $f\left(x\right)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f\left(x\right)$ (אם יש כאלה).

(4) הוכח כי הפונקציה $f\left(x\right)$ היא אי-זוגית.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

נתון הישר: $g\left(x\right)=a\cdot x$, a הוא פרמטר.

ידוע כי: $g\left(1\right)=f\left(1\right)$.

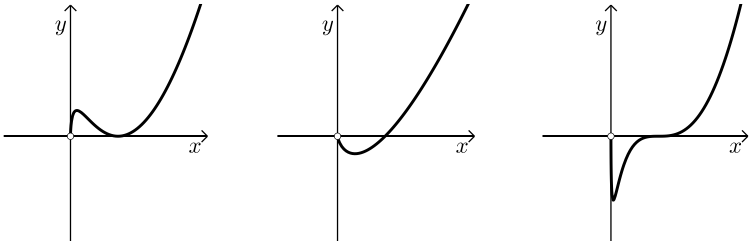
ג. (1) מצא את a.

(2) חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ לבין הישר $g\left(x\right)$.

5) נתונה משפחת הפונקציות: $f(x)=x\cdot\left(\ln(x)\right)^n$, $n\geq 1$ הוא מספר טבעי.

א. ענה על הסעיפים שלפניך בעבור n זוגי ובעבור n אי-זוגי.
אם יש צורך, בטא את תשובותיך באמצעות n.
(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. כל אחד מן הגרפים א-ג שלפניך מתאר פונקציה במשפחה.
קבע איזה גרף יכול להתאים ל-$n=1$, איזה גרף יכול להתאים ל-$n=2$
ואיזה גרף יכול להתאים ל-$n=3$. נמק את קביעותיך.



גרף ג **גרף ב** **גרף א**

נתונה הפונקציה: $g(x)=\dfrac{1}{x\cdot\left(\ln(x)\right)^2}$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה-x
ועל ידי הישרים: $x=\dfrac{1}{e}$ ו-$x=\dfrac{1}{e^2}$.

תשובות סופיות:

1) א. $y=ax$. ב. $a=\pm 1$. ג. $(x-4)^2+y^2=8$, $(x+2)^2+y^2=2$.

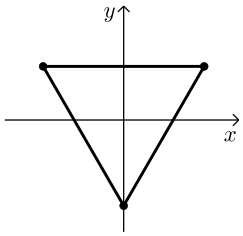
ד. $x+\sqrt{17}y+8=0$.

2) א. $k=2$. ב. $x-5y+3z-45=0$. ג. $90°$. ד. $(5,-5,5)$.

3) א. $1+i$, $-1+3i$. ב. טענה I.

ג. $2\text{cis}30°$, $2\text{cis}150°$, $2\text{cis}270°$ או $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$, $-2i$.

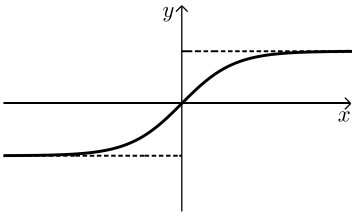
ד. סרטוט:



ה. $d=2$, $d=-2$.

4) א. (1). כל x . (2). $y=1:x\to\infty$, $y=-1:x\to-\infty$. (3). עליה: כל x , ירידה: אין.

(4). הוכחה. ב. סרטוט:



ג. (1). 0.761. (2). 0.106.

5) א. (1). $f(x):x>0$, $g(x):x>0$.

(2). n אי זוגי: עליה: $x>\frac{1}{e^n}$, ירידה: $0<x<\frac{1}{e^n}$.

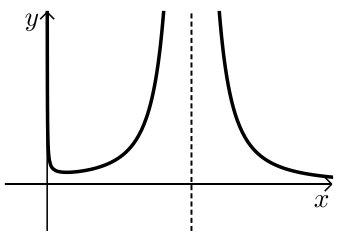
n זוגי: עליה: $0<x<\frac{1}{e^n}$ או $x>1$, ירידה: $\frac{1}{e^n}<x<1$.

(3). n אי זוגי: $\left(\frac{1}{e^n},\frac{(-n)^n}{e^n}\right)$ מקסימום.

n זוגי: $(1,0)$ מינימום, $\left(\frac{1}{e^n},\frac{(-n)^n}{e^n}\right)$ מקסימום.

ב. גרף א': $n=3$, גרף ב': $n=1$, גרף ג': $n=2$.

ג. סרטוט:



ד. $\frac{1}{2}$.

בגרות 2021 מועד קיץ ב':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) לפניך משוואת הפרבולה: $y^2=2ax$ ומשוואת המעגל: $x^2+y^2-2ax-2x=0$.
a הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל.
הבע באמצעות a, אם יש צורך.

דרך שתיים מנקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל עובר ישר ששיפועו חיובי.

ב. מצא את משוואת הישר. הבע באמצעות a, אם יש צורך.

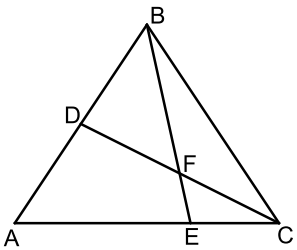
ממרכז המעגל מעבירים אנך לישר. אורך האנך הוא $2\sqrt{5}$.

ג. (1) הבע באמצעות a את מרכז המעגל ואת הרדיוס שלו.
(2) מצא את a.

מגדירים מעגל חדש שמרכזו זהה למרכז המעגל הנתון והרדיוס שלו קטן ב-2 מרדיוס המעגל הנתון.

ד. מצא את משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל החדש שווה למרחק שלהן מן הישר: $x=-4$.

2) נתון משולש ABC (ראה סרטוט).
הנקודה D היא אמצע הצלע AB.
הנקודה E מחלקת את הצלע AC ביחס של: $AE:EC=2:1$.
הנקודה F היא מפגש הקטעים BE ו-CD.



נסמן: $\overrightarrow{CB}=\underline{v}$, $\overrightarrow{CA}=\underline{u}$.
k ו-t הם מספרים כך ש: $\overrightarrow{BF}=t\cdot\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}=k\cdot\overrightarrow{CD}$.

א. מצא את t ואת k.

המשולש ABC נמצא במישור: $4x+2y+z-12=0$.
מישור זה חותך את ציר ה-x בנקודה A, את ציר ה-y בנקודה C ואת ציר ה-z בנקודה B.
הנקודה O היא ראשית הצירים.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את משוואת המישור AOE.

ד. מצא את נפח הפירמידה FAOE.

3) נתונה משוואה I: $z^4-2z^2+4=0$. z הוא מספר מורכב.

א. פתור את משוואה I.

פתרונות המשוואה מיוצגים על ידי כל הקודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. מצא את שטח המצולע.

נתונה משוואה II: $\left(a\cdot z^2+b\right)\left(z+1\right)=0$. z הוא מספר מרוכב, a ו- b הם מספרים ממשיים השונים מאפס. ידוע כי שניים מבין הפתרונות של המשוואה הם מספרים מדומים.

ג. הוכח כי: $a\cdot b>0$.

ד. מצא את פתרונות משוואה II. הבע באמצעות a ו- b, אם יש צורך.

ידוע כי הפתרונות המדומים של משוואה II מיוצגים על ידי נקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית הצירים והרדיוס שלו גדול פי שניים מן הערך המוחלט של פתרונות משוואה I.

ה. מצא את היחס: $\frac{b}{a}$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=e^{\left(bx^2-2bx\right)}-1$ המוגדרת לכל x. $b<0$ הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות b, אם יש צורך.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ עם הצירים.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f\left(x\right)$ המקבילות לציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f\left(x\right)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

נגדיר את הפונקציה: $g\left(x\right)=f\left(x+a\right)$, a הוא פרמטר.

נתון כי לפונקציה $g\left(x\right)$ יש נקודת קיצון על ציר ה- y.

ב. (1) מצא את a, ובטא את הפונקציה $g\left(x\right)$ באמצעות x ו- b.

(2) האם הפונקציה $g\left(x\right)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g\left(x\right)$.

ג. מצא את שיעור ה- x של כל אחת מנקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $g'\left(x\right)$, וקבע את סוגן.

ד. הצב $b=-0.5$, וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $g'\left(x\right)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים העוברים דרך נקודות הקיצון של $g'\left(x\right)$ ומאונכים לציר ה- x.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cdot x^2-x^3$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.
ענה על סעיפים א'-ג' עבור $a>0$. הבע את תשובותיך באמצעות a, אם יש צורך.

א. (1) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\ln\left(f(x)\right)$.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

ג. נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה-x.

(1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את טווח הערכים האפשריים של a שעבורם גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה-x בנקודה אחת בלבד.

ענה על סעיף ד' עבור $a=0$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. ציין בגרף את הערכים המספריים של שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

תשובות סופיות:

1) א. $(2,-2\sqrt{a})$, $(2,2\sqrt{a})$, $(0,0)$. ב. $y=\sqrt{a}\cdot x$.

ג. (1). מרכז המעגל: $(a+1,0)$, רדיוס: $(a+1)$. (2). $a=4$.

ד. $y^2=18x$.

2) א. $k=\frac{1}{2}$, $t=\frac{3}{4}$. ב. $E(1,4,0)$, $F\left(\frac{3}{4},3,3\right)$. ג. $z=0$.

ד. $V=6$.

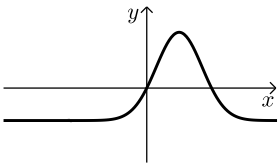
3) א. $z=\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z=\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z=-\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z=-\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

ב. $S=2\sqrt{3}$. ג. הוכחה. ד. $z=-1$, $z=\sqrt{\frac{b}{a}}i$, $z=-\sqrt{\frac{b}{a}}i$.

ה. $\frac{b}{a}=8$.

4) א. (1). $(0,0)$, $(2,0)$. (2). אנכית: אין, אופקית: $y=-1$.

(3). $(1,e^{-b}-1)$ מקסימום. (4). סרטוט:



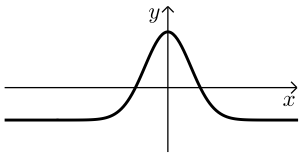
ב. (1). $a=1$.

(2). $g(x)=e^{b(x^2-1)}-1$, הפונקציה זוגית.

ג. $x=\sqrt{-\frac{1}{2b}}$ מינימום, $x=-\sqrt{-\frac{1}{2b}}$ מקסימום.

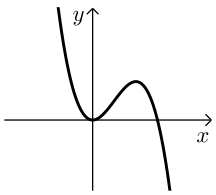
ד. $2\left(\sqrt{e}-1\right)=1.297$.

(3). סרטוט:



5) א. (1). חיובית: $0<x<a$ או $x<0$, שלילית: $a<x$.

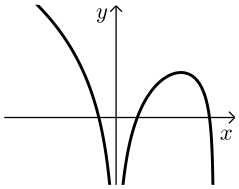
(2). סרטוט:



ב. (1). $x\neq 0$, $x<a$. (2). $x=0$, $x=a$.

(3). $\left(\frac{2a}{3},\ln\left(\frac{4}{27}a^3\right)\right)$ מקסימום.

ג. (1). סרטוט:



(2). $0<a<1.889$.

ד. סרטוט:

