תרגול 5 יחידות לתלמידי קידום

פרק 52

שאלון 806 בגרויות שנת 2017

מועד חורף 1
קיץ מועד א 6
קיץ מועד ב 10

בגרות חורף 2017:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) שני צינורות א' ו-ב' מזרימים מים לבריכה בקצב קבוע.
כאשר צינור א' בלבד פתוח, הבריכה הריקה מתמלאת לגמרי ב- m שעות.
כאשר צינור ב' בלבד פתוח, הבריכה הריקה מתמלאת לגמרי ב- $2m$ שעות.
כאשר שני הצינורות פתוחים במקביל, הבריכה הריקה מתמלאת לגמרי ביותר מ-4 שעות. ביום מסוים הבריכה הייתה ריקה.
פתחו את צינור א' בלבד למשך שעתיים. אחר כך פתחו גם את צינור ב',
ושני הצינורות היו פתוחים בו בזמן שעתיים נוספות.
בתום אותן שעתיים נוספות יותר מ-1/2 הבריכה הייתה מלאה.
מצא את תחום הערכים האפשריים של m.
ביום אחר 1/2 מהבריכה הייתה מלאה. פתחו את שני הצינורות,
אלא שבשל תקלה טכנית צינור ב' רוקן מים מן הבריכה במקום למלא בה מים.
שני הצינורות היו פתוחים בו בזמן במשך שעה אחת, ובמהלכה צינור א' מילא מים בבריכה וצינור ב' רוקן ממנה מים. בתום אותה שעה תוקנה התקלה, ושני הצינורות החלו למלא את הבריכה יחד, עד שהיא התמלאה לגמרי כעבור שעתיים וחצי נוספות. נתון שהקצב שבו צינור ב' מרוקן מים מהבריכה שווה לקצב שבו הוא ממלא אותה במים.
מצא את m.

2) נתונה סדרה a_n המקיימת את כלל הנסיגה: $a_1=-1\ ,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$.

נגדיר סדרה חדשה b_n: $b_n=\dfrac{1}{a_n}+2$.

א. הוכח כי b_n היא סדרה הנדסית.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}$.

ג. נתון: n הוא מספר זוגי.

הבע באמצעות n את הסכום: $\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_4}+...+\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_n}$.

3) אביגיל במשחק של זריקת חצים למטרה.
הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא p $(p>0)$ ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. כל משתתף זורק 5 זריקות רצופות.
הסיכוי של אביגיל לפגוע במטרה בארבע זריקות מתוך החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלה לפגוע בה בכל חמש הזריקות.

א. מצא את p.

משתתף מנצח במשחק אם מתוך 5 זריקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר ההחטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).

ב. מהי ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק?

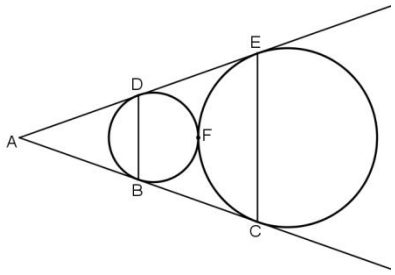
ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה,
מהי ההסתברות שהיא תנצח במשחק?
(2) גם תמר משתתפת במשחק, וגם הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל- p ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.
תמר החטיאה בזריקה הראשונה.
מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס שונה,
המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה F.
AC משיק לשני המעגלים בנקודות B ו-C,
AE משיק לשני המעגלים בנקודות D ו-E,
כמתואר באיור.

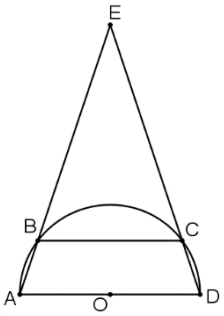


א. הוכח שהמרובע BDEC הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. המשיק המשותף למעגלים העובר בנקודה F חותך את שוקי הטרפז, BC ו-DE בנקודות G ו-H בהתאמה.
הוכח: GH הוא קטע אמצעים בטרפז.

ג. נסמן ב- R את רדיוס המעגל בגדול וב- r את רדיוס המעגל הקטן.
הוכח כי: $R\cdot BD = r\cdot CE$.

5) נתון טרפז $ABCD\ (BC\|AD)$



החסום בחצי מעגל שמרכזו O ורדיוסו R
כך ש-AD הוא קוטר של חצי המעגל.
המשכי השוקיים AB ו-DC נפגשים מחוץ למעגל
בנקודה E (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle EAD=\alpha$.

א. הבע באמצעות R ו- α
את אורך הקטע BC.

ב. מהו התחום של כל הערכים האפשריים עבור הזווית α? נמק.

ג. נתון כי שטח משולש AED גדול פי 9 משטח משולש COD.
מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED לבין R?

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{ax^2+4x}{x^2+3x+b}$, a ו- b הם פרמטרים.
נתון: $x=1$, $y=1$ הן אסימפטוטות של הפונקציה.

א. מצא את a ו- b.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים
(מלבד $x=1$ ו- $y=1$)? הסבר.
(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי x מתקיים: $|f(x)|=-f(x)$? נמק

ה. נגדיר $g(x)=f^2(x)\cdot f'(x)$.
הראה כי השטח מוגבל על ידי ציר ה- x, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$
ועל ידי הישר $x=0.5$ הוא $\dfrac{1}{3}$. נמק את תשובתך.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, a הוא פרמטר.

ענה על הסעיפים א-ו עבור $a>0$.

הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. (1) רשום את האסימפטוטות המאונכות לצירים של גרף הפונקציה $f'(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

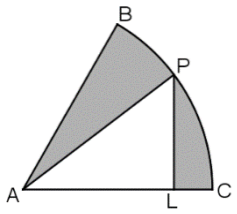
ו. מצא את ערך הביטוי: $\int_{2a}^{3a} f(x)dx+\int_{-3a}^{-2a} f(x)dx$.

ענה על סעיף ז עבור: $a=0$.

ז. (1) מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

8) נתונה גזרת עיגול BAC שהיא $\frac{1}{6}$ מעיגול שרדיוסו R ומרכזו A.



מנקודה כלשהי P, הנמצאת על הקשת BC, הורידו אנך ל-AC החותך את הרדיוס AC בנקודה L (ראה ציור).

השטח האפור שבציור הוא השטח הכלוא בין הקשת BC ובין הרדיוסים AB ו-AP, והקטעים LP ו-LC.

נתון שהשטח האפור המינימלי הוא $24\pi-36$.

א. (1) מצא את הזווית PAC שעבורה השטח האפור שמתקבל הוא מינימלי.

(2) מצא את R.

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש APL? נמק.

תשובות סופיות:

1) א. $6<m<10$ ב. 8.5

2) א. הוכחה ב. $S_n=\frac{3^n-1}{2}-2n$ ג. $S_n=\frac{1-3^n}{4}$

3) $\frac{5}{8}$ ב. 0.7248 ג. (1). 0.5188 ג. (2). 0.5188

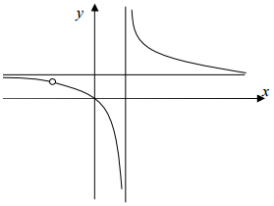
4) א. הוכחה ב. הוכחה ג. הוכחה

5) א. $-2R\cos 2\alpha$ ב. $45°<\alpha<90°$ ג. 1.59

6) א. $a=1\,,\,b=-4$ ב. (1). $x\neq 1\,,\,x\neq -4$ ב. (2). $(0,0)$

ב. (3). אין אסימפטוטות נוספות (יש חור ב- $(-4,0.8)$)

7) ב. (4). עלייה: אין, ירידה: $x>1$ או $-4<x<1$ או $x<-4$ ג. להלן סקיצה:

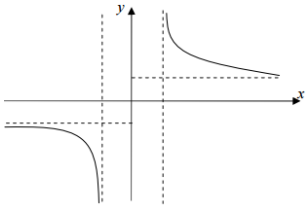


ד. $0\le x<1$ ה. הוכחה

א. $x>a$ או $x<-a$ ב. $x=a\,,\,x=-a\,,\,y=1\,,\,y=-1$

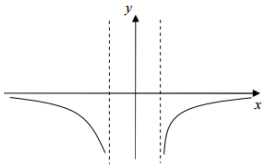
ג. עלייה: אין , ירידה: $x>a$ או $x<-a$

ד. להלן סקיצה:



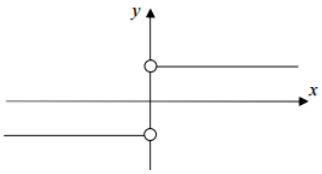
ה. (1). $x=a\,,\,x=-a\,,\,y=0$

ה. (2). להלן סקיצה:



ו. 0

ז. להלן סקיצה:



8) א. (1). $\frac{\pi}{4}$ א. (2). $R=12$ ב. 36.

בגרות קיץ 2017 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נגה רכבה על אופניים במסלול באורך מסוים, בארבע מהירויות קבועות שונות.
בכל פעם, לאחר שעברה מקטע שאורכו רבע מן המסלול, היא הגבירה את מהירותה,
ורכבה במהירות הגדולה פי 2 מן המהירות הקודמת.
במקטע האחרון היא רכבה במהירות של 40 קמ"ש.
נגה יצאה לדרך בשעה 8:00 בבוקר וסיימה את המסלול בשעה 11:45 בבוקר.

א. מהו אורך המסלול?

ב. דניאל יצא לדרך באותו מסלול בשעה 9:45, ונסע במהירות קבועה לאורך כל המסלול. גם הוא הגיע לסוף המסלול בשעה 11:45.
באיזה מארבעת מקטעי המסלול פגש דניאל את נגה בפעם הראשונה, ובאיזו שעה?

2) נתונה הסדרה: $a_n = \frac{\left(2^n+1\right)\left(2^n-1\right)}{2^n}$.

b_n ו- c_n הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים,
המקיימות לכל n טבעי: $a_n = b_n - c_n$.

נתון: $c_3 = \frac{1}{8}$, $b_6 = 64$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את b_1 ואת המנה של הסדרה b_n.

(2) מצא את c_1 ואת המנה של הסדרה c_n.

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n נסמן ב- A_n,
את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n נסמן B_n,
ואת סכום n האיברים הראשונים c_n נסמן ב- C_n.

ב. הראה ש- $C_n = B_n - A_n$.

ג. עבור אילו ערכי n מתקיים האי שוויון $0.9 < B_n - A_n < 1$?

3) בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.
אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות של-4 מהם בדיוק יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות של-6 מהם בדיוק יש קלנועית.

א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?

ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות.
ידוע שלפחות ל-3 מהם יש קלנועית.
מהי ההסתברות של-4 מהם בדיוק יש קלנועית?

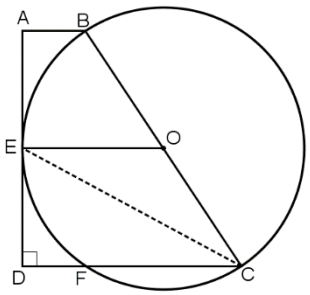
ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות,
בזה אחר זה, עד של-3 מהם בדיוק יש קלנועית.
מהי ההסתברות שייבחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתון מעגל O. ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD$, $\sphericalangle ADC = 90°$).
הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E, והנקודות B ו-C נמצאות על המעגל כך ש-BC הוא קוטר. הצלע DC חותכת את המעגל בנקודה F, כמתואר בציור.

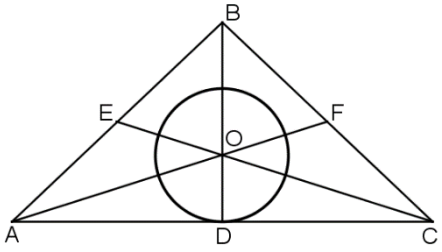


א. הוכח: $\sphericalangle BCD = 2\sphericalangle DEF$.

ב. הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta DEF$.

ג. הוכח: $BC = DF + DC$.

5) ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = BC$).
AF, CE ו-BD הם תיכונים במשולש, הנחתכים בנקודה O (ראה ציור).



א. הוכח: $S_{\Delta BOE} = S_{\Delta COD}$.

מעגל שמרכזו O משיק לצלע AC בנקודה D.
נתון כי שטח העיגול שווה לשטח המשולש AOC.

ב. חשב את גודל הזווית ACE.

ג. הבע את אורך הקטע OE באמצעות רדיוס המעגל.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=f(x+5)$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) הוכח ש- $g(x)$ היא פונקציה אי זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. הסבר מדוע לכל $1<a<b$ מתקיים השוויון: $\int_a^b g(x)dx=\int_{a+5}^{b+5} f(x)dx$.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2\sin}{\cos^3 x}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

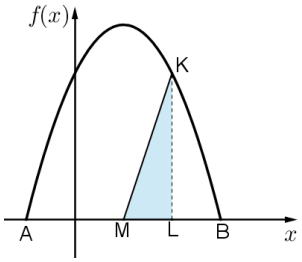
(3) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$.

ג. נתון: $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,
הישר $x=a$ וציר ה- x שווה ל-1. מצא את a.

8) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=-x^2+2x+c$ בתחום האי-שליליות שלה.



A ו-B הן נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

נתון: $x_A=-t$, $x_B=2t$, $(t>0)$.

א. מצא את t ואת c.

M היא נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם ציר ה-x. K היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה $f(x)$ מעל לציר ה-x. מהנקודה K הורידו אנך לציר ה-x החותך את הקטע AB בנקודה L.

ב. מצא עבור אילו שיעורי x של הנקודה K שטח המשולש KLM הוא מקסימלי.
מצא את שני הפתרונות האפשריים. תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

תשובות סופיות:

1) א. 40 ק"מ. ב. במקטע השני בשעה 10:30.

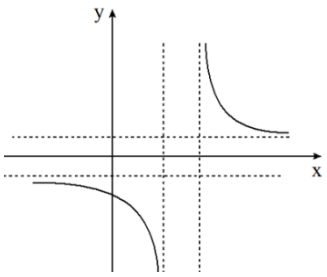
2) א. (1) $b_1=2$, $q_b=2$ (2) $c_1=\frac{1}{2}$, $q_c=\frac{1}{2}$ ב. הוכחה. ג. $n\geq 4$.

3) א. $p=\frac{1}{5}$ ב. 0.15534 ג. 0.04096.

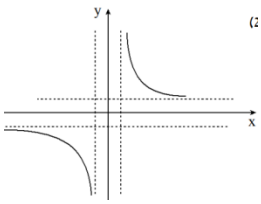
4) שאלת הוכחה.

5) א. הוכחה. ב. $\sphericalangle ACE=17.66°$ ג. $OE=\frac{R\sqrt{1+\pi^2}}{2}=1.648R$.

6) א. (1) $x<4$, $x>6$ (2) $(0,-1.02)$ (3) $y=-1$, $y=1$, $x=4$, $x=6$
(4) ירידה: $x>6$, $x<4$, עלייה: אף x. (5) להלן סקיצה:



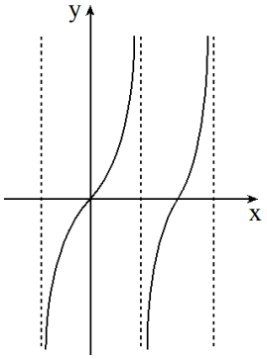
7) א. (1) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$



ב. (1) הוכחה. (2) סקיצה:

(2) $(\pi k,0)$

(3) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ (4) $f(x)$ עולה לכל x בתחום הגדרתה.



ב. סקיצה בצד. ג. $a=\frac{\pi}{4}$.

8) א. $t=2$, $c=8$ ב. $x=1+\sqrt{3}$, $x=1-\sqrt{3}$.

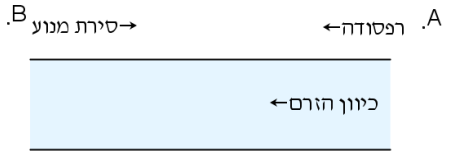
בגרות קיץ 2017 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) העיירות A ו-B נמצאות על גדת נהר הזורם במהירות קבועה.
כיוון הזרם הוא מ-A ל-B.
מן העיירה B יצאה סירת מנוע לכיוון העיירה A
הסירה שטה נגד כיוון הזרם.
באותו הזמן יצאה רפסודה מן העיירה A
לכיוון העיירה B. הרפסודה שטה עם כיוון הזרם.



מהירות סירת המנוע במים עומדים היא קבועה וגדולה פי 4 ממהירות הזרם של הנהר.
מהירות הרפסודה במים עומדים היא אפס. במים זורמים הרפסודה שטה עם הזרם.
הסירה והרפסודה נפגשו 3 שעות ו-45 דקות אחרי יציאתן לדרך והמשיכו בדרכן.
סירת המנוע הגיעה לעיירה A ומיד הסתובבה לשטה בחזרה לעיירה B. כאשר סירת המנוע הגיעה לעיירה B, הרפסודה הייתה במרחק של 35 ק״מ מן העיירה B.

א. חשב את מהירות הזרם ואת מהירות סירת המנוע במים עומדים.

ב. בדרך חזרה לעיירה B פגשה סירת המנוע את הרפסודה בפעם השנייה.
כמה זמן עבר מרגע יציאתה של הרפסודה מן העיירה A עד שהסירה והרפסודה נפגשו בפעם השנייה?

2) נתונה סדרה כללית a_n.

נסמן ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים a_n.

נתון: $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$ לכל n טבעי. k הוא מספר קבוע.

א. הבע את a_1 ואת האיבר הכללי a_n עבור $n>1$ באמצעות n ו- k במידת הצורך.

ב. מצא את k שעבורו הסדרה a_n היא סדרה הנדסית. נמק.

נגדיר: $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + \ldots$ (סכום ריבועֵי כל איבר שלישי בסדרה a_n החל ב- a_2).

ג. חשב את T.

3) בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים,
ובקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו-3 כדורים אדומים.
מוציאים באקראי כדור מקופסה I. אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II.
אם יצא כדול כחול, מחזירים אותו לקופסה I.
שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו
לקופסה II, ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.
לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II.

א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות בקופסה I יועבר כדור אדום אחד
בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$.
חשב את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה.
ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבת בסעיף א.

ב. מהי ההסתברות הכדור הוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?

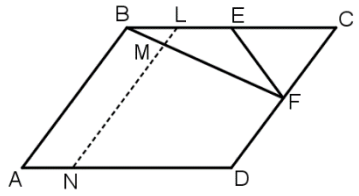
ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום.
מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו
בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הזווית A היא זווית חדה.
הנקודה E היא אמצע הצלע BC והנקודה F
היא אמצע הצלע CD (ראה ציור).



א. שטח המשולש ECF הוא S.
הבע את שטח המקבילית ABCD באמצעות S.
נמק את תשובתך.

ב. הנקודה L היא אמצע הקטע BE.
דרך הנקודה L העבירו ישר המקביל ל-AB וחותך את BF ואת AD
בנקודות M ו-N בהתאמה. חשב את היחס $\frac{LM}{MN}$.

ג. נתון: $BE = EF$.
האם אפשר לחסום את המרובע ABFD במעגל? נמק את קביעתך.

5) $ABCD$ הוא טרפז חסום במעגל ($AB \parallel CD$).

נתון: $AB = a$, $CD = b$, $(a < b)$, $\sphericalangle C = 60°$.

א. הבע את שוקי הטרפז, BC ו-AD, באמצעות a ו- b.

נתון: $a = 4$, אורך האלכסון BD הוא $4\sqrt{7}$.

ב. חשב את b.

ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R.

(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.

(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$. a הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x.

ב. מצא את a.

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

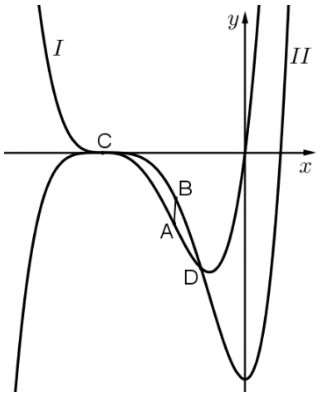
ד. נתונה הפונקציה: $g(x) = |f(x) + k|$.

ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.

מצא את k (מצא את שתי האפשרויות). נמק את תשובתך.

7) לפניך הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$.

א. התאם בין הגרפים I ו-II לבין הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$. נמק.



נתון: $f'(x)=x(x+b)^3$. $b>1$ פרמטר.

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול ב-$x=-1$.

ב. מצא את b.

C ו-D הן נקודות החיתוך של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$ בתחום $x<0$ כמתואר בציור.

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים I ו-II בהתאמה, כך שהישר AB מאונך לציר ה-x.

נתון: $x_C<x_A<x_D$, $x_C=-4$. $x_D=1-\sqrt{5}$

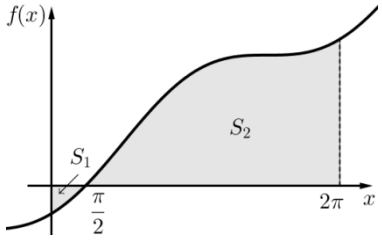
ג. מצא את שיעור ה-x של הנקודות A ו-B שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי (אפשר לפתור את הסעיף בלי למצוא את הפונקציה $f(x)$).

8) $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה-y בחלקו השלילי.

נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x היא $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ (ראה ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x=2\pi$ (השטח האפור בציור) שווה ל-$10\pi^2+16$.



נתון גם: $\int_0^{2\pi} f(x)dx=8\pi^2$.

א. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים (השטח S_1 המסומן בציור).

הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$. נתון: $F(0)=0$.

ב. מצא את $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

נתון: $f'(x)=8\sin x+8$.

ג. מצא את $f(x)$.

תשובות סופיות:

1) א. מהירות הזרם: 5 קמ"ש, מהירות הסירה: 20 קמ"ש. ב. 6.25 שעות.

2) א. $a_n=\frac{2}{3^{n+1}}$, $a_1=k-\frac{1}{9}$ ב. $k=\frac{1}{3}$ ג. $T=\frac{1}{182}$.

3) א. מספר הכדורים הכחולים הוא 5. ב. 0.3595. ג. 0.5338.

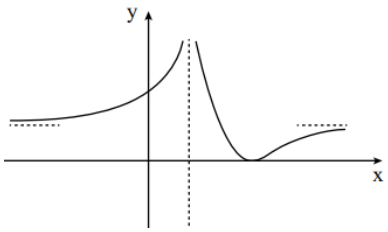
4) א. $S_{ABCD}=8S$ ב. $\frac{LM}{MN}=\frac{1}{7}$ ג. לא ניתן לחסום.

5) א. $AD=BC=b-a$ ב. $b=12$ ג. **(1)** $R=6.11$

(2) הוכחה. **(3)** $r=2\sqrt{3}$.

6) א. **(1)** $x\neq 2$ **(2)** $y=a$, $x=2$ **(3)** $\min(3,a-1)$

(4) עלייה: $x>3$, $x<2$, ירידה: $2<x<3$.



ב. $a=1$ ג. להלן סקיצה:

ד. $k=1$, $k=-1$.

7) א. $f'(x)$: I , $f(x)$: II ב. $b=4$ ג. $x_A=x_B=-2$.

8) א. $S_1=\pi^2+8$ ב. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\pi^2-8$ ג. $f(x)=-8\cos x+8x-4\pi$.