תרגול 4 יחידות לתלמידי קידום

פרק 50

שאלון 805 בגרויות שנת 2013

מועד חורף 1
קיץ מועד א 4
קיץ מועד ב 7

בגרות חורף 2013:

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) נתונות שתי סדרות, a_n ו- b_n, המוגדרות לכל n טבעי לפי הכלל: $\begin{matrix} a_{n+1}=3a_n+5 \\ b_n=a_n+2.5 \end{matrix}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית, ומצא את המנה שלה $\left(a_n \neq -2.5\right)$.

נתון גם כי $b_1=2$.

ב. הבע באמצעות n את a_n.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע באמצעות n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n.

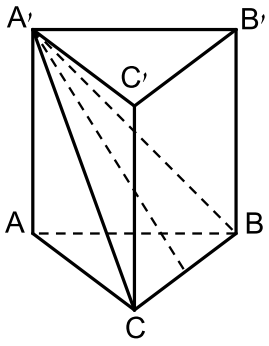
ii. הבע באמצעות n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n.

2) נתונה מנסרה ישרה ABCA'B'C' , שבסיסיה הם משולשים שווי צלעות (ראה ציור).

A'E הוא הגובה ל-BC במשולש A'BC.

הזווית בין A'E ובין מישור הבסיס ABC היא α.

גובה המנסרה הוא h.



א. הבע באמצעות h ו- α את אורך צלע הבסיס של המנסרה.

ב. אם נתון כי $\alpha=30°$, מצא את גודל הזווית שבין A'C למישור ABC.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות

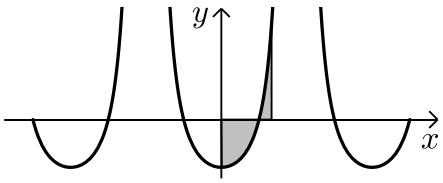
טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-2$

בקטע $-\frac{5}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi$ (ראה ציור).



א. בקטע הנתון מצא:

i. את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה-y.

ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה ועל ידי ציר ה-x (השטח המקווקו בציור).

4) נתונה הפונקציה $f(x)=\log_2\left(-x^2+4x+32\right)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
בתשובתך השאר, במידת הצורך, שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה ומקביל לציר ה-x.
בתשובתך תוכל להשאיר $\log$ או תוכל להשאיר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. ב-1/1/2000 מנתה אוכלוסיית מדינה מסוימת 2.5 מליון תושבים.
מספר התושבים גדל בצורה מעריכית, ועד 1/1/2010 גדלה האוכלוסייה ב-63%.
כעבור כמה שנים מ-1/1/2000 יהיה מספר התושבים במדינה 8 מליון?

ב. נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{x^2-m}-e^{m-x^2}$. m הוא פרמטר.

i. הבע באמצעות m (במידת הצורך) את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ii. נתון כי הישר $y=0$ משיק לגרף הפונקציה.
מצא את הערך של m.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

תשובות סופיות:

1) א. $q=3$ ב. $a_n=2\cdot 3^{n-1}-2.5$ ג. (i) 3^n-1 (ii) $3^n-1-2.5n$

2) א. $\frac{2h}{\sqrt{3}\tan\alpha}$ ב. $26.57°$

3) א. (i). תחום הגדרה: $-1.25\pi\le x\le 1.25\pi$, $x\ne\frac{\pi}{2}$, $x\ne-\frac{\pi}{2}$,

אסימפטוטות: $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$

(ii). א. $(-1.25\pi,0)$, $(-0.75\pi,0)$, $(-0.25\pi,0)$, $(0.25\pi,0)$, $(0.75\pi,0)$, $(1.25\pi,0)$

ב. 0.779.

4) א. $-4<x<8$ ב. $(0,5)$, $(7.92,0)$, $(-3.92,0)$

ג. עלייה $-4<x<2$ ירידה $2<x<8$ ד. $y=5.17$

5) א. 23.81 ב. (i). $\min\left(0,e^{-m}-e^{m}\right)$ ב. (ii). $m=0$.

בגרות קיץ 2013 מועד א':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) נתונה סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$.
האיבר הראשון של הסדרה הוא 2.5.
האיבר במקום ה-33 בסדרה גדול ב-80 מהאיבר במקום ה-17 בסדרה.
מהסדרה הנתונה לקחו כל איבר שלישי כך שהתקבלה סדרה חשבונית חדשה: $a_3 , a_6 , a_9 , \dots , a_n$.

א. מצא את הפרש הסדרה החדשה.

ב. סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 3100.

i. מצא את מספר האיברים בסדרה החדשה.

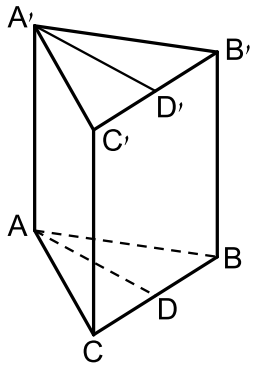
ii. מהו מספר האיברים בסדרה המקורית? נמק.

2) במנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ הבסיסים הם משולשים שווי שוקיים $(AB = AC)$.

AD הוא גובה לצלע BC, ו-$A'D'$ הוא גובה לצלע $B'C'$ (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC = 64°$, $BC =$ 26 ס"מ ,

נפח המנסרה הוא 8112 סמ"ק.



א. חשב את גובה המנסרה.

ב. חשב את הזווית שבין האלכסון $A'B$ ובין בסיס המנסרה ABC.

ג. חשב את $\sphericalangle A'AD'$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות

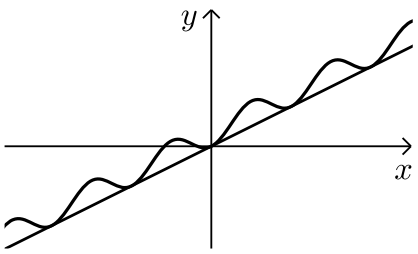
טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=0.5x-0.5\cos(2x)+0.5$

ונתון הישר $y=0.5x$ (ראה ציור).



א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את שיעורי ה-x של הנקודות המשותפות לישר ולגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

ii. הראה כי הישר משיק לגרף הפונקציה בנקודות שמצאת בתת סעיף א (i).

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)$ ועל ידי $y=0.5x$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=2x^2e^{-\frac{x^2}{m}}$, m הוא פרמטר שונה מ-0.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-x שלה הוא 2-.

מצא את הערך של הפרמטר m.

הצב $m=4$, וענה על הסעיפים שלפניך.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

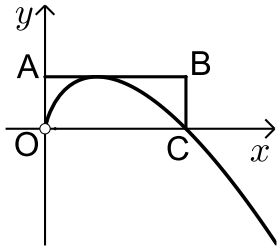
ii. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

iii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. לפי גרף הפונקציה $f(x)$ סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $-2 \le x \le 2$.

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה $f(x)=-x\ln(2x)$, $x>0$ (ראה ציור).



דרך נקודת הקיצון של הפונקציה העבירו משיק המקביל לציר ה-x, ודרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x העבירו ישר המקביל לציר ה-y.

הישרים יוצרים עם הצירים מלבן ABCO, כמתואר (O ראשית הצירים).

מצא את שטח המלבן ABCO. (בתשובתך תוכל להשאיר e).

ב. לחוקר יש היום כמות מסויימת של חומר רדיואקטיבי. הכמות קטנה בצורה מעריכית. בעוד 10 שנים תרד ב-20% כמות החומר שיש לחוקר היום.

מצא בעוד כמה שנים מהיום תרד ב-40% כמות החומר.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

תשובות סופיות:

1) א. $d=15$ ב. (i) 20 איברים ב. (ii) 60 איברים

2) א. 30 ס"מ ב. $50.73°$ ג. $34.74°$

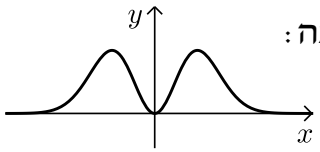
3) א. (i) $x=\pi$, $x=0$, $x=-\pi$ א. (ii) הוכחה.

א. (iii) π יח"ר.

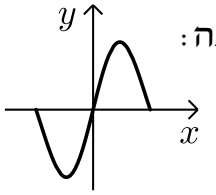
4) א. כל ב. $m=4$ ג. (i) $(0,0)$

ג. (ii) $\max(-2,2.94)$, $\min(0,0)$, $\max(2,2.94)$

ג. (iii) להלן סקיצה:



ד. להלן סקיצה:



5) א. 0.092 יח"ר ב. 22.89 שנים

בגרות קיץ 2013 מועד ב':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) ראובן משחק עם חבריו בגולות. כל משתתף מכניס בתורו גולות למשחק.
הזוכה בתור שלו, מקבל מספר גולות הגדול פי 6 ממספר הגולות שהכניס באותו תור למשחק. המפסיד בתור שלו, מפסיד את כל הגולות שהכניס באותו תור למשחק (ולא מקבל שום גולה).
ראובן הכניס בתור הראשון 3 גולות, והפסיד. הוא המשיך לשחק, ובכל תור הוא הכניס 2 גולות יותר משהכניס בתור הקודם שלו.
ראובן שיחק בסך הכל n תורים. בכל תור הוא הפסיד, ורק בתור האחרון הוא זכה.

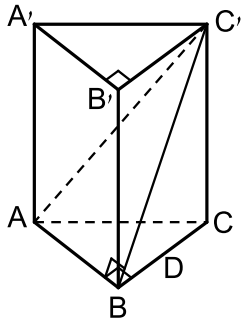
א. הבע באמצעות n את מספר הגולות שראובן קיבל בתור האחרון.
בתור האחרון קיבל ראובן מספר גולות הגדול ב-6 ממספר כל הגולות שהכניס למשחק ב-n התורים ששיחק.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע באמצעות n את מספר כל הגולות שהכניס ראובן למשחק ב-n התורים ששיחק.

ii. כמה תורים שיחק ראובן?

2) הבסיס של מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים (ראה ציור).
נתון: a ס"מ $AB=BC=$, $\sphericalangle ABC'=90°$,
הזווית בין האלכסון AC' לפאה $BCC'B'$ היא α.



א. הבע באמצעות a ו-α את נפח המנסרה.
נתון גם כי גובה המנסרה הוא $2a$.

ב. מצא את α.

ג. מצא את גודל הזווית שבין האלכסון AC' לבסיס ABC.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=a-b\sin(2x)$ בתחום $0\le x\le \pi$.
a ו- b הם פרמטרים חיוביים.

א. אחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x היא הנקודה שבה $x=\frac{\pi}{12}$.
הבע את b באמצעות a.
הצב בפונקציה $b=2a$, וענה על הסעיפים ב-ד שלפניך.

ב. בתחום הנתון הבע באמצעות a, במידת הצורך:
i. את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ii. את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

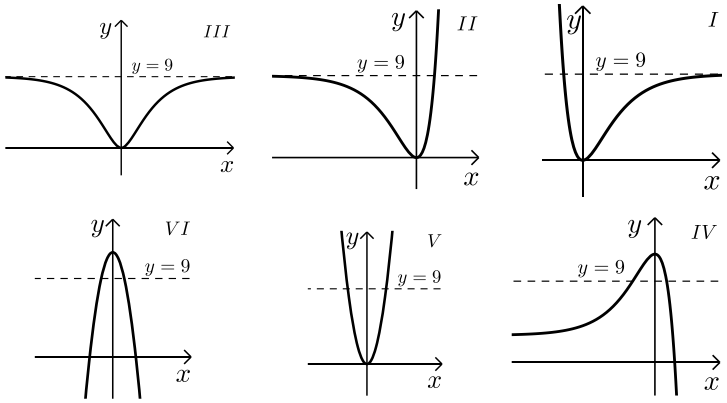
ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=0.5a$ בתחום הנתון? נמק.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\left(3e^{x}-3\right)^{2}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את התחום ההגדרה של הפונקציה.
ii. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
iii. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הישר $y=9$ (אם יש כאלה).

ג. מבין הגרפים VI-I שלפניך, איזה גרף מציג סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.



5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{-2}{2x-3}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה-x, על ידי ציר ה-y ועל ידי הישר $x=1$.

תשובות סופיות:

1) א. $12n+6$ ב. (i). n^2+2n ב. (ii). 10.

2) א. $\frac{a^3\sqrt{1-\tan^2\alpha}}{2\tan\alpha}$ ב. $\alpha=24.09°$ ג. $54.73°$

3) א. $b=2a$ ב. (i). $(0,a)$, $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$

ב. (ii). $\max\left(\frac{3\pi}{4},3a\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{4},-a\right)$ ג. סקיצה. ד. 2 פתרונות.

4) א. (i). לכל x א. (ii). $(0,0)$ א. (iii). $\min(0,0)$ ב. $(\ln 2,9)$

ג. גרף 2

5) א. $x\neq 1.5$ ב. עלייה: $x<1.5$ וגם $x>1.5$ ירידה: אין. ג. $x=1.5$, $y=0$

ד. $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ ה. סקיצה. ו. 1.098