תרגול 5 יחידות לתלמידי קידום

פרק 48

שאלון 806 בגרויות שנת 2013

מועד חורף 1
קיץ מועד א 6
קיץ מועד ב 11

בגרות חורף 2013:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) דן יצא מתל אביב להרצליה על אופניו, ורכב במהירות קבועה של v קמ״ש.
כעבור $\frac{1}{2}$ שעה מרגע היציאה של דן, גם אילנית יצאה על אופניה מתל אביב להרצליה, ורכבה באותו מסלול במהירות הגדולה ב- 2 קמ״ש ממהירותו של דן. אילנית ודן נפגשו בדרך להרצליה, ו- $\frac{1}{2}$ שעה לאחר הפגישה הגיעה אילנית להרצליה.
מצא באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות v, אם נתון כי מסלול הרכיבה מתל אביב להרצליה קטן מ- 25 ק״מ וגדול מ- 9 ק״מ.

2) ענה על הסעיפים הבאים:
(1) אם מכניסים אחד מהסימנים $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ למשבצת הריקה שבביטוי: $1^2+2^2+3^2+...+n^2 \square (1+2+3+...+n)^2$
מתקבל אי שוויון הנכון לכל n טבעי. בחר בסימן המתאים.
(2) הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי האי שוויון שבתת סעיף א (1) מתקיים לכל n טבעי.

שאלה זו ירדה מתכנית הלימודים

נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: $58\ ,\ 62\ ,\ 66\ ,\ ...\ ,\ (4n+6)$
הבע את סכום הסדרה באמצעות n $(n>12)$.
הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

3) בחדר I נמצאים k נשים ו- k גברים $(k>1)$. בחדר II נמצאים k נשים ו- $3k$ גברים.
מטילים קובייה מאוזנת. אם מתקבל מספר המתחלק ב-3, בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר I. אם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב-3, בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר II. כאשר בוחרים באופן זה, ההסתברות לבחור 2 נשים מחדר I גדולה פי $\frac{15}{7}$ מההסתברות לבחור 2 נשים מחדר II.

א. מצא את k.

ב. מצא את ההסתברות לבחור 2 נשים באופן שתואר.

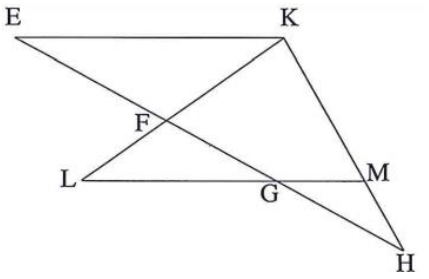
ג. ידוע שנבחר לפחות גבר אחד באופן שתואר.
מהי ההסתברות שנבחרו בדיוק 2 גברים מחדר I?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4) נתון משולש KHE. נקודות M ו- G נמצאות על צלעות KH ו-EH בהתאמה כך ש- $GM \parallel EK$. נקודה F נמצאת על צלע EH.
המשכי הקטעים GM ו-FK נפגשים בנקודה L (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH$.



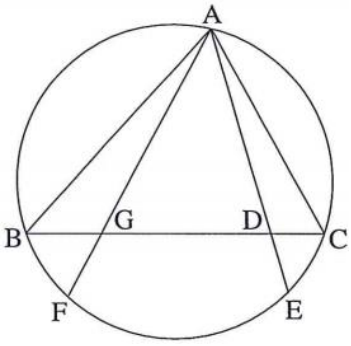
א. הוכח כי $\Delta KHE \sim \Delta FLG$.

ב. נתון גם: $\frac{EF}{GE}=\frac{3}{5}$, $EH = 12.5$ ס"מ,
$LG = 5$ ס"מ.

(1) מצא את האורך של EK.

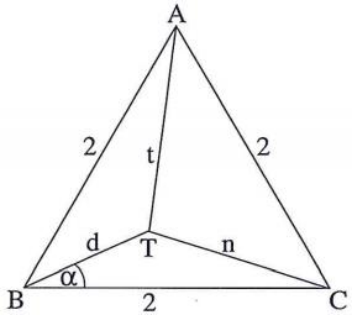
(2) מצא את היחס $\frac{MH}{KH}$.

5) משולש ABC חסום במעגל.
המיתר AF חותך את BC בנקודה G.
המיתר AE חותך את BC בנקודה D (ראה ציור).
נתון: $BF = BG$, $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$.



א. הוכח כי $\Delta AGB \cong \Delta ACE$.

ב. נתון גם: $CE = 2$ ס"מ, $AC = 5$ ס"מ, $GC = 6$ ס"מ.
חשב את האורך של המיתר AE.



6) נתון משולש שווה צלעות ABC.
נקודה T נמצאת בתוך המשולש (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle TBC = \alpha$, n ס״מ = CT ,
d ס״מ = BT , t ס״מ = AT.
אורך צלע המשולש הוא 2 ס״מ.

א. הוכח כי $\sin(\alpha - 30°) = \frac{n^2 - t^2}{4d}$.

ב. הבע את שטח המשולש ATC באמצעות α ו- d.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3a^2}$. a הוא פרמטר, $a > 0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד ובהן $x = \pm a$.

(1) היעזר בגרף של $f(x)$, והבע באמצעות a את התחום שבו פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית, ואת התחום שבו שהיא שלילית. נמק.

(2) הבע באמצעות a את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f'(x)$, וקבע את סוגן.

ד. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר ה- x . סמן במערכת צירים את השטח המבוקש.

8) נתונה הפונקציה $f(x)=-\sqrt{\sin x}+\frac{1}{2}\sin x$ בקטע: $0\le x\le 3\pi$.

א. בקטע הנתון מצא:

(1) עבור אילו ערכי x הפונקציה מוגדרת.

(2) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בקטע הנתון.

(2) מצא משוואת ישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

ג. האם יש ערכים של x בקטע הנתון שעבורם מתקיים

אי-השוויון $\frac{1}{2}\sin x>\sqrt{\sin x}$? נמק.

9) מחלקים חוט שאורכו k לשני חלקים (לאו דווקא חלקים שווים).
מחלקים אחד של החוט יוצרים מעגל ומהחלק האחר יוצרים ריבוע.

סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי כאשר היקף המעגל הוא $\frac{5\pi}{\pi+4}$.

מצא את הערך של k.

תשובות סופיות:

1) $4<v<8$

2) א. (1). $\le$ א. (2). הוכחה ב. $2(n+16)(n-12)$

3) $k=4$ ב. $\frac{11}{105}$ ג. $\frac{15}{188}$

4) א. הוכחה ב. (1). 7.5 ס"מ ב. (2). $\frac{2}{5}$

5) א. הוכחה ב. $\sqrt{41}$ ס"מ

6) א. הוכחה ב. $\sqrt{3}-d\cos(30°-\alpha)$ או $\sqrt{3}-d\left[\sin(60°-\alpha)+\sin\alpha\right]$

7) א. (1). לכל x א. (2). $\left(0,\frac{2}{a^2}\right)$ א. (3). $y=0$ א. (4). $\max\left(0,\frac{2}{a^2}\right)$

ב. סקיצה ג.(1). $f'(x)$ חיובית- $x>a$ או $x<-a$, $f'(x)$ שלילית - $-a<x<a$

ג. (2). $x_{min}=a$, $x_{max}=-a$ ד. $\frac{1}{2a^2}$ יח"ר

8) א. (1). $2\pi\le x\le 3\pi$ או $0\le x\le\pi$

א. (2). $\max(3\pi,0)$, $\min\left(2\frac{1}{2}\pi,-\frac{1}{2}\right)$, $\max(\pi,0)$, $\min\left(\frac{\pi}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\max(0,0)$

ב. (1). סקיצה ב. (2). $y=-\frac{1}{2}$ ג. אין ערך כזה.

9) $k=5$.

בגרות קיץ 2013 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) פועל I ופועל II עובדים במפעל לייצור חלקי חילוף.
שני הפועלים מבצעים יחד עבודה מסוימת.
קצב העבודה הרגיל של פועל I שונה מקצב העבודה של פועל II.
אם כל אחד מהפועלים יגביר את הקצב העבודה הרגיל שלו ב- 50%,
ההפרש בין זמן העבודה של שני הפועלים יחד בקצב הרגיל ובין זמן העבודה שלהם יחד בקצב המוגבר יהיה $\frac{2}{15}$ מהזמן שנדרש לפועל I לבצע לבד את העבודה בקצב הרגיל שלו.

א. מצא את היחס בין הזמן שבו פועל I מבצע לבד את העבודה ובין הזמן שבו פועל II מבצע לבד עבודה זו.

ב. העבודה ששני הפועלים מבצעים יחד היא הכנה של 300 חלקי חילוף.
הפועלים ביצעו ביחד עבודה זו בקצב הרגיל ב- 6 ימים.
כמה חלקי חילוף ביום מכין לבד פועל I בקצב הרגיל שלו?

2) נתונה סדרה a_n.
סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא $S_n = n^2 - 5n + \left[2+6+10+...+(4n-2)\right]$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ-102.
חשב את הערך הגדול ביותר שיכול להתקבל עבור סכום מסוים של איברים כאלה (לאו דווקא הסכום של כל האיברים).

3) הוועדה המארגנת של תחרות "נולד לשיר" מתלבטת אם ישפוט בתחרות רק שופט א' או יצטרפו אליו שני שופטים נוספים: שופט ב' ושופט ג'.
ההצבעה של שופט א' לא תשתנה אם הוא ישפוט לבד או אם ישפוט עם אחרים.
ההצבעה של כל אחד מהשופטים אינה תלויה בהצבעה של השופטים האחרים.
אם ישפוט בתחרות רק שופט א' – יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות אם השופט יצביע בעדו.
אם ישפטו שלושת השופטים – יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות אם לפחות 2 מהשופטים יצביעו בעדו.
יוסי הוא אחד המתמודדים בתחרות. נתון כי ההסתברות ששופט א' יצביע בעד יוסי שווה להסתברות ששופט ב' יצביע בעדו. ההסתברות ששופט ג' יצביע בעד יוסי היא 0.5.

א. האם ההסתברות, שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפוט בתחרות רק שופט א', שווה להסתברות שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפטו בתחרות שלושת השופטים? נמק.

ב. לבסוף הוחלט שבתחרות ישפטו שלושת השופטים.
נתון כי ההסתברות, ששופט א' הצביע בעד יוסי אם ידוע כי יוסי עבר שלב נוסף בתחרות, גדולה מ- 0.8.
מצא את תחום הערכים של ההסתברות ששופט א' הצביע בעד יוסי.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

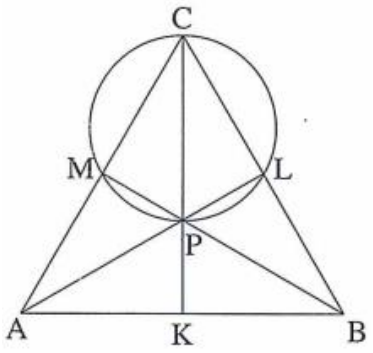
4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי אם במשולש שני תיכונים שווים זה לזה, משולש הוא שווה שוקיים.

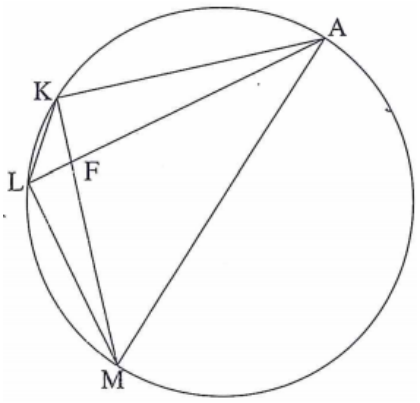
ב. במשולש ABC הנקודות L , M , ו- K הן אמצעי הצלעות CB , CA ו- AB בהתאמה.
הנקודה P היא נקודת מפגש של התיכונים במשולש,
ונתון שהיא נמצאת על מעגל העובר דרך
הנקודות L , M ו- C (ראה ציור).
נתון גם כי $AL = BM$.

(1) הוכח כי $BM \perp AC$.

(2) הוכח כי $AK = AM$.



5) מרובע AKLM חסום במעגל. AM הוא קוטר.
אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה F
(ראה ציור).



נתון: $ML = 30$ ס"מ , a ס"מ $= FL$
שטח המשולש ALK קטן פי 3 משטח המשולש ALM.

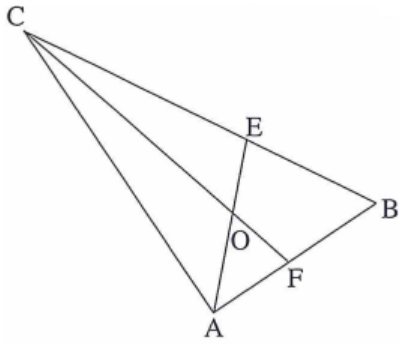
א. מצא את אורך הגובה לצלע LA במשולש ALK.

ב. הבע באמצעות a את אורך הקטע KF.

ג. הוכח כי $\Delta AFM \sim \Delta KFL$.

ד. נתון גם: $AF = 42.5$ ס"מ , $ML > a$ מצא את a.

6) הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.
המשך AO חותך את הצלע BC בנקודה E.
המשך CO חותך את הצלע AB בנקודה F (ראה ציור).



נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

א. הבע באמצעות a ו- β את היחס $\frac{AE}{CF}$.

ב. נתון גם: $\frac{AE}{CF} = \frac{1}{2}$, $\beta = 60°$.

הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB שווה ל- $\frac{1}{2}BC$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7) נתונה הפונקציה $g(x)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$ בתחום: $0\le x\le\frac{7}{3}\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם גרף הפונקציה $f(x)=\sin x$.

ג. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.

(1) מצא את האורך המקסימלי של הקטע AB.

(2) כמה קטעים כמו AB שאורכם מקסימלי מתקבלים בתחום הנתון? נמק.

8) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=x^2+4x+b$, $g(x)=-x^2+c$

b ו-c הם פרמטרים גדולים מ-0.

לגרפים של שתי הפונקציות יש משיק משותף בנקודה משותפת P.

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה P.

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי $b>4$.

הישר $x=a$ חותך את המשיק המשותף בנקודה D, את הגרף של $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של $g(x)$ בנקודה B (A , D ו- B הן שלוש נקודות שונות).

ג. הראה כי הישר PD הוא תיכון במשולש PAB.

ד. השטח המוגבל על ידי הגרף $f(x)$, על ידי המשיק המשותף ועל ידי הישרים $x=a$ ו- $x=-a$, הוא S.

הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי הגרף של $g(x)$ ועל ידי הישרים $x=a$ ו- $x=-a$.

9) נתון כי הפונקציה הזוגית $f(x)=\sqrt{8-ax+bx^2}+c$ מוגדרת בתחום $-2\le x\le 2$ בלבד.
a , b ו-c הם פרמטרים, $c>0$.

א. מצא את הערך של הפרמטר a ואת הערך של הפרמטר b.
הצב את הערך a ואת הערך של b, וענה על הסעיפים ב-ג.

ב. מעבירים ישר משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=\sqrt{2}$, ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\sqrt{2}$.
השטח המוגבל על ידי שני המשיקים ועל ידי ציר ה-x הוא $\frac{49\sqrt{2}}{2}$.
מצא את הערך של הפרמטר c.

ג. בתחום $-2\le x\le 2$ נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=-f(x)$.
מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=\sqrt{2}$,
ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\sqrt{2}$.
מהו סוג המרובע שנוצר על ידי הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$
ושני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2}{3}$ (או $\frac{3}{2}$) ב. 20

2) א. $a_n=6n-8$ ב. 884

3) א. הסתברות שווה ב. $0.6<p\le 1$

4) א. הוכחה ב. (1). הוכחה ב. (2). הוכחה

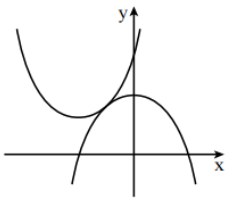
5) א. 10 ס"מ ב. $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+900}$ ס"מ ג. הוכחה ד. $a=7.5$

6) $\frac{AE}{CF}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\alpha}$ ב. הוכחה

7) $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$ ב. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ג. (1). 1 ג. (2). שני קטעים

8) א. $(-1,b-3)$ ב. להלן סקיצה:



ג. הוכחה ג. 2S

9) א. $a=0$, $b=-2$ ב. $c=3$
ג. מעוין.

בגרות קיץ 2013 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) ראובן ושמעון חופרים יחד תעלה אחת ב- 12 שעות.
אם ראובן חופר לבד $\frac{1}{3}$ מהתעלה, ולאחר שהוא מסיים את חלקו שמעון חופר לבד את יתר התעלה, החפירה מסתיימת כעבור $23\frac{1}{3}$ שעות.
כמה תעלות שלמות לכל היותר יחפור ראובן לבד בפחות מ- 100 שעות?
התעלות זהות לתעלה הנתונה.
הספקי העבודה של שמעון ושל ראובן אינם משתנים.

2) נתונה סדרה a_n: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n , \dots$
ונתונה סדרת הסכומים S_n: $S_1 , S_2 , S_3 , \dots , S_n , \dots$
S_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n.
סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $S_1 = 3 , \ S_{n+1} = b \cdot S_n + 3 , \ b \neq 0$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b.

ב. נתון כי $|b| < 1$.

בונים מהסדרה a_n שתי סדרות הנדסיות, I ו- II:

I. $a_3 , a_7 , a_{11} , a_{15} , \dots$

II. $a_1 , -a_3 , a_5 , -a_7 , \dots$

T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I,
M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה II.

הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

3) מבין כל תלמידי י"ב בעיר מסוימת מאתרים תלמידים שיתאימו לקורס ייחודי.
הקורס מתאים לתלמידים שיש להם יכולת טכנית.
הבוחנות מאבחנות 80% מבין התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית, ומאבחנות 10% מבין התלמידים שאין להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית.
מבין התלמידים שאובחנו כבעלי יכולת טכנית, אחוז תלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית גדול פי 4 מאחוז התלמידים (בקבוצה זו) שאין להם יכולת זו.

א. מהי ההסתברות שלתלמיד י"ב בעיר זו אכן יש יכולת טכנית?

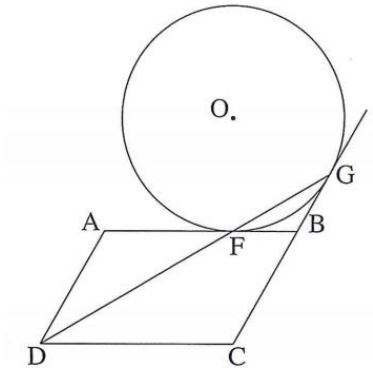
ב. באותה עיר כל אלה שאובחנו כבעלי יכולת טכנית השתתפו בקורס, ורק הם.
בעיר יש 600 תלמידי י"ב.
מבין המשתתפים בקורס לכמה תלמידים אין יכולת טכנית?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 4-6 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4) נתונה מקבילית ABCD.
הצלע AB משיקה למעגל שמרכזו O בנקודה F. המשך הצלע CB משיק למעגל בנקודה G (ראה ציור).
נתון: $AF = AD$.



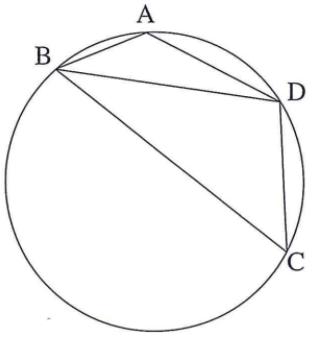
א. הוכח כי הנקודה F נמצאת על הישר DG.

ב. נתון גם: $FC \perp DC$, $BO = BC$.

(1) הוכח כי $OF = FC$.

(2) הוכח כי $FB = \frac{1}{2}BO$.

5) המרובע ABCD חסום במעגל.
המיתר BD חוצה את הזווית ABC (ראה ציור).
נתון: $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, $\sphericalangle ADC = 120°$.

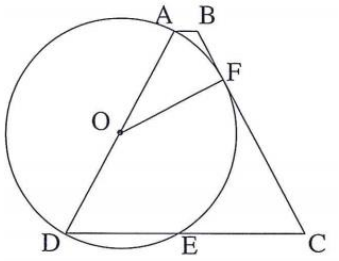


א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את גודל הזווית ABD.

(2) מצא את אורך המיתר BD.

ב. נקודה K נמצאת על המיתר BD כך ש- $\Delta ABK \sim \Delta DBA$.
מצא את שטח המשולש ABK.



6) נתון טרפז שווה שוקיים ABCD $(AD = BC)$.
השוק AD היא קוטר במעגל שמרכזו O.
השוק BC משיקה למעגל בנקודה F.
המעגל חותך את הבסיס DC בנקודה E (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BCD = \alpha$.

א. הבע באמצעות α את גודל הזווית FOD.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) הבע באמצעות α את גודל הזווית ODF.

(2) הבע באמצעות α את היחס $\frac{DE}{DC}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \cos\frac{x}{2}$ בתחום: $2\pi \le x \le 5\pi$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה) בתחום הנתון.

(2) הראה כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חיובית בתחום הנתון.

(3) רק על פי התשובות לתת סעיפים (1) ו- (2), סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

(4) כמה פתרונות יש למשוואה $f'(x) = 40$ בתחום הנתון? נמק.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) רשום את הערך המקסימלי של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון.

(2) האם השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון, שווה לערך של האינטגרל המסוים $\int_{2\pi}^{5\pi} \left(f'(x) - f''(x)\right)dx$? נמק.

8) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x, ונתונה הפונקציה $g(x)$.

נתון: $g(x)=k+2x$, $\int_0^1 g(x)dx=0$. k הוא פרמטר.

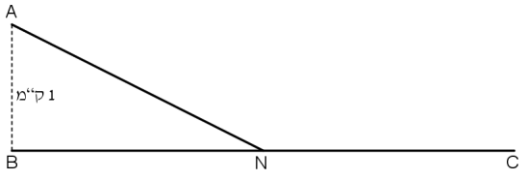
א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. נתון גם כי בתחום $x\geq 0$ מתקיים: $f(x)\geq g(x)$, $f''(x)>0$, $f(0)=k$.
סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של הפונקציה $g(x)$ וסקיצה של הפונקציה $f(x)$ בתחום $x\geq 0$. נמק.

ג. בתחום $x\geq 0$ איזה שטח גדול יותר: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ והצירים או השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x=1$? נמק.

ד. נתון גם: $f(x)=x^3+3x^2+ax+f(0)$, a הוא פרמטר, הגרף של $g(x)$ משיק לגרף של $f(x)$ בנקודה הנמצאת בתחום $x\geq 0$. מצא את הפונקציה $f(x)$.

9) דני יצא מנקודה A, הנמצאת בשדה במרחק 1 ק"מ מהכביש BC. הוא הלך בשדה בקו אלכסוני במהירות קבועה v, והגיע לכביש BC בנקודה כלשהי N (ראה ציור).



דני הלך בכביש במהירות הגדולה פי $\frac{13}{12}$ מהמהירות שבה הלך בשדה, והגיע לנקודה C בכביש. המרחק בין B ל- C הוא 6 ק"מ.
מהו אורך המסלול ANC אם ידוע שדני עבר אותו בזמן מינימלי?

תשובות סופיות:

1) א. לכל היותר 3 תעלות שלמות

2) א. הוכחה ב. $\frac{M}{T}=\frac{1-b^2}{b^2}$

3) א. $\frac{1}{3}$ ב. 40 תלמידים

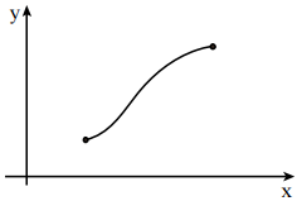
4) א. הוכחה ב. (1). הוכחה ב. (2). הוכחה

5) א. (1). $30°$ א. (2). 4 ב. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ יח"ר

6) א. $270°-2\alpha$ ב. (1). $\alpha-45°$ ב. (2). $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(135°-\alpha)\sin(\alpha+45°)}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$

7) א. (1). עלייה: $2\pi<x<5\pi$, ירידה: אין א. (2). הוכחה

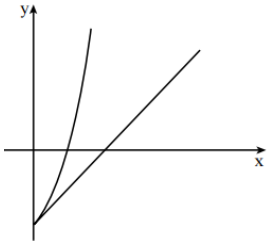
א. (3). להלן הסקיצה:



א. (4). אין פתרונות לתחום הנתון.

ב. (1). 2.25 ב. (2). כן

8) א. $(0,-1)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ב. להלן סקיצה:



ג. השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישר $x=1$ גדול יותר.

ד. $f(x)=x^3+3x^2+2x-1$

9) 6.2 ק"מ.