

# כל שאלוני 5 יחידות

פרק 63

## שאלון 582 בגרות שנת 2020

1	.....	מועד חורף
5	.....	קיץ מועד א
9	.....	קיץ מועד ב

## בגרות חורף 2020:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ( $66\frac{2}{3}$  נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) הנקודה A נמצאת על האליפסה  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ברביע הראשון.

a ו-b הם פרמטרים חיוביים.

נתון:  $a > b$ , אורך הציר הגדול של האליפסה הוא  $F_1F_2$ .  $F_1$  ו- $F_2$  הם מוקדי האליפסה.

היקף המשולש  $F_1AF_2$  הוא 25 ושטחו 12.

א. מצא את משוואת האליפסה.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

דרך הנקודה A עוברת פרבולה שמשוואתה היא  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$  אינו שלם).

דרך הנקודה A העבירו משיק לפרבולה. המשיק חותך את ציר ה-x בנקודה L.

ג. מצא את שיעור ה-x של הנקודה L.

הפרבולה והאליפסה נחתכות בנקודה נוספת, B.

הנקודה D נמצאת על הישר AB.

ד. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל נקודות מפגשי

התיכונים במשולשים ALD.

(2) הישר  $\ell$  עובר דרך ראשית הצירים, O, ומאונך למישור  $\pi$ .

הנקודה  $P(-1, -1, 2)$  היא נקודת החיתוך של הישר  $\ell$  והמישור  $\pi$ .

א. מצא את משוואת המישור  $\pi$ .

OABCD היא פירמידה ישרה שבסיסה, ABCD, הוא מלבן הנמצא על המישור  $\pi$

(הנקודה O היא ראשית הצירים). הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של

המישור  $\pi$  עם ציר ה-x ועם ציר ה-y בהתאמה.

ב. (1) מצא את שיעורי הקודקודים A ו-B.

(2) מצא את שיעורי הקודקודים C ו-D.

ג. חשב את גודל הזווית בין הפאה הצדדית AOB בפירמידה OABCD ובין

בסיס הפירמידה.

הנקודות  $F(-4, -2, 0)$  ו- $G(-2, -4, 0)$  נמצאות על הקטע AB.

ד. (1) הראה כי  $|FG| = \frac{1}{3}|AB|$ .

(2) מצא שיעורים של שתי נקודות, H ו-I, כך שנפח הפירמידה OFGHI

הוא  $\frac{1}{3}$  מנפח הפירמידה OABCD. נמק את תשובתך.

(3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה  $z^3 = -1$  ( $z$  הוא מספר מרוכב). פרט את חישוביך.

$a_n$  היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא  $2i$ .

ב. הראה כי לכל  $n$  טבעי  $a_{n+4} = 16a_n$ .

הנקודות A, B, C ו-D במישור גאוס מייצגות את איברי הסדרה  $a_1, a_2, a_3$

ו- $a_4$  בהתאמה.  $a_1$  הוא אחד הפתרונות של המשוואה  $z^3 = -1$ .

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

ג. (1) סרטט סקיצה של המרובע ABCD.

(2) מצא את שטח המרובע ABCD.

ד. הנקודות A', B', C' ו-D' מייצגות את איברי הסדרה  $a_5, a_6, a_7$  ו- $a_8$

בהתאמה. מצא את היחס בין שטח המרובע A'B'C'D' ובין שטח

המרובע ABCD  $\left( \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} \right)$ . נמק.

### פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה,

#### פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות $\left( \frac{1}{33} \right)$ (נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{\frac{a}{x-1}} + c$

$a$  ו- $c$  הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

נתון: משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $f(x)$  היא  $y = 1$ ,

הפונקציה  $f(x)$  חותכת את ציר ה- $y$  בנקודות  $(0, e^{-4})$ .

- ב. מצא את הערך של  $c$  ואת הערך של  $a$ .
- ג. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).  
 (2) מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה)?  
 לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת פיתול יחידה בנקודה שבה  $x = -1$ .
- ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) לאילו ערכי  $k$  הישר  $y = k$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$ ? נמק.
- ה. העבירו משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודת הפיתול שלה.  
 המשיק עובר בראשית הצירים. הסבר מדוע השטח הנמצא ברביע השני ומוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- $y$  קטן מ- $\frac{1}{2}e^{-2}$ .

5 נתונה פונקציית הנגזרת של הפונקציה  $f(x) : f'(x) = \frac{\ln(-x)+2}{x}$ .

- לפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$  ו- $f''(x)$  יש אותו תחום הגדרה.
- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (3) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה  $\cup$  והקעירות כלפי מטה  $\cap$  של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. (1) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ ?
- (2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ .
- נתון:  $f(-e^{-2}) = 0$ .
- ג. (1) מצא ביטוי אלגברי לפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

תשובות סופיות:

(1) א.  $\frac{x^2}{42.25} + \frac{y^2}{6.25} = 1$  (אפשר גם:  $\frac{4x^2}{169} + \frac{4y^2}{25} = 1$ )

ב.  $A(3.9, 2)$  ג.  $x_L = -3.9$  ד.  $x = 1.3$

(2) א.  $x + y - 2z + 6 = 0$  ב.  $A(-6, 0, 0), B(0, -6, 0)$

ב. (2)  $C(4, -2, 4), D(-2, 4, 4)$  ג.  $35.26^\circ$

ד. (1) הוכחה ד. (2) למשל:  $H(2, 0, 4), I(0, 2, 4)$

(3) א.  $\text{cis}60^\circ, \text{cis}180^\circ, \text{cis}300^\circ$  (אפשר גם:  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ )

ב. הוכחה ג. (1) להלן סקיצה:

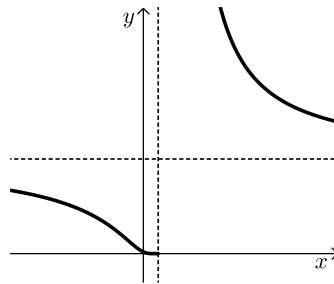
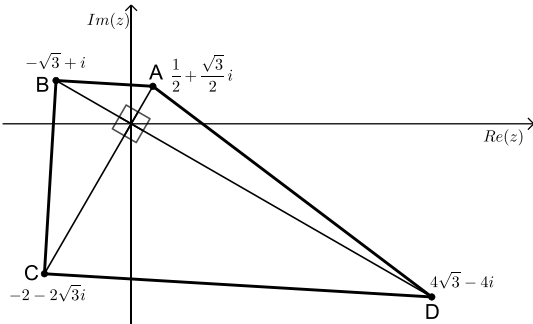
ג. (2) 25 ד. היחס הוא 256

(4) א.  $x \neq 1$  ב.  $a = 4, c = 0$

ג. (1) עלייה: אין, ירידה:  $x < 1, x > 1$

ג. (2) הפונקציה חיובית בכל ת.ה.

ד. (1) להלן סקיצה:



ד. (2)  $0 < k < 1, k > 1$

ה. הוכחה

(5) א. (1)  $x < 0$  א. (2) עלייה:  $-\frac{1}{e^2} < x < 0$ , ירידה:  $x < -\frac{1}{e^2}$

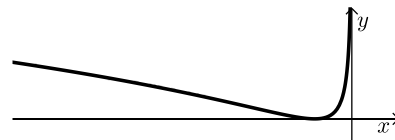
א. (3) הקעירות כלפי מעלה:  $-\frac{1}{e^2} < x < 0$ , קעירות כלפי מטה:  $x < -\frac{1}{e^2}$



ב. (1)  $x = 0, y = 0$  ב. (2) להלן סקיצה:

ג. (1)  $F(x) = \frac{\ln^2(-x)}{2} + 2\ln(-x) + 2$

ג. (2) להלן סקיצה:





(3)  $z_1$  ו- $z_2$  הם שני מספרים מרוכבים שונים.

נתון:  $z_2 = \cos \frac{7\alpha}{3} + i \sin \frac{7\alpha}{3}$ ,  $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$

הוא מספר ממשי.  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$

א. (1) מצא את  $\alpha$  ואת  $\frac{z_1}{z_2}$ .

(2) הראה כי  $z_1 \cdot z_2$  הוא מספר מדומה.

נתון:  $w = \frac{z_1}{z_2} + z_1 \cdot z_2$ .

ב. מצא את כל פתרונות המשוואה  $z^3 = w^6$ .

- ג. (1) האם הפתרונות שמצאת בסעיף ב יכולים להתאים לקודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס?  
אם כן, מצא את שיעוריהם של שאר קודקודי המשושה.  
(2) תן דוגמה למספר טבעי  $n > 6$  שבעבורו הפתרונות שמצאת בסעיף ב מהווים קודקודים של מצולע משוכלל בעל  $n$  קודקודים.

### פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

#### ולוגריתמיות ( $\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \ln((e^x - b)^2 + 1)$ ,  $b$  הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות  $b$ .

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ?

(2) נמק מדוע  $f(x) \geq 0$  בכל תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(3) מצא את המשוואה של האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $f(x)$ .

(4) קבע בעבור אילו ערכים של  $b$  יש לפונקציה  $f(x)$  נקודת קיצון,

ואם יש כזאת, מצא את שיעוריה, והראה שהיא נקודת מינימום.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  עבור  $b = 2$ .

- ב. מצא את כל הערכים של  $b$  שבעבורם הישר  $y = \ln 5$  הוא אסימפטוטה של הפונקציה  $f(x)$ . נמק.
- ג. נתון כי בעבור אחד מן הערכים של  $b$  שמצאת בסעיף ב, אין לפונקציה  $f(x)$  נקודות קיצון.  
בעבור הערך הזה של  $b$ , קבע אם הפונקציה  $f(x)$  עולה או יורדת. נמק.
- 5 נתונה הפונקציה  $f(x) = e^x(x-5)$ , המוגדרת לכל  $x$ .
- א. הראה כי:  $f'(x) = e^x(x-4)$  וכי  $f''(x) = e^x(x-3)$ .
- $f^{(n)}(x)$  היא נגזרת מסדר  $n$  של  $f(x)$  (למשל  $f^{(3)}(x) = f'''(x)$ ).  
נתונה החוקיות:  $f^{(n)}(x) = e^x(x-5+n)$  בעבור כל  $n$  טבעי.
- ב. מצא את  $f'''(x)$  והראה כי החוקיות הנתונה מתקיימת בעבורה.  
ענה על סעיף ג. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות  $n$ .
- ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f^{(n)}(x)$  עם הצירים.  
(2) מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $f^{(n)}(x)$ .  
(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f^{(n)}(x)$  (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
- (4) הראה כי הגרפים של הפונקציה  $f^{(m)}(x)$  ו- $f^{(k)}(x)$  אינם נחתכים בעבור שני מספרים טבעיים שונים  $m$  ו- $k$ .
- (5) סרטט על מערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של הפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$  ו- $f''(x)$  וכתוב איזה מן הגרפים מתאים לכל אחת מן הפונקציות.
- ד. הסתמך על החוקיות הנתונה ומצא לפונקציה  $f(x)$  פונקציה קדומה,  $F(x)$ , אם נתון כי הגרף של הפונקציה  $F(x)$  עובר בראשית הצירים.  
אמת את תשובתך על ידי גזירה.

**תשובות סופיות:**

א.  $y = -\frac{3}{4}x, y = 0$  (1)      ב.  $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 36$  (1)

א.  $(-1.6, 1.2), (2, 0)$  (2)      ג.  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$  (1)

א.  $\overline{AM} = \frac{5}{3}w + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$  (2)      ב.  $\alpha = \frac{1}{5}, \beta = \frac{1}{5}$  (1)

א. ג. (1) ראה הסבר בפתרון הוידאו.

ג.  $K(-3, 4, 7)$  (3)

א.  $\alpha = \frac{3\pi}{4}, \frac{z_1}{z_2} = \text{cis}(-\pi) = -1$  (1) (3)

א.  $2\text{cis}\frac{1}{6}\pi, 2\text{cis}\frac{5}{6}\pi, 2\text{cis}\frac{3}{2}\pi$  (1)      ג. (1)  $(0, 2), (-\sqrt{3}, -1), (\sqrt{3}, -1)$

ג.  $n = 9$  (2)

א.  $x$  כל (1)      א. (2) הוכחה (4)

א.  $b > 0, \min(\ln b, 0)$  (4)

ב.  $b = 2, b = -2$

ג. עבור  $b = -2$  אין נקודות קיצון

והפונקציה  $f(x)$  בכל תחום הגדרתה.

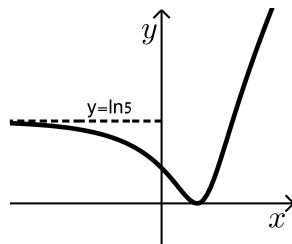
א. הוכחה. (5)

ב.  $f'''(x) = e^x(x-2)$

ג. (1)  $(0, n-5), (5-n, 0)$

ג. (3)  $\min(4-n, -e^{4-n})$

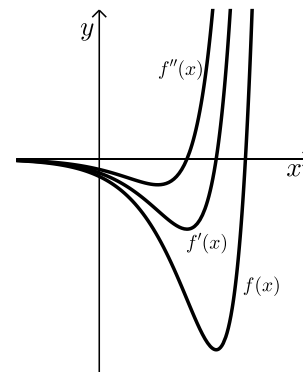
ג. (5) להלן סקיצה:



ג.  $y = 0$  (2)

ג. (4) הוכחה.

ד.  $F(x) = e^x(x-6) + 6$



## בגרות קיץ 2020 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ( $66\frac{2}{3}$  נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) הישר  $4x - 3y = 0$  משיק למעגל שמרכזו  $(5a, 0)$ .  $a$  הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את משוואת המעגל באמצעות  $a$ .

מנקודה  $G$ , הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר, המשיק למעגל בנקודה  $K$ .

ב. הבע באמצעות  $a$  את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות  $G$

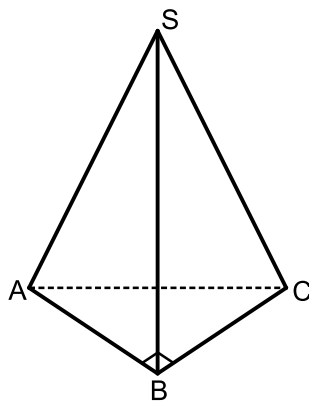
שבעבורן המרחק  $GK$  שווה למרחק שלהן מן הישר  $x = -3a$  וצייר

סקיצה שלו.

נתון: אורך הקטע  $GK$  הקצר ביותר האפשרי הוא 7.5.

ג. (1) מה הם שיעורי הנקודה  $G$  שבעבורה אורך הקטע  $GK$  הוא 7.5? נמק.

(2) מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ . נמק.



2) נתונים שני ישרים:

$$l_1: \underline{x} = (6, 10, -7) + k(3, 5, -4)$$

$$l_2: \underline{x} = (15, 0, 6) + t(9, 0, 13)$$

ונתון הווקטור:  $\underline{u} = (6, 0, -8)$ .

הנקודה  $A$  נמצאת על הישר  $l_1$  והנקודה  $C$

נמצאת על הישר  $l_2$  כך ש-  $\overline{AC} = \underline{u}$ .

א. מצא את שיעורי הנקודות  $A$  ו-  $C$ .

$SABC$  היא פירמידה ישרה שבסיסה  $ABC$ , הוא משולש ישר זווית ( $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ ).

הנקודה  $S$  נמצאת על הישר  $l_2$  והנקודה  $B$  נמצאת על הישר  $l_1$ .

ב. מצא את שיעורי הנקודה  $B$ .

ג. מצא את משוואת המישור  $ABC$ .

מן הנקודה  $C$  העלו אנך למישור  $ABC$ .

ד. חשב את הזווית שבין האנך ובין הישר  $l_2$ .

3)  $z$  הוא מספר מרוכב.

א. פתור את המשוואה  $z^5 = 2^5$ .

הנקודות  $A_1, A_2, \dots, A_n$  במישור גאוס מתאימות לפתרונות המשוואה  $z^n = 2^n$  ( $n \geq 3$  הוא מספר טבעי).

חיברו את הנקודות  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ויצרו מצולע משוכלל קמור. נתון כי שטח המצולע שהתקבל שווה ל- $n$ .

ב. מצא את  $n$ .

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור הערך של  $n$  שמצאת בסעיף ב.

$w = a + bi$  הוא פתרון של המשוואה  $z^n = 2^n$  כך ש- $a \cdot b > 0$  (כלומר:  $[\operatorname{Re}(w) \cdot \operatorname{Im}(w)] > 0$ ).

ג. באילו רביעים נמצאים פתרונות  $w$  כאלה?

ארבע הנקודות הנמצאות ברביעים שמצאת בסעיף ג הן קודקודיו של מלבן. אם מכפילים כל אחד מן המספרים המתאימים לארבע הנקודות הללו במספר  $z_0 = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ), מתקבל מלבן חדש, שצלעותיו מקבילות לצירים.

ד. מצא את הזווית  $\theta$ . נמק.

### פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

#### ולוגריתמיות ( $\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - ae^x + 3}$ ,  $a$  הוא פרמטר.

הפונקציה  $f(x)$  אינה מוגדרת בעבור  $x = 0$ .

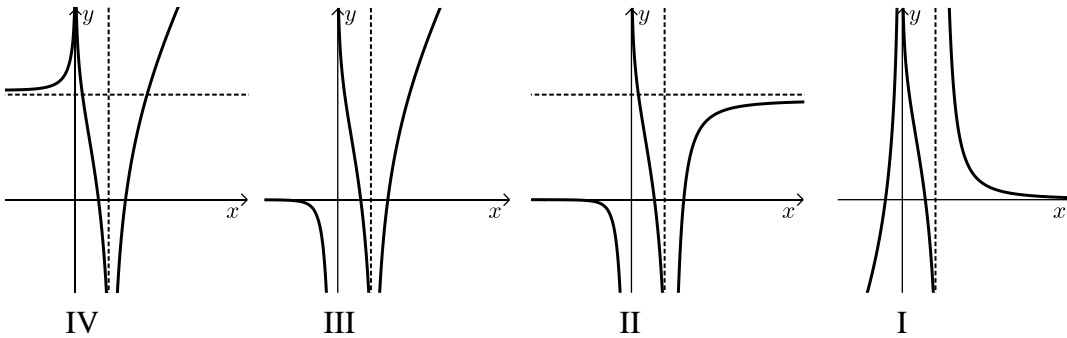
א. (1) מצא את  $a$  ואת תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה  $f(x)$ .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

- ג. אחד מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר פונקציה קדומה לפונקציה  $f(x)$ , המוגדרת בתחום ההגדרה של  $f(x)$ . איזה מהם מתאר אותה? נמק.
- ד. נתונה הפונקציה:  $h(x) = f(x+k)$ . עבור איזה ערך של  $k \neq 0$  יש לפונקציה  $h(x)$  אסימפטוטה שמשוואתה היא  $x=0$ ? נמק.



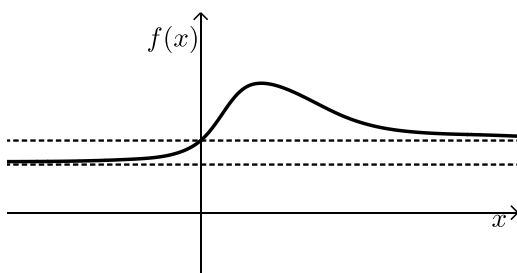
5 הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x) = \ln(f(x))$  מוגדרות וגזירות לכל  $x$ .

- א. הראה כי לפונקציה  $f(x)$  ולפונקציה  $\ln(f(x))$  יש נקודות קיצון באותם שיעורי  $x$  ושנקודות הקיצון הללו הן מאותו הסוג (מינימום/מקסימום).

בציור שלפניך מתואר גרף של פונקציה  $f(x)$ , כך ש- $f(x)$  ו- $g(x) = \ln(f(x))$  מוגדרות וגזירות לכל  $x$ . לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת קיצון יחידה ששיעוריה הם  $(1, 2)$ , ושתי אסימפטוטות:

אסימפטוטה שמשוואתה היא  $y=1$ ,

ואסימפטוטה נוספת שמשוואתה היא  $y = \frac{2}{3}$ .

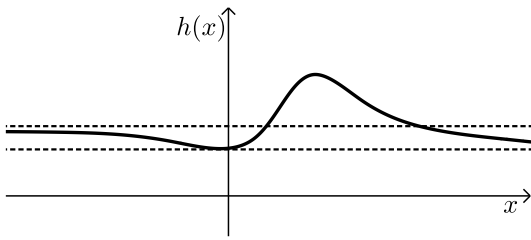


גרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את ציר ה- $y$

כאשר  $y=1$ .

ענה על סעיף ב בהסתמך על הגרף המתואר בציור.

- ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ ? נמק.  
 (2) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ ?  
 (3) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $g(x)$  המאונכות צירים?  
 (4) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה  $g(x)$ . נמק.  
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .



נגדיר:  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

לפניך סרטוט של גרף הפונקציה  $h(x)$ .

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון

של הפונקציה  $h(x)$ .

קבע את סוגן בעזרת הגרף.

(2) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על

גרף הפונקציה  $g(x)$  כך שהקטע AB מאונך לציר ה- $x$ .

מהו שיעור ה- $x$  שבעבורו אורך הקטע AB הוא 1? נמק.

### תשובות סופיות:

(1) א.  $(x-5a)^2 + y^2 = 16a^2$  ב.  $y^2 = 16ax$  ג. (1)  $G(0,0)$  ד.  $a = 2.5$

(2) א.  $A(0,0,1), C(6,0,-7)$  ב.  $B(3,5,-3)$  ג.  $4x+3z-3=0$  ד.  $18.43^\circ$

(3) א.  $2, 2\text{cis}72^\circ, 2\text{cis}144^\circ, 2\text{cis}216^\circ, 2\text{cis}288^\circ$  ב.  $n=12$

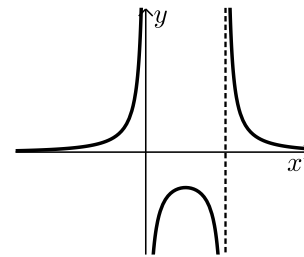
ג. רביעים I, III. ד.  $\theta = 45^\circ$

(4) א. (1)  $a=4$ , תחום הגדרה:  $x \neq 0, x \neq \ln 3$

א. (2)  $x=0, y=2, x=\ln 3, y=0$

א. (3) עולה:  $0 < x < \ln 1.5$ , יורדת:  $x < 0, x > \ln 3$

ב. להלן סקיצה: ג. גרף IV. ד.  $k = \ln 3$



(5) א. הוכחה. ב. (1) כל  $x$  ב. (2)  $\max(1, \ln 2)$

ב. (3)  $y=0, y=\ln \frac{2}{3}$  ב. (4) חיובית:  $x > 0$ , שלילית:  $x < 0$

ב. (5) להלן סקיצה: ג. (1)  $\max(1, 1.306)$ ,  $\min(0, 1)$  ג. (2)  $x=0$

