תרגול 4 יחידות לתלמידי קידום

פרק 49

שאלון 805 בגרויות שנת 2012

מועד חורף 1
קיץ מועד א 4
קיץ מועד ב 7

בגרות חורף 2012:

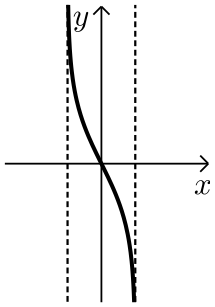
פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב (50 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) שני רוכבי אופנוע נמצאים במרחק 1110 ק"מ זה מזה, ורוכבים זה לקראת זה.
בשעה הראשונה עבר הרוכב הראשון מרחק של 50 ק"מ, ובכל שעה נוספת עבר 5 ק"מ יותר מהמרחק שעבר בשעה הקודמת.
הרוכב השני יצא לדרך 3 שעות אחרי הרוכב הראשון. בשעה הראשונה הוא עבר 90 ק"מ, ובכל שעה נוספת עבר 4 ק"מ פחות מהמרחק שעבר בשעה הקודמת.
חשב כעבור כמה שעות מרגע היציאה של הרוכב הראשון ייפגשו שני הרוכבים.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=\log_{\frac{1}{e}}(1+x)-\log_{\frac{1}{e}}(1-x)$ (ראה ציור).



א. מצא את תחום ההגדרה של פונקציה $f(x)$.

ב. הראה כי $f(x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)$.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$.
בנקודה A הנמצאת ברביע השני, ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה B הנמצאת ברביע הרביעי.
נתון כי כל אחד משיפועי המשיקים הוא: $-\frac{8}{3}$.
מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.

ii. דרך הנקודה A העבירו מקביל לציר ה-x, ודרך הנקודה B העבירו מקביל לציר ה-x. היעזר בחוקי הלוגריתמים (בלי להשתמש במחשבון), והראה כי המרחק בין המקבילים הוא $2\ln 3$.

ד. היעזר בגרף של הפונקציה $f(x)$, וקבע אם בתחום ההגדרה של $f(x)$ פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא תמיד שלילית, תמיד חיובית או לפעמים שלילית ולפעמים חיובית. נמק.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה (50 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 3-4.

שים לב! אם תענה על שתי השאלות, תיבדקנה רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

3) הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x מקיימת:

$f(x)\geq 0$ לכל x

$f(0)=0$ ואין יותר נקודות שבהן $f(x)=0$

$f(x)$ עולה בתחומים $x<-\ln 3$, $x>0$

$f(x)$ יורדת בתחום $-\ln 3<x<0$

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, וציין בה את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון.

נתון גם: $f(x)=e^{3x}-2e^{ax}+e^{x}$, a הוא פרמטר.

ב. היעזר בנקודות המינימום של הפונקציה $f(x)$, ומצא את ערך הפרמטר a.

ג. דרך נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ העבירו אנך לציר ה-x.

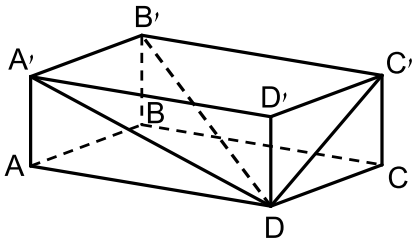
הצב $a=2$, ומצא את השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה-x.

4) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$

אורך האלכסון $B'D$ הוא a.

האלכסון $B'D$ יוצר זווית של 60° עם המקצוע $A'B'$,

ויוצר זווית של 50° עם הפאה $DCC'D'$.



א. הבע באמצעות a את האורך:

i. של הצלע $A'B'$.

ii. של הצלע $B'C'$.

iii. של האלכסון BD.

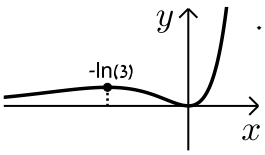
ב. הבע באמצעות a את נפח התיבה $ABCDA'B'C'D'$.

תשובות סופיות:

1) 9

2) א. $-1<x<1$ ב. הוכחה. ג. (i). $x_A=-\frac{1}{2}\ ,\ x_B=\frac{1}{2}$

ג. (ii). הוכחה. ד. פונקציית נגזרת תמיד שלילית.

3) א. 

ב. 2 ג. $\frac{8}{81}$

4) א. (i). $0.5a$ א. (ii). $0.76a$ א. (iii). $0.91a$ ב. $0.15a^3$

בגרות קיץ 2012 מועד א':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) נתונה סדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $\begin{cases} a_1 = k \\ a_{n+1} = 3a_n - 8 \end{cases}$, $(k \neq 4)$.

b_n היא סדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $b_n = 2a_n - 8$.

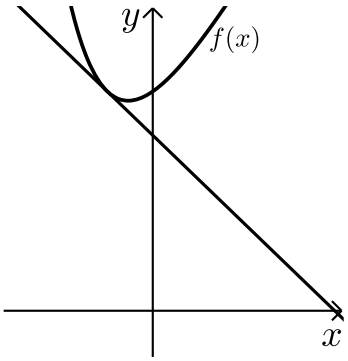
א. הראה כי b_n היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי $b_5 = 324$. מצא את הערך של k.

ג. נתון גם כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 120 , 13.
מצא את n.

2) בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציה $f(x)$, ומוצג הישר $y = -x + 4$.

הישר משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = -1$.



הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = a - e^{-x}$.
a הוא פרמטר.

א. מצא את הערך של a.
בתשובתך רצוי להשאיר e.
הצב את הערך של a, וענה על הסעיפים ב-ג.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את שיעורי ה-y של נקודת ההשקה.
ii. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,
על ידי הישר הנתון ועל ידי ציר ה-y (השטח המקווקו בציור).

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות

טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

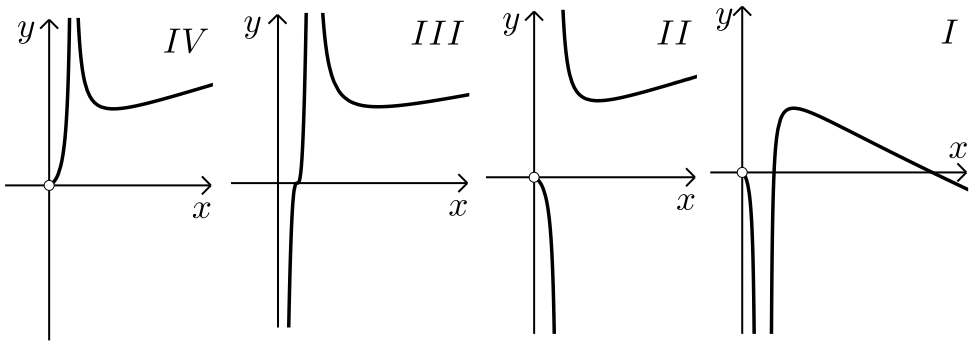
3) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x}{\ln(2x)}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מבין הגרפים I-IV שלפניך איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$? נמק.



ה. הסבר מדוע עבור $x>\frac{e}{2}$ מתקיים $f(x)>e$.

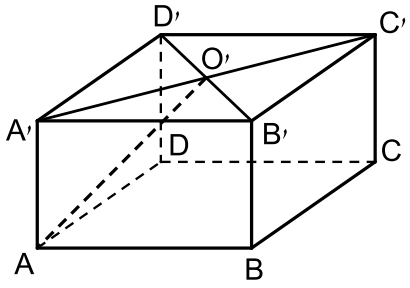
4) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D' שבסיסה הוא ריבוע.

אלכסוני הבסיס A'B'C'D' נפגשים בנקודה O' (ראה ציור).

נתון: אורך צלע הבסיס הוא a , הזווית בין AO' לבסיס ABCD היא 42° .

א. הבע באמצעות a את נפח התיבה.

ב. חשב את הזווית בין אלכסון התיבה ובין בסיס התיבה.



תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. $k=6$ ג. $n=8$

2) א. $a=e-1$ ב. (i). $y=5$ (ii). $f\left(x\right)=ex-x+e^{-x}+4$

ג. $\frac{e}{2}-1$

3) א. $x>\frac{1}{2}$ או $0<x<\frac{1}{2}$ ב. $\left(\frac{e}{2},e\right)$

ג. ירידה: $\frac{1}{2}<x<\frac{e}{2}$ או $0<x<\frac{1}{2}$ עלייה: $x>\frac{e}{2}$ ד. איור 2 ה. הוכחה

4) א. $0.636a^3$ ב. 24.2°

בגרות קיץ 2012 מועד ב':

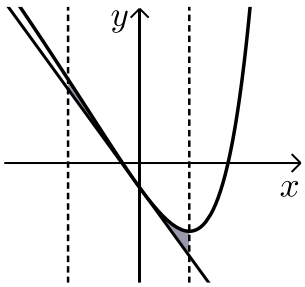
פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) כמות של 1000 גרם חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית.
כעבור מספר שנים נותרו 250 גרם מהחומר.
כעבור עוד 4 שנים נותרו 200 גרם מהחומר.
מצא כעבור כמה שנים נותרו 250 גרם מהחומר הרדיואקטיבי.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}-2x$.



העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=0$, והעבירו אנך לציר ה-x דרך נקודת המינימום של הפונקציה (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את משוואת האנך.

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק, על ידי האנך ועל ידי הישר $x=-1$ (השטח המסומן בציור).

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות

טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a\ln x}{x^2}$, a הוא פרמטר שונה מאפס.

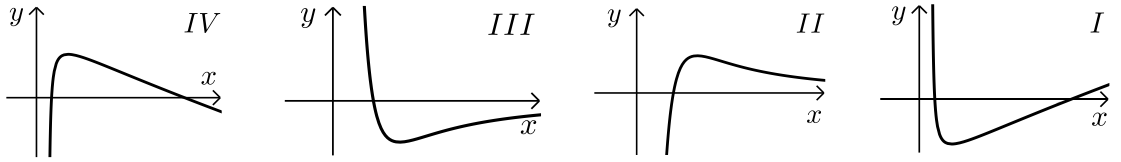
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $f(x)=0$ הוא 3.
מצא את הערך של a.

הצב $a=3$ וענה על סעיפים ג-ה:

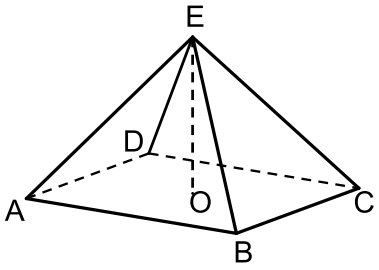
ג. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ד. לפניך הגרפים I, II, III, IV. איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$? נמק.



ה. האם יש פתרון למשוואה $\frac{3\ln x}{x^2}=1$? נמק.

4) נתונה פירמידה ישרה EABCD שבסיסה ABCD הוא מלבן (ראה ציור). הזווית בין מקצוע צדדי של הפירמידה לבסיס היא $30°$.
הזווית AOB בין אלכסוני הבסיס היא $120°$.
גובה הפירמידה הוא 10 ס"מ.



א. חשב את אורך המקצוע BC.

ב. חשב את הזווית בין הגובה ל-BC בפאה EBC ובין בסיס הפירמידה.

תשובות סופיות:

1) 24.85 שנים.

2) א. $y=-2x-0.5$ ב. $x=\ln 2$ ג. 0.181 יח"ר

3) א. $x>0$ ב. $a=3$ ג. $\max\sqrt{e},0.552$
ד. ציור 2 ה. לא

4) א. 17.32 ס"מ ב. $33.69°$