תרגול 5 יחידות לתלמידי קידום

פרק 59

שאלון 807 בגרויות שנת 2013

מועד חורף 1
קיץ מועד א 6
קיץ מועד ב 9

בגרות חורף 2013:

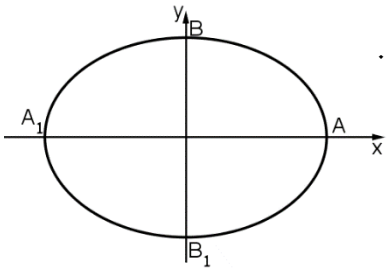
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נתונה האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$ (ראה ציור).



F_1 ו- F_2 הם מוקדי האליפסה וקדקודיה הם A , A_1 , B , B_1 .

נתון כי המוקד F_1 הוא אמצע הקטע AF_2 .

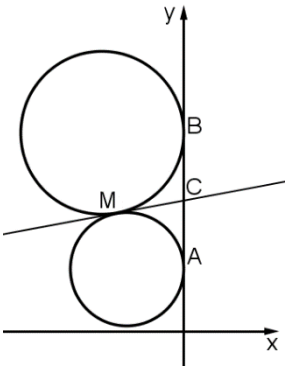
דרך מרכז האליפסה ושניים מקדקודיה העבירו מעגל.

נתון כי קוטר המעגל הוא $\sqrt{17}$.

א. מצא את משוואת האליפסה.

ב. העבירו עוד שלושה מעגלים אחרים דרך מרכז האליפסה ושניים מקדקודיה.
המרכזים של ארבעת המעגלים הם קדקודים של מרובע.
המרובע, הנמצא במישור $[xy]$, הוא בסיס של פירמידה שקדקודה הוא $S(0,3,4)$. מצא את נפח הפירמידה.

2) שני מעגלים שמרכזיהם נמצאים ברביע <u>השני</u>,
משיקים לציר ה- y בנקודות $A(0,1)$ ו- $B(0,3)$.
המעגלים משיקים זה לזה בנקודה M (ראה ציור).

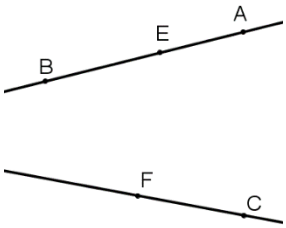


א. המשיק המשותף לשני המעגלים חותך את ציר ה- y בנקודה C.
הראה כי $MC=\frac{1}{2}AB$.

ב. (1) מצא את משוואת המקום הגאומטרי של נקודות ההשקה M הנוצרות באופן שתואר.
(2) מהי הצורה של המקום הגאומטרי של הנקודות M,
ובאיזה רביע/רביעים הוא נמצא?

ג. המדריך של הפרבולה $y^2=2px$ משיק למקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף ב. מצא את השיעורים של הנקודות על הפרבולה שמרחקן מהמוקד שלה הוא 10.

3) נתונים שני ישרים מצטלבים.
קטע AB נמצא על אחד הישרים,
וקטע CF נמצא על הישר האחר.
נקודה E היא אמצע הקטע AB (ראה ציור).



נסמן: $\overrightarrow{CF}=\underline{u}$, $\overrightarrow{FE}=\underline{v}$, $\overrightarrow{EA}=\underline{w}$.

נתון: $\underline{w}\perp\underline{v}$, $\underline{v}\perp\underline{u}$, $|\underline{w}|=\sqrt{5}$, $|\underline{v}|=\sqrt{13}$, $|\underline{u}|=\sqrt{7}$,

קוסינוס הזווית בין הווקטורים $\underline{w}$ ו- $\underline{u}$ הוא $\frac{\sqrt{35}}{10}$.

א. מצא את גודל הזווית ABC.

נתון גם: $B(2,6,3)$, $A(0,2,3)$.

מישור π עובר דרך הנקודה B ומאונך לישר AB.

ב. מצא את משוואת המישור π.

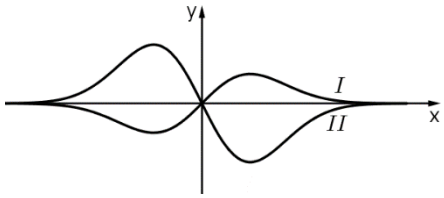
ג. היעזר בתשובתך לסעיף א ומצא את גודל הזווית שבין הישר BC למישור π.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונות הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.



הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימות: $g'(x)=-2f(x)$.

בציור שלפניך מוצגים הגרפים I ו-II של הפונקציות $f(x)$ ו-$g'(x)$.

א. קבע איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$ ואיזה גרף הוא של פונקציית הנגזרת $g'(x)$. נמק.

ב. נתון גם: $g'(x)=-2xe^{-x^2}$, $g(0.5)=\frac{1}{e^{0.25}}$.

מצא עבור אילו ערכים של x הגרף של הפונקציה $f(x)$ נמצא מעל הגרף של הפונקציה $g(x)$.

ג. הישר l_1 עובר דרך נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ ודרך נקודת המקסימום של פונקציית הנגזרת $g'(x)$.

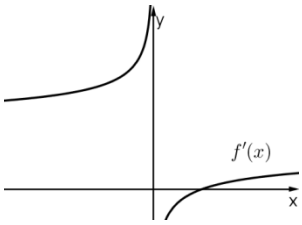
הישר l_2 עובר דרך המקסימום של הפונקציה $f(x)$ ודרך נקודת המינימום של פונקציית הנגזרת $g'(x)$.

מצא את משוואת הישר l_1 ואת משוואת הישר l_2.

ד. השטח, המוגבל על ידי הישר l_1, על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $g'(x)$, הוא S_1.

השטח, המוגבל על ידי הישר l_2, על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $g'(x)$, הוא S_2. מהו היחס $\frac{S_1}{S_2}$? נמק.

5) בציור שלפניך מוצג הגרף



של פונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{2\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

א. היעזר בגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ומצא:

(1) את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$

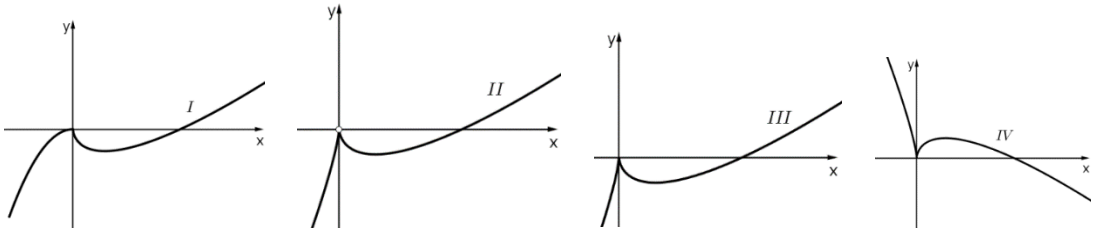
וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ב. נתון כי הישר $y=-1$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$

בנקודת המינימום שלה. מצא את נקודות החיתוך

של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ג. לפניך ארבעה גרפים I-IV. איזה גרף עשוי לתאר את הפונקציה $f(x)$? נמק.



תשובות סופיות:

1) א. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ ב. $8\sqrt{2}$

2) א. הוכחה ב.i. $x^2+(y-2)^2=1$

ב. ii. קשת המעגל $x^2+(y-2)^2=1$ ברביע השני $(x<0)$. ג. $(9,-6),(9,6)$

3) א. $80.9°$ ב. $x+2y-14=0$ ג. $9.1°$

4) א. $f(x)-\text{I}$, $g'(x)-\text{II}$ ב. $x>1$

ג. $l_2: x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $l_1: x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ד. **1**

5) א.i. עלייה: $x>1$ או $x<0$ ירידה: $0<x<1$

א. ii. כלפי מעלה: $x>0$ או $x<0$ כלפי מטה: אין. ב. $(0,0),\left(3\frac{3}{8},0\right)$

ג. גרף III.

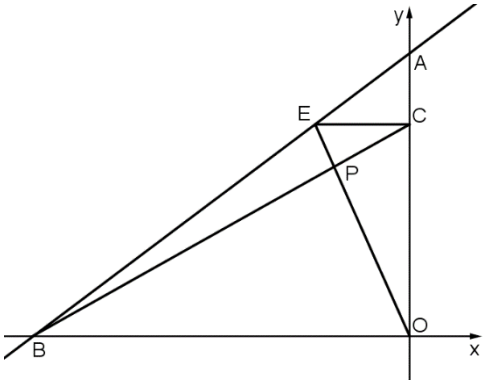
בגרות קיץ 2013 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נתונות הנקודות: $A(0,6)$, $B(-8,0)$.

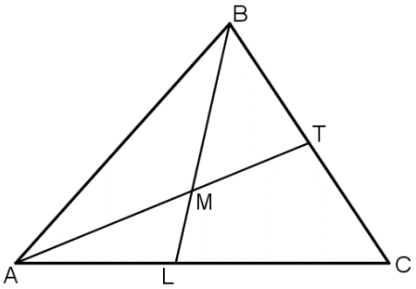


דרך הנקודה E שעל הקטע AB מעבירים ישר המקביל לציר ה- x (הנקודה E שונה מ-A ומ-B).
הישר חותך את ציר ה- y בנקודה C.
הישר BC חותך את הישר OE בנקודה P.
O – ראשית הצירים.

א. הראה כי המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות P הנוצרות באופן שתואר, נמצא על קו ישר.

ב. הנקודה P_0 נמצאת על המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א, כך שהנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABO. מצא את שטח המשולש AP_0O.

2) במשולש ABC התיכון לצלע BC הוא AT. הנקודה L נמצאת על הצלע AC.
AT ו-BL נפגשים בנקודה M (ראה ציור).



נסמן: $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{BM}=\beta\overrightarrow{BL}$.

א. נתון: $\frac{AL}{LC}=\frac{3}{4}$.
מצא את הערך של α ואת הערך של β.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את המשוואה של המקום הגאומטרי שעליו מונחות הנקודות B, שעבורן במשולש ABC מתקיים: $AT=\sqrt{50}$, $\underline{v}=(7,7)$, $A(1,0)$.

עפ"י הנתונים שבתת-סעיף ב(i) והנתון שבסעיף א, ענה על תת- הסעיפים (ii) ו-(iii).

ii. מצא את השיעורים של הנקודה L.

iii. אם הישר MB מקביל לציר ה- y , מצא את השיעורים של הקדקוד B.

הערה: הפתרון של סעיף ב אינו תלוי בפתרון של סעיף א.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה פירמידה SABCD שבסיסה ABCD הוא מקבילית (ראה ציור).

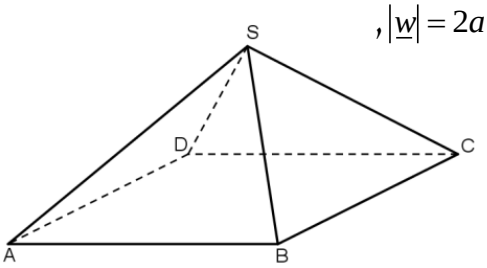
נסמן: $\overrightarrow{SD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{SB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{SA}=\underline{w}$.

i. הבע באמצעות $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו-$\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{SC}$.

ii. נתון גם: $SB=SD$, $SC=SA$, $|\underline{u}|=a$, $|\underline{w}|=2a$,

$\sphericalangle ASB=\beta$, $\sphericalangle ASD=\alpha$, $\sphericalangle DSB=90°$.

הראה כי: $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$.



ב. z הוא מספר מרוכב.

i. פתור את המשוואה $|z|i+2z=\sqrt{3}$.

ii. הראה כי כאשר n הוא מספר טבעי אז z^{6n} יכול לקבל רק שני ערכים.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה פונקציית הנגזרת: $f'(x)=\frac{2\ln x(2-\ln x)}{x(1-\ln x)^2}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של $f'(x)$.

ii. אחת משתי האסימפטוטות האנכיות של $f'(x)$ היא $x=0$.
מצא את האסימפטוטה האנכית השנייה.

iii. מצא את נקודות החיתוך של הגרף של $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

iv. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ היא שלילית, ואת התחומים שבהם היא חיובית.

ב. ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש גם אסימפטוטה אופקית, $y=0$.
סרטט סקיצה של הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. הישר $y=-4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x>e$.

i. מצא את השיעורים של נקודת ההשקה. נמק.

ii. הסבר מדוע $f(e^3)<-4$.

iii. השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$
ועל ידי ציר ה-x בתחום $e^2\le x\le e^3$, שווה ל-0.5. מצא את הערך של $f(e^3)$.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a^{x+1}}{a^{2x}-1}$, $0<a<1$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ג. מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. ידוע שפונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציה זוגית.

העבירו ישר l המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=1$,

והעבירו ישר אחר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה אחרת, T.

שני המשיקים מקבילים זה לזה.

(T היא הנקודה היחידה על גרף הפונקציה $f(x)$ שבה המשיק מקביל ל-l).

הבע באמצעות a (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה T. נמק.

תשובות סופיות:

1) א. $y=1.5x+6$, $-2y+3x+12=0$ ב. 8 יח"ר.

2) א. $\alpha=0.6$, $\beta=0.7$ ב. (i). $(x+6)^2+(y+7)^2$ ב. (ii). $(4,3)$

ב. (iii). $(4,-17)$

3) א. (i). $\overline{SC}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$ א. (ii). הוכחה ב. (i).

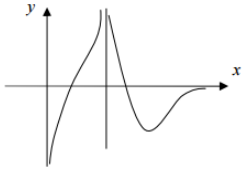
$z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ב. (ii). הוכחה 1 או 1-.

4) א. (i). $0<x<e$ או $x>e$ א. (ii). $x=e$ א. (iii). $(1,0)$, $(e^2,0)$

א. (iv). תחום חיובי: $e<x<e^2$ או $1<x<e$, תחום שלילי: $x>e^2$ או $0<x<1$.

ב. להלן סקיצה:



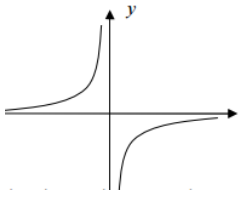
ג. (i). $(e^2,-4)$

ג. (iii). -4.5

5) א. $x\neq 0$ ב. הוכחה.

ג. תחומי עלייה: $x>0$ או $x<0$, תחומי ירידה: אין.

ד. להלן סקיצה:



ה. $\left(-1,\frac{a^2}{1-a^2}\right)$.

בגרות קיץ 2013 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נתונות הנקודות: $A(-a,0)$ ו-$B(a,0)$, $a>0$.

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה A גדול פי 2 ממרחקן מהנקודה B זהה למקום הגאומטרי של מספרים מרוכבים z המקיימים $|z+b|=4$.

a ו-b הם פרמטרים ממשיים.

א. מצא את הערך של a ואת הערך של b.

ב. מלבן TNEF, שצלעותיו מקבילות לצירים, חסום במקום הגאומטרי המתואר בפתיח. שיעורי ה-y של הקדקודים E ו-F קטנים מ-0.

המספר המרוכב $z=2+iy$ מייצג את הקדקוד T של המלבן.

הנקודה C נמצאת על ציר ה-x כך ש-$\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{CF}=-16$.

מצא את השיעורים של הנקודה C.

2) הישר l עובר דרך הנקודות $A(0,0,1)$ ו-$B(1,1,0)$.

הישר מאונך למישור π_1 וחותך את המישור בנקודה D.

המישור π_1 עובר דרך ראשית הצירים O.

א. מצא את שטח המשולש OAD.

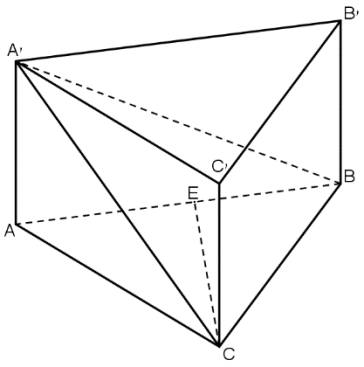
ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. המישור π_2 מכיל את ציר ה-x ומקביל לישר l.

מצא את הזווית בין הישר l ובין ישר החיתוך שבין המישור π_1 למישור π_2.

ii. מצא את המרחק של הישר l מישר החיתוך שבין המישור π_1 למישור π_2.

3) נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה-צלעות.
הנקודה E נמצאת על המקצוע AB כך ש- $AE = kAB$, $(0 < k < 1)$.



א. נתון כי הזווית בין המישור $A'EC$
למישור ABC היא הזווית $A'EA$.
מצא את הערך של k.
נתון: $AC = 2$, $\sphericalangle A'EA = 45°$.
הזווית בין המישור $A'EC$ למישור ABC היא $\sphericalangle A'EA$.

ב. חשב את הזווית בין המישור ABC למישור $A'BC$.
נקודה F נמצאת על המישור $A'BC$ (לאו דווקא על BC)
כך ש- $\overrightarrow{AF}$ מאונך ל- $\overrightarrow{BC}$, ומתקיים: $\overrightarrow{A'F} = t\overrightarrow{A'C} + m\overrightarrow{A'B}$.

ג. סמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$ והוכח כי: $t = m$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{-ax}$, $g(x) = e^{ax}$, $a > 0$.

i. סמן במערכת צירים את השטח הכלוא בין הגרפים של
הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ והישר $x = \frac{1}{a}$ ואת השטח הכלוא
בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ והישר $x = -\frac{1}{a}$.

ii. השטחים שסימנת בתת סעיף א (i) מסתובבים סביב ציר ה- x.
הבע כפונקציה של a את הנפח הכולל של גוף הסיבוב שנוצר, $V(a)$.

iii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $V(a)$.

ב. בתאריך 1/1/2005 הופקד בבנק א' סכום כסף מסוים, ובאותו תאריך הופקד גם בבנק ב' אותו סכום כסף. בכל אחד מהבנקים סכום הכסף שהופקד גדל כל שנה באחוז קבוע. כעבור 7 שנים היו בבנק א' 12298 ₪ ובבנק ב' היו 13162 ₪. כעבור כמה שנים מהתאריך 1/1/2005 יהיה בבנק ב' סכום כסף הגדול ב-25% מסכום הכסף שיהיה בבנק א'?
הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{kx}{\ln x}$, k הוא פרמטר השונה מ-0.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא עבור אילו ערכים של k לפונקציה $f(x)$ יש מקסימום.

נתון כי בתחום $x>1$ הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים $y\le -2$ ורק אותם.

ii. מצא את הערך של k.

iii. נתון גם כי הישר $x=1$ הוא האסימפטוטה היחידה של הפונקציה $f(x)$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בכל תחום הגדרתה.

ג. מבין המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x>1$, מצא את נקודת ההשקה של המשיק ששיפועו מינימלי.

תשובות סופיות:

1) א. $a=3\ ,\ b=-5$ ב. $C(5,0)$

2) א. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ב. (i) $90°$ ב. (ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) א. $k=0.5$ ב. $30°$ ג. הוכחה.

4) א. (i). סקיצה. א. (ii) $\frac{\pi\left(e^{2}+e^{-2}-2\right)}{a}$

א. (iii). סקיצה. ב. 23 שנים.

5) א. $x>1$ או $0<x<1$ ב. (i) $k<0$ ב. (ii) $k=-\frac{2}{e}$

ב. (iii). סקיצה. ג. $\left(e^{2},-e\right)$.