

פתרון בגרויות במתמטיקה לשאלון 582

פרק 1

פתרון בידאו של בחינות 2024

1 מועד חורף

בגרות חורף 2024:

ענו על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

- (1) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle BAC = 90^\circ$), שיעורי הקודקוד A הם: $(a, 0)$, a הוא פרמטר שונה מאפס. שיעור ה- x של הקודקוד B הוא $-a$. הצלע BC מקבילה לציר ה- x . הנקודה M היא אמצע הצלע BC .
- א. הביעו באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל הנקודות M .
- ב. סרטטו את העקום המתואר על ידי המשוואה שמצאתם בסעיף א. סרטטו את שתי האפשרויות במערכת צירים אחת. באחת מן הנקודות M , שנמצאת ברביע הראשון, העבירו ישר ℓ המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.
- ג. הוכיחו כי הישר ℓ מקביל לישר AC .
- נתון גם כי: $AM = 10$ (הנקודה M נמצאת ברביע הראשון), והקודקוד B נמצא על הישר: $x = -2$.
- ד. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו- C .
- ה. מצאו את שיעורי מרכז המעגל.

- (2) נתונים הישר ℓ והמישור π .
- ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ היא: $\underline{x} = (-1, 5, -11) + t \cdot (m-1, 5-m, -2)$.
- משוואת המישור π היא: $3x + my + (m+6)z + 4 = 0$. הוא פרמטר.
- א. הראו כי לכל ערך של m הישר ℓ אינו מקביל למישור π .
- נתון כי הישר ℓ ניצב למישור π וחותך אותו בנקודה A .
- ב. מצאו את הערך של הפרמטר m .
- ג. מצאו את שיעורי הנקודה A .
- ד. לפניכם טענה: קיים מישור אחד בלבד המכיל את הישר ℓ ועובר דרך הנקודה $(5, -5, -9)$.
- קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

3) $z = x + yi$ הוא מספר מרוכב (x ו- y הם מספרים ממשיים).

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x, y) במישור גאוס

$$\text{המקיימות: } |9 + 12i| - |10i| = |6 - \bar{z} - 8i|^2 \text{ הוא מעגל.}$$

הנקודה M היא מרכז המעגל המתואר בסעיף א.

המספרים המרוכבים z_A ו- z_M מייצגים את הנקודות A ו- M , בהתאמה.

נתון: למספרים z_A ו- z_M יש אותו ארגומנט (זווית), $2|z_A| = |z_M|$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A .

נתונה סדרה הנדסית: z_1, z_2, z_3, \dots .

האיבר הראשון בסדרה מייצג את הנקודה A , והאיבר החמישי בסדרה מייצג את הנקודה M .

ג. מצאו את מנת הסדרה (כל האפשרויות).

ד. חשבו את הסכום: $z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + \dots + z_{10} \cdot \bar{z}_{10}$.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a-x^2}{e^x}$, $g(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$ המוגדרות לכל x .

a הוא פרמטר.

א. מצאו את הערך של a שבעבורו: $f(x) = g'(x)$ לכל ערך של x .

הציבו את הערך של a שמצאתם, וענו על הסעיפים ב-ה שלפניכם.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$

ו- $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצות של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף

הפונקציה $g(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

ה. חשבו את הערך של הביטוי: $\int_1^2 \left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^4} \right) \cdot \left(\frac{x^2-1}{e^x} \right) dx$

5) בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של הפונקציה: $f(x) = \ln(x)$

המוגדרת בתחום: $x > 0$, ומתוארים הישרים: $y = x$ ו- $y = -x - 1$.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם אחד מן הישרים.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- a .

היעזרו בסרטוט, וענו על הסעיפים א-ה שלפניכם.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{\ln(x) - x}{\ln(x) + x}$

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$

עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x של

הפונקציה $g(x)$.

ב. הסבירו מדוע מתקיים: $0 < a < 1$.

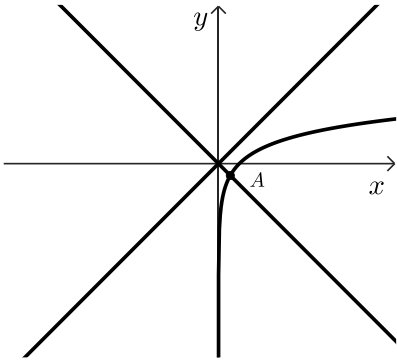
ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$,

וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

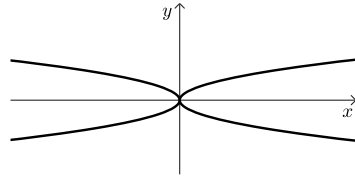
ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה: $h(x) = e^{g(x)}$.



תשובות סופיות:

א. $y^2 = 4ax$ (1) ב. להלן סרטוט: ג. הוכחה.



ד. $B(-2,8)$, $C(18,8)$

ה. $(1,2)$

א. הוכחה. (2) ב. $m = -5$ ג. $A(2,0,-10)$ ד. לא נכונה.

א. הוכחה. (3) ב. $Z_A = 3 + 4i$

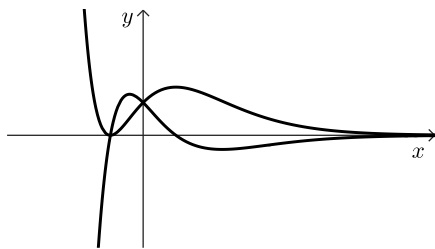
ג. $q_0 = \sqrt[4]{2}$, $q_1 = \sqrt[4]{2}i$, $q_2 = -\sqrt[4]{2}$, $q_3 = -\sqrt[4]{2}i$ ד. $S_{10} = 1871.02$

א. $a = 1$ (4) ב. (1). ציר y : $(0,1)$, ציר x : $(-1,0)$, $(1,0)$

(2). ציר y : $(0,1)$, ציר x : $(-1,0)$

(3). $g(x)$: $\max\left(1, \frac{4}{e}\right)$, $\min(-1,0)$

ג. להלן סרטוט: $f(x)$: $\max(1-\sqrt{2}, 1.253)$, $\min(1+\sqrt{2}, -0.431)$



ה. 0.14 ד. $\frac{4}{e}$

א. $a \neq x > 0$ (1). (5) (2). אין חיתוך. (3). $y = -1$ עבור: $x \rightarrow \infty$

ב. הסבר. ג. (1). $\max\left(e, \frac{1-e}{1+e}\right)$

(2). תחומי עלייה: $0 < x < a$, $a < x < e$; תחומי ירידה: $x > e$.

ד. להלן סרטוט: ה. להלן סרטוט:

