כל שאלוני 5 יחידות לתוכנית החדשה

פרק 59

שאלון 571 - בגרויות שנת 2024

מועד חורף 1
קיץ מועד א 9
קיץ מועד ב 17

בגרות חורף 2024:

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

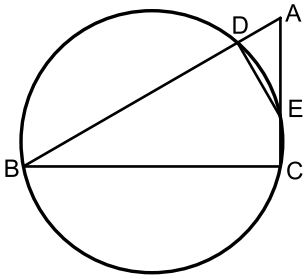
פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת שלכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$48+144+288+\ldots+6n(n+2)=n(n+2)(n+4)$$

ב. המרובע BCED חסום במעגל.
המשך המיתר BD והמשך המיתר CE נפגשים בנקודה A (ראו סרטוט).



נתון: $AE=2CE$, $AD=CE$.

(1) הוכיחו: $\Delta AED\sim\Delta ABC$.

(2) מצאו את היחס: $\frac{AB}{AC}$.

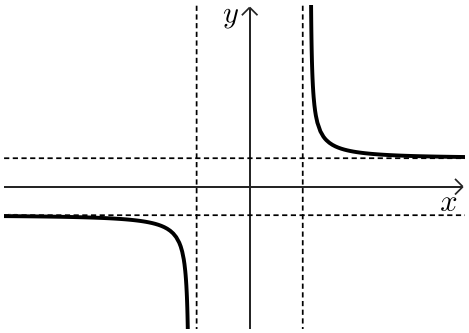
(3) נתון: $\sphericalangle DEC=150°$.

האם BE הוא קוטר במעגל הנתון? נמקו את תשובתכם.

ג. לפניכם סרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$.

לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x ושתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y.

אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $f(x)$.



I. $\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$

II. $\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$

III. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}$

IV. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}$

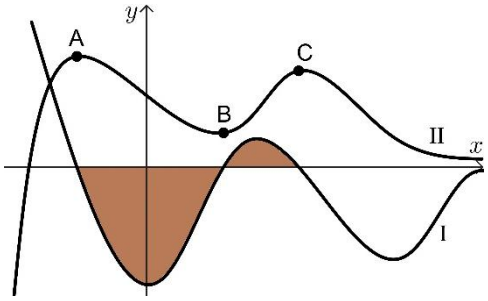
(1) קבעו איזה מן הביטויים I-IV מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x)$, המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת: $g'(x)=f(x)+\frac{5}{3}$.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ד. הגרפים I-II בסרטוט שלפניכם מתארים את הפונקציה $f(x)$
ואת פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
כל נקודות הקיצון של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$ מתוארות בסרטוט.



(1) קבעו איזה גרף, I או II, מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.

הנקודות A, B ו-C הן נקודות הקיצון של גרף II, כמתואר בסרטוט.
נתון: $y_A = 6$, $y_B = 2$.
השטח המוגבל על ידי גרף I ועל ידי ציר ה- x (השטח המסומן באיור) שווה ל-7.

(3) מצאו את שיעור ה- y של הנקודה C.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) בסדרה חשבונית A נתון: $a_1 = -4-4k$, $a_3 = -16+2k$. k הוא פרמטר.

א. מצאו עבור אילו ערכים של k:

(1) הסדרה A עולה.

(2) הסדרה A יורדת.

(3) הסדרה A קבועה.

נתון כי: $a_{17} = -232$.

ב. מצאו את הערך של k.

הציבו את הערך של k שמצאתם וענו על הסעיפים ג-ד.

נתונה סדרה חדשה, B, שאיבריה מוגדרים כך: לכל n טבעי, $b_n = a_n + 24n + 17$.

ג. הוכיחו כי הסדרה B היא חשבונית.

חשבו את הסכום: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \ldots + b_{29}^2 - b_{30}^2$.

www.bagrut.co.il

3) ביישוב מסוים הוחלט לערוך סקר בנוגע להקמת פארק ביישוב.
בסקר השתתפו תושבים מבוגרים וצעירים בלבד.
כל אחד מן התושבים שהשתתף בסקר כתב אם הוא תומך בהקמת פארק או מתנגד להקמתו (לא היו נמנעים).
כל התושבים המבוגרים שהשתתפו תמכו בהקמת הפארק.
בחרו באקראי בתושב אחד מבין התושבים שהשתתפו בסקר.
נסמן ב- p את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר.
נסמן ב- k את ההסתברות שהתושב שנבחר תמך בהקמת הפארק.

א. הביעו באמצעות p ו- k את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר התומך בהקמת הפארק.

מחצית מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק.
$\frac{3}{7}$ מן המשתתפים בסקר שתמכו בהקמת הפארק היו צעירים.

ב. מצאו את p ואת k.

יוסי, כתב חדשות מקומי, ראיין באקראי 6 מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר.

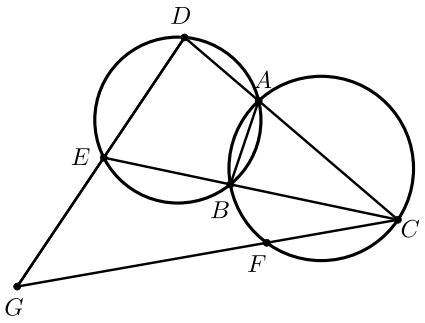
ג. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם תמך בהקמת הפארק ולפחות אחד מהם התנגד להקמת הפארק?

לאחר מכן ראיין יוסי באקראי, בזה אחר זה, 5 תושבים שהשתתפו בסקר.

ד. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן המרואיינים האלה היו צעירים, ושהמרואיין האחרון היה צעיר?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B.



C היא נקודה על המעגל הימני.

המשכי הקטעים CA ו-CB חותכים את המעגל השמאלי בנקודות D ו-E בהתאמה.

הנקודה F נמצאת על הקשת BC, כמתואר בסרטוט.

המשכי הקטעים CF ו-DE נפגשים בנקודה G.

א. הוכיחו: $\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$.

ב. הוכיחו: המרובע GDAF הוא בר חסימה במעגל.

המיתרים AF ו-BC נפגשים בנקודה H.

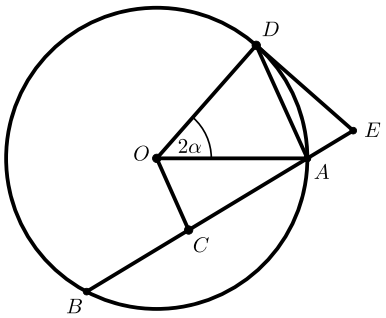
נתון: $\sphericalangle GEC = \sphericalangle CHA$.

ג. הוכיחו: $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$.

נתון: CE מאונך ל-AB, $DE = 18$, $CD = 36$.

ד. חשבו את אורכי הקטעים EG ו-CG.

5) נתון מעגל שמרכזו O והרדיוס שלו R. מנקודה E, הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר החותך את המעגל בנקודות A ו-B, כמתואר בסרטוט.



הנקודה D נמצאת על הקשת הגדולה AB, כך שהקטע ED משיק למעגל. הנקודה C היא אמצע המיתר AB.

נסמן את הזווית בין הרדיוסים OD ו-OA ב- 2α $\left(\alpha \le 60°\right)$.

נתון: המרחק של הנקודה O מן המיתר AB הוא $0.5R$.

א. מצאו את זוויות המרובע DOCE.

הביעו באמצעות α אם יש צורך.

ב. הביעו באמצעות R ו- α את אורך הקטע DE.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOD הוא $\frac{4}{7}R$.

ג. מצאו את α.

ד. מצאו את היחס בין שטח המעגל החוסם את המרובע DOCE ובין שטח המעגל הנתון.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x}-2}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. הראו כי לכל $x>0$ בתחום ההגדרה של הפונקציות מתקיים: $f(x)=g'(x)$.

ד. לפניכם טענות I-II. קבעו בנוגע לכל טענה אם היא נכונה או לא נכונה.
נמקו את קביעותכם.

I. יש משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ ששיפועו הוא 2.

II. לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

ה. חשבו את ערך הביטוי: $\int_{0.25}^{1} g(x)\cdot f(x)dx$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin(x)-a}{\sin(x)+a}$, a הוא פרמטר חיובי.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x המקיים: $\sin(x)\neq -a$.

נתון כי הגרף של הפונקציה $f(x)$ משיק לציר x בכל נקודות הקיצון שלה.

א. מצאו את הערך של a.

הציבו: $a=1$, וענו על הסעיפים ב-ה עבור התחום: $-2\pi \le x \le 2\pi$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x)=-1$ בתחום הנתון? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בכל אחד מחלקי תחום הגדרתה.

ה. קבעו אם הטענה שלפניכם נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

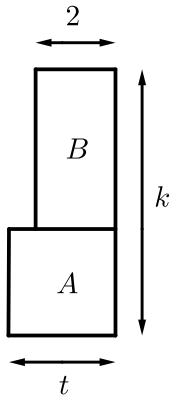
$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+1\right)dx>\frac{\pi}{2}.$$

8) נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו, גינה A וגינה B.

הרוחב של גינה A הוא t מטרים.

הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה הוא: $2t+2$ מ"ר,

כמתואר בסרטוט שלפניכם.



האורך הכולל של שתי הגינות הוא k מטרים. k הוא קבוע.

א. הביעו באמצעות k ו- t את שטח הגינה A.

ב. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A הוא מינימלי.

ג. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה A ובין שטח הגינה B הוא מקסימלי.

נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות:

1) א. (1) ראו סרטון.

ב. (1) שאלת הוכחה ב. (2) 2:1 ב. (3) כן.

ג. (1) ביטוי II ג. (2) עלייה: $x>4$, $x<-5$, ירידה: $-5<x<-4$.

ד. (1) גרף II ד. (2) 3 נקודות ד. (3) $y_C=5$.

2) א. (1) $k>2$ א. (2) $k<2$ א. (3) $k=2$.

ב. $k=-3$ ג. הוכחה. ד. -48,465.

3) א. $k-1+p$ ב. $k=0.7$, $p=0.6$ ג. $\frac{31}{32}$ ד. $\frac{648}{3125}$

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. $CG=60$, $EG=30$.

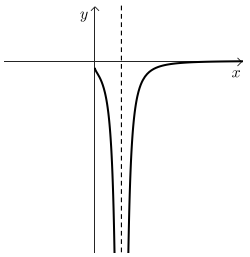
5) א. $\sphericalangle DEC=120°-2\alpha$, $\sphericalangle ODE=\sphericalangle OCE=90°$, $\sphericalangle DOC=2\alpha+60°$

ב. $DE=\frac{2R\sin\alpha\cdot\sin(60°+\alpha)}{\sin(120°-2\alpha)}$ ג. $\alpha=28.96°$ ד. $\frac{r^2}{R^2}=0.55$.

6) א. (1) $0\le x\ne 4$ א. (2) אנכית: $x=4$, אופקית: $y=0$ עבור: $x\to\infty$.

(3). ציר y: $(0,-1)$, ציר x: $(16,0)$ (4). $\max\left(36,\frac{1}{8}\right)$, $\max(0,-1)$.

ב. להלן סרטוט:



ג. הוכחה. ד. I: לא נכונה , II: נכונה.

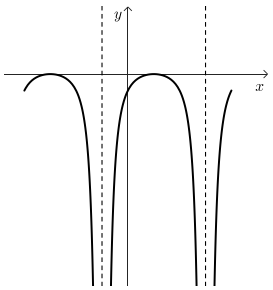
ה. $1\frac{17}{18}$.

7) א. $a=1$ ב. (1) $\frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi$ או $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ או $-2\pi\le x<-\frac{\pi}{2}$.

ב. (2) $(0,-1)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$.

ב. (3) $\max\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\max\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$, $\min(2\pi,-1)$, $\max(2\pi,-1)$.

ג. להלן סרטוט:



ד. יש 5 פתרונות. ה. הטענה נכונה.

8) א. $S_A=kt-t^2-t$ ב. $t_{min}=-1+\sqrt{k}$ ג. $t_{max}=-1+\sqrt{k}$.

בגרות קיץ 2024 מועד א':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

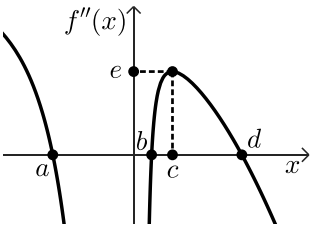
פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי: $4+13+\ldots+\frac{5n^2+3n}{2}=\frac{n(n+1)(5n+7)}{6}$.

ב. נתונות הפונקציות: $f(x)$, $f'(x)$ ו-$f''(x)$, המוגדרות לכל $x\neq 0$.

בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.



לגרף הפונקציה $f''(x)$ יש שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה-x, ושיעוריהן הם: $(d,0)$, $(b,0)$, $(a,0)$.

הנקודה: (c,e) היא נקודת הקיצון של הפונקציה $f''(x)$.

(1) הביעו באמצעות: e , d , c , b , a, אם יש צורך,

את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

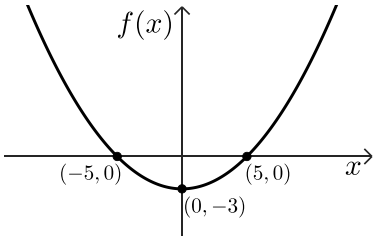
נתונה הפונקציה $h(x)$, המקיימת: $h'(x)=f''(x)-e$.

הפונקציה $h(x)$ מוגדרת לכל $x\neq 0$.

(2) מצאו כמה נקודות קיצון וכמה נקודות פיתול יש לפונקציה $h(x)$ (אם יש כאלה).

נמקו את תשובתכם.

ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, ועליו כתובים כל שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x ושיעורי נקודת המינימום שלה.



הפונקציה מוגדרת לכל x.

נתונות הפונקציות: $g(x)=|f(x)+m|$, $h(x)=|f(x)|+m$.

m הוא פרמטר, $0<m<2$.

(1) הביעו באמצעות m, אם יש צורך, את שיעורי נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$.

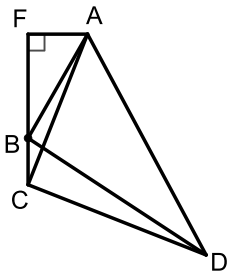
(2) הביעו באמצעות m, אם יש צורך, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגן.

(3) לפניכם שתי טענות, I-II. קבעו בעבור כל טענה אם היא נכונה או אינה נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. הפונקציות $g(x)$ ו-$h(x)$ חיוביות לכל ערך של x.

II. לכל ערך של m בתחום: $0<m<2$ מתקיים שהישר: $y=m+\frac{1}{2}$ חותך כל אחת מן הפונקציות $g(x)$ ו-$h(x)$ בשלוש נקודות.

ד. המרובע ABCD הוא בר חסימה במעגל, כך ש-AD הוא קוטר במעגל.
הנקודה F נמצאת על המשך הצלע CB, כך ש-$FA \perp FB$,
כמתואר בסרטוט שלפניכם.



(1) הוכיחו: $\Delta ACD \sim \Delta AFB$.

נתון: $\sphericalangle BDA = 24°$.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשולש ACD ובין שטח המשולש AFB.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) הסדרה A היא סדרה הנדסית שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3 \ldots$

ומנתה היא q, $-1 < q < 0$. נתון: $a_1 = 1$.

הסדרה B מוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $b_n = a_n \cdot a_{n+2}$.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q.

ב. לפניכם שלוש טענות I-III. קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה או לא נכונה.
נמקו את קביעותיכם.

I. הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

II. הסדרה B היא סדרה עולה.

III. האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A יוצרים סדרה עולה.

נתון: הסדרה B היא סדרה אין-סופית שסכומה הוא $\frac{1}{8}$.

ג. מצאו את ערכו של q.

נתונה סדרה הנדסית נוספת C, המוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

נתון: $c_3 + c_4 + \ldots + c_m = 44{,}307$, m הוא מספר טבעי.

ד. מצאו את הערך של m.

3) בחידון יש 5 שאלות. ההסתברות לענות נכון על כל אחת מן השאלות היא P.
ידוע כי ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 4 שאלות לכל היותר
היא 0.67232.

א. מצאו את P.

ב. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 3 שאלות בדיוק.

מספר הנקודות הניתן לכל שאלה זהה למספר השאלה.
כלומר מתמודד שענה נכון על שאלה 1, מקבל נקודה אחת.
מתמודד שענה נכון על שאלה 2 מקבל שתי נקודות, וכן הלאה.

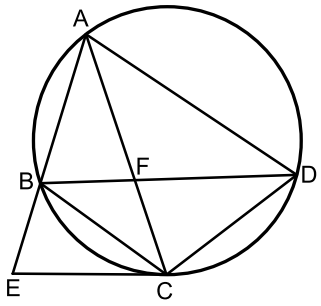
ג. מצאו את ההסתברות שמתמודד יצבור 14 נקודות לפחות.

ד. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יצבור 6 נקודות בדיוק.

ה. ידוע כי אחינועם ענתה נכון על 3 שאלות בדיוק.
מצאו את ההסתברות שהיא צברה 6 נקודות בדיוק.

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) המרובע ABCD חסום במעגל. אלכסוני המרובע נחתכים בנקודה F.
המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך המיתר AB
בנקודה E (ראו סרטוט).



נתון: $AB = CB$.

א. הוכיחו: $\sphericalangle EBC = 2 \cdot \sphericalangle BDC$.

נתון: AC חוצה את זווית ECD, $\frac{CD}{CF} = \frac{8}{5}$.

ב. (1) הוכיחו: $AC = AD$.

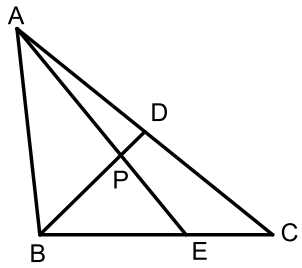
(2) מצאו את היחס: $\frac{AD}{CD}$.

(3) מצאו את היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש CBF.

נסמן את שטח המשולש ABF ב- S.

ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AEC.

5) במשולש ABC, BD הוא תיכון לצלע AC.
הנקודה E נמצאת על הצלע BC.
BD ו-AE נחתכים בנקודה P (ראו סרטוט).



נתון: $BP = 3 \cdot PD$.

נסמן: $AB = k$, $\sphericalangle BAP = \alpha$, $\sphericalangle ABP = \beta$, $\alpha < \beta$.

א. הביעו באמצעות: α, β ו- k את אורכי
הקטעים AP ו-BP.

נתון כי AE ו-BD מאונכים זה לזה, וכי שטח המשולש ABD הוא $0.28k^2$.

ב. מצאו את גודל הזווית α.

ג. מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC
ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEB.

ד. מצאו את אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC
כך שמתקיים: $\sphericalangle ABC = 90°$. הביעו את תשובתכם באמצעות k.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{\left(x^2-a\right)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על סעיפים א-ה. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x)=f(x)$.

גרף הפונקציה $g(x)$ עובר בנקודה $(0,0)$.

הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ג. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה $g(x)$.

ד. (1) מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלו.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ שמצאתם בתת-סעיף ד(1).

$h(x)$ היא פונקציה המוגדרת כך: $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.

הפונקציות $h(x)$ ו- $f(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ה. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקציה $h(x)$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos x-\sqrt{\cos x}$, בתחום: $-\pi \le x \le \pi$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הראו כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

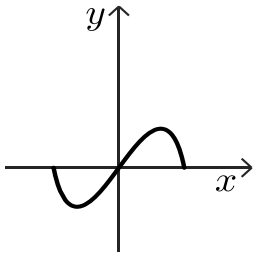
(4) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן (בתשובתכם דייקו 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

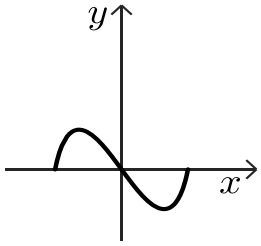
ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

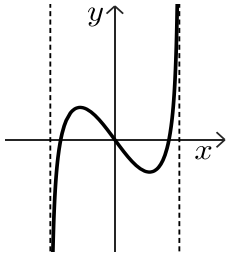
I



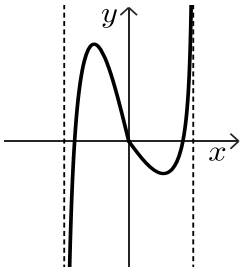
II



III



IV



נתונה הפונקציה: $g(x)=k-f(x)$, k הוא פרמטר חיובי.

הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

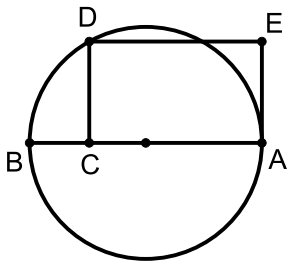
נסמן ב-S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה-x בתחום בין 0 ל-$\frac{\pi}{2}$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$

ועל ידי הישרים $x=\frac{\pi}{2}$ ו-$x=-\frac{\pi}{2}$ הוא $14\cdot S$.

ה. הביעו את k באמצעות S.

8) הקטע AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R.



מסמנים על הקוטר נקודה C ועל המעגל מסמנים נקודה D,
כך שהקטע CD מאונך לקטע AB. הקטע AC גדול מ- R.
דרך הנקודה D מעבירים ישר שמקביל לקוטר AB.
דרך הנקודה A מעבירים משיק למעגל.
הישר המקביל והמשיק נחתכים בנקודה E.
נסמן: $AC = x$.

א. הביעו באמצעות R את הערך של x שבעבורו שטח המלבן ACDE מקסימלי.
הנקודה F נמצאת על הצלע DE.

ב. הביעו באמצעות R את סכום השטחים המקסימלי של המשולשים CDF ו-AFE.

תשובות סופיות:

1) א. (1) הוכחה.
ב. (1) עלייה: $b < x < d$, $x < a$, ירידה: $x > d$, $0 < x < b$, $a < x < 0$ ב. (2) נקודה אחת.
ג. (1) $\max(0,-m+3)$ ג. (2) $\max(0,3+m)$, $(5,m)$, $\min:(-5,m)$.
ג. (3) I. הטענה אינה נכונה, II. הטענה אינה נכונה ד. (1) הוכחה ד. (2) 6.045.

2) א. הוכחה, q^2 ב. I – נכונה, II – לא נכונה, III – נכונה.
ג. $q = -\frac{1}{3}$ ד. $m = 9$.

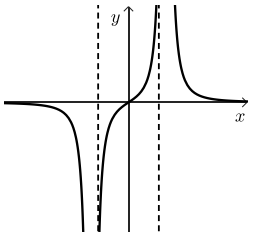
3) א. $P = 0.8$ ב. $\frac{128}{625} = 0.2048$ ג. $\frac{256}{625} = 0.4096$.
ד. $\frac{96}{3{,}125} = 0.03072$ ה. $\frac{1}{10} = 0.1$.

4) א. הוכחה. ב. (1) הוכחה. ב. (2) $\frac{5}{3}$ ב. (3) $\frac{5}{3}$ ג. $\frac{13}{5}S$.

5) א. $AP = \frac{k\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $BP = \frac{k\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ ב. $\alpha = 28.57°$.
ג. $\frac{R_1}{R_2} = 1.785$ ד. בוטל בגלל סתירה בנתונים.

6) א. (1) $x \neq \sqrt{a}$, $x \neq -\sqrt{a}$ א. (2) $x = \sqrt{a}$, $x = -\sqrt{a}$, $y = 0$.
א. (3) תחומי עלייה: $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$, תחומי ירידה: $\sqrt{a} < x$ או $x < -\sqrt{a}$.

ב. להלן סרטוט:



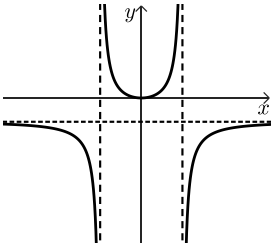
ג. קעירות כלפי מעלה: $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$, קעירות כלפי מטה: $\sqrt{a} < x$ או $x < -\sqrt{a}$.

ד. (1) $g(x) = \frac{-3}{x^2 - a} - \frac{3}{a}$

ה. (1) $x = \sqrt{a}$, $x = -\sqrt{a}$, $y = 0$.

ה. (2) $0 < x < \sqrt{a}$ או $x < -\sqrt{a}$.

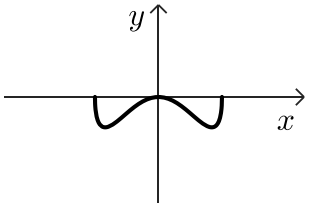
ד. (2) להלן סרטוט:



7) א. (1) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ א. (2) הוכחה. א. (3) $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

(4) $\max\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\min(-1.32,-0.25)$, $\max(0,0)$, $\min(1.32,0.25)$, $\max\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

ב. להלן סרטוט:



ג. תחומי חיוביות: אין, תחומי שליליות: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ או $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

ד. גרף III.

ה. $k = \frac{10S}{\pi}$.

8) א. $\frac{3}{2}R$ ב. $\frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

בגרות קיץ 2024 מועד ב':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. (1) הוכיחו באינדוקצייה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

(2) האם הביטוי: $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)$ שווה ל- $\frac{n+1}{n}$ בעבור כל n טבעי?

נמקו את תשובתכם.

ב. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

נסמן: $\sphericalangle ACB=\alpha$, $0°<\alpha<90°$.

(1) הביעו באמצעות α את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש ABC, ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש AOB.

נתון כי היחס שהבעתם בתת-סעיף (1) שווה ל- $\sqrt{2}$,

וכי הצלע CB משיקה למעגל החוסם את משולש AOB.

(2) הוכיחו כי מרכז המעגל O נמצא על הצלע AC.

ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ורציפה המוגדרת לכל x.

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום אחת בלבד ובה: $x=-\frac{1}{2}$.

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא בנקודה $(1,0)$.

(1) סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית המוגדרת לכל x.

פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת: $g'(x)=-f(x)$.

נתון: $g(1)=2$.

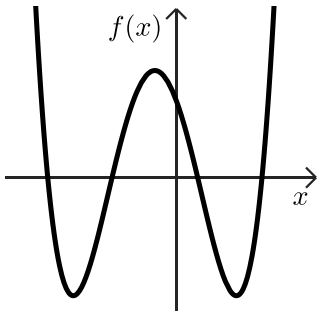
(2) מצאו את שיעורי נקודות המינימום של הפונקציה $g(x)$.

(3) לפניכם שני היגדים I-II. קבעו עבור כל היגד אם הוא נכון או לא נכון.
נמקו את קביעותיכם.

I. שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ הוא בין 0 ל-2.

II. הפונקציה $g(x)$ חיובית לכל x.

ד. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.



אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

(1) קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקציה $f(x)$,
נמקו את קביעתכם:

I. $f(x)=x(x-4)(x+6)$

II. $f(x)=x(x-1)(x+3)(x+6)$

III. $f(x)=(x-4)(x-1)(x+3)(x+6)$

IV. $f(x)=(x-4)(x+1)(x+3)(x+6)$

נתונה הפונקציה: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

(2) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון: $\int_4^7 g(x)dx=k$.

(4) הביעו באמצעות k את הערך של: $\int_5^8\left[\left(2\cdot g(x-1)+1\right)\right]dx$.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונה סדרה הנדסית שבה: $2n+1$ איברים (n הוא מספר טבעי).
כל איברי הסדרה: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n+1}$ הם חיוביים.
סכום איברי הסדרה ללא שני האיברים הראשונים גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה ללא שני האיברים האחרונים.
נתון כי סכום האיברים שנמצאים אחרי האיבר האמצעי גדול פי 256 מסכום האיברים שנמצאים לפני האיבר האמצעי.

א. מצאו את n.

המשיכו את הסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה הנדסית אין-סופית.

נתון: B היא סדרה אין-סופית המקיימת לכל k טבעי: $b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}$

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה.

בסדרה B כופלים כל איבר שנמצא במקום זוגי ב-2.

נתון כי לאחר ההכפלה, סכום האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב- $\frac{1}{30}$ מסכום האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים.

ג. מצאו את a_1.

3) במחקר שנעשה בקרב תלמידים בבית ספר מסוים נבדק הקשר בין חברות בתנועת נוער ובין התנדבות בקהילה. 80% מן החברים בתנועת נוער מתנדבים בקהילה.
בוחרים באקראי 5 תלמידים שחברים בתנועת נוער (הוצאה עם החזרה).

א. מהי ההסתברות שבחרו לפחות תלמיד אחד שמתנדב ולפחות תלמיד אחד שאינו מתנדב?

נתון כי 55% מן התלמידים אינם חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים, ו- $\frac{1}{12}$ מן התלמידים שאינם חברים בתנועת נוער מתנדבים.

ב. כמה אחוזים מן התלמידים חברים בתנועת נוער?

במחקר השתתפו 100 תלמידים סך הכול.

ג. כמה מן התלמידים חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים?

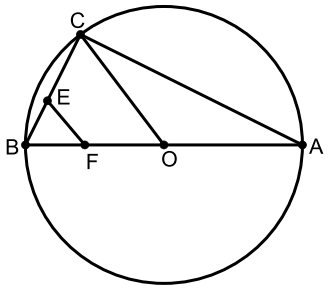
ד. בוחרים באקראי 3 מן התלמידים שאינם מתנדבים (הוצאה ללא החזרה).

(1) מהי ההסתברות שהתלמיד הראשון שנבחר חבר בתנועת נוער וששני התלמידים שנבחרו אחריו אינם חברים בתנועת נוער?

(2) מהי ההסתברות שאחד מן התלמידים שנבחרו חבר בתנועת נוער והשניים האחרים אינם חברים בתנועת נוער אם ידוע שהתלמיד הראשון שנבחר אינו חבר בתנועת נוער?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-AB הוא קוטר במעגל.



הנקודה E נמצאת על הצלע BC, והנקודה F נמצאת על הקטע BO, כמתואר בסרטוט.

נתון כי המרובע CEFO הוא בר חסימה במעגל.

א. הוכיחו: $EF = EB$.

המעגל החוסם את המרובע CEFO חותך את הצלע AC בנקודה D כך ש-ED מקביל ל-AB.

ב. (1) הוכיחו כי המרובע EDOB הוא מקבילית.

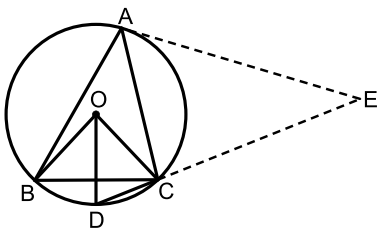
(2) הוכיחו: $OD \perp AC$.

הישר ℓ משיק בנקודה C למעגל החוסם את המשולש ABC.

ג. הוכיחו כי הישר ℓ משיק למעגל החוסם את המרובע CEFO.

5) משולש ABC חד זוויות חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

הנקודה D היא אמצע הקשת הקטנה BC, כמתואר בסרטוט.



נתון: $\sphericalangle ABC = 60°$

נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$

א. הביעו באמצעות R ו- α את שטחי המשולשים ABC ו-ODC.

נתון כי היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ODC הוא: $2\sqrt{3}\sin(80°)$.

ב. מצאו את הערך של α.

הנקודה E נמצאת על המשך המיתר DC כך ש- $\sphericalangle CAE = 50°$, כמתואר בסרטוט.

ג. הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החסום במשולש ACE.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-1}{(x-a)^3}$, המוגדרת בתחום: $x\neq a$, a הוא פרמטר שונה מ-0.

א. ענו על התת-סעיפים (1)-(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y.

ב. מצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון שנמצאת משמאל לאסימפטוטה האנכית לציר ה- x, וקבעו את סוגה.

הגרפים 1-4 שבסוף השאלה מתארים את הפונקציה $f(x)$ בעבור ערכים שונים של a.

ג. התאימו לכל אחד מן הערכים I-IV של a את הגרף המתאים לו, ונמקו את תשובותיכם.

I. $a=-1$ II. $a=0.5$ III. $a=1$ IV. $a=2$

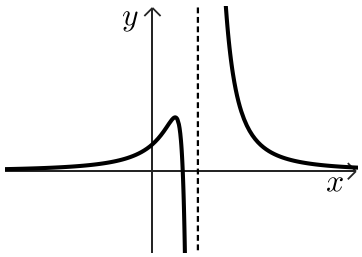
נתונה הפונקציה $g(x)$, המקיימת: $g(x)=f(x)-b$ בעבור הערך של a המתאים לגרף 2. b הוא פרמטר חיובי.

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x היא: $(t,0)$, $1<t<5$.

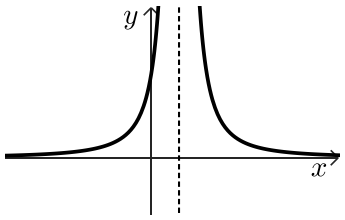
נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר $x=t$ ועל ידי הישר $x=5$ הוא 1.75.

ד. מצאו את הערך של b.

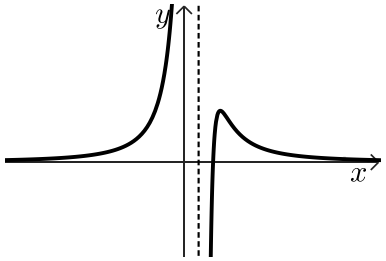
1



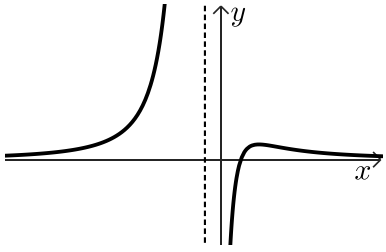
2



3



4



7) נתונה הפונקציה: $f(x)=(b+\cos x)\sin x$, המוגדרת בתחום: $-\pi \le x \le \pi$,

b הוא פרמטר.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי לגרף הפונקציה $f(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה- x.

ב. לפניכם שלוש אפשרויות I-III לערכים של b.

קבעו איזו אפשרות יכולה להתאים לפונקציה $f(x)$, ונמקו את קביעתכם.

I. $b=0$ II. $0<b<1$ III. $1\le b$

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$, כאשר: $\cos x=\frac{1}{4}$, הוא: $-\frac{5}{8}$.

ג. מצאו את הערך של b.

הציבו $b=1$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=(f(x))^2\cdot f'(x)$.

הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום: $0\le x\le \pi$.

ו. חשבו את השטח ברביע הראשון, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}$, המוגדרת בתחום: $x\geq 0$,

ונתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{16}{x^2+3}$, המוגדרת לכל x .

א. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה $g(x)$.

(3) סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

בנקודה $C(t,0)$ מעבירים אנך לציר ה-x , $t>0$.

האנך חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

ב. הביעו באמצעות t את מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC.

ג. הוכיחו כי מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC מקסימלית כאשר הנקודה B היא נקודת פיתול של הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $k(x)=\frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2+3}$, המוגדרת בתחום: $x\geq 4$.

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים של השאלה.

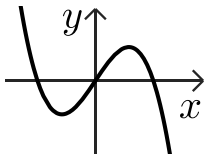
מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $k(x)$,

וקבעו את סוגה. נמקו את תשובתכם.

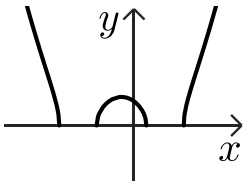
תשובות סופיות:

1) א. (1) הוכחה א. (2) לא ב. (1) $2\cos\alpha$ ב. (2) הוכחה.

ג. (1) להלן סרטוט: ג. (2) $(1,2)$, $(-1,2)$ ג. (3) I. אינו נכון, II. נכון.



ד. (1) ביטוי III ד. (2) $x\geq 4$, $-3\leq x\leq 1$, $x\leq -6$ ד. (3) להלן סרטוט:



ד. (4) $2k+3$.

2) א. $n=7$ ב. הוכחה, $\frac{1}{4}$ ג. $a_1=\frac{4}{3}$.

3) א. 0.672 ב. 40% ג. 8 ד. (1) 0.0097

ד. (2) 0.228.

4) א. הוכחה. ב. (1) הוכחה. ב. (2) הוכחה. ג. הוכחה

5) א. $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}R^2\sin\alpha\sin(120^\circ-\alpha)$, $S_{\Delta ODC}=\frac{R^2\sin\alpha}{2}$ ב. $\alpha=40^\circ$.

ג. $r=0.52R$.

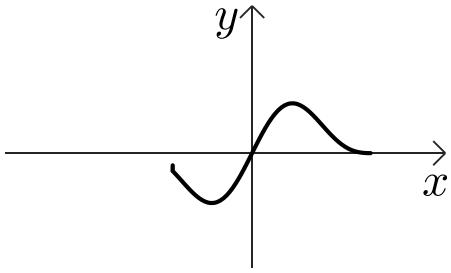
6) א. (1). אנכית: $x=a$, אופקית: $y=0$ (2). $\left(0,\frac{1}{a^3}\right)$.

ב. $a>1$, מקסימום. ג. גרף 1: IV , גרף 2: III, גרף 3: II , גרף 4: I ד. $b=4$.

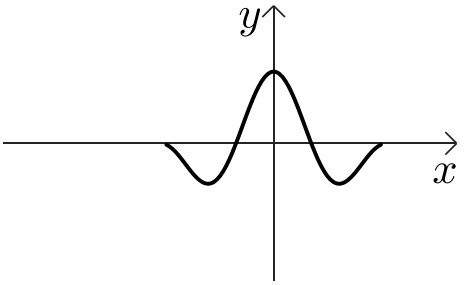
7) א. אי זוגית. ב. $b\geq 1$ ג. $b=1$.

ד. $\min(\pi,0)$, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $\max(-\pi,0)$.

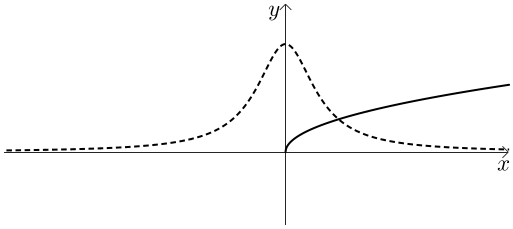
ה. (1) להלן סרטוט:



ה. (2) להלן סרטוט: ו. $\frac{27\sqrt{3}}{64}$.



8) א. (1) $\max\left(0,5\frac{1}{3}\right)$ א. (2) $(1,4)$, $(-1,4)$ א. (3) להלן סרטוט:



ב. $AC\cdot BC=\frac{16\sqrt{t}}{t^2+3}$ ג. הוכחה. ד. $\max(5,2)$.