פרק 69

שאלון 582 בגרויות שנת 2014

מועד חורף 1
קיץ מועד א 4
קיץ מועד ב 7
קיץ מועד ג 10

בגרות חורף 2014:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) הנקודות $C(x_1,y_1)$ ו- $D(x_2,y_2)$ נמצאות ברביע הראשון על פי הפרבולה $y^2=4x$.

א. (1) הראה כי שיפוע המיתר CD הוא $m=\frac{4}{y_2+y_1}$.

(2) הנקודה $(x,3)$ היא אמצע המיתר CD. מצא את m.

ב. נתון כי מרחק כל נקודה על הפרבולה הנתונה מהישר $x=a$ שווה למרחקה מהנקודה $(1,0)$. מרחק הנקודה C מהישר $x=2a$ הוא 6.

(1) מהו הערך של a? נמק.

(2) מצא את משוואת הישר CD.

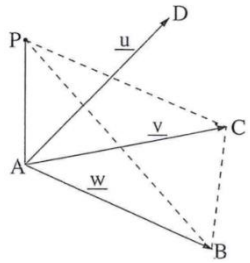
2) נתונים הווקטורים: $\overrightarrow{AD}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{w}$ (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC=\sphericalangle DAC=60°$, $\sphericalangle DAB=90°$, $|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|=2$.

א. האם ייתכן ששלושת הווקטורים $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ נמצאים במישור אחד? נמק.

נתון גם כי הווקטור $\overrightarrow{AP}=a\underline{u}+b\underline{v}+\underline{w}$

מאונך למישור ABC, a ו- b הם פרמטרים (ראה ציור).



ב. מצא את האורך של $\overrightarrow{AP}$ (ערך מספרי).

ג. היעזר בחישובים טריגונומטריים ומצא את הזווית בין המישור PCB ובין המישור ABC.

3) המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z מקיים $|z-12-5i|=7$.

המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים $w+x+iy$ מקיים: $\arg(w)=45°$.

($\arg(w)$ היא הזווית בהצגה הקוטבית של w). המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים w חותך את המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z בנקודות B ו- C.

א. סרטט באותה מערכת צירים סקיצות של שני המקומות הגיאומטריים.

ב. הנקודות B ו- C מייצגות במישור גאוס של המספרים המרוכבים z_1 ו- z_2 בהתאימה. מצא את $\arg(z_1\cdot z_2)$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=2e^{\sqrt{x}}$.

א. מצא:

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $y=2\cdot f'(x)$, והראה כי נקודה זו נמצאת על גרף הפונקציה $y=f(x^2)$, $x>0$.

ג. הפונקציות $y=2\cdot f'(x)$ ו- $y=f(x^2)$ נפגשות בנקודה אחת בלבד (הנקודה שמצאת בסעיף ב).

ד. השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי פונקציות אלה ועל ידי הישר $x=a$, $a>1$, שווה ל- $8e-2\cdot f(a)$. מצא את הערך של a.

תוכל להשאיר $\ln$ בתשובתך.

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. קבלן מציע דירות למכירה בתשלומים חודשיים. בתאריך 1/1/2012 התשלום החודשי עבור הדירה היה 5900 ₪, ובכל חודש התשלום גדל ב 0.2%. המשכורת החודשית של רן בתאריך 1/1/2012 הייתה 8000 ₪, ובכל חודש היא גדלה ב- 1.2%. רן יכול להתחיל לשלם עבור הדירה רק אחרי התאריך שבו התשלום החודשי עבור הדירה יהיה 60% ממשכורתו החודשית. כעבור כמה חודשים שלמים מהתאריך 1/1/2012 יוכל רן להתחיל לשלם עבור הדירה?

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=x^n\cdot\ln(x^n)$. הפרמטר n הוא מספר טבעי וזוגי.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) קבע אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית. נמק.

(3) הראה כי יש רק ישר אחד המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ ומקביל לציר ה- x, ומצא את משוואתו.

<u>הערה</u>: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

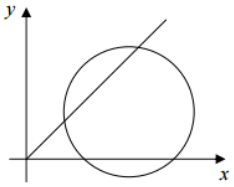
תשובות סופיות:

1) א. i. הוכחה א. ii. $\frac{2}{3}$ ב. i. **-1** ב. ii. $CD: y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

2) א. לא ייתכן ששלושת הווקטורים נמצאים במישור אחד.

ב. 4.899 ג. $70.53°$

3) א. סקיצה בצד. ב. $90°$



4) א. i. $x\geq 0$ א. ii. עלייה: $x>1$, ירידה: $0<x<1$

ב. $(1,2e)$ והוכחה ג. 2.0986

5) א. 21 חודשים ב. i. $x\neq 0$ ב. ii. זוגית

ב. iii. $y=-\frac{1}{e}$.

בגרות קיץ 2014 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

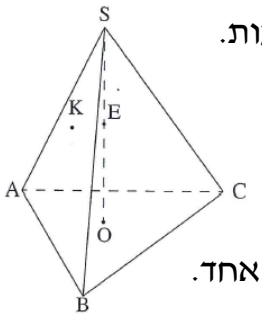
1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את המשוואה של המקום הגאומטרי של הנקודות, שהמרחק של כל אחת מהן מהישר $-5x+12y+13=0$ הוא 3.

ב. מהי משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים בשתי נקודות למקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א?

ג. האם ציר ה-y יכול להשיק בנקודה $(0,0)$ לאחד המעגלים שבסעיף ב? נמק.

2) נתונה פירמידה ישרה SABC, שבסיסה ABC הוא משולש שווה-צלעות. גובה הפירמידה הוא SO. נקודה E היא אמצע SO (ראה ציור).



נקודה F מקיימת: $\overrightarrow{SF}=t\cdot\overrightarrow{SC}$. נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{OS}=\underline{w}$.

נקודה K מקיימת: $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{9}\underline{u}-\frac{2}{9}\underline{v}-\frac{2}{3}\underline{w}$.

מצא את הערך של t, אם ידוע שהנקודות F, K ו-E נמצאות על ישר אחד.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. סרטט במישור גאוס סקיצה של המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z המקיימים: $\left|z+3-\sqrt{3}i\right|=\sqrt{3}$. נמק.

ב. המקום הגאומטרי שבסעיף א נפגש עם ציר ה-x בנקודה z_1.

נתונה הנקודה $M\left(-3,\sqrt{3}\right)$. נסמן ב-O את ראשית הצירים.

המספר המרוכב z_2 נמצא על המקום הגאומטרי שבסעיף א כך שהמרובע Oz_2Mz_1 הוא דלתון. מצא את הזווית החדה של הדלתון.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את הארגומנט של z_2.

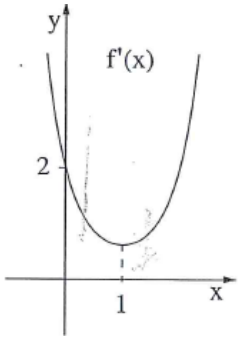
ii. מבין המספרים המרוכבים z שבסעיף א, מהו המספר שיש לו הארגומנט הגדול ביותר? מהו ארגומנט זה?

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת לכל x.



א. על פי הגרף של $f'(x)$ מצא תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x. נמק.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה-y בחלקו השלילי.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון גם: $f(x)=(x-a)e^{0.5x^2-x}$, a הוא פרמטר.

היעזר בנתונים בגרף של $f'(x)$ וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\log_4\left(x^2+4x+c\right)$, c הוא פרמטר.

נתון כי לפונקציה יש אסימפטוטה שמשוואתה $x=-2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את ערך הפרמטר c.

ii. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

iv. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. נתונה הפונקציה $g(x)=-|f(x)|$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

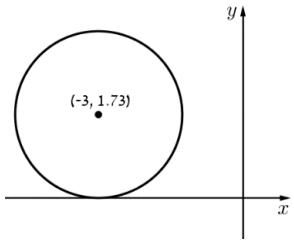
ii. עבור אילו ערכים של k יש למשוואה $g(x)=k$ שני פתרונות בלבד?

תשובות סופיות:

1) א. $-5x+12y-26=0$, $-5x+12y+52=0$ ב. $-5x+12y+13=0$ ג. לא.

2) $t=\frac{1}{3}$.

3) א. להלן סקיצה:

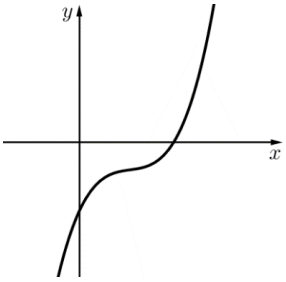


ב. $60°$ ג. (i). $120°$

ג. (ii). $z=-3$, הארגומנט - $180°$.

4) א. קעירות כלפי מעלה- $x>1$, כלפי מטה- $x<1$.

ב. להלן סקיצה:

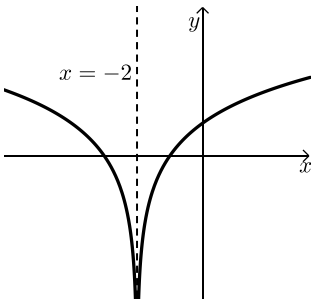


ג. $1-\frac{1}{\sqrt{e}}$.

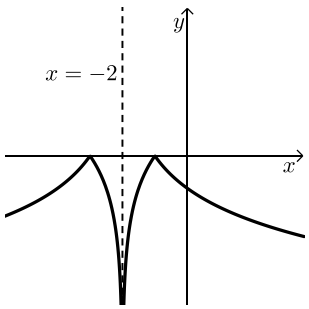
5) א. (i). $c=4$ א. (ii). $x\neq -2$

א. (iii). עלייה: $x>-2$, ירידה: $x<-2$ א. (iv). $(-3,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$

א. (v). להלן סקיצה:



ב. (i). להלן סקיצה:



ב. (ii). $k=0$.

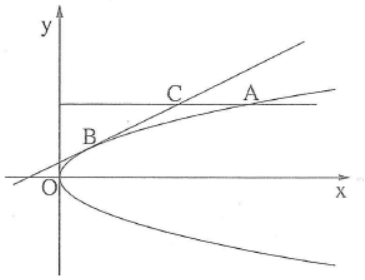
בגרות קיץ 2014 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נקודה A נמצאת ברביע הראשון על הפרבולה שמשוואתה $y^2=3x$.



ישר המשיק לפרבולה בנקודה B מקביל למיתר OA (O – ראשית הצירים).
דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה-x.
הישר חותך את המשיק בנקודה C.
נסמן: x_C - שיעור ה-x של הנקודה C.
x_A - שיעור ה-x של הנקודה A.
היעזר בעובדה שהנקודה C נמצאת על פרבולה שמשוואתה $y^2=4x$, וענה על הסעיפים א, ב ו-ג.

א. הבע באמצעות x_C את x_A.

ב. הבע באמצעות x_C את השיפוע של הישר OA.

ג. נתון גם כי שטח המשולש BCA הוא 0.5625.
מצא את השיעורים של הנקודה C.

2) במשולש ABC, גובה המשולש לצלע AB הוא CD. נסמן: $\overrightarrow{CA}=\underline{u}$, $\overrightarrow{CB}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AD}=t\cdot\overrightarrow{AB}$.
נתון: $\cos\sphericalangle ACB=\frac{3}{4}$, $\left|\overrightarrow{CA}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{CB}\right|=2$.

א. חשב את הערך של t בעזרת חשבון וקטורים.

ב. סרטט את המשולש ABC ואת הגובה CD כך שהסרטוט יתאים לערך של t שחישבת בסעיף א.

ג. נקודה E נמצאת על הצלע BC (בין B ל-C).
נתון גם: $\frac{CE}{BE}=\frac{3}{5}$. נסמן: $\overrightarrow{CD}=\underline{h}$.
הבע את $\overrightarrow{AE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו-$\underline{h}$ בלבד.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה: $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$, z הוא מספר מרוכב.

ב. האם שלושה מן הפתרונות שמצאת בסעיף א נמצאים על המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים w השונים מ-0 ומקיימים: $107°<\arg(w)<253°$? נמק.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

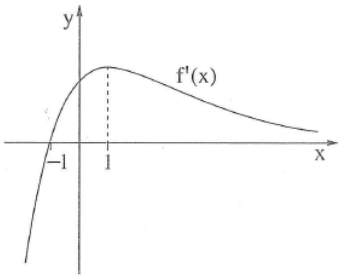
4) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{-2(x+3)}{\sqrt{e^{ax}}}$, a הוא פרמטר.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ii. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



היעזר בנתונים הרשומים בגרף, ומצא:

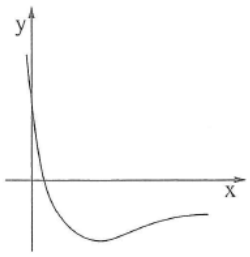
i. ערך מספרי עבור שיעור ה-x וערך מספרי עבור שיעור ה-y של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ii. ערך מספרי עבור שיעור ה-x וערך מספרי עבור שיעור ה-y של נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

iii. את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{3-9\ln(3x+1)}{3x+1}$ (ראה ציור).



א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

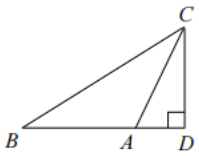
ii. השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה,של ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים $x=\dfrac{e-1}{3}$ ו-$x=a$ הוא 3.5. נתון כי $a>\dfrac{e-1}{3}$. היעזר בנגזרת של $y=\ln^2(3x+1)$, ומצא את a.

iii. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד בנקודה שבה $x=\dfrac{e^{4/3}-1}{3}$. מצא עבור אילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ שלילית וגם פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית.

תשובות סופיות:

1) א. $x_A=\dfrac{4}{3}x_C$ ב. $1.5\cdot\dfrac{\sqrt{x_C}}{x_C}$ ג. $C(2.25,3)$

2) א. $t=-0.25$ ב. להלן סקיצה:



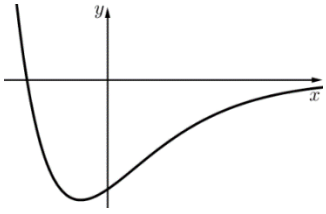
ג. $\overrightarrow{AE}=0.875\underline{u}-1.5\underline{h}$

3) א. -2 , $-0.2-0.6i$, 0 , $-0.2+0.6i$ ב. כן.

4) א. (i). כל x. (ii). $(0,-6)$, $(-3,0)$ ב. (i). $\min(-1,-6.59)$

ב. (ii). $(1,-4.85)$ (iii). קעורה מעלה: $x<1$, קעורה מטה: $x>1$.

ג. להלן סקיצה:



5) א. $x>-\dfrac{1}{3}$ ב. (i). $(0.132,0)$

ב. (ii). $a=2.13$ ג. $0.132<x<0.93$.

בגרות קיץ 2014 מועד ג':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-16}=1$, a הוא פרמטר חיובי שונה מ-4.

א. מצא עבור אילו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה.

אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-16}=1$ חותכת את הקרן השלילית של ציר ה- y בנקודה A.

F_1 הוא המוקד הימני של האליפסה, ו- F_2 הוא המוקד השמאלי.

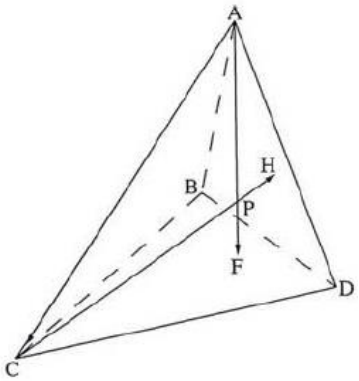
הישר AF_1 יוצר עם הקרן החיובית של ציר ה- x זווית של $26.566°$.

ב. מצא את משוואת האליפסה.

ג. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של נקודות הנמצאות במרחקים שווים מהמוקד F_1 ומן הישר שעובר דרך המוקד F_2 ומקביל לציר ה- y . נמק.

2) בפירמידה משולשת ABCD, AF הוא גובה הפירמידה לפאה BDC, ו-CH הוא גובה הפירמידה לפאה ABD.

הישרים AF ו-CH נפגשים בנקודה P (ראה ציור).



א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הסבר מדוע $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

ii. הוכח כי $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$.

ב. הוכח כי $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BD}$.

ג. סמן $\overrightarrow{BD}=\underline{u}$, $\overrightarrow{BC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{BA}=\underline{w}$.

הוכח כי אם: $AB=BC$ אז: $\sphericalangle CBD=\sphericalangle ABD$.

3) נתון המספר המרוכב $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, ונתון מספר מרוכב w שהערך המוחלט שלו הוא: r $(r>0)$. z ו- w נמצאים ברביע הראשון.

המספר z מקיים: $z=\frac{w}{\overline{w}}$.

א. הבע באמצעות α ו- r את המספר w, את הצמוד שלו $\overline{w}$, ואת ההופכי שלו $\frac{1}{w}$.

ב. סרטט במערכת צירים את מעגל היחידה, והוסף לסרטוט דוגמה של מספר w ושל ההופכי שלו $\frac{1}{w}$, עבור $r>1$.

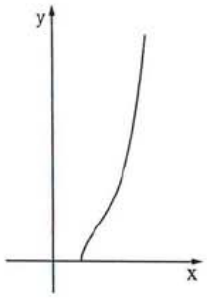
ג. נתונה סדרה הנדסית a_n שבה $a_1=\frac{1}{w}$, $a_2=z$.
הבע באמצעות α ו- r את a_5.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{2x-1}\cdot e^{x^2-x}$ (ראה ציור).



א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה עולה לכל x בתחום ההגדרה שלה.

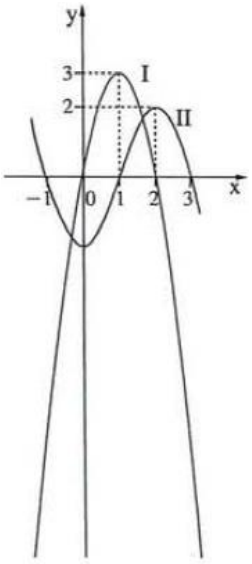
ג. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.
הישר נפגש עם גרף הפונקציה בשתי נקודות בלבד.

i. מצא את משוואת המשיק.

ii. העתק למחברתך את גרף הפונקציה, והוסף לגרף סרטוט של המשיק.

iii. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה ועל ידי המשיק מסתובב סביב ציר ה- x.
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

5) בציור שלפניך מוצגים שני גרפים, I ו- II של פונקציות המוגדרות בתחום $-1.1 \le x \le 3.1$. אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$ והאחר הוא של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



א. קבע איזה מבין הגרפים I ו- II הוא של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\ln\big(f(x)\big)$.

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ii. מה הן האסימפטוטות של $g(x)$ המאונכות לציר ה-x?

iii. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון הפנימיות של $g(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

iv. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם נתון כי הישר $y=1$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשלוש נקודות.

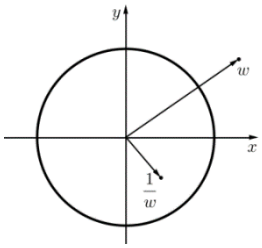
תשובות סופיות:

1) א. $a>4$ ב. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$ ג. $y^2=16x$

2) א. (i). הסבר. א. (ii). הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

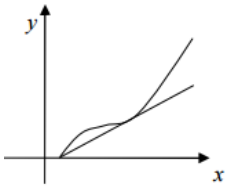
3) א. $w=0.5\alpha$, $\bar{w}=r\,\mathrm{cis}(-0.5\alpha)$, $\frac{1}{w}=\frac{1}{r}\mathrm{cis}(-0.5\alpha)$

ב. להלן סקיצה:



ג. $a_5=r^3cis(5.5\alpha)$.

4) א. $x\ge 0.5$ ב. הוכחה. ג. (i). $y=2x-1$ ג. (ii). להלן סקיצה:



5) א. גרף II ב. (i). $-1.1\le x\le -1$, $1<x<3$

ב. (ii). $x=3$, $x=1$, $x=-1$ ב. (iii). $\max(2,\ln 2)$

ב. (iv). עלייה: $1<x<2$, ירידה: $2<x<3$, $-1.1<x<-1$.

ב. (v). להלן סקיצה:

