תרגול 4 יחידות לתלמידי קידום

פרק 38

שאלון 804 בגרויות שנת 2013

מועד חורף 1
קיץ מועד א 5
קיץ מועד ב 10

בגרות חורף 2013:

פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) רוכב אופניים יצא מיישוב A ליישוב B, ובדיוק באותה השעה יצא הולך רגל מיישוב B ליישוב A. הולך הרגל הלך במהירות קבועה שקטנה ב- 10 קמ"ש מהמהירות של רוכב האופניים. כעבור 24 דקות המרחק בין רוכב האופניים להולך רגל היה 12 ק"מ.
כעבור 36 דקות נוספות הם נפגשו.

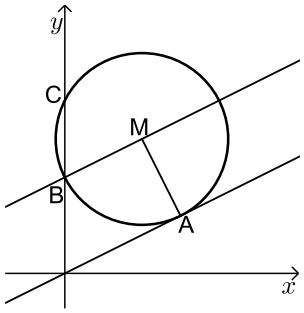
א. מצא את המהירות של רוכב האופניים.

ב. מצא באיזה מרחק מיישוב A נפגשו רוכב האופניים והולך הרגל.

2) נתון מעגל, שמרכזו M נמצא על הישר $y=7$.

הישר $y=\frac{1}{2}x$ משיק למעגל בנקודה $A(6,3)$

(ראה ציור).



א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את השיעורים של מרכז M.

(2) מצא את משוואת המעגל.

ב. המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות B ו-C.

נקודה C נמצאת מעל נקודה B (ראה ציור).

(1) הראה כי הישר BM מקביל לישר המשיק למעגל בנקודה A.

(2) מצא את שטח המשולש BMA.

3) בשלוש קופסאות A , B ו-C יש כדורים שחורים ולבנים.
בקופסה A יש 2 כדורים שחורים ו-3 כדורים לבנים.
בקופסה B יש 3 כדורים שחורים ו-2 כדורים לבנים.
בקופסה C יש 4 כדורים שחורים ו-1 כדור לבן.

א. בוחרים באקראי קופסה, ומוציאים ממנה באקראי כדור אחד.

(1) מהי ההסתברות להוציא כדור לבן?

(2) ידוע שהוצא כדור לבן. מהי ההסתברות שהכדור הוצא מקופסה B?

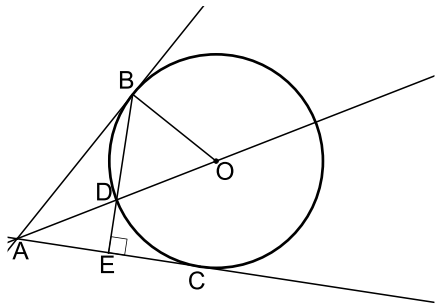
ב. מקופסה C מוציאים באקראי 2 כדורים זה אחר זה בלי החזרה.
מהי ההסתברות שאחרי הוצאת הכדורים לא נותר בקופסה C כדור לבן?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4) מנקודה A יוצא ישר המשיק בנקודה B למעגל שמרכזו O.
הקטע AO חותך את המעגל בנקודה D (ראה ציור).



א. הוכח כי $\sphericalangle BOD = 2\cdot\sphericalangle ABD$.

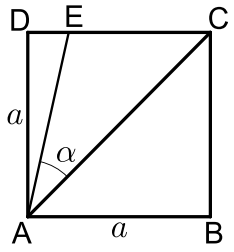
מנקודה A יוצא עוד ישר המשיק למעגל בנקודה C.
המשך המיתר BD חותך את AC בנקודה E
(ראה ציור). נתון כי $BE \perp AC$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) הוכח כי $\sphericalangle BOD = 2\cdot\sphericalangle DAE$.

(2) הוכח כי BD = AD.

5) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו a ס"מ.
נקודה E נמצאת על צלע DC (ראה ציור).



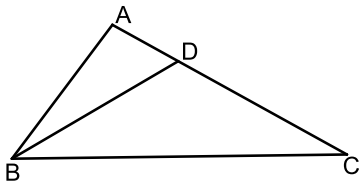
נתון: 2 ס"מ = DE , $\sphericalangle EAC = \alpha$.

א. הבע את a באמצעות α.

ב. אם נתון כי $\alpha = 30°$, חשב את שטח המשולש ACE.

ג. חשב את α במקרה שבו 2 ס"מ = EC = DE.

6) במשולש ABC נתון: 5 ס"מ = AB
8 ס"מ = AC , 10 ס"מ = BC
נקודה D נמצאת על הצלע AC
כך ש-DC = BD (ראה ציור).



א. חשב את זוויות המשולש BDC.

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD
לרדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

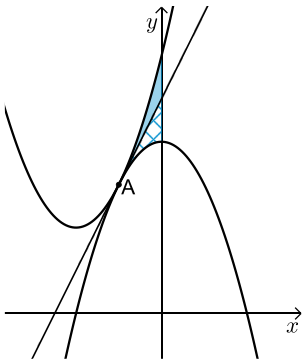
ד. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) היעזר בגרף שסרטטת, ומצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

8) בציור שלפניך מוצגות שתי פרבולות:

$f(x)=x^2+4x+6$; $g(x)=-x^2+c$



c הוא פרמטר. הפרבולות משיקות זו לזו בנקודה A.
דרך נקודה A העבירו משיק המשותף לשתי הפרבולות (ראה ציור).

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) סמן ב-t את שיעור ה-x של נקודה A, והבע באמצעות t את השיפוע של המשיק המשותף. הבע בשני אופנים.

(2) מצא את השיעורים של נקודה A.

(3) מצא את ערך הפרמטר c.

ב. המשיק המשותף מחלק את השטח, המוגבל על ידי שתי הפרבולות ועל ידי ציר ה-y, לשני שטחים (השטח האפור והשטח המקווקו בציור).
הצב את הערך של הפרמטר c שמצאת, והראה כי שני השטחים שווים זה לזה.

9) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המלבנים ששטחם k סמ"ר, הבע באמצעות k את צלעות המלבן שהיקפו מינימלי.

ב. נתון כי קוטר המעגל החוסם את המלבן שהיקפו מינימלי, הוא 8 ס"מ. מצא את הערך של k.

תשובות סופיות:

1) א. 15 קמ"ש. ב. 15 ק"מ.

2) א. (1) $M(4,7)$ (2) $(x-4)^2+(y-7)^2=20$ (3) 10 יח"ר.

3) א. (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{3}$ ב. $\frac{2}{5}$.

4) א. הוכחה. ב. (1) הוכחה. ב. (2) הוכחה.

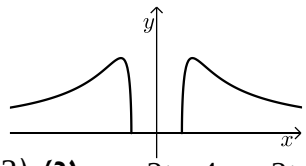
5) א. $a=\frac{2}{\tan(45°-\alpha)}$ ב. 20.36 סמ"ר. ג. $18.43°$.

6) א. $120.62°$, $29.686°$, $29.686°$ ב. $\frac{1}{2}$.

7) א. $x\geq 2$ או $x\leq -2$ ב. $(2,0)$, $(-2,0)$

ג. $(-2,0)\min$, $(2,0)\min$, $\left(\sqrt{8},\frac{1}{4}\right)\max$, $\left(-\sqrt{8},\frac{1}{4}\right)\max$

ד. (1)



ד. (2) $y=\frac{1}{4}$.

8) א. (1) $-2t$, $2t+4$ (2) $A(-1,3)$ (3) $c=4$.

9) א. $BC=\sqrt{k}$, $AB=\sqrt{k}$ ב. $k=32$.

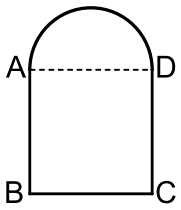
בגרות קיץ 2013 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

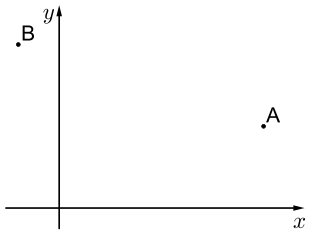
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) חלון מורכב מחצי עיגול ומריבוע ABCD.



צלע הריבוע AD היא קוטר של חצי העיגול, כמתואר בציור.
שטח הריבוע גדול ב- 0.2187 מ״ר משטח חצי העיגול.
מצא את ההיקף של המסגרת החיצונית של החלון.
בחישוביך השתמש ב- $\pi = 3.14$.

2) נתונות הנקודות $A(10,4)$ ו- $B(-2,8)$ (ראה ציור).



נקודה P נמצאת על ציר ה- x כך שמרחקה מנקודה A שווה למרחקה מנקודה B.

א. מצא את השיעורים של הנקודה P.

הנקודות A , B ו- P הן קדקודים של מרובע ADBP.

נתון: $BD \parallel PA \; , \; BP \parallel AD$.

ב. מצא את השיעורים של הקדקוד D.

ג. מצא את אורך הרדיוס של מעגל החוסם את המשולש BDA. נמק.

3) חקלאי מייצא פרחים לבנים ופרחים אדומים. במחסן של חקלאי:

$\frac{1}{12}$ מהפרחים הלבנים הם ורדים. $\frac{2}{3}$ מהפרחים האדומים הם ורדים.

25% מכלל הפרחים הם ורדים, והשאר הם חבצלות.

א. בוחרים באקראי פרח מבין הפרחים שבמחסן.

(1) מהי ההסתברות שהפרח הוא אדום?

(2) מהי ההסתברות שהפרח הוא אדום אם ידוע שהוא ורד?

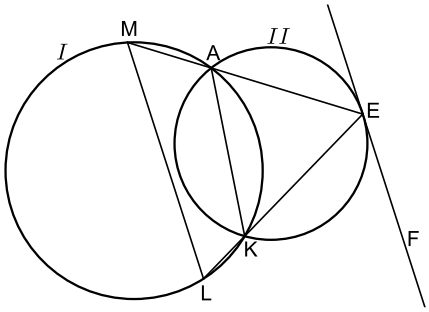
ב. נתון שמספר הוורדים האדומים במחסן הוא 300.
מהו מספר הפרחים במחסן?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4) מרובע AKLM חסום במעגל I.
דרך קדקודים A ו-K העבירו מעגל II.
המשכי הצלעות MA ו- LK נפגשים בנקודה E שעל המעגל II.
הישר FE משיק למעגל II בנקודה E (ראה ציור).



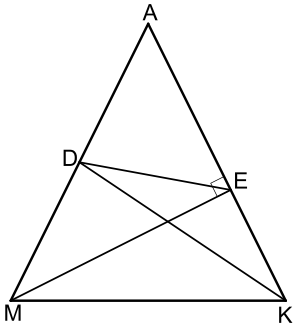
א. הוכח כי FE מקביל למיתר LM.

ב. נתון: AE = 6 ס"מ , KE = 7 ס"מ , KL = 2 ס"מ.

(1) חשב את היחס בין שטח המשולש AEK לשטח המשולש LEM.

(2) חשב את היחס בין שטח המשולש AEK לשטח המרובע AKLM.

5) במשולש שווה שוקיים AMK (AK=AM)
KD הוא תיכון לשוק AM,
ו-ME הוא גובה לשוק AK (ראה ציור).



א. הוכח כי $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA$.

נתון: $\sphericalangle MAK = 2\alpha$, $AM = 2b$.

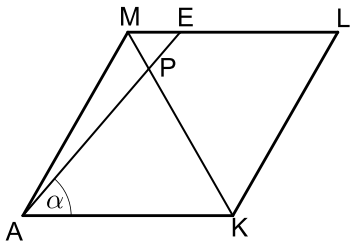
ב. הבע באמצעות b ו- α את שטח המשולש ADE.

ג. אם נתון גם כי $MK = 2 \cdot DE$:

(1) חשב את α.

(2) הוכח כי $DE \parallel MK$.

6) נתון מעוין AMLK.
נקודה E נמצאת על הצלע ML.
האלכסון KM חותך את הקטע AE בנקודה P
(ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle AML = 120°$, $\sphericalangle EAK = \alpha$,
אורך צלע המעוין הוא a.



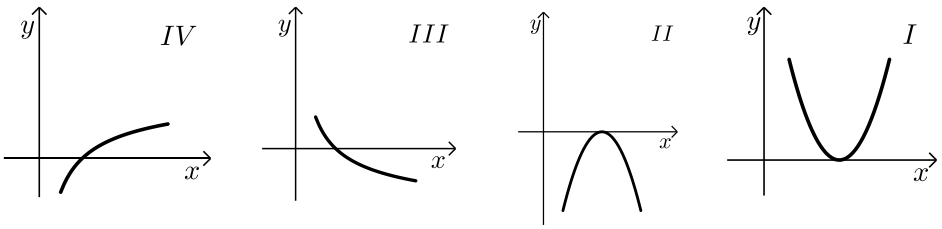
א. ענה על הסעיפים הבאים:
(1) מצא את גודל הזווית PKA. נמק.
(2) הבע באמצעות a ו- α את אורך הקטע PK.
ב. דרך הנקודה P העבירו אנך לצלע AK. האנך חותך את AK בנקודה G.
נתון גם כי $\alpha = 46°$.
הבע באמצעות a את אורך הקטע GL.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

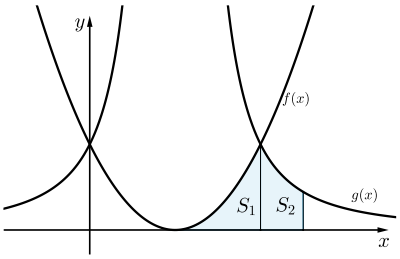
ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7) נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{4x} - 6x$.
א. ענה על הסעיפים הבאים:
(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. איזה גרף מבין הגרפים I , II , III , IV , עשוי לתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $1 \le x \le 10$? נמק.



8) בציור שלפניך מוצגים הגרפים של הפונקציות:



$$f(x)=(x-a)^2$$

$$g(x)=\frac{16}{(x-a)^2}$$

a הוא פרמטר גדול מ- 0.

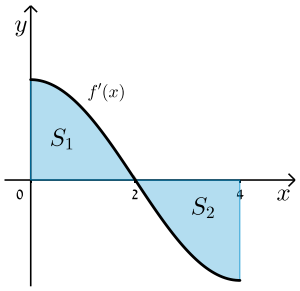
א. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $g(x)$ (הבע באמצעות a במידת הצורך).

אחת מנקודות החיתוך בין הגרפים של הפונקציות היא הנקודה שבה $x=a+2$. S_1 הוא השטח המוגבל על ידי הגרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישר $x=a+2$ (השטח המקווקו בציור).

S_2 הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים $x=a+2$ ו-$x=a+3$ (השטח האפור בציור).

ב. חשב את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

9) בציור מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$



בתחום $0\le x\le 4$. הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה-x בנקודה שבה $x=2$.

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי הצירים (השטח המקווקו בציור).

S_2 הוא השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישר $x=4$ (השטח האפור בציור).

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) נתון $f(0)=0$, $S_1=4$.

חשב את $f(2)$.

(2) נתון גם: $S_2=4$.

חשב את $f(4)$.

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגה. נמק.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

תשובות סופיות:

1) 2.742 מטר.

2) א. $(2,0)$ ב. $(6,12)$ ג. 6.32 .

3) א. (1) $\frac{2}{7}$ (2) $\frac{16}{21}$ ג. 1575.

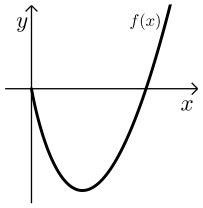
4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. (1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{4}{5}$.

5) א. הוכחה. ב. $0.5b^2\sin 4\alpha$ ג. (1) $30°$

6) א. (1) $60°$ (2) $\frac{a\sin\alpha}{\sin(120°-\alpha)}$ ב. $1.23a$.

7) א. (1) $x\geq 0$ (2) $(0,0)$, $(9,0)$ (3) $\max(0,0)$, $\min(4,-8)$

ב.

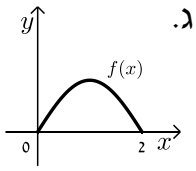


ג. גרף IV.

8) א. $x=a$, $y=0$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=1$.

9) א. (1) 4 (2) 0 ב. $\max(2,4)$

ג.



בגרות קיץ 2013 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

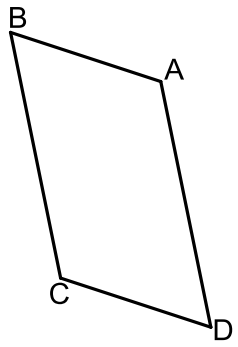
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) ראובן רוצה לרכוש מינוי למכון כושר. המחיר המלא של המינוי הוא 200 שקלים. אם ראובן יביא שני חברים שירכשו מינוי במחיר מלא, הוא יקבל על המינוי שלו הנחה של $x\%$ עבור החבר הראשון, ועבור החבר השני יקבל הנחה $x\%$ על המחיר שאחרי ההנחה הראשונה.
ראובן הביא שני חברים, ושילם עבור המינוי שלו רק 144.5 שקלים.

א. מצא את אחוז ההנחה שקיבל ראובן על המינוי שלו עבור החבר הראשון.

ב. מצא את אחוז ההנחה הכולל שקיבל ראובן על המינוי שלו לאחר שהביא את שני החברים.

2) נתונה מקבילית ABCD (ראה ציור).



הצלע AB מונחת על הישר $y=-\frac{1}{3}x+6$.

הצלע AD מונחת על הישר $y=-5x+20$.

אלכסוני המקבילית נפגשים בנקודה $(2,3)$.

א. מצא את השיעורים של קדקוד C.

ב. מצא את השיעורים של קדקוד B, ואת השיעורים של קדקוד D.

ג. האם הצלע BC משיקה בנקודה C למעגל שמרכזו A והרדיוס שלו הוא AC? נמק.

3) ידוע שההסתברות להצליח במבחן נהיגה (טסט) גדולה ב-0.2 מההסתברות להיכשל בו.

א. מהי ההסתברות להצליח במבחן הנהיגה?

ב. ראובן, שמעון, לוי ויהודה הם 4 אנשים שנבחרו באקראי מבין הנבחנים במבחן הנהיגה.

(1) מהי ההסתברות שבדיוק 2 מהם יצליחו במבחן הנהיגה?

(2) ידוע שרק 2 מהם הצליחו במבחן הנהיגה.
מהי ההסתברות שהיו אלה ראובן ושמעון?

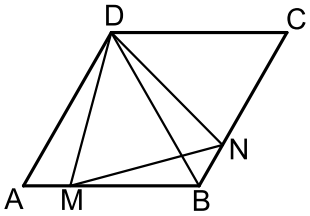
(3) האם ההסתברות שלפחות אחד מהארבעה יצליח במבחן הנהיגה גדולה מההסתברות שלפחות אחד מהארבעה ייכשל במבחן הנהיגה? נמק.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4) במעוין ABCD הזווית החדה היא של $60°$.



נקודה M נמצאת על צלע AB

נקודה N נמצאת על צלע BC

כך ש- $AM = BN$ (ראה ציור).

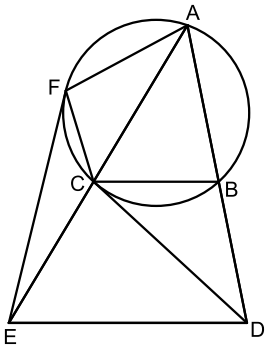
א. הוכח כי $\Delta MDB \cong \Delta NDC$.

ב. הוכח כי $\Delta ADM \cong \Delta BDN$.

ג. שטח המרובע DMBN הוא S.

הבע באמצעות S את שטח המעוין ABCD.

5) נתון משולש ADE.



דרך הקדקוד A העבירו מעגל החותך את הצלעות AD ו- AE בנקודות B ו- C בהתאמה (ראה ציור).

נתון: $BC \parallel DE$, DC משיק למעגל.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

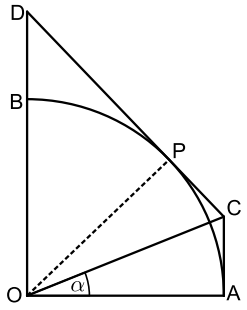
(1) הוכח כי $\sphericalangle EAD = \sphericalangle CDE$.

(2) הוכח כי $AE \cdot CE = DE^2$.

ב. דרך הקדקוד E העבירו ישר המשיק למעגל בנקודה F (ראה ציור).
הוכח כי $\Delta ECF \sim \Delta EFA$.

ג. היעזר בסעיפים הקודמים והוכח כי DE=EF.

6) נתון רבע מעגל OAB שרדיוסו R.
העבירו ישר המשיק לרבע המעגל בנקודה P,
והעבירו ישר המשיק לרבע המעגל בנקודה A.
המשיקים נפגשים בנקודה C.
המשיק בנקודה P חותך את המשך OB בנקודה D
(ראה ציור). נתון: $\sphericalangle COA = \alpha$.



א. הוכח כי $AC \parallel OD$.

ב. הבע באמצעות R ו- α את שטח המרובע ACDO.

ג. נתון כי שטח המשולש OPD הוא $\frac{R^2}{2}$.

חשב את α.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{9}{(x+1)^2} - 1$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

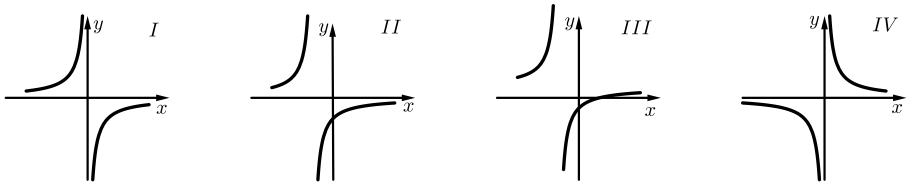
ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

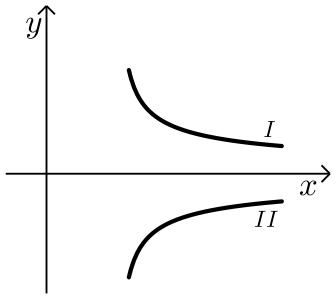
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. איזה מבין הגרפים I , II , III , IV שלפניך מציג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$? נמק.



8) הגרפים I ו-II שבציור הם של הפונקציות:

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x-3}} \quad , \quad g(x)=-\frac{2}{\sqrt{2x-3}} \quad .$$



א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות.

(2) מהי האסימפטוטה האנכית של כל אחת מהפונקציות?

ב. איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$,

ואיזה גרף הוא של הפונקציה $g(x)$? נמק.

ג. הישר $y=2$ חותך את הגרף I בנקודה A.

הישר $y=-2$ חותך את הגרף II בנקודה B.

מצא את השטח המוגבל על ידי הישר AB,

על ידי הגרפים של שתי הפונקציות ועל ידי הישר $x=3$.

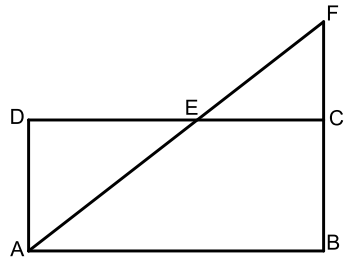
9) נתון מלבן ABCD שאורכי צלעותיו הם:

$AD = 4$, $AB = 9$.

הנקודה E נמצאת על הצלע CD (בין C ל- D).

ההמשך של AE חותך את המשך הצלע BC

בנקודה F (ראה ציור).



א. הוכח: $\Delta ADE \sim \Delta FCE$.

ב. סמן $DE = x$, ומצא מה צריך להיות האורך של DE כדי שסכום השטחים של המשולשים ADE ו- FCE יהיה מינימלי.

בתשובתך תוכל להשאיר שורש.

תשובות סופיות:

1) א. 15% ב. 27.75%.

2) א. $C(1,1)$ ב. $B(0,6)$, $D(4,0)$ ג. לא משיקה.

3) א. 0.6 ב. (1) 0.3456 (2) $\frac{1}{6}$ (3) כן.

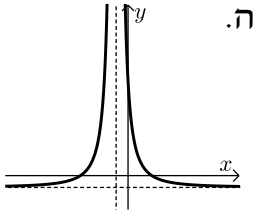
4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $2S$.

5) א. (1) הוכחה. (2) הוכחה. ב. הוכחה.

6) א. הוכחה. (2) $\frac{R^2\left(\tan\alpha+\frac{1}{\sin 2\alpha}\right)}{2}$ ג. $22.5°$.

7) א. $x\neq -1$ ב. $(-4,0)$, $(2,0)$, $(0,8)$ ג. $x=-1$, $y=-1$

ד. עליה: $x<-1$ ירידה: $x>-1$ ה.



ו. גרף II.

8) א. (1) $x>1.5$ (2) $x=1.5$ ב. $f(x):\text{I}$, $g(x):\text{II}$

ג. $4\sqrt{3}-4$.

9) א. הוכחה. ב. 6.36 .