תרגול 5 יחידות לתלמידי קידום

פרק 70

שאלון 806 בחינות חזרה

בחינה 1 1
בחינה 2 5
בחינה 3 9
בחינה 4 13
בחינה 5 17

בחינה מספר 1:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) רוכב אופניים יצא ממקום A למקום B והגיע לאחר 8 שעות.
נהג אופנוע יצא לאחר זמן מסוים ממקום A לכיוון מקום B והגיע 3.5 שעות לפני רוכב האופניים. ידוע כי השניים נפגשו לאחר פרק זמן, מיציאת האופנוע, השווה להפרש בין זמני היציאה של רוכב האופניים ונהג האופנוע מ-A.

א. מצא כמה זמן אחרי רגע היציאה של רוכב האופניים יצא נהג האופנוע.

ב. נהג האופנוע התעכב שעה בנקודה B וחזר מיד לכיוון A.
ידוע כי הוא נסע באותה המהירות כפי שנסע מ-A כלפי B.
לאחר כמה זמן יפגוש (אם בכלל) את רוכב האופניים?
במידה והם ייפגשו, מצא את זמן הפגישה מרגע יציאת רוכב האופניים.
במידה והם לא ייפגשו, נמק מדוע.

2) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את x .

(2) מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12}=0$. מצא את a_1 .

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=308$.
מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

3) במדינה מסוימת 19/60 מהאזרחים הם גברים ו-41/60 הן נשים. 30% מבין מרכיבי המשקפיים במדינה זו הם גברים ו-40% מבין אלו שלא מרכיבים משקפיים הם גברים.

א. מה ההסתברות למצוא אישה במדינה זו שלא מרכיבה משקפיים?

ב. בוחרים 4 אנשים. מה ההסתברות שבדיוק שניים מהם הם נשים שלא מרכיבות משקפיים?

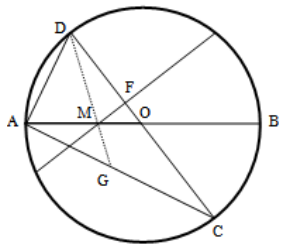
ג. בוחרים אזרח. ידוע כי הוא גבר. מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) AB ו-CD הם קטרים במעגל שמרכזו O.
מעבירים מיתר החותך את AB בנקודה M כך שמתקיים: $2AM = BM$
ואת CD בנקודה F כך שמתקיים: $FM \perp CD$. ידוע כי זווית BMF היא $30°$.
מעבירים את המיתרים AC ו-AD כך שנוצר המשולש ACD.



א. הוכח: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BMF$.

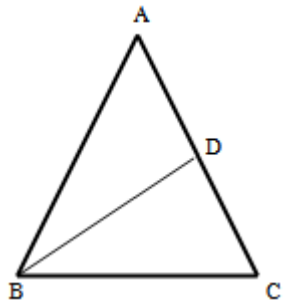
ב. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) הוכח כי המשולשים ADC ו-FOM דומים.

(2) פי כמה קטן הקטע FO מרדיוס המעגל?

ג. מעבירים מהקדקוד D של המשולש ACD קטע העובר דרך הנקודה M וחותך את המיתר AC בנקודה G. חשב פי כמה גדול שטח המשולש DGC משטח המשולש MOF.

5) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$ בעל זווית ראש $36°$ החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון BD לשוק AC.



א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש ABC.

ב. חשב את אורך התיכון BD.

ג. מסמנים:

r_1 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

r_2 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

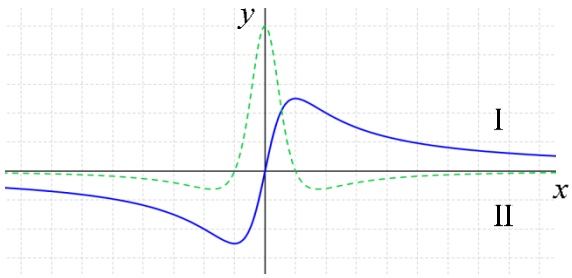
הוכח את היחס הבא: $\frac{r_1}{r_2} = 2\cos 36$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ושל $f'(x)$:



ידוע כי גרף I עובר בראשית הצירים וכי נקודת המקסימום של גרף II נמצאת על ציר ה- y.

א. קבע מי מבין הפונקציות $f(x), f'(x)$ היא זוגית ומי היא אי-זוגית.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$?

(2) סרטט באותה מערכת צירים את הגרפים של הפונקציות הנ"ל והוסף עליהם את הגרף של $f''(x)$.

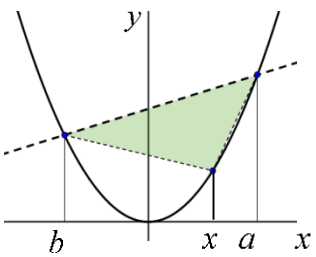
ג. נסמן ב- $S(t)=\int_0^t f'(x)dx$. ידוע כי ל- $S(t)$ יש נקודת מקסימום: $S(1)=4$.

(1) מצא את שיעורי נקודת המקסימום של $f(x)$.

(2) היעזר בסעיף א' ומצא את נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

7) משולש חסום בקטע הפרבולה $y=kx^2$, $(k>0)$, שבין הנקודות (a,ka^2) ו- (b,kb^2) כמתואר באיור.

הראה שלמשולש השטח הגדול ביותר הוא כאשר $x=\frac{a+b}{2}$ ומצא את שטח זה.



8) נתונה הפונקציה: $f(x)=3-\cos^2 x$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) הוכח כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x)=\sin 2x$.

(2) הסבר מדוע גם $f(x)$ וגם $f'(x)$ מוגדרות לכל x.

ב. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=\sqrt{f'(x)}$.

(1) האם הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x? נמק.

(2) השטח הכלוא בין $g(x)$ וציר ה-x בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ מסתובב סביב ציר ה-x. חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

תשובות סופיות:

1) א. חצי שעה. ב. 6 שעות ו-20 דקות.

2) א. (1). $d=11$. (2). $x=-50$. ב. $a_1=-121$. ג. $S=2156$.

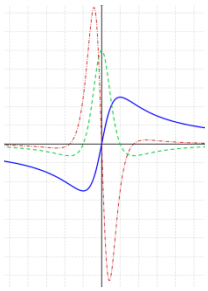
3) א. 0.1 ב. 0.0486 ג. $\frac{15}{19}$.

4) ב. (2). קטן פי 6

ג. שטח המשולש DGC גדול פי 18 משטח המשולש MOF.

5) א. 9.4 ס"מ ב. 10.1 ס"מ.

6) א. גרף I הוא של $f(x)$ וגרף II הוא של $f'(x)$.



ב. (1). לפונקציה $f(x)$ יש 3 נקודות פיתול.

ב. (2). סקיצה בצד, באדום גרף הנגזרת השנייה.

ג. (1). $\max(1,4)$. ג. (2). $\min(-1,-4)$.

7) השטח הגדול ביותר הוא: $S_{\max}=\frac{k(a-b)^3}{8}$.

8) א. (1). חישוב.

א. (2). שתי הפונקציות מורכבות מסינוסים וקוסינוסים אשר מוגדרים לכל x.

ב. (1). לא, הפונקציה אינה מוגדרת לתחומים שבהם $f'(x)=\sin 2x<0$.

ב. (2). π יח"ק.

בחינה מספר 2:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) אבי ושמוליק השיפוצניקים מבצעים עבודת שיפוץ מסוימת במשך 14 שעות כאשר הם עובדים יחדיו מתחילתה ועד סופה. אם שמוליק יבצע רבע מהשיפוץ לבדו, ואבי יבצע את שארית השיפוץ לאחר ששמוליק יסיים את חלקו, העבודה עצמה תתבצע במשך 28 שעות.

א. הראה כי אבי ושמוליק יעילים באותה המידה אם ידוע כי כל פועל מבצע לבדו את עבודת השיפוץ ביותר מ-20 שעות.

ב. כמה זמן ייקח לכל אחד מהם לבצע את כל השיפוץ לבדו?

2) נתונה הסדרה הבאה: $4, 12, 36, \ldots, a_n$. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6} \quad , \quad b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6} \quad , \quad b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6} \quad , \quad b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ-a_8.

3) במפעל גדול ההסתברות שמתוך 4 עובדים לפחות אחד ירכיב משקפיים היא 0.5904.

א. מה ההסתברות לבחור עובד שלא מרכיב משקפיים?

ידוע כי 40% מהפועלים שמרכיבים משקפיים הם מעשנים ו-20% מבין העובדים המעשנים הם מרכיבים משקפיים.

ב. מה ההסתברות לבחור עובד שמרכיב משקפיים בלבד או מעשן בלבד?

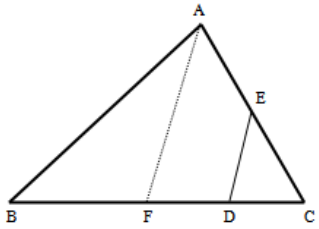
ג. בוחרים באקראי 5 עובדים. מה ההסתברות שרוב העובדים שנבחרו הם מעשנים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) על הצלעות של המשולש ABC הקצו את הנקודות D ו-E כך שהמרובע AEDB הוא בר חסימה. הנקודה D מחלקת את הצלע BC כך שהקטע BD גדול פי 3 מהקטע DC.

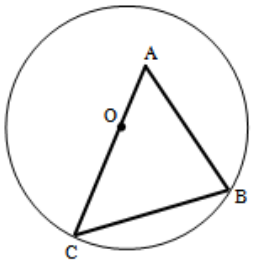


א. הוכח: $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.

ב. נתון גם כי: $AC \cdot CE = 36$. חשב את אורך הקטע DC.

ג. מעבירים מהקדקוד A את הקטע AF המקביל לקטע DE. נתון כי: $AC = 9$ ס"מ.
חשב את היחס: $\frac{DF}{BC}$.

5) נתון משולש ABC. הקדקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. הזווית BAC היא $60°$.



א. חשב את רדיוס המעגל.

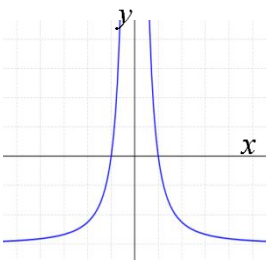
ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB. חשב את זווית ADB.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



האסימפטוטה היחידה המקבילה לצירים של הפונקציה $f(x)$ היא $x=0$.

א. רק על פי נתוני השאלה סרטט סקיצה של פונקציה $f(x)$. נמק.

ב. פונקצית הנגזרת $f'(x)$ היא:

$f'(x)=a+\frac{b}{x^2}$, a,b פרמטרים שונים מ-0.

כמו כן נתונים:

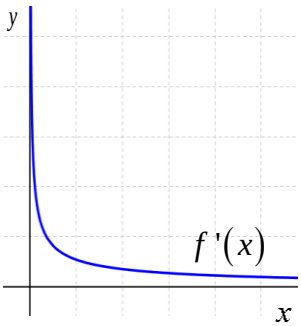
(1) לגרף הנגזרת יש אסימפטוטה אופקית והיא 3-.

(2) הנגזרת מקיימת: $\int_1^2 f'(x)\,dx=-1.5$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{a+\sqrt{x}}$,

a פרמטר. באיור שלפניך מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$.



ידוע כי לגרף הנגזרת יש אסימפטוטה $x=0$.

א. קבע על סמך גרף הנגזרת האם a הוא חיובי או שלילי. נמק.

ב. מגדירים פונקציה: $h(x)=f(x)\cdot f'(x)$.

(1) הראה כי: $h(x)=\frac{1}{4\sqrt{x}}$.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $h(x)$ וציר ה-x בתחום: $4\le x\le t$ הוא 2 יח"ר. מצא את t.

8) מחלקים חוט שאורכו L לשני חלקים. מחלק אחד של החוט יוצרים חצי עיגול ומהאחר יוצרים משולש שווה צלעות. מהו סכום השטחים המינימלי של שתי הצורות?

תשובות סופיות:

1) א. $x=y=\frac{1}{28}$ - קצב העבודה של כל אחד מהם.

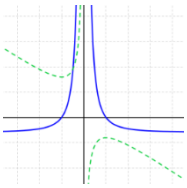
ב. 28 שעות.

2) א. $q=3$ ג. b_6 , b_5.

3) א. 0.8 ב. 0.44 ג. 0.31744.

4) ב. 3 ס"מ ג. $\frac{BF}{BC}=\frac{7}{16}$.

5) א. 10.5 ס"מ $= R$. ב. $24.32°$

6) א.  ב. $a=-3$, $b=3$.

7) א. $a>0$. ב. 2. $t=36$.

8) $S_{\min}=0.0265L^2$.

בחינה מספר 3:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) בנהר מסוים עורכים תחרות בין סירות מרוץ. בשעה 10:00, מוזנקת סירת מרוץ מנקודה A שבנהר, ושטה כלפי נקודה B נגד כיוון הזרם. באותו הזמן משוחררת תיבת גופר בנקודה B אשר שטה עם כיוון הזרם של הנהר כלפי הנקודה A. מהירות סירת המרוץ במים עומדים היא 24 קמ"ש. במסגרת התחרות, הסירה צריכה להגיע לנקודה B ומיד לחזור לנקודה A. ידוע כי הסירה פגשה את תיבת הגופר בנהר לאחר שעה וכי שתיהן הגיעו לנקודה A יחדיו. באיזו שעה תסיים את הסירה את המִקצה (שייט מנקודה A לנקודה B וחזרה לנקודה A)?

2) נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ שמנתה היא q , $(0<q<1)$.

נגדיר את הסכומים הבאים:

$$T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10} + ...$$
$$V = a_3 + a_7 + a_{11} + ...$$

נתון כי: $T = 6V$.

א. מצא את מנת הסדרה q .

ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?

ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.

3) בחדר יש פי 4 נשים מגברים. משחקים את המשחק הבא: בוחרים באקראי אדם מהחדר. אם נבחר גבר אז הוא יוצא מהחדר ואם נבחרה אישה אז היא נשארת. לאחר מכן בוחרים אדם נוסף.

א. מצא כמה גברים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות שייבחרו שני אנשים שונים היא: $\frac{236}{725}$.

ב. ידוע כי בפעם השנייה נבחר גבר, מה ההסתברות שגם בפעם הראשונה יבחר גבר?

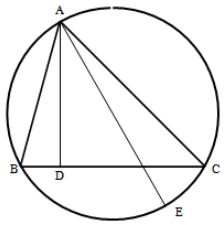
ג. משחקים את המשחק 4 פעמים. ידוע כי בכל ארבעת הפעמים נבחר גבר בפעם השנייה. מה ההסתברות שברוב המקרים יצא גבר גם בפעם הראשונה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

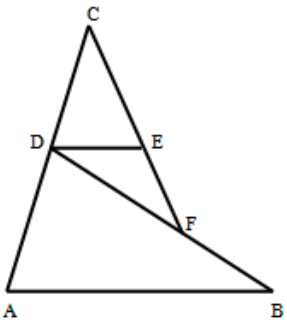
4) המשולש ABC חסום במעגל.
A גובה לצלע BC ו-AE קוטר במעגל.



א. הוכח: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$.

ב. נתון גם כי: $CD = 8$ ס"מ, $AD = 6$ ס"מ
ו- $CE = \sqrt{21}$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.

5) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.
הנקודות E , C ו-F נמצאות על אותו הישר.
ידוע כי המשולשים ABD , DEF ו-DCE הם
שווי שוקיים: $(AB = BD\ ,\ DC = CE\ ,\ EF = DE)$.



נתון כי: $AD = 8$ ס"מ.

א. חשב את אורך הקטע BF.

ב. מחברים את הנקודות B ו- C.
חשב את אורך הצלע BC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\cos x}{2\cos x+1}$ בתחום: $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

א. הוכח כי הפונקציה היא זוגית וכי נגזרתה אי-זוגית.

ב. מגדירים את הפונקציה הבאה: $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

(1) האם $g(x)$ היא פונקציה זוגית, אי-זוגית או שאינה זוגית ואינה אי-זוגית?
היעזר בסעיף הקודם, אין צורך לבצע חישוב מחדש.

(2) הראה כי: $g(x)=-\frac{\tan x}{2\cos x+1}$.

ג. היעזר ב-$g(x)$ וקבע באילו תחומים בתוך התחום הנתון הפונקציה $f(x)$ היא בעלת סימן שונה משל הנגזרת $f'(x)$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

(2) הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. לפי ממציאך מהסעיף הקודם, קבע מה ניתן להסיק לגבי תחום ההגדרה ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x+1)$? נמק.

ג. חשב את ערך האינטגרל הבא: $\int_{-1}^{2}\frac{x+3}{\sqrt{(x+2)^3}}dx$.

8) מגדלור A נמצא 0.5 ק"מ דרומה מנקודה B על חוף הים, המשתרע ממזרח למערב.
3 ק"מ מערבה מנקודה B נמצאת נקודה C, המונחת גם היא על חוף הים.
אדם הנמצא במגדלור ומעוניין להגיע לנקודה C עוזב את המגדלור בסירה במהירות 3 קמ"ש ושט מ-A בקו ישר לנקודה P שבין B ו-C על החוף.
את המרחק מ-P ל-C עובר האדם בהליכה במהירות של 3.25 קמ"ש.
באיזה מרחק מ-B חייב האדם לנחות על מנת להגיע בזמן המינימלי מ-A ל-C?

תשובות סופיות:

1) בשעה 12:24.

2) א. $q=\frac{1}{2}$ ב. פי 5 ג. $a_1=1024$

3) א. 6 גברים ו-24 נשים ב. הסתברות לגבר בפעם הראשונה: $p\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{141}$.

ג. 0.0193.

4) ב. 5.5 ס"מ.

5) א. 4.94 ס"מ ב. 17.19 ס"מ.

6) ב. (1). אי-זוגית. ג. $0<x<\frac{\pi}{2}$.

7) א. (1). $x>-1$

ב. הפונקציה $f(x+1)$ היא הזזה של $f(x)$ צעד אחד שמאלה.

לכן תחום הגדרתה הוא: $x>-2$ וגם היא תעלה לכל x בת.ה.

ג. 3.

8) 1.2 ק"מ.

בחינה מספר 4:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) הולך רגל יצא מ-A ובאותה השעה יצא רוכב אופניים מ-B.
הם התקדמו זה לקראת זה ונפגשו בדרך. הולך הרגל הגיע ל-B כעבור 5 שעות מרגע הפגישה ורוכב האופניים הגיע ל-A כעבור 12 דקות מרגע הפגישה.
הנח כי מהירויות הולך הרגל ורוכב האופניים קבועות.

א. מצא את היחס בין המהירות של הולך הרגל למהירות של רוכב האופניים.

ב. נתון כי המרחק בין A ל-B קטן מ-12 ק"מ. מצא באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות של הולך הרגל ושל רוכב האופניים אם ידוע כי הולך הרגל הלך במהירות הגדולה מ-1 קמ"ש.

2) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1 = 2\ ,\ a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 3}$.

מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n = \frac{4 - 7a_n}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את הסכום הבא: $b_2 + b_4 + b_6 + ... + b_{22}$.

3) בכד יש 12 כדורים חלקם אדומים וחלקם שחורים.
מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד.

א. מצא את מספר הכדורים האדומים שבכד אם ידוע כי ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים היא 4/9.

ב. חלק מהכדורים עשויים מעץ והשאר עשויים מפלסטיק.
ידוע כי 25% מהכדורים האדומים עשויים מעץ וכי 50% מהכדורים העשויים מעץ הם אדומים. מצא את ההסתברות לבחור כדור שחור העשוי מפלסטיק.

ג. מוציאים מהכד 5 כדורים בזה אחר זה עם החזרה.
מה ההסתברות להוציא 4 כדורים אדומים העשויים מפלסטיק?

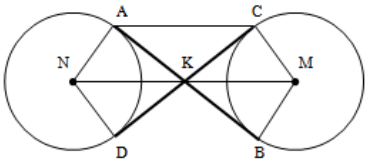
ד. מוציאים מהכד 5 כדורים בזה אחר זה עם החזרה.
ידוע כי כולם עשויים מפלסטיק, מה ההסתברות ש-3 מהם בצבע אדום?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס זהה M ו-N.
מעבירים שני משיקים למעגלים AB ו-CD הנחתכים בנקודה K.
מעבירים את הרדיוסים AN ו-DN במעגל השמאלי ו-BM ו-CM במעגל הימני.

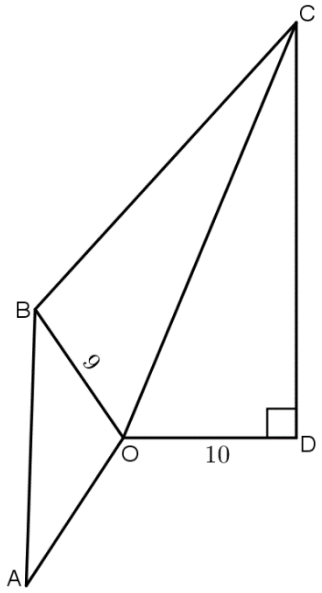


א. הוכח: $KN = KM$.

ב. הוכח כי המרובע ACMN הוא טרפז שווה שוקיים.

ג. רדיוס המעגלים הוא R וידוע כי המשולש BKC הוא שווה צלעות.
הבע באמצעות R את היקף הטרפז ACMN.

5) מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA , OB , OC ו-OD.
ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α. המשולש COD הוא ישר זווית $(\sphericalangle CDO = 90°)$.
נתונים האורכים: $DO = 10$, $BO = 9$.
מסמנים: $CD = 1.5m$, $BC = 1.4m$.



א. הבע באמצעות m את $\sin\alpha$.

ב. נתון גם כי: $AB = m$. מצא את m אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.

ג. חשב את זווית BOC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^2+6x+b}$, b פרמטר.

ידוע כי ערך הפונקציה $f(x)$ וערך הנגזרת $f'(x)$ שווים כאשר $x=-2$.

א. מצא את ערך הפרמטר b.

ב. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

(1) האם ל-$g(x)$ יש אסימפטוטות המקבילות לצירים? אם כן מהן? אם לא נמק.

(2) הראה כי אין ל-$g(x)$ נקודות קיצון.

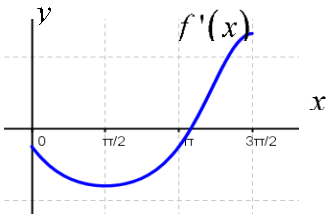
ג. מגדירים בנוסף: $h(x)=g(x)+3$.

(1) האם ל-$h(x)$ אותן אסימפטוטות כמו ל-$g(x)$? נמק.

(2) האם גם ל-$h(x)$ אין נקודות קיצון? נמק.

7) גרף הנגזרת של הפונקציה: $f(x)=\dfrac{a\cos x}{b\sin x+2}$ בתחום: $0\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$

מופיע באיור הבא (a,b פרמטרים):



א. היעזר בסקיצה וקבע האם הפרמטר b יכול להיות:

(1) $b=1$.

(2) $b=2$.

ב. נתון כי: $\int_{\pi/2}^{\pi} f'(x)\,dx=-\dfrac{1}{2}$. מצא את a.

ג. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x+\pi)$.

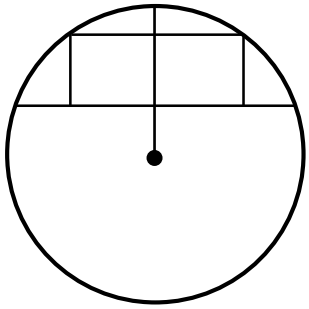
(1) הראה כי: $g(x)=\dfrac{\cos x}{b\sin x-2}$.

(2) מצא את b אם נתון כי: $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

8) במעגל שרדיוסו R עובר מיתר במרחק 2 ס"מ מהמרכז. במקטע שנוצר חסום מלבן.

א. סמן ב- x את רוחב המלבן ורשום את שטח המלבן באמצעות R ו- x.

ב. הנח כי: $R = 12$ ס"מ, ומצא את השטח המקסימלי של המלבן.



תשובות סופיות:

1) א. $\frac{x}{y} = \frac{1}{5}$, כאשר: x -מהירות הולך הרגל ו- y -מהירות רוכב האופניים.

ב. $1 < x < 2\ ,\ 5 < y < 10$ (הגדלים ביחידת של קמ"ש).

2) ב. $S_{11(p)} = 267\frac{2}{3}$.

3) א. 4 כדורים ב. $\frac{7}{12}$ ג. $\frac{15}{1024} = 0.0146$ ד. 0.1323.

4) ג. $9R$.

5) א. $\sin\alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$ ב. $m = 16$ ג. $56.89°$

6) א. $b = 9$ ב. i. כן: $x = -3\ ,\ y = 0$

ג. (1). לא. כי כעת: $x = -3\ ,\ y = 3$ (האופקית שונה) ג. (2). כן.

7) א. (1). עבור זה נקבל כי לגרף הפונקציה אין אסימפטוטות אנכיות ולכן הוא יכול להיות.

א. (2). עבור ערך זה נקבל אסימפטוטות אנכיות ולכן הוא לא יכול להיות כי מגרף הנגזרת מקבלים כי עבור $x = 0.5\pi$ יש ערך סופי.

ב. $a = 1$ ג. (2). $b = 0.5$.

8) א. $S = x\sqrt{R^2 - 0.25x^2} - 2x$ ב. $42\sqrt{7}$ סמ"ר.

בחינה מספר 5:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) משאבת לחץ הוציאה 18 מ״ק שמן ממיכל תעשייתי בקצב קבוע.
לאחר הפסקה של 40 דקות הגבירו את קצב השאיבה ב-4 מ״ק לשעה.
בקצב המוגבר, שאבה המשאבה עוד 42 מ״ק שמן מהמיכל.
הזמן שהמשאבה שאבה את השמן, כולל ההפסקה זהה לזמן שבו הייתה עובדת בקצב הרגיל בכדי לשאוב 60 מ״ק שמן מהמיכל.

א. מצא את קצב השאיבה הרגיל של משאבת הלחץ.

ב. נתון בנוסף כי כאשר מפעילים את המשאבה בקצב הרגיל, היא מרוקנת $\frac{1}{4}$ ממיכל מסוים במשך 10 שעות. מפעילים שתי משאבות זהות באותו הקצב.
ידוע כי קצב השאיבה שלהן גדול מקצב השאיבה הרגיל של המשאבה הראשונה אך קטן מהקצב המוגבר. באיזה תחום שעות יהיה הזמן שבו תרוקנה שתי המשאבות את המיכל?

2) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.
בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כי האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.

ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

3) בבית ספר בעיר מסוימת נערכו שני מבחנים. 80% מהתלמידים עברו את המבחן הראשון. 1/4 מבין התלמידים שעברו את המבחן הראשון עברו גם את השני ו-1/2 מהתלמידים שנכשלו במבחן הראשון נכשלו גם בשני.

א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא עבר את אחד המבחנים בלבד?

ב. בוחרים באקראי 4 תלמידים. מה ההסתברות שבדיוק אחד מהם עבר את אחד המבחנים בלבד?

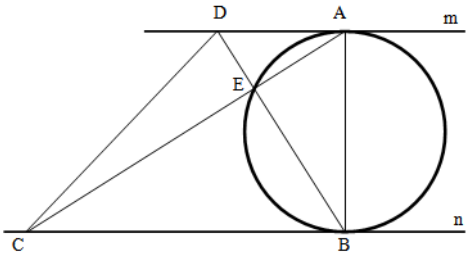
ג. איזה חלק מבין התלמידים שנכשלו במבחן השני מהווה קבוצת התלמידים שנכשלו גם במבחן הראשון?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) בין המשיקים המקבילים m ו-n מעבירים מעגל כך ש-AB הוא הקוטר היוצא משתי נקודות ההשקה שלהם. הנקודות D ו-C נמצאות על המשכי המשיקים כך שהמרובע ABCD הוא טרפז. אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה E שנמצאת על היקף המעגל.
ידוע כי: $S_{ABC}=3\cdot S_{DAB}$. שטח המשולש ADE יסומן ב-S.
בטא באמצעות S את שטח הטרפז ABCD.



5) במשולש ABC הזווית A היא בת $60°$.
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\sphericalangle ADB=60°$.
ידוע כי $\sqrt{28}$ ס"מ = AB וכי הצלע AD במשולש ABD גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

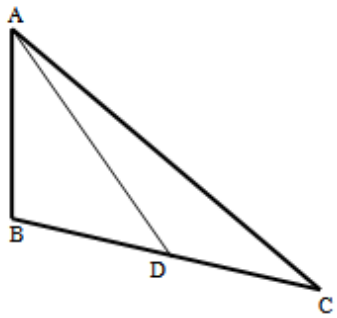
א. מצא את אורך הצלע BD.

ב. היקף המשולש ABC הוא: $5\sqrt{7}+7$ ס"מ = P.

(1) סמן: $DC=t$ והבע באמצעות t את אורך הצלע AC.

(2) מצא את t.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.



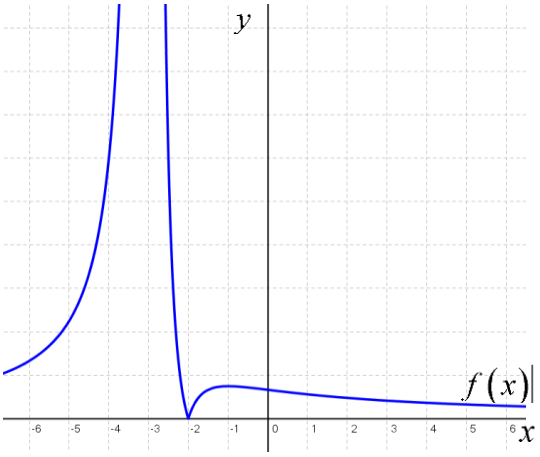
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+12}{x^2+ax+9}$, a פרמטר.

באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה $|f(x)|$.



א. מצא את a ואת האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ב. מגדירים את הפונקציה הבאה: $g(x)=f(x-2)$.

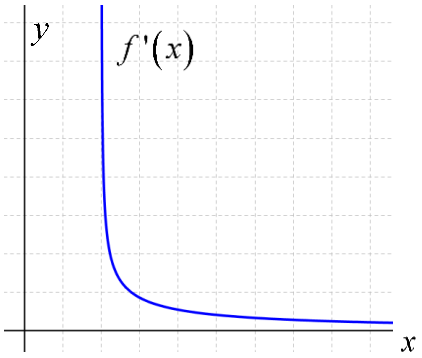
(1) כתוב במפורש את $g(x)$.

(2) הראה כי $g(x)$ עוברת בראשית הצירים.

(3) כתוב את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

7) במשולש שווה שוקיים ABC, $(AB=AC)$ אורך הבסיס הוא $2a$ מעבירים גובה מהקדקוד B לשוק AC, אשר חותך אותה בנקודה D. מנקודה D מעבירים אנך לשוק AB, החותך אותה בנקודה E. סמן את זווית הבסיס של המשולש ABC ב- x.
מה צריכה להיות זווית הבסיס על מנת שאורך הקטע BE יהיה מקסימלי?
בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

8) באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{a+\sqrt{x}}$, a פרמטר.



א. קבע על סמך גרף הנגזרת האם a הוא חיובי או שלילי. נמק.

ב. סרטט באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $f(x)$ ואת גרף הנגזרת $f'(x)$. נמק את בחירתך.

ג. נתון: $\int_4^{25} f'(x)dx=1$. מצא את a.

תשובות סופיות:

1) א. 14 מ"ק לשעה. ב. בין $15\frac{5}{9}$ שעות (15 שעות ו- $33\frac{1}{3}$ דקות) בקצב המירבי, ל-20 שעות בקצב האיטי. אם נסמן את הזמן הכולל של שניהם ב- t אז: $15\frac{5}{9}<t<20$.

2) א. $\frac{S_{n(o)}}{\quad}=\frac{1}{\quad}$ ב. $a_n=3^{n-1}$ ג. a_5 , a_6

3) א. $P=0.7$ ב. $P=\frac{189}{\quad}$ ג. $\frac{1}{\quad}$

4) $16S$

5) א. 4 ב. (1). $1.5\sqrt{28}+3-t$ (2). 3 ג. $S=18.18$

6) א. $a=6$, $x=-3$, $y=0$

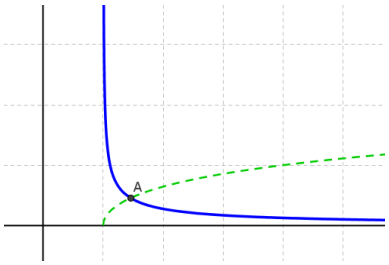
ב. (1). $g(x)=\frac{6x}{(x+1)^2}$

(2). $x=-1$, $y=0$.

7) $x=54.73°$.

8) א. $a<0$ ות.ה. הוא: $x>a^2$.

ב. להלן סקיצה:



ג. $a=-1$.