תרגול 4 יחידות לתלמידי קידום

פרק 57

שאלון 805 בגרויות שנת 2020

מועד חורף 1
קיץ מועד א 4
קיץ מועד ב 8

בגרות חורף 2020:

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על שתי השאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא $\frac{1}{4}$ וסכומה $9\frac{1}{3}$.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

ב. בין כל שני איברים סמוכים בסדרה הוסיפו איבר חדש כך שהתקבלה סדרה הנדסית אין-סופית חדשה, בכל האיברים בה חיוביים.

ג. מהי המנה של הסדרה החדשה? נמק.

ד. עבור כל אחת מן הטענות i-ii שלפניך קבע אם היא נכונה או אינה נכונה. נמק את קביעותיך.

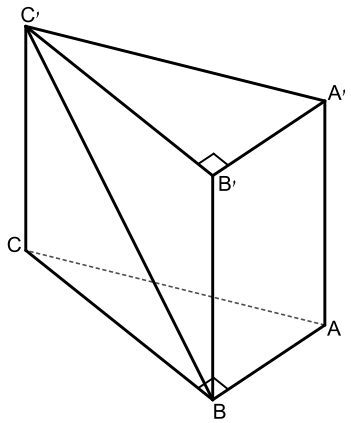
i. האיבר החמישי בסדרה החדשה שווה לאיבר העשירי בסדרה הנתונה.

ii. סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה החדשה הוא $\frac{1}{2}$ מסכום הסדרה הנתונה.

2) $ABCA'B'C'$ היא מנסרה משולשת ישרה (ראה ציור).

בסיס המנסרה, ABC, הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים $\left(AB=BC\ ,\ \sphericalangle ABC=90°\right)$.

נתון כי גובה המנסה הוא 8 ואורך היתר של בסיס המנסרה שווה ל- $4\sqrt{2}$.



א. מצא את גודל הזווית בין אלכסון הפאה הצדדית $BB'C'C$ ובין בסיס המנסרה.

ב. מצא את גודל הזווית $AC'B$.

ג. מצא את שטח המשולש $AC'B$.

הנקודה D היא אמצע הצלע CB.

ד. חשב את אורך הקטע $A'D$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות

טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin 2x$, המוגדרת בתחום $0\le x\le \pi$.

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום $0\le x\le \pi$.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=2\sin x$, המוגדרת גם היא בתחום $0\le x\le \pi$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון: בתחום הנתון, מלבד הנקודות שמצאת בסעיף ב, גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא מעל גרף הפונקציה $f(x)$.

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ בתחום הנתון.

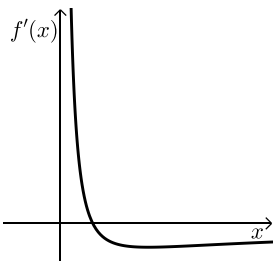
4) נתונה הפונקציה: $f(x)=9-(\ln x)^2$.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



הציור שלפניך מתאר את הגרף של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, על ידי הישר $x=e$ ועל ידי ציר ה-x .

5) הכמות של חומר רדיואקטיבי דועכת בקצב מעריכי.
ביום מסוים נמדדה כמות התחלתית של חומר זה.

שנה לאחר יום המדידה הראשון נשארה מן החומר כמות של $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ק"ג.

5 שנים לאחר יום המדידה הראשון נשארה מן החומר כמות של $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ ק"ג.

א. מצא את קצב הדעיכה של החומר ואת הכמות התחלתית שלו.

נתונה הפונקציה: $g(x)=3^{-2x}$ המוגדרת לכל $x\geq 0$.

הפונקציה $g(x)$ מתארת את כמות החומר x שנים לאחר יום המדידה הראשון.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בעבור $x\geq 0$.

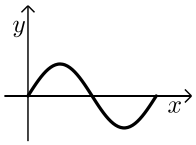
תשובות סופיות:

1) א. 7 ב. 0.5 ג. i. לא. ג. ii. כן.

2) א. $63.43°$ ב. $24.09°$ ג. $8\sqrt{5}$ סמ"ר ד. $\sqrt{84}$ סמ"ר.

3) א. (1) $(\pi,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$ א. (2) $\min\left(\frac{3\pi}{4},-1\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4},1\right)$

א. (3) להלן סקיצה בצד:



ב. $(0,0)$, $(\pi,0)$

ג. 4 יח"ר.

4) א. (1) $x>0$ א. (2) $\left(\frac{1}{e^3},0\right)$, $\left(e^3,0\right)$



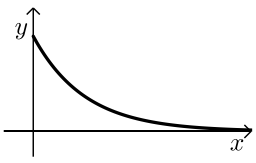
א. (3) $\max(1,9)$

א. (4) להלן סקיצה בצד:

ב. 1 יח"ר.

5) א. $M_0=1$, $q=\frac{1}{9}$ ב. $(0,1)$ ג. ירידה: $x>0$, אין עלייה.

ד. להלן סקיצה בצד:



בגרות קיץ 2020 מועד א':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על שתי השאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) נתונים האיברים הכלליים של שתי סדרות: $a_n=-8n+5$, $b_n=-4n+3$.

א. מצא את a_1 ואת b_1.

נתונה סדרה חדשה, c_n, כך ש- $c_n=a_n+b_n$.

ב. הוכח כי הסדרה c_n היא סדרה חשבונית, ומצא את האיבר הראשון שלה, c_1, ואת ההפרש שלה.

ג. נתון: $a_k=-75$.

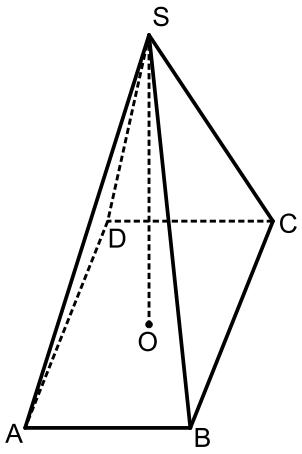
חשב את סכום k האיברים הראשונים של <u>הסדרה החדשה</u>, c_n.

2) SABCD היא פירמידה ישרה שבסיסה, ABCD, הוא מלבן (ראה ציור).

נתון כי אורך אלכסון הבסיס הוא $4a$ ואורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא $3a$.

$a>0$ הוא פרמטר.

SO הוא גובה בפירמידה.



א. הבע באמצעות a את אורך הגובה SO.

SE הוא הגובה לצלע BC בפאה SBC.

נתון: $\sphericalangle CAB=60°$.

ב. (1) הבע את אורך הצלע AB באמצעות a.

(2) הבע באמצעות a את אורך הגובה SE.

ג. חשב את הזווית שבין הקטע SE ובין בסיס הפירמידה.

SG הוא הגובה לצלע AD בפאה SAD.

נתון כי שטח המשולש SGE הוא $\sqrt{80}$.

ד. מצא את a.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$, המוגדרת בתחום $0\le x\le\frac{5}{4}\pi$.
ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
(2) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$?

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המינימום הפנימית שלה.
(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק שאת משוואתו מצאת ועל ידי ציר ה-y.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x\cdot\ln x$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.
(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=-2f(x)$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוסף סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ למערכת הצירים שבה סרטטת את גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מהו המרחק בין נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ובין נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ae^{2x}}{e^x-1}$. a הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

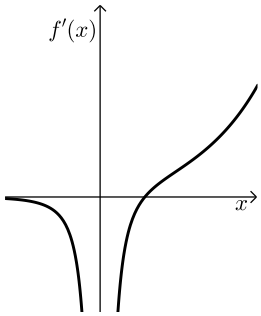
הגרף שלפניך הוא הגרף של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, והוא חותך את ציר ה-x בנקודה שבה $x=\ln 2$.

ב. הסתמך על הגרף, קבע מהו שיעור ה-x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

נתון: שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=\ln 3$ הוא 9.

ג. מצא את a.

הצב $a=4$ וענה על הסעיפים ד-ה.



ד. (1) האם לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם הצירים? נמק.

(2) מהי משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה-x?

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. בעבור אילו ערכי x גם הפונקציה $f(x)$ שלילית וגם הפונקציה $f'(x)$ שלילית?

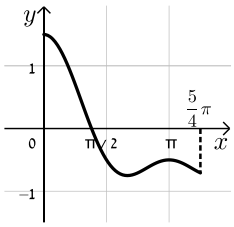
תשובות סופיות:

1) א. $a_1=-3\ ,\ b_1=-1$ ב. הוכחה. ג. 580-.

2) א. $SO=a\sqrt{5}$ ב. **(1)** $AB=2a$ ב. **(2)** $SE=a\sqrt{6}$ ג. $\sphericalangle SEO=65.91°$

ד. $a=2$.

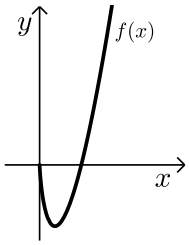
3) א. $\max\left(\frac{5}{4}\pi,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ קצה, $\min\left(\frac{2}{5}\pi,\frac{3}{4}\right)$, $\max(0,1.5)$ קצה ב. להלן סקיצה:



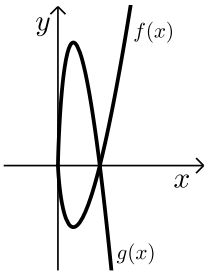
ג. **(1)** $y=-\frac{3}{4}$ ג. **(2)** $S=2.22$.

4) א. **(1)** $x>0$ א. **(2)** $(1,0)$ א. **(3)** $\min\left(\frac{1}{e},-\frac{4}{e}\right)$

א. **(4)** להלן סקיצה:



ב. להלן סקיצה:

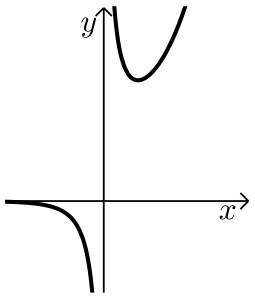


ג. $d=\frac{12}{e}\approx 4.414$.

5) א. $x\neq 0$ ב. $x=\ln 2$ .min ג. $a=4$ ד. **(1)** לא.

ד. **(2)** $x=0$

ד. **(3)** סקיצה.



ה. $x<0$.

בגרות קיץ 2020 מועד ב':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על שתי השאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) נתונות שתי סדרות חשבוניות:

a_n: $3,10,17,24,...$

b_n: $17,38,59,80,...$

א. (1) חשב את b_{30}.

(2) עבור איזה ערך של n מתקיים $a_n = b_{30}$? נמק. (n הוא מספר טבעי).

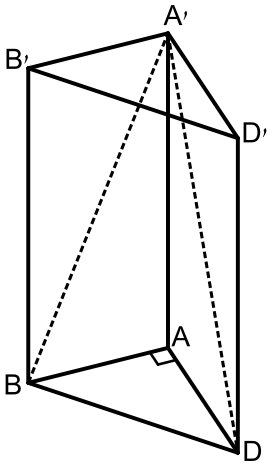
ב. עבור כל אחד משני ההיגדים I-II שלפניך כתוב אם הוא נכון או לא נכון.
נמק את קביעותיך.

I. לכל n טבעי $3a_n = b_n$.

II. לכל n טבעי $a_{3n} = b_n$.

ג. נתון כי ההפרש בין סכום k האיברים הראשונים בסדרה b_n ובין סכום k האיברים הראשונים בסדרה a_n הוא 924 (k הוא מספר טבעי).
מצא את k.

2) נתונה מנסרה משולשת ABDA'B'D' שבסיסה ABD,
הוא משולש שווה שוקיים וישר זווית $(\sphericalangle BAD = 90°)$.
אורך השוק של משולש ABD הוא 3.



א. מצא את אורך המקצוע BD.

ב. הסבר מדוע $A'B = A'D$.

נתון: שטח המשולש BA'D הוא $15\sqrt{2}$.

ג. מצא את גודל הזווית שבין הגובה לבסיס המשולש BA'D
ובין בסיס המנסרה, ABD.

ד. חשב את נפח המנסרה ABDA'B'D'.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin(2x)+4$ המוגדרת בתחום $0\le x\le\pi$.

א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, עם הצירים?

ד. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.

ה. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,
על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה-y ועל ידי הישר $x=\pi$.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{2x}}{a-x}$, a הוא פרמטר.

א. הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון: לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה ששיעור ה-x שלה הוא 1.

ב. מצא את a, וקבע אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון נוספות.

הצב: $a=\frac{1}{2}$ בפונקציה $f(x)$, וענה על סעיפים ג-ד.

ג. (1) כתוב את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$, המאונכת לציר ה-x.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה: $g(x)=-2f(x)$.

מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=5\cdot\ln(x^2-2x+1)$.

א. (1) הראה כי תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x\neq 1$.

(2) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$, המאונכת לציר ה-x.

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ הוא $x\neq 1$. $g'(x)=f(x)$ בכל תחום ההגדרה.

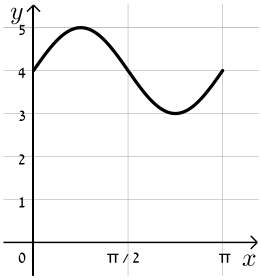
ה. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

תשובות סופיות:

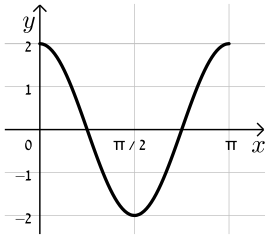
1) א. (1) $b_{30}=626$ (2) $n=90$ ב. I לא נכון. II נכון. ג. $k=11$.

2) א. $BD=3\sqrt{2}$ ב. הסבר. ג. $\sphericalangle A'EA=77.75°$ ד. 43.976 יח"נ.

3) א. $\max(\pi,4)$ קצה, $\min\left(\frac{3}{4}\pi,3\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4},5\right)$, $\min(0,4)$ קצה ב. להלן סקיצה:



ג. $\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, $(0,2)$ ד. להלן סקיצה:

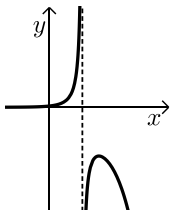


ה. $S=4\pi$.

4) א. $x\neq a$ ב. $a=1$, $\max\left(1,-2e^2\right)$ ג. (1) $x=\frac{1}{2}$

ג. (2) $(0,2)$ ג. (3) עולה: $\frac{1}{2}<x<1$, $x<\frac{1}{2}$, יורדת: $x>1$.

ג. (4) סקיצה בצד. ד. $\min\left(1,4e^2\right)$.



5) א. (1) הוכחה. א. (2) $x=1$ ב. עולה: $x>1$, יורדת: $x<1$

ג. $(0,0)$, $(2,0)$ ד. סקיצה בצד.

ה. $x_{min}=2$, $x_{max}=0$.

