## פרק 68

# שאלון 582 בגרויות שנת 2015

מועד חורף ..... 1
קיץ מועד א ..... 4
קיץ מועד ב ..... 7

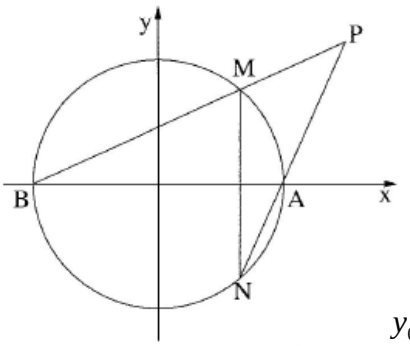
# בגרות חורף 2015:

## פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים (66$\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 33$\frac{1}{3}$ נקודות).

**שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.**

**1)** נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2=25$.
המעגל חותך את ציר ה-$x$ בנקודות A ו-B.
MN הוא מיתר במעגל, המאונך לציר ה-$x$.




א. הישרים MB ו- NA נפגשים בנקודה $P(x,y)$ כמתואר בציור (MN אינו מונח על ציר ה-$y$).

(1) נסמן: $M(x_0,y_0)$. הבע באמצעות $x_0$ ו-$y_0$ את משוואת הישר MB, ואת משוואת הישר NA.

(2) הראה כי המקום הגאומטרי של הנקודות $P(x,y)$, הנוצרות באופן שתואר, מקיים את המשוואה: $y^2=x^2-25$.

ב. אם המיתר MN מונח על ציר ה-$y$, מצא את רדיוס המעגל החסום במרובע MBNA.

הערה: הפתרון של סעיף ב אינו תלוי בפתרון של סעיף א.

**2)** נתון משולש שקדקודיו הם: $C(1,1,1)$, $B(-2,-5,-5)$, $A(-10,3,11)$.
גובה המשולש לצלע AB הוא CD.

א. מצא את השיעורים של הנקודה D.

ב. נתונה הנקודה $E(-1,5,-2)$.
מהי הזווית בין הישר CE:

(1) לישר AB?

(2) לישר BC?

(3) למישור ABC?

ג. חשב את הזווית בין הישר ED לבין המישור ABC. נמק.

**3)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה: $|z|i+2z=\sqrt{3}$, $z$ הוא מספר מרוכב.

ב. המספר המרוכב $z_1$ הוא הפתרון של המשוואה שבסעיף א.

$z_1$ הוא קדקוד הראש של משולש שווה-שוקיים, החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים. $z_2$ ו-$z_3$ הם שני הקדקודים האחרים של המשולש.

נתון: $z_2=1$. המספר המרוכב $w$ מקיים: $w=z_1\cdot z_2\cdot z_3$.

חשב את הסכום: $w+w^2+w^3+w^4+\cdots+w^{4n}$.

$n$ הוא מספר טבעי.

## פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

**שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.**

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}$ ונתונה הפונקציה $g(x)$.

המקיימת: $g(x)=f'(x)\cdot f(x)$, $g(2)=-\frac{3}{4}\ln 2$, $m$ הוא פרמטר.

ידוע כי הפונקציה $g(x)$ עולה לכל $x$.

מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הצירים (מצא ערך מספרי).

**5)** נתונה פונקציית הנגזרת: $f'(x)=\frac{\ln(-x)+2}{x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ וקבע את סוגה.

ג. מצא את שיעור ה-$x$ של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה. לפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ יש אותו תחום הגדרה.

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=-\frac{1}{f'(x)}$.

היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא:

(1) את תחום ההגדרה של $g(x)$.

(2) את השיעורים של נקודת הקיצון של $g(x)$, וקבע את סוגה.

## תשובות סופיות:

**1)** א. i. $\text{NA: } y=\frac{y}{5-x_0}x-\frac{5y_0}{5-x_0}$ , $\text{MB: } y=\frac{y_0}{x_0+5}x+\frac{5y_0}{x_0+5}$

א. ii. הוכחה ב. $\sqrt{12.5}=3.535$

**2)** א. $D(-4.5,-2.5,0)$ ב. i. $90°$ ב. ii. $90°$ ב. iii. $90°$

ג. $39.23°$

**3)** א. $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ב. 0

**4)** 3.0625

**5)** א. $x<0$ ב. $\min\left(-\frac{1}{e},-e\right)$ ג. $x_{\min}=-\frac{1}{e^2}$

ד. i. $x<0$ , $x\neq-\frac{1}{e^2}$ ד. ii. $\min\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$

# בגרות קיץ 2015 מועד א':

## פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

**שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.**

**1)** נתונה פרבולה המקיימת $y^2=2px$ , $p>0$ .
נקודה D נמצאת על הפרבולה ברביע הראשון במרחק 8 מציר ה-$x$ .

א. הבע באמצעות $p$ את המרחק של הנקודה D מן המדריך של הפרבולה.
מעבירים שני מעגלים:
מעגל ראשון שמרכזו בנקודה D ורדיוסו $p+4$ ,
מעגל שני שמרכזו במוקד F של הפרבולה.
המעגל השני משיק מבחוץ למעגל הראשון ומשיק גם לציר ה-$y$ .

ב. היעזר בסעיף א, ומצא את משוואת הפרבולה.

ג. נקודה K נמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת.
דרך הנקודה K העבירו משיק לפרבולה ואנך למשיק.
המשיק והאנך חותכים את ציר ה-$x$ בנקודות T ו-S בהתאמה.
המרחק בין הנקודה T לנקודה S הוא 16.
מצא את השיעורים של הנקודה K . (מצא את שתי האפשרויות.)
בתשובתך תוכל להשאיר שורש במידת הצורך.

**2)** נתון ישר $\ell$ שמשוואתו $\underline{x}=(1,2,-4)+t(1,-2,2)$ .
מישור $\pi$ מאונך לישר $\ell$ , וחותך את ציר ה-$x$ בנקודה A .
נקודה A נמצאת על הקרן החיובית של ציר ה-$x$ במרחק 8 מראשית הצירים O .
נקודות B ו-C הן נקודות החיתוך של המישור $\pi$ עם ציר ה-$y$ ועם ציר ה-$z$ בהתאמה.

א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את האורך של כל אחד משש המקצועות של הפירמידה OABC .
ii. האם הפירמידה OABC היא ישרה? נמק.

ב. נקודה D נמצאת על הקטע AC כך ש-OD חוצה-זווית AOC .
מהו המצב ההדדי בין הישר OD לישר BC ? נמק.

**3)** נתונה המשוואה $z^n = 8$ , $z$ הוא מספר מרוכב, $n > 2$.

א. הוכח כי $n$ הפתרונות של המשוואה הם קדקודים של מצולע משוכלל.
המספרים $z_0$ , $z_1$ , $z_2$ , $z_3$ הם ארבעה קדקודים עוקבים מבין $n$ הקדקודים של המצולע שבסעיף א (לפי סדר המספרים הרשום).
$z_0$ הוא מספר ממשי וחיובי. $z_i$ נמצא במישור גאוס ברביע הראשון.
נתון: $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\sqrt{8}\,i$.

ב. מצא את הערך של $n$.

## פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ( $33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

**שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.**

**4)** נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$ המוגדרת לכל $x$. $a$ הוא פרמטר גדול מ-0.

א. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע באמצעות $a$ (במידת הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ , וקבע את סוגן.

ii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ , על ידי ציר ה-$x$ ועל ידי הישרים $x = 1$ ו-$x = -1$ , אם נתון כי $a = 2$.

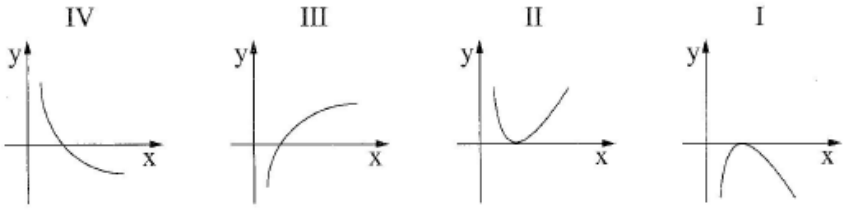
ד. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = \left[f(x)\right]^2$.
מצא את שיעורי ה-$x$ של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ , וקבע את סוגן.

**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=a\cdot x\cdot \ln x-x^2$ , $a$ הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ .

ב. הראה כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד,
והבע את שיעור ה-$x$ שלה באמצעות $a$ .

ג. איזה מבין הגרפים I , II , III , IV שלפניך מתאים לגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ ? נמק.




ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. אם שיפוע המשיק בנקודת הפיתול של $f(x)$ שווה ל-0, מצא את הערך של $a$ .

ii. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור הערך של $a$ שמצאת.

iii. האם עבור הערך של $a$ שמצאת, יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון? נמק.

ה. מצא עבור אילו ערכים של $a$ שיפוע המשיק בנקודת הפיתול של $f(x)$ גדול מ-0.

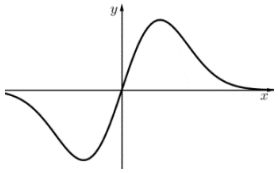
## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{32}{p}+\frac{p}{2}$ ב. $y^2=8x$ ג. $\left(6,\sqrt{48}\right)$ , $\left(6,-\sqrt{48}\right)$

**2)** א. (i). $AO=8$ , $BO=CO=4$ , $AB=AC=\sqrt{80}$ , $BC=\sqrt{32}$
א. (ii). הפרמידה אינה ישרה. ב. מצטלבים.

**3)** א. הוכחה. ב. $n=8$

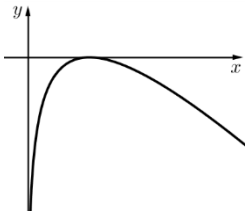
**4)** א. הוכחה. ב. (i). $\min\left(-2,\frac{-2a}{\sqrt{e}}\right)$ , $\max\left(2,\frac{2a}{\sqrt{e}}\right)$
ב. (ii). להלן סקיצה:




ג. 1.88 ד. $x_{max}=2$ , $x_{min}=0$ , $x_{max}=-2$

**5)** א. $x>0$ ב. $x=\frac{a}{2}$ ג. גרף IV.

ד. (i). $a=2$ ד. (ii). להלן סקיצה:




ד. (iii). לא. ה. $a>2$ .

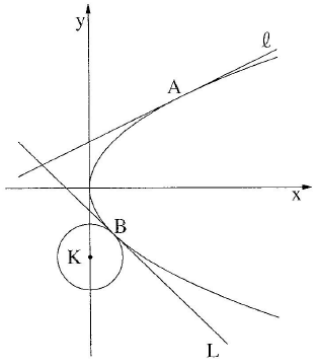
# בגרות קיץ 2015 מועד ב':

## פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

**שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.**

**1)** נתונה הפרבולה $y^2 = 4x$.




הישרים $\ell$ ו-L משיקים לפרבולה בנקודות A ו-B בהתאמה.
הנקודה A נמצאת ברביע הראשון והנקודה B נמצאת ברביע הרביעי, כמתואר בציור.
המשיקים נפגשים בנקודה $(-2,1)$.

א. מצא את השיעורים של הנקודה A, ואת השיעורים של הנקודה B.

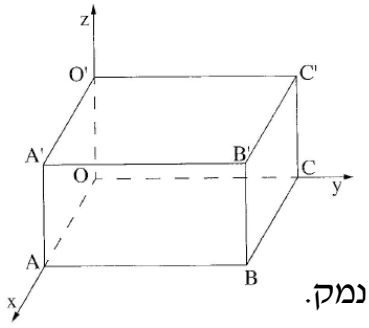
ב. הפרבולה משיקה בנקודה B למעגל שמרכזו K ונמצא על ציר ה- $y$ (ראה ציור).
מעגל שמרכזו M משיק לציר ה- $y$ בראשית הצירים ומשיק מבחוץ למעגל שמרכזו K. המרכז M נמצא משמאל לציר ה- $y$.

i. מצא את השיעורים של המרכז K.

ii. מצא את משוואת המעגל שמרכזו M.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

**2)** המקצועות OA, OC ו- OO′ של התיבה OABCO′A′B′C′ מונחים על הצירים כמתואר בציור.




נתון כי המישור $2x + y + 2z - 2m = 0$
עובר דרך הקדקודים A, C, O′. $m$ הוא פרמטר גדול מ- 0.

א. האם הישר BC′ מקביל למישור הנתון או חותך אותו? נמק.

ב. הישר O′M נמצא במישור הנתון, ואינו מתלכד עם הישר O′A.

i. האם הישרים BC′ ו- O′M מקבילים? נמק.

ii. הבע באמצעות $m$ את המרחק בין הישרים BC′ ו- O′M.

דרך הקדקודים C′ ו- B העבירו אנכים למישור ACO′.
האנכים חותכים את המישור בנקודות E ו- F. אורך הקטע EF הוא $2\sqrt{2}$.

ג. מצא את הערך של $m$.

**3)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. סרטט במערכת צירים את המקום הגאומטרי המקיים: $\left|z^2-3i\right|=\left|z^2-i\right|$.

$z$ הוא מספר מרוכב.

ב. שני מספרים מרוכבים שונים, $z_1$ ו- $z_2$, נמצאים על המקום הגיאומטרי שסרטטת.

המרחק של $z_1$ מראשית הצירים שווה למרחק של $z_2$ מהראשית.

נתון: $z_1=1+iy_1$ ($y_1$ הוא מספר ממשי). מצא את הארגומנט של $z_2$.

## פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

**שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.**

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\ln\frac{a+x}{a-x}$. $a$ הוא פרמטר גדול מ- 0.

א. מצא (הבע באמצעות $a$ במידת הצורך):

i. את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ii. את שתי האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- $x$.

iii. את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

iv. את השיעורים של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. הישר $y=x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה.

לפונקציה $f(x)$ ולפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש אותו תחום הגדרה.

סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ציין בגרף את הערכים המספריים של האסימפטוטות ושל נקודות החיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).

**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=-\frac{4e^x}{e^x-2}+e^x+4$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ii. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

iv. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר $x=-1$, על ידי ציר ה-$x$ ועל ידי ציר ה-$y$.

ג. נתונה פונקציה המקיימת $F(x)=\int f(x)dx$ בתחום $x>\ln 2$.

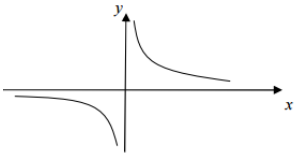
מצא את שיעורי ה-$x$ של נקודות הקיצון של הפונקציה $F(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $A(4,4)$ , $B(1,-2)$ ב. (i). $K(0,-3)$ ב. (ii). $(x+2.47)^2+y^2=6.125$

**2)** א. מקביל. ב. (i). מצטלבים. ב. (ii). $\frac{2m}{3}$ ג. 2

**3)** א. להלן סקיצה:

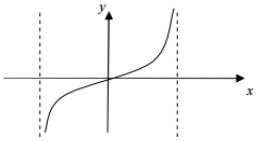



ב. 225°

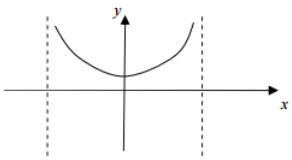
**4)** א. (i). $-a<x<a$ א. (ii). $x=-a$ , $x=a$

א. (iii). עלייה: $-a<x<a$ , ירידה: אין. א. iv. $(0,0)$

ב. להלן סקיצה:




ג. להלן סקיצה:




**5)** א. (i). $x\neq 0.693$ א. (ii). $y=4$ (עבור $x\to-\infty$), $x=0.693$

א. (iii). עלייה: $x>0.693$ , $x<0.693$ , ירידה: אין.

א. (iv). $(0,9)$ , $(1.386,0)$ א. (v). להלן סקיצה:

ב. 6.59 ג. $x_{min}=1.386$

