תרגול 4 יחידות לתלמידי קידום

פרק 54

שאלון 805 בגרויות שנת 2017

מועד חורף 1
קיץ מועד א 4
קיץ מועד ב 7

בגרות חורף 2017:

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) נתונה סדרה המקיימת את הכלל: $a_{n+1}=a_n-2n+3$.

מגדירים סדרה חדשה המקיימת: $b_n=a_n+n^2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית.

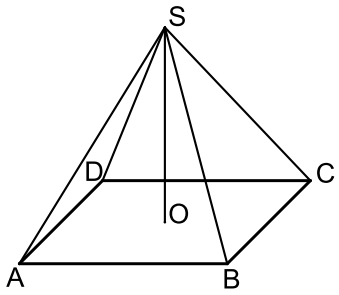
נתון: $a_3=2$.

ב. הבע את b_n באמצעות n.

ג. בסדרה b_n יש 31 איברים. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה זו.

2) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה, ABCD, הוא ריבוע (ראה ציור).

נתון: גובה הפירמידה, SO, גדול פי 1.25 מן האורך של אלכסון הבסיס של הפירמידה.



א. נפח הפירמידה הוא 360 סמ"ק.
חשב את האורך של אלכסון הבסיס.

ב. חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבין מישור הבסיס של הפירמידה.

ג. חשב את זווית הבסיס של פאה צדדית של הפירמידה.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות

טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

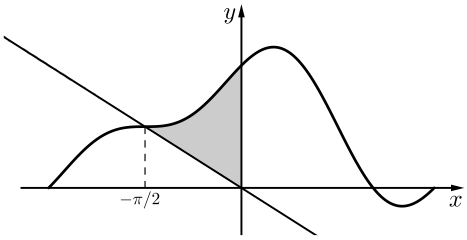
ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x+1$

בתחום: $-\pi\le x\le\pi$. a הוא פרמטר.

דרך ראשית הצירים מעבירים ישר שחותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\frac{\pi}{2}$ (ראה ציור).



א. השטח האפור שבציור (השטח שנמצא ברביע השני ומוגבל על ידי הישר, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה-y) שווה ל-$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

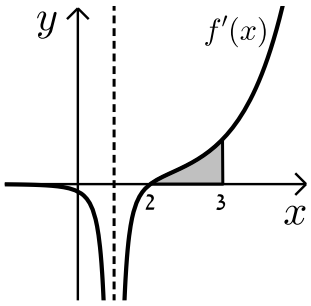
מצא את a.

הצב $a=1$ וענה על הסעיפים ב-ג.

ב. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה, וקבע את סוגן. (אפשר להסתמך על הגרף כדי לקבוע את הסוג).

ג. כמה משיקים המקבילים לציר ה-x יש לגרף הפונקציה בתחום הנתון? נמק.

4) בציור שלפניך מוצג גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{x-2}}{x-c}$. c הוא פרמטר.



היעזר בנתונים מן הציור וענה על הסעיפים א-ד.

א. גזור את הפונקציה $f(x)$ וחשב את c.

הצב $c=1$ וענה על הסעיפים ב-ד.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה-x בתחום $2\le x\le 3$ (השטח האפור בציור).

תוכל להשאיר e בתשובתך.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ג. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מצא את התחום שבו גם $f(x)$ חיובית וגם $f'(x)$ חיובית.

ו. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x)=f(x)$ בתחום $x>0$.

מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $g(x)$, וקבע את סוגן.

תשובות סופיות:

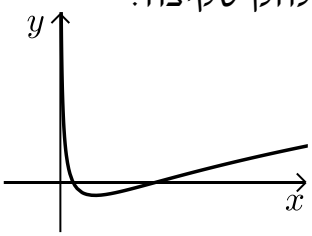
1) א. הוכחה ב. $b_4=4n-1$ ג. 1008

2) א. 12 ס"מ ב. $68.198°$ ג. $74.77°$

3) א. $a=1$ ב. $x_{max}=\frac{\pi}{6}$, $x_{min}=\frac{5\pi}{6}$ ג. 3 משיקים.

4) א. $c=1$ ב. $x\neq 1$ ג. $\min(2,1)$ ד. 0.359

5) א. $x>0$ ב. $\min(e,-1)$ ג. $(1,0)$, $(e^2,0)$ ד. להלן סקיצה:



ה. $x>e^2$ ו. $x_{min}=e^2$, $x_{max}=1$.

בגרות קיץ 2017 מועד א':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) נתונה סדרה המקיימת: $a_1=0$, $a_{n+1}=a_n+2n+5$ לכל n טבעי.

א. חשב את האיברים a_2 ו- a_3.

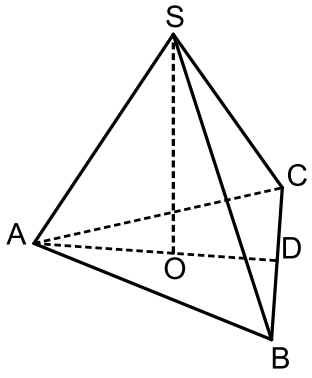
מגדירים סדרה חדשה: $b_n=a_{n+1}-a_n$.

ב. הבע את b_n באמצעות n.

ג. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית, ומצא את ההפרש שלה.

ד. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל- a_5.
מצא את n.

2) נתונה פירמידה משולשת ישרה SABC
שבסיסה משולש ABC הוא שווה צלעות.
נתון: $AB=2a$.
SO הוא גובה בפירמידה (ראה ציור).
AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC.



א. הבע באמצעות a את אורך AD.

ב. נתון כי נפח הפירמידה הוא $\sqrt{3}a^3$.
הבע באמצעות a את גובה הפירמידה SO.

ג. חשב את גודל הזווית שבין מקצוע צדדי
ובין בסיס הפירמידה.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=2x+4\cos x$ בתחום $0\le x\le \pi$.

א. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$ העבירו שני אנכים לציר ה- x.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x ושני האנכים.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{e^{2x}-10e^{x}}$. a הוא פרמטר שונה מאפס.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ii. מצא את האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה- x.

נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y היא $\left(0,-\frac{1}{9}\right)$.

ב. מצא את a.

הצב בפונקציה $f(x)$ את a שנמצאת בסעיף ב וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.

ii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

iii. האם לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר ה- x? נמק.

iv. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את התחום שבו $f(x)<0$ וגם $f'(x)<0$.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{2+2x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה-x.

ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ד. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. סרטט סקיצה של גרף $-f(x)$.

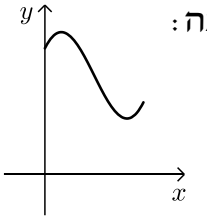
תשובות סופיות:

1) א. $a_2=7\ ,\ a_3=16$ ב. $b_n=2n+5$ ג. $d=2$ ד. 4.

2) א. $a\sqrt{3}$ ב. $3a$ ג. $68.95°$.

3) א. $(0,4)$ ב. $\max(\pi,2.28)\ ,\ \min\left(\frac{5\pi}{6},1.771\right)\ ,\ \max\left(\frac{\pi}{6},4.51\right)\ ,\ \min(0,4)$

ג. להלן סקיצה:

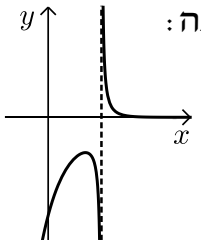


ד. 6.58 יחידות.

4) א. (i). $x\neq\ln 10$ (ii). $x=\ln 10$ ב. $a=1$ ג. (i). $\max\left(\ln 5,-\frac{1}{25}\right)$

ג. (ii). עלייה: $x<\ln 5$, ירידה: $x>\ln 10$, $\ln 5<x<\ln 10$

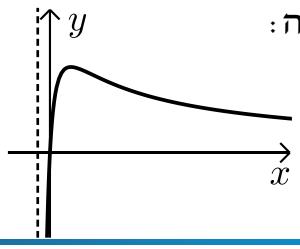
ג. (iii). לא. ג. (iv). להלן סקיצה:



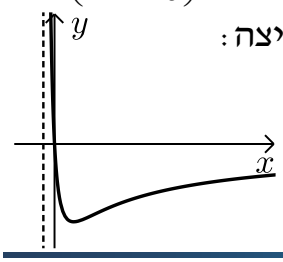
ד. $\ln 5<x<\ln 10$.

5) א. $x>-1$ ב. $x=-1$ ג. $(0,0)$ ד. $\max\left(e-1,\frac{1}{2e}\right)$

ה. להלן סקיצה:



ו. להלן סקיצה:



בגרות קיץ 2017 מועד ב':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) הדר מתאמנת לקראת מרוץ שאורך המסלול שלו הוא 22 ק"מ.
במהלך השבוע הראשון לאימונים רצה הדר 2 ק"מ, ותכננה להוסיף בכל שבוע 500 מטרים לריצה, כדי שבשבוע האחרון לאימונים היא תרוץ 22 ק"מ.

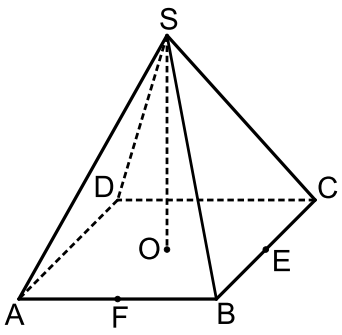
א. כמה שבועות הדר מתכננת להתאמן למרוץ?

לאחר 24 שבועות שבהם התאמנה כמתוכנן, הודיעו על הקדמת המרוץ.
בשבוע ה-25 היא רצה כמתוכנן, ולאחר מכן היא החליטה לשנות את תכנית האימונים שלה: לרוץ בכל שבוע 800 מטרים יותר מבשבוע שלפניו (ולא 500 מטרים יותר, כפי שתכננה בהתחלה). כך שבשבוע האחרון לאימונים היא תרוץ 22 ק"מ.

ב. בכמה שבועות תקצר הדר את האימונים שלה?

ג. כמה קילומטרים תרוץ הדר סך הכול במהלך האימונים שלה?

2) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה, ABCD, הוא ריבוע (ראה ציור).
אורך הצלע של בסיס הפירמידה הוא 8 ס"מ.
SE הוא הגובה לצלע BC בפאה הצדדית SBC,
ו-SF הוא הגובה לצלע AB בפאה הצדדית SAB.
שטח הפאה SBC הוא 36 סמ"ר.



א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את הזווית שבין SE לבסיס הפירמידה.

ii. חשב את האורך של גובה הפירמידה, SO.

ב. הנקודה G היא אמצע הקטע FE.

i. חשב את אורך הקטע FE.

ii. חשב את אורך הקטע OG.

iii. חשב את הזווית שבין SG לבין בסיס הפירמידה.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=1+\cos 3x$ בתחום $0\le x\le\frac{2\pi}{3}$.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

ג. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x)-2$.

ד. סרטט את גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $0\le x\le\frac{2\pi}{3}$.

ה. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה-x בתחום $0\le x\le\frac{2\pi}{3}$.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{x^2-x+1}$. נתון: $g(x)=f'(x)$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת הפונקציה $g(x)$.

ii. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

iii. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

iv. הראה שהפונקציה $g(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הצירים.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{2x}{\ln x-a}$. $a>0$ פרמטר.

נתון: הישר $y=2x$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=e^3$.

א. מצא את a .

ב. הצב $a=2$ וענה על הסעיפים ב-ג:

i. מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

ii. מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה-x .

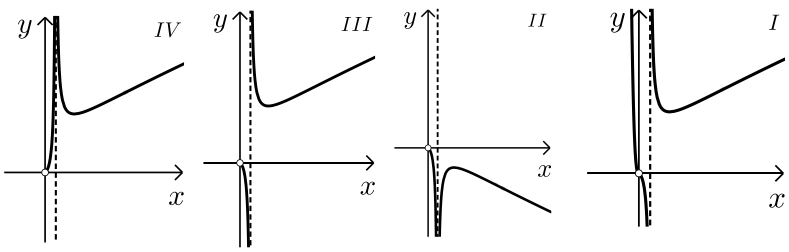
iii. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.

iv. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

v. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. לפניך ארבעה גרפים, I-IV.

איזה מהם הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$? נמק.



תשובות סופיות:

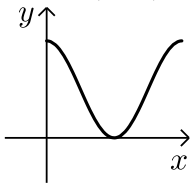
1) א. 41 שבועות. ב. 6 שבועות. ג. 384 ק"מ.

2) א. (i). $63.61°$ א. (ii). 8.062 ס"מ ב. (i). 5.657 ס"מ

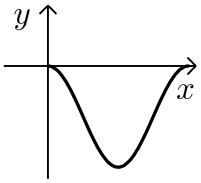
ב. (ii). 2.828 ס"מ. ב. (iii). $70.667°$

3) א. $(0,2)$, $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ ב. $\max\left(\frac{2\pi}{3},2\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{3},0\right)$, $\max(0,2)$

ג. להלן סקיצה:



ד. להלן סקיצה:

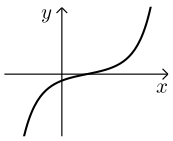


ה. $\frac{2}{3}\pi$.

4) א. (i). $g(x)=(2x-1)e^{x^2-x+1}$ א. (ii). כל x.

א. (iii). $(0,-e)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$ א. (iv). הוכחה.

ב. להלן סקיצה:



ג. 0.601.

5) א. $a=2$ ב. (i). $x>0$, $x\neq e^2$ ב. (ii). $x=e^2$

ב. (iii). $\min\left(e^3,40.17\right)$ ב. (iv). עלייה: $x>e^3$, ירידה: $0<x<e^2,\ e^2<x<e^3$

ב. (v). אין. ג. III