תרגול 5 יחידות לתלמידי קידום

פרק 49

שאלון 806 בגרויות שנת 2014

מועד חורף 1
קיץ מועד א 5
קיץ מועד ב 9
קיץ מועד ג 13

בגרות חורף 2014:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נמל A ונמל B נמצאים על אותה גדה של נהר, שכיוון הזרם שלו הוא מ-A ל-B. רפסודה הפליגה בשעה 9:00 בבוקר מנמל A אל נמל B, והיא נישאה על גבי הזרם של הנהר כך שמהירות הרפסודה היא מהירות הזרם.
באותה שעה הפליגה סירה מנמל B (נגד כיוון הזרם) לכיוון נמל A.
מהירות הסירה במים עומדים היא 15 קמ"ש.
הסירה הגיעה לנמל A, ומיד חזרה אל נמל B.
ידוע כי הרפסודה והסירה יגיעו לנמל B באותה שעה.
נתון כי הרפסודה והסירה נפגשו לראשונה כעבור 5 שעות מרגע הפלגתן.
האם הסירה והרפסודה יגיעו לנמל B עד לשעה 9:00 בערב באותו היום? נמק.
מהירות הזרם ומהירות הסירה במים עומדים הן קבועות.
הערה: בחישוביך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

2) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6.
מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה, ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \ldots$.
סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3.
מהאיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

א. הוכח כי הסדרה השלישית היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה השלישית הוא 273.25.
מצא את n.

3) בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, יש תושבים המשתתפים בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים.
נמצא כי המאורע "תושב העיר משתתף בחוג לריקודי עם" והמאורע "תושב העיר המשתתף בחור לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.
מספר התושבים שמשתתפים בחוג לריקודי עם גדול פי 2 ממספר התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון.
מבין התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לריקודי עם.

א. מהו אחוז התושבים בעיר שמשתתפים בחוג לריקודי עם וגם בחוג לתיאטרון?

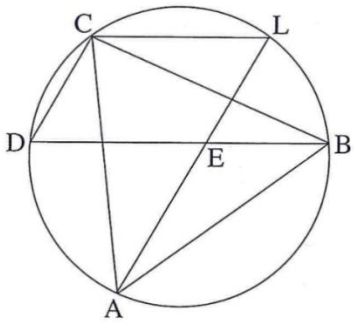
ב. יום אחד נערך בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם. עיתונאי ראיין 6 משתתפים בכנס שנבחרו באקראי.
מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4) משולש שווה-צלעות ABC חסום במעגל.
נקודות D ו- L נמצאות על המעגל
כך ש- $BD \parallel LC$. המיתרים AL ו-BD נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

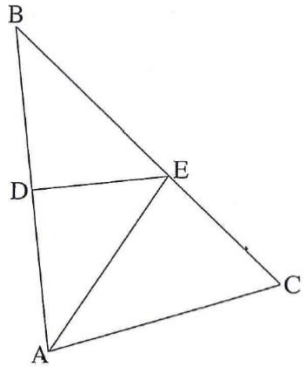


א. הוכח כי המרובע LEDC הוא מקבילית.

ב. (1) הוכח כי ΔADE הוא משולש שווה-צלעות.

(2) הוכח כי $LC + LB = LA$.

5) במשולש ABC האנך האמצעי לצלע BA חותך את הצלעות BC ו- BA בנקודות E ו-D בהתאמה (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$

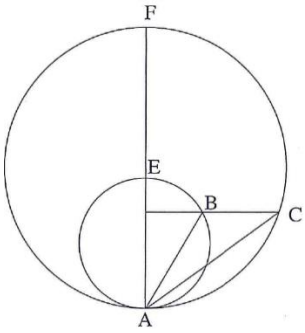


א. (1) הבע באמצעות α ו- β את $\sphericalangle EAC$.

(2) הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{CE}{EB}$.

ב. נתון גם: AE חוצה-זווית BAC,
$AC = 10$ ס"מ , $\beta = 40°$. חשב את הרדיוס של המעגל החסום במשולש ABC.

6) שני מעגלים, גדול וקטן, משיקים מבפנים בנקודה A.
נקודה F נמצאת על המעגל הגדול כך שקטע המרכזים של שני המעגלים נמצא על AF.
AF חותך את המעגל הקטן בנקודה E. דרך נקודה B שעל המעגל הקטן העבירו ישר המקביל למשיק המשותף לשני המעגלים. המקביל חותך את המעגל הגדול בנקודה C (ראה ציור). רדיוס המעגל הגדול הוא R, ורדיוס המעגל הקטן הוא r.
נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle FAB = \beta$.



א. (1) הבע באמצעות α ו- β את $\sphericalangle BCA$. נמק.

(2) הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{AC}{AB}$.

ב. הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{R}{r}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+x-a}{x^2-x+a}$. a הוא פרמטר גדול מ-1.
הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

א. (1) מצא את האסימפטוטות של $f(x)$ המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של $f(x)$, וקבע את סוגן.
(הבע באמצעות a במידת הצורך.)

(3) ידוע כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות בדיוק.
סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. בתחום $x \le 0$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f'(x)$, על ידי הישר $x=-1$ ועל ידי ציר ה- x, שווה ל- $\frac{1}{2}$.
חשב את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.
(מצא ערכים מספריים).

8) במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB=AC$) אורך השוק הוא b.
BD הוא גובה לשוק AC. DE הוא אנך לבסיס BC.
סמן: $\sphericalangle BAC=2x$, ומצא מה צריך להיות הגודל של $\sphericalangle BAC$, כדי שאורך האנך DE יהיה מקסימלי. בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

9) בטבלה שלפניך מוצגים ערכים מסוימים של הפונקציה $f(x)$ בקטע $1<x<2$:

x	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	1.19	1.28	1.36	1.43

הפונקציה $f(x)$ חיובית בקטע הנתון, ואין לה נקודות קיצון פנימיות בקטע זה.
נתון כי פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית בקטע הנתון.

א. קבע מהו הסימן של $f'(1.2)$. נמק.

ב. קבע אם הטענה $f'(1.1)<f'(1.2)<f'(1.3)$ נכונה. נמק.

נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{f(x)}$ בקטע $1<x<2$.

ג. בקטע הנתון מצא תחומי עליה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ד. הראה כי בתחום $1.1\le x\le 1.3$ אין פתרון למשוואה $g'(x)=f'(x)$.

תשובות סופיות:

1) לא, הם יגיעו לנמל B 12.07 שעות לאחר יציאתם

2) א. הוכחה ב. $n=7$

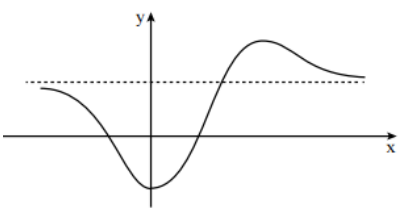
3) א. 18% ב. 0.579825

4) א. הוכחה ב. (1). הוכחה ב. (2). הוכחה

5) א. (1). $\alpha-\beta$ א. (2). $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

6) א. (1). $90°-(\alpha+\beta)$ א. (2). $\cos\beta\,/\left[\cos^2(\alpha+\beta)\right]$

7) א. (1). $y=1$ א. (2). $\min(0,-1)$, $\max\left(2a,\dfrac{4a+1}{4a-1}\right)$



א. (3). סקיצה בצד. ב. $(1,0)$, $(-2,0)$

8) 109.47°

9) א. הסימן הוא חיובי ב. הטענה נכונה ג. עלייה: $1<x<2$, ירידה: אין ד. אין

בגרות קיץ 2014 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) משאית יצאה מעיר A , וכעבור 6 שעות מרגע יציאתה הגיעה לעיר B.
זמן מה אחרי יציאת המשאית יצאה מכונית מעיר A, והגיעה לעיר B שעתיים לפני המשאית. המשאית והמכונית נפגשו כעבור שעה מרגע היציאה של המכונית.
המהירויות של המשאית ושל המכונית היו קבועות. מצא כמה שעות אחרי רגע היציאה של המשאית יצאה המכונית (מצא את שני הפתרונות).

2) בסדרה חשבונית יש $3n$ איברים.
סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם.

א. הוכח שסכום n האיברים הראשונים הוא 0.

ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0.
סכום כל איברי הסדרה הוא 726.
מצא את הפרש הסדרה.

3) אבא ודני משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים.
המנצח בסיבוב מקבל נקודה אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו,
כל אחד מקבל חצי נקודה. נתון:
ההסתברות שדני ינצח בסיבוב היא 0.1,
ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2,
ההסתברות שהסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.7.
הסיבובים אינם תלויים זה בזה.

א. מהי ההסתברות שאבא יצבור בשני הסיבובים יותר מנקודה אחת?

ב. מהי ההסתברות שדני יצבור בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת?

ג. ידוע כי דני צבר בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת.
מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של דני?

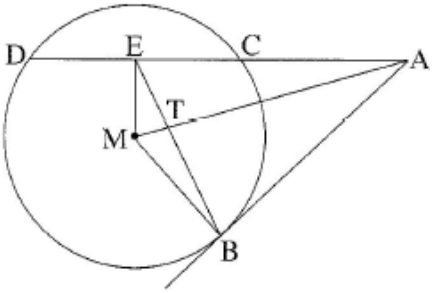
ד. אבא ודני משחקים 4 פעמים את המשחק שמתואר בפתיח.
(בכל משחק שני סיבובים.)
מהי ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת 2 פעמים בדיוק?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) מנקודה A יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה B, ויוצא ישר אחר החותך את המעגל בנקודות C ו-D. הנקודה E היא אמצע המיתר DC.
הנקודה M היא מרכז המעגל (ראה ציור).

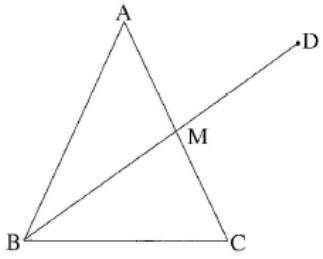


א. הוכח כי המרובע AEMB הוא בר חסימה במעגל.

ב. אלכסוני המרובע AEMB, שהוא בר חסימה במעגל, נפגשים בנקודה T.
נתון כי הנקודה T היא מפגש התיכונים במשולש BDC.
הוכח כי $TB^2 = 2MT \cdot TA$.

ג. נתון: $TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ס"מ , $MT = 1$ ס"מ.
מצא את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AEMB.

5) במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$,
BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC = 50°$.



א. חשב את גודל הזווית הקהה AMB.

ב. ממשיכים את BM עד הנקודה D.
נתון גם:
רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ.
רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.
חשב את זוויות המשולש AMD.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=2\sin^2 x$, $g(x)=\sin(2x)$, בתחום $0\le x\le \pi$.

א. בתחום הנתון מצא:

(1) את שיעורי ה-x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

(2) את נקודות החיתוך של כל אחת משתי הפונקציות עם ציר ה-x.

ב. (1) נתונה הפונקציה $h(x)=x-\frac{\sin(2x)}{2}$, הראה כי $h'(x)=f(x)$.

(2) בתחום $0\le x\le \pi$ מצא את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax^2+9}$. a הוא פרמטר גדול מ-0.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) הראה כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

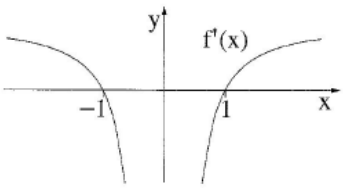
(2) הבע באמצעות a את האסימפטוטות האופקיות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישר $x=-4$ שווה ל-2. בלי לחשב את הערך של a, חשב את הערך המספרי של $f(-4)$ ואת הערך המספרי של $f(4)$.

8) בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



האסימפטוטה <u>היחידה</u> של הפונקציה $f(x)$ היא $x=0$.

נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x)=2$

ופתרון אחד בלבד למשוואה $f(x)=-2$.

א. רק על פי נתוני השאלה, סרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתון גם כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא: $f'(x)=\frac{ax^2-b}{ax^2}$,

a ו- b הם פרמטרים שונים מ-0.

מצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

תשובות סופיות:

1) שעה או שעתיים.

2) א. הוכחה ב. $d=2$

3) א. 0.32 ב. 0.68 ג. $\frac{7}{34}$ ד. 0.2841

4) א. הוכחה ב. הוכחה ג. 3 ס"מ

5) א. $100.56°$ ב. $60.22°$, $79.44°$, $40.34°$

6) א. (1). $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\pi$ א. (2). $f(x):(\pi,0),(0,0)$,

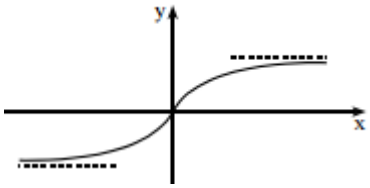
$g(x):(\pi,0),\left(\frac{\pi}{2},0\right),(0,0)$.

ב. (1). הוכחה ב. (2). $2+\frac{\pi}{2}$.

7) א. (1). כל x א. (2). הוכחה ב. (1). כל x

ב. (2). $y=\sqrt{a}$, $y=-\sqrt{a}$ ב. (3). עלייה: כל x , ירידה: אין

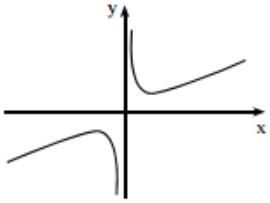
ב. (4). להלן סקיצה:



ג. $f(x)=5$, $f(-4)=5$

8) א. סקיצה למטה.

ב. $f(x)=x+\frac{1}{x}$



בגרות קיץ 2014 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) רץ I ורץ II יצאו באותו רגע מאותו מקום. הם רצו במהירות קבועה ובאותו כיוון.
המהירות של רץ I הייתה 6 קמ"ש, והמהירות של רץ II הייתה 7.5 קמ"ש.
כעבור 20 דקות מרגע היציאה של שני הרצים, יצא רץ III מאותו מקום ובאותו כיוון, והוא רץ במהירות קבועה. רץ III פגש בדרך את רץ I, ושעה אחר כך הוא פגש את רץ II. מצא כמה שעות עברו מרגע היציאה של רץ III לפגישתו עם רץ II.

2) נתונה סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$

שלושה איברים עוקבים בסדרה, a_n , a_{n+1} , a_{n+2}, מקיימים: $\begin{cases} a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216 \\ a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54 \end{cases}$.

א. מצא את האיבר a_n.

ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובנו סדרה חשבונית חדשה: $a_{4k+1} , \ldots , a_{13} , a_9 , a_5$. סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450.
האיבר הראשון בסדרה הנתונה בפתיח הוא $a_1 = -21$. מצא את הערך של k.

3) בעיר גדולה כל אחד מתלמידי כיתות י"ב בשנה מסוימת בוחר באחד משני המסלולים לטיול שנתי: מסלול א' או מסלול ב'. נמצא:
75% מן התלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות.
10% מן הבנות בחרו במסלול ב'.
40% מן התלמידים הם בנות.

א. בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת). מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א'?

ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת) האם המאורע "התלמיד הוא בת" והמאורע "התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א' " הם מאורעות בלתי-תלויים? נמק.

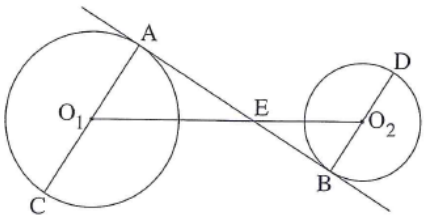
ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.
נמצא שההסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א' היא 0.99.
(הבחירה של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי-תלויות).
כמה בנות נבחרו?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O_1. BD הוא קוטר במעגל שמרכזו O_2.
ישר משיק למעגלים O_1 ו-O_2 בנקודות A ו-B בהתאמה.
המשיק חותך את קטע המרכזים O_1O_2 בנקודה E (ראה ציור).
נתון: רדיוס המעגל O_1 הוא 30 ס"מ, רדיוס המעגל O_2 הוא 20 ס"מ
אורך קטע המרכזים O_1O_2 הוא 90 ס"מ.



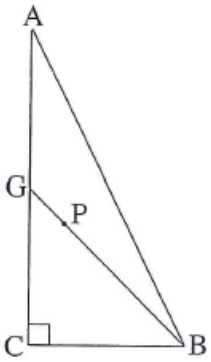
א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את היחס $\frac{O_1E}{O_1C}$. נמק.

(2) הוכח כי $\Delta EO_1C \sim \Delta EO_2D$.

ב. הוכח כי הנקודה E נמצאת על הישר CD.

5) במשולש ישר-זווית ACB $(\sphericalangle ACB = 90°)$
נקודה G היא אמצע הניצב AC.
נקודה P נמצאת על GB כך ש- $BG = 4 \cdot PG$.
רדיוס המעגל החוסם את המשולש CGB הוא R.
נתון: $GC = BC$.



א. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB.

ב. הבע באמצעות R את מרחק הנקודה P ממרכז המעגל החוסם את המשולש ACB.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונות שתי פונקציות: $g(x)=\sqrt{8x^2-x^4}$, $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) לשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה. מצא את תחום ההגדרה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ עם הצירים.

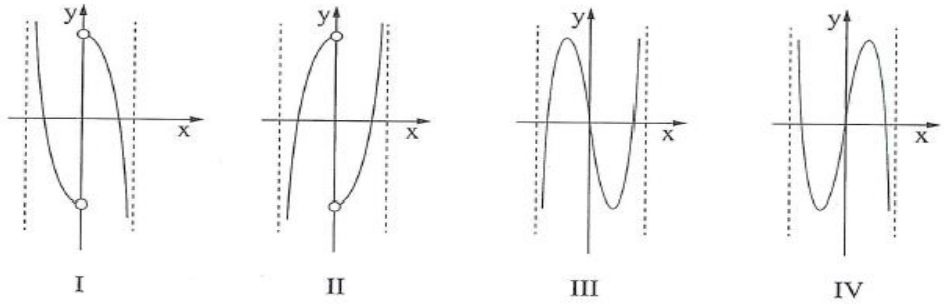
ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של כל אחת מהפונקציות, וקבע את סוגן.

ג. על פי הסעיפים א ו-ב, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. לפניך ארבעה גרפים, I – IV .

איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$? נמק.



7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-1}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

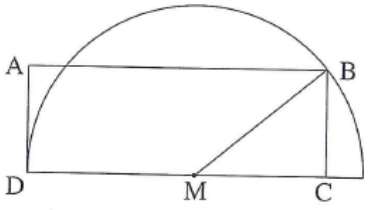
(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. רק על פי סעיף א, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. רק על פי הסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ שסרטטת, מצא את התחום שבו מתקיים: פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית. נמק.

8) נתון מלבן ABCD. הצלע DC מונחת על הקוטר של חצי מעגל שהרדיוס שלו R ומרכזו M כך ש- $DC \geq R$. הצלע AD משיקה לחצי המעגל בנקודה D, והקדקוד B נמצא על המעגל (ראה ציור).



נסמן: $\sphericalangle BMC = x$

$S(x)$ - שטח המלבן ABCD.

א. מצא מה צריך להיות x, כדי ששטח המלבן $S(x)$ יהיה מקסימלי.

ב. הבע באמצעות R את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $S(x)$ ועל ידי ציר ה-x בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

תשובות סופיות:

1) שעה ו-40 דקות

2) א. 15 ב. $k = 10$

3) א. 0.48 ב. המאורעות תלויים ג. 2

4) א. (1). 1.8 א. (2). הוכחה ב. הוכחה

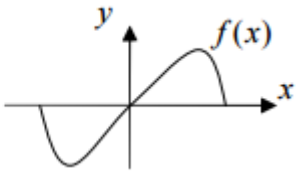
5) א. $1.58R$ ב. $0.5R$.

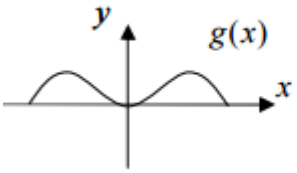
6) א. (1). $-2.83 \leq x \leq 2.83$

א. (2). $f(x)$: $(-2.83,0)$, $(0,0)$, $(2.83,0)$, $g(x)$: $(-2.83,0)$, $(0,0)$, $(2.83,0)$

ב. $f(x)$: $(-2,4)$, $\max(2,4)$, $(\sqrt{8},0)$, $(0,0)$, $\min(-\sqrt{8},0)$

ג. להלן סקיצה:



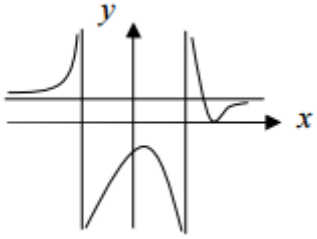


ד. גרף I

7) א. (1). $x \neq \pm 1$ א. (2). $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$ א. (3). $(2,0)$, $(0,-4)$

א. (4). $\min(2,0)$, $\max(0.5,-3)$

ב. להלן סקיצה:



ג. $-1 < x < 2$.

8) א. $\frac{1}{3} \cdot \pi$ ב. $1.5R^2$.

בגרות קיץ 2014 מועד ג':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) שני פועלים, פועל I ופועל II, מתקנים כביש.
ההספק של כל אחד משני הפועלים קבוע.
ביום הראשון עבד פועל I לבד 4 שעות, ואז הצטרף אליו פועל II והם עבדו יחד עוד 3 שעות. התברר כי ביום הראשון ביצעו הפועלים סך הכול 60% מהתיקון כולו.
ביום השני עבדו הפועלים יחד כל הזמן כך סך הכול בשני ימי עבודה ביצע כל אחד מהפועלים בדיוק מחצית מהתיקון כולו.
מצא כמה שעות עבדו הפועלים יחד ביום השני.

2) נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים $(n>2)$: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_{n-1} , a_n$.
הפרש הסדרה הנתונה הוא d.
מהסדרה הנתונה בנו סדרה חדשה של הפרשי ריבועים:
$a_2^2 - a_1^2 , a_3^2 - a_2^2 , \cdots , a_n^2 - a_{n-1}^2$

א. הוכח כי הסדרה החדשה היא סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא $2d^2$.

ב. נתון: $a_2^2 - a_1^2 = 64$.
הבע את האיבר האחרון בסדרה החדשה באמצעות n ו- d.

ג. נתון גם: $a_n^2 - a_{n-1}^2 = 192$, $d^2 > 1$.
מצא את תחום הערכים של n.

3) מבין העובדים בחברה גדולה בוחרים באקראי 4 עובדים.
ההסתברות שלכל היותר ל-3 עובדים יש השכלה גבוהה היא $\frac{255}{256}$.

א. לאיזה אחוז מהעובדים יש השכלה גבוהה?

ב. מהי ההסתברות שמבין 4 עובדים שבוחרים באקראי, ל-3 אין השכלה גבוהה?

ג. 40% מעובדי החברה הן נשים. ל- $\frac{1}{4}$ מהנשים יש השכלה גבוהה.
מבין העובדים שיש להם השכלה גבוהה בחרו באקראי שני עובדים.
מהי ההסתברות ששני העובדים הם נשים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

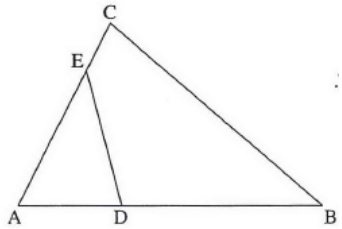
ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) במרובע BDEC המשכי הצלעות BD ו-CE נפגשים בנקודה A, כמתואר בציור.
נתון כי המרובע BDEC הוא בר-חסימה במעגל.

א. הוכח כי $\Delta ADE \sim \Delta ACB$.

נתון: שטח המשולש ACB גדול פי 4 משטח המשולש ADE.
נקודה F נמצאת על הצלע ED כך ש- $\sphericalangle DAF = \sphericalangle EAF$.
המשך AF חותך את BC בנקודה G.

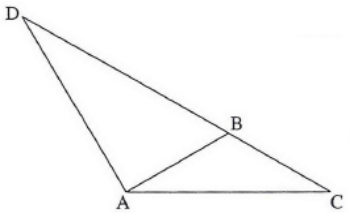


ב. (1) הוכח כי $\Delta ABG \sim \Delta AEF$.

(2) מצא את היחס $\frac{EF}{BG}$.

ג. הוכח כי: $\frac{GC}{BG} = \frac{AD}{AE}$.

5) נתון משולש שווה-שוקיים ADC שבו $AD = AC$.
נקודה B נמצאת על הצלע DC כך ש- $AB = BC$
ו- $DC = 3BC$ (ראה ציור).



א. מצא את גודל הזווית במשולש ADC.

ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC
הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר. BT הוא גובה
לצלע AC במשולש ABC.
מצא את האורך של הקטע DT.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה $f(x)=2x+\frac{\cos x}{\sin x}$ בתחום $0\le x\le \pi$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

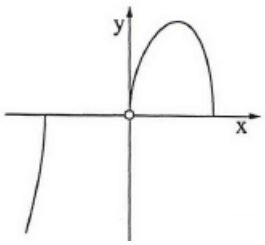
ב. (1) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$. השיפוע של משיק זה הוא המקסימלי מבין השיפועים של כל המשיקים לגרף הפונקציה בתחום הנתון.
מצא את הזווית שמשיק זה יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

7) בציור שלפניך מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{12x^3-x^5}}{x}$,
שתחום ההגדרה שלה הוא: $0<x\le 2\sqrt{3}$, $x\le -2\sqrt{3}$:



א. הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות בדיוק.
מצא את תחום הערכים של k.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{12x-x^3}$, שתחום ההגדרה שלה הוא $0\le x\le 2\sqrt{3}$, $x\le -2\sqrt{3}$.

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) עבור הערכים של k שמצאת בסעיף א, מצא בכמה נקודות חותך הישר $y=k$ את גרף הפונקציה $g(x)$.

8) נתון כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת: $f'(x)=x^2-6x+5$.

א. הישר $y=10\frac{2}{3}$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.

מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נתון כי הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x, ומקיימת: $f'(x)=g'(x)$.

ב. המרחק בין נקודת המקסימום של $f(x)$ לנקודת המקסימום של $g(x)$ הוא 1.

מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

מצא את שתי האפשרויות.

ג. (1) סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצות של שני הגרפים האפשריים של $g(x)$.

(2) כמה נקודות פגישה עם ציר ה-x יש לכל אחד משלושת הגרפים שסרטטת?

תשובות סופיות:

1) 3 שעות

2) א. הוכחה ב. $a_n = 2d^2n - 4d^2 + 64$ ג. $2 < n < 66$

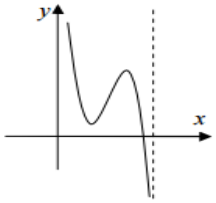
3) א. 25% ב. $\frac{27}{64}$ ג. 0.16

4) א. הוכחה ב. (1). הוכחה ב. (2). 0.5 ג. הוכחה.

5) א. $120°$, $30°$, $30°$ ב. 10.58 ס"מ

6) א. $0 < x < \pi$ ב. (1) $x = 0$, $x = \pi$ ב. (2). $\max\left(\frac{3\pi}{4}, 3.71\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2.57\right)$

ב. (3). להלן סקיצה:

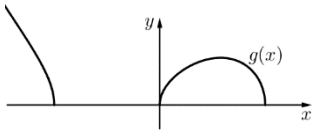


ג. $45°$.

7) א. $0 \le k < 4$ ב. (1). עלייה: $0 < x < 2$, ירידה: $2 < x < 2\sqrt{3}$ או $x < -2\sqrt{3}$

ב. (2). להלן סקיצה:

ב. (3). ב- 3 נקודות



8) א. $\max\left(1,10\frac{2}{3}\right), \min(5,0)$

ב. אפשרות 1: $\max\left(1,11\frac{2}{3}\right), \min(5,1)$, אפשרות 2: $\max\left(1,9\frac{2}{3}\right), \min(5,-1)$

ג. (1). להלן סקיצה:

ג. (2). $f(x)$: 2 נקודות ל- $g(x)$ העליון: נקודה אחת.

ל- $g(x)$ התחתון: 3 נקודות.

