פתרון בגרויות במתמטיקה לשאלון 581

פרק 1

פתרון בוידאו של בחינות 2024

מועד חורף 1
קיץ מועד א 6
קיץ מועד ב 14

בגרות מועד חורף 2024:

ענו על ארבע מן השאלות 1-8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק
(לכל שאלה – 25 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) אלון יצא בשעה 8:00 מעיר א' לעיר ב'. אלון הלך במהירות קבועה במשך חצי שעה, ולאחר מכן עצר למנוחה של 10 דקות. לאחר המנוחה התחיל אלון לרוץ לכיוון עיר ב' במהירות הגדולה פי 2 ממהירות הליכתו.
אלון רץ במשך חצי שעה $\frac{1}{6}$ מן המרחק בין שתי הערים, ולאחר מכן עצר שוב למנוחה של 10 דקות.
לאחר המנוחה השנייה המשיך אלון לרוץ באותה המהירות עד שהגיע לעיר ב'.
דני יצא מעיר ב' ורכב על אופניים לעיר א'. הוא רכב במהירות קבועה.
אחרי שעה ו-50 דקות הוא הגיע לנקודה שבה נח אלון לראשונה.

א. מצאו פי כמה גדולה מהירות הרכיבה של דני ממהירות ההליכה של אלון.
כאשר הגיע דני לנקודה שבה עצר אלון למנוחה בפעם הראשונה הוא הגביר את מהירות הרכיבה שלו למהירות הגדולה ב-12.6 קמ"ש ממהירותו ההתחלתית.
אלון ודני הגיעו ליעדם בדיוק באותה השעה.

ב. מצאו את מהירות ההליכה של אלון אם נתון כי דני יצא מעיר ב' בשעה 9:40.

ג. מצאו בין אילו שעות היה צריך דני לצאת מעיר ב', אילו היה רוצה לחלוף על פני אלון במהלך המנוחה השנייה שלו.

2) בסדרה חשבונית A נתון: $a_1=-4-4k$, $a_3=-16+2k$. k הוא פרמטר.

א. מצאו עבור אילו ערכים של k:
(1) הסדרה A עולה.
(2) הסדרה A יורדת.
(3) הסדרה A קבועה.

נתון כי: $a_{17}=-232$.

ב. מצאו את הערך של k.

הציבו את הערך של k שמצאתם וענו על הסעיפים ג-ד.

נתונה סדרה חדשה, B, שאיבריה מוגדרים כך: לכל n טבעי, $b_n=a_n+24n+17$.

ג. הוכיחו כי הסדרה B היא חשבונית.

ד. חשבו את הסכום: $b_1^2-b_2^2+b_3^2-b_4^2+...+b_{29}^2-b_{30}^2$.

3) ביישוב מסוים הוחלט לערוך סקר בנוגע להקמת פארק ביישוב.
בסקר השתתפו תושבים מבוגרים וצעירים בלבד.
כל אחד מן התושבים שהשתתף בסקר כתב אם הוא תומך בהקמת פארק או מתנגד להקמתו (לא היו נמנעים).
כל התושבים המבוגרים שהשתתפו תמכו בהקמת הפארק.
בחרו באקראי בתושב אחד מבין התושבים שהשתתפו בסקר.
נסמן ב- p את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר.
נסמן ב- k את ההסתברות שהתושב שנבחר תמך בהקמת הפארק.

א. הביעו באמצעות p ו- k את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר התומך בהקמת הפארק.

מחצית מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק.
$\frac{3}{7}$ מן המשתתפים בסקר שתמכו בהקמת הפארק היו צעירים.

ב. מצאו את p ואת k.

יוסי, כתב חדשות מקומי, ראיין באקראי 6 מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר.

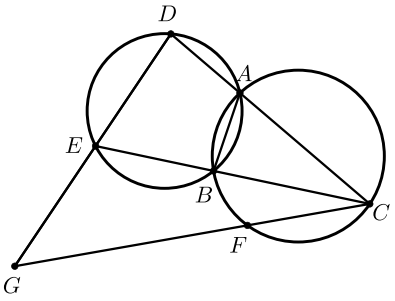
ג. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם תמך בהקמת הפארק ולפחות אחד מהם התנגד להקמת הפארק?

לאחר מכן ראיין יוסי באקראי, בזה אחר זה, 5 תושבים שהשתתפו בסקר.

ד. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן המרואיינים האלה היו צעירים, ושהמרואיין האחרון היה צעיר?

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B.
C היא נקודה על המעגל הימני.
המשכי הקטעים CA ו-CB חותכים את המעגל השמאלי בנקודות D ו-E בהתאמה.
הנקודה F נמצאת על הקשת BC, כמתואר בסרטוט.
המשכי הקטעים CF ו-DE נפגשים בנקודה G.



א. הוכיחו: $\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$.

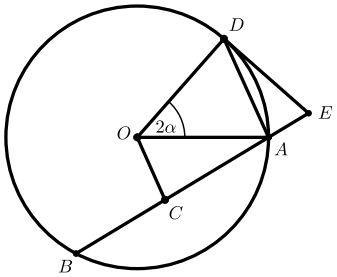
ב. הוכיחו: המרובע GDAF הוא בר חסימה במעגל.
המיתרים AF ו-BC נפגשים בנקודה H.
נתון: $\sphericalangle GEC = \sphericalangle CHA$.

ג. הוכיחו: $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$.

נתון: CE מאונך ל-AB, $DE = 18$, $CD = 36$.

ד. חשבו את אורכי הקטעים EG ו-CG.

5) נתון מעגל שמרכזו O והרדיוס שלו R.מנקודה E, הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר החותך את המעגל בנקודות A ו-B, כמתואר בסרטוט.
הנקודה D נמצאת על הקשת הגדולה AB, כך שהקטע ED משיק למעגל. הנקודה C היא אמצע המיתר AB.



נסמן את הזווית בין הרדיוסים OD ו-OA ב- 2α $\left(\alpha \le 60°\right)$.

נתון: המרחק של הנקודה O מן המיתר AB הוא $0.5R$.

א. מצאו את זוויות המרובע DOCE.
הביעו באמצעות α אם יש צורך.

ב. הביעו באמצעות R ו- α את אורך הקטע DE.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOD הוא $\frac{4}{7}R$.

ג. מצאו את α.

ד. מצאו את היחס בין שטח המעגל החוסם את המרובע DOCE ובין שטח המעגל הנתון.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f\left(x\right)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f\left(x\right)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f\left(x\right)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

נתונה הפונקציה: $g\left(x\right)=\frac{2x}{\sqrt{x}-2}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f\left(x\right)$.

ג. הראו כי לכל $x>0$ בתחום ההגדרה של הפונקציות מתקיים: $f\left(x\right)=g'\left(x\right)$.

ד. לפניכם טענות I-II. קבעו בנוגע לכל טענה אם היא נכונה או לא נכונה.
נמקו את קביעותכם.

I. יש משיק לגרף הפונקציה $g\left(x\right)$ ששיפועו הוא 2.

II. לפונקציה $g\left(x\right)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

ה. חשבו את ערך הביטוי: $\int_{0.25}^{1} g\left(x\right)\cdot f\left(x\right)dx$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin(x)-a}{\sin(x)+a}$, a הוא פרמטר חיובי.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x המקיים: $\sin(x)\neq -a$.

נתון כי הגרף של הפונקציה $f(x)$ משיק לציר x בכל נקודות הקיצון שלה.

א. מצאו את הערך של a.

הציבו: $a=1$, וענו על הסעיפים ב-ה עבור התחום: $-2\pi\le x\le 2\pi$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x)=-1$ בתחום הנתון? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בכל אחד מחלקי תחום הגדרתה.

ה. קבעו אם הטענה שלפניכם נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

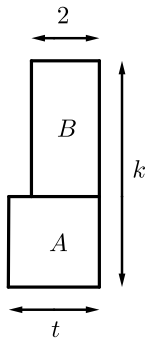
$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+1\right)dx>\frac{\pi}{2}.$$

8) נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו, גינה A וגינה B.

הרוחב של גינה A הוא t מטרים.

הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה הוא: $2t+2$ מ"ר, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

האורך הכולל של שתי הגינות הוא k מטרים. k הוא קבוע.



א. הביעו באמצעות k ו-t את שטח הגינה A.

ב. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A הוא מינימלי.

ג. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה A ובין שטח הגינה B הוא מקסימלי.
נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות:

1) א. פי 3 ב. 4.2 קמ"ש. ג. $7:40-7:50$

2) א. **(1)** $k>2$ **(2)** $k<2$ **(3)** $k=2$

ב. $k=-3$ ג. הוכחה. ד. -48,465

3) א. $k-1+p$ ב. $k=0.7$, $p=0.6$ ג. $\frac{31}{32}$ ד. $\frac{648}{3125}$

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

ד. $CG=60$, $EG=30$

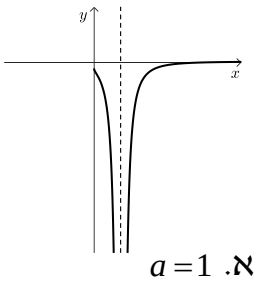
5) א. $\sphericalangle DEC=120°-2\alpha$, $\sphericalangle OCE=\sphericalangle ODE=90°$, $\sphericalangle DOC=2\alpha+60°$

ב. $DE=\frac{2R\sin\alpha\cdot\sin(60°+\alpha)}{\sin(120°-2\alpha)}$ ג. $\alpha=28.96°$ ד. $\frac{r^2}{R^2}=0.55$

6) א. **(1)** $0\le x\ne 4$ **(2)** אנכית: $x=4$, אופקית: $y=0$ עבור: $x\to\infty$

(3) ציר y: $(0,-1)$, ציר x: $(16,0)$ **(4)** $\max(0,-1)$, $\max\left(36,\frac{1}{8}\right)$

ב. להלן סרטוט: ג. הוכחה. ד. I: לא נכונה , II: נכונה.



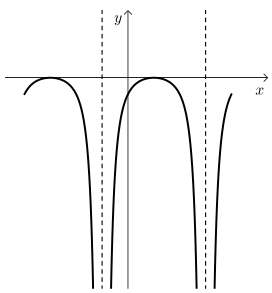
ה. $1\frac{17}{18}$

7) א. $a=1$ ב. **(1)** $\frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi$ או $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ או $-2\pi\le x<-\frac{\pi}{2}$

(2) $(0,-1)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$

(3) $\max\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\max\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$, $\min(2\pi,-1)$, $\max(2\pi,-1)$

ג. להלן סרטוט: ד. יש 5 פתרונות. ה. הטענה נכונה.



8) א. $S_A=kt-t^2-t$ ב. $t_{min}=-1+\sqrt{k}$ ג. $t_{max}=-1+\sqrt{k}$

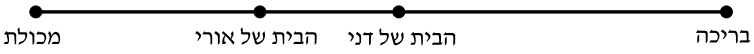
בגרות קיץ 2024 מועד א':

ענו על ארבע מן השאלות 1-8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק
(לכל שאלה – 25 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) הבית של אורי והבית של דני נמצאים בין הבריכה ובין המכולת, כמתואר בסרטוט שלפניכם.
המרחק בין המכולת לבריכה הוא 12.5 ק"מ.
המרחק בין הבית של אורי ובין הבית של דני הוא 2.3 ק"מ.



בכל יום רכב אורי על אופניים במהירות v קמ"ש, ודני רכב במהירות הגדולה ב-6 קמ"ש ממהירות הרכיבה של אורי.
בימים ראשון ושני רכב אורי מביתו לבריכה, ודני רכב מביתו למכולת.
בכל אחד מן הימים ראשון ושני הם יצאו לרכיבה באותה השעה.
ביום ראשון כאשר הגיע דני למכולת, היה אורי במרחק של 5.8 ק"מ מן הבריכה.
ביום שני כאשר הגיע דני למכולת, הוא עצר שם וערך קניות במשך 29 דקות.
בדיוק באותו הזמן שדני סיים לערוך את הקניות הגיע אורי לבריכה.

א. (1) מצאו את מהירות הרכיבה של אורי.
(2) מצאו את המרחק בין הבית של דני ובין המכולת.

ביום שלישי רכב דני מביתו אל המכולת, ערך קניות במשך חצי שעה, וחזר לכיוון ביתו. ביום זה רכב גם אורי למכולת.
45 דקות אחרי שיצא דני מביתו, יצא אורי מן המכולת ורכב לכיוון ביתו.

ב. האם בדרכם חזרה לבתיהם הם נפגשו בדרך שבין המכולת ובין הבית של אורי? נמקו את תשובתכם.

2) הסדרה A היא סדרה הנדסית שאיבריה הם: $a_1 , a_2 , a_3 \ldots$

ומנתה היא q, $-1 < q < 0$. נתון: $a_1 = 1$.

הסדרה B מוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $b_n = a_n \cdot a_{n+2}$.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q.

ב. לפניכם שלוש טענות I-III. קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

II. הסדרה B היא סדרה עולה.

III. האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A יוצרים סדרה עולה.

נתון: הסדרה B היא סדרה אין-סופית שסכומה הוא $\frac{1}{8}$.

ג. מצאו את ערכו של q.

נתונה סדרה הנדסית נוספת C, המוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

נתון: $c_3 + c_4 + \ldots + c_m = 44,307$, m הוא מספר טבעי.

ד. מצאו את הערך של m.

3) בחידון יש 5 שאלות. ההסתברות לענות נכון על כל אחת מן השאלות היא P. ידוע כי ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 4 שאלות לכל היותר היא 0.67232.

א. מצאו את P.

ב. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 3 שאלות בדיוק.

מספר הנקודות הניתן לכל שאלה זהה למספר השאלה.

כלומר מתמודד שענה נכון על שאלה 1, מקבל נקודה אחת.

מתמודד שענה נכון על שאלה 2 מקבל שתי נקודות, וכן הלאה.

ג. מצאו את ההסתברות שמתמודד יצבור 14 נקודות לפחות.

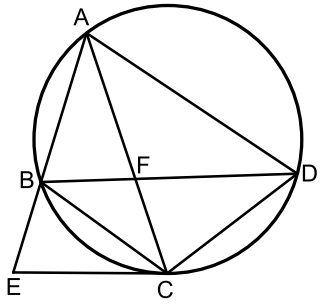
ד. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יצבור 6 נקודות בדיוק.

ה. ידוע כי אחינועם ענתה נכון על 3 שאלות בדיוק.

מצאו את ההסתברות שהיא צברה 6 נקודות בדיוק.

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) המרובע ABCD חסום במעגל. אלכסוני המרובע נחתכים בנקודה F.
המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך המיתר AB
בנקודה E (ראו סרטוט).



נתון: $AB = CB$.

א. הוכיחו: $\sphericalangle EBC = 2 \cdot \sphericalangle BDC$.

נתון: AC חוצה את זווית ECD, $\frac{CD}{CF} = \frac{8}{5}$.

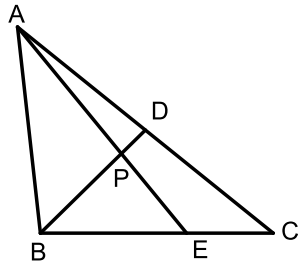
ב. (1) הוכיחו: $AC = AD$.

(2) מצאו את היחס: $\frac{AD}{CD}$.

(3) מצאו את היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש CBF.
נסמן את שטח המשולש ABF ב-S.

ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AEC.

5) במשולש ABC, BD הוא תיכון לצלע AC.
הנקודה E נמצאת על הצלע BC.
BD ו-AE נחתכים בנקודה P (ראו סרטוט).



נתון: $BP = 3 \cdot PD$.

נסמן: $AB = k$, $\sphericalangle BAP = \alpha$, $\sphericalangle ABP = \beta$, $\alpha < \beta$.

א. הביעו באמצעות: α, β ו-k את אורכי הקטעים AP ו-BP.

נתון כי AE ו-BD מאונכים זה לזה, וכי שטח המשולש ABD הוא $0.28k^2$.

ב. מצאו את גודל הזווית α.

ג. מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC
ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEB.

ד. מצאו את אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC
כך שמתקיים: $\sphericalangle ABC = 90°$. הביעו את תשובתכם באמצעות k.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{\left(x^2-a\right)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על סעיפים א-ה. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x)=f(x)$.

גרף הפונקציה $g(x)$ עובר בנקודה $(0,0)$.

הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ג. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה $g(x)$.

ד. (1) מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלו.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ שמצאתם בתת-סעיף ד(1).

$h(x)$ היא פונקציה המוגדרת כך: $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.

הפונקציות $h(x)$ ו- $f(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ה. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקציה $h(x)$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos x-\sqrt{\cos x}$, בתחום: $-\pi\le x\le\pi$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הראו כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

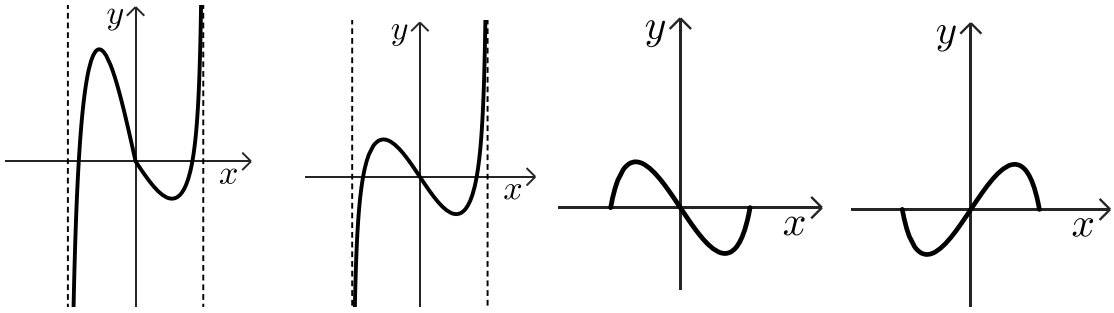
(4) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן (בתשובתכם דייקו 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

IV III II I



נתונה הפונקציה: $g(x)=k-f(x)$, k הוא פרמטר חיובי.

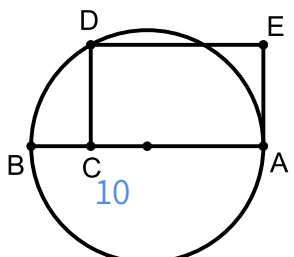
הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

נסמן ב-S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה-x בתחום בין 0 ל-$\frac{\pi}{2}$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ ועל ידי הישרים $x=\frac{\pi}{2}$ ו-$x=-\frac{\pi}{2}$ הוא $14\cdot S$.

ה. הביעו את k באמצעות S.

8) הקטע AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R.
מסמנים על הקוטר נקודה C ועל המעגל מסמנים נקודה D,



כך שהקטע CD מאונך לקטע AB. הקטע AC גדול מ-R.
דרך הנקודה D מעבירים ישר שמקביל לקוטר AB.
דרך הנקודה A מעבירים משיק למעגל.
הישר המקביל והמשיק נחתכים בנקודה E.
נסמן: $AC = x$.

א. הביעו באמצעות R את הערך של x שבעבורו שטח המלבן ACDE מקסימלי.
הנקודה F נמצאת על הצלע DE.

ב. הביעו באמצעות R את סכום השטחים המקסימלי של המשולשים CDF ו-AFE.

תשובות סופיות:

1) א. (1). 12 קמ"ש. (2). 5.4 ק"מ. ב. כן, אחרי 6 דקות.

2) א. הוכחה, q^2. ב. I – נכונה, II – לא נכונה, III – נכונה.

ג. $q=-\frac{1}{3}$ ד. $m=9$

3) א. $P=0.8$ ב. $\frac{128}{625}=0.2048$ ג. $\frac{256}{625}=0.4096$

ד. $\frac{96}{3,125}=0.03072$ ה. $\frac{1}{10}=0.1$

4) א. הוכחה. ב. (1). הוכחה. (2). $\frac{5}{3}$ (3). $\frac{5}{3}$

ג. $\frac{13}{5}S$

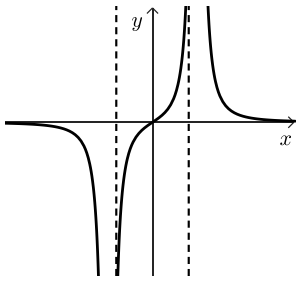
5) א. $AP=\frac{k\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $BP=\frac{k\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ ב. $\alpha=28.57°$

ג. $\frac{R_1}{R_2}=1.785$ ד. בוטל בגלל סתירה בנתונים.

6) א. (1). $x\neq\sqrt{a}$, $x\neq-\sqrt{a}$ (2). $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$, $y=0$

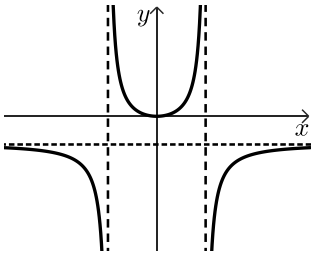
(3). תחומי עלייה: $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$, תחומי ירידה: $\sqrt{a}<x$ או $x<-\sqrt{a}$.

ב. להלן סרטוט:



ג. קעירות כלפי מעלה: $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$, קעירות כלפי מטה: $\sqrt{a}<x$ או $x<-\sqrt{a}$.

ד. (1). $g(x)=\frac{-3}{x^2-a}-\frac{3}{a}$ (2). להלן סרטוט:



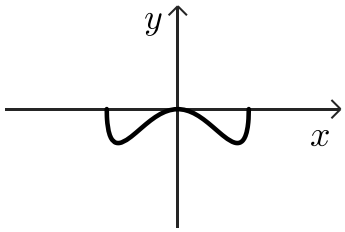
ה. (1). $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$, $y=0$

(2). $0<x<\sqrt{a}$ או $x<-\sqrt{a}$.

1) א. (1) $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ (2). הוכחה. (3) $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

(4) $\max\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\min(-1.32,-0.25)$, $\max(0,0)$, $\min(1.32,0.25)$, $\max\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

ב. להלן סרטוט:



ג. תחומי חיוביות: אין, תחומי שליליות: $0<x<\frac{\pi}{2}$ או $-\frac{\pi}{2}<x<0$.

ד. גרף III. ה. $k=\frac{10S}{\pi}$

2) א. $\frac{3}{2}R$ ב. $\frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$

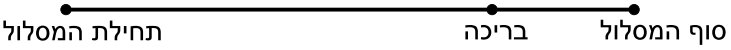
בגרות קיץ 2024 מועד ב':

ענו על ארבע מן השאלות 1-8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק
(לכל שאלה – 25 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) נדב ויוסי יצאו בשעה 8:00 להליכה באותו המסלול (ראו סרטוט).



יוסי הלך מתחילת המסלול עד סופו במהירות קבועה ובלי לעצור בדרך.
נדב הלך מתחילת המסלול 1.8 ק"מ במהירות קבועה, ולאחר מכן הוא החליט לחזור לתחילת המסלול.
בדרכו חזרה הלך נדב במהירות הגדולה פי 1.5 ממהירות הליכתו ההתחלתית.
כאשר הגיע נדב חזרה לתחילת המסלול, היה יוסי במרחק של 4.8 ק"מ מתחילת המסלול.
נסמן ב- v קמ"ש את מהירות הליכתו ההתחלתית של נדב.

א. הביעו באמצעות v את מהירות ההליכה של יוסי.

במרחק של 3.5 ק"מ מסוף המסלול יש בריכה.
לאחר שהגיע נדב חזרה לתחילת המסלול, הוא יצא שוב להליכה באותו המסלול.
הוא הלך במהירות $v+2$ קמ"ש במשך t שעות, עד שהגיע לבריכה.
כאשר הגיע נדב לבריכה, הגיע יוסי לסוף המסלול.

ב. הביעו את t באמצעות v.

נדב הגיע לבריכה בשעה 15:30.

ג. מצאו את v, אם ידוע כי v גדול מ-1 קמ"ש.

2) נתונה סדרה הנדסית שבה: $2n+1$ איברים (n הוא מספר טבעי).
כל איברי הסדרה: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n+1}$ הם חיוביים.
סכום איברי הסדרה ללא שני האיברים הראשונים גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה ללא שני האיברים האחרונים.
נתון כי סכום האיברים שנמצאים אחרי האיבר האמצעי גדול פי 256 מסכום האיברים שנמצאים לפני האיבר האמצעי.

א. מצאו את n.

המשיכו את הסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה הנדסית אין-סופית.

נתון: B היא סדרה אין-סופית המקיימת לכל k טבעי: $b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}$

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה.

בסדרה B כופלים כל איבר שנמצא במקום זוגי ב-2.
נתון כי לאחר ההכפלה, סכום האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב-$\frac{1}{30}$ מסכום האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים.

ג. מצאו את a_1.

3) במחקר שנעשה בקרב תלמידים בבית ספר מסוים נבדק הקשר בין חברות בתנועת נוער ובין התנדבות בקהילה.
80% מן החברים בתנועת נוער מתנדבים בקהילה.
בוחרים באקראי 5 תלמידים שחברים בתנועת נוער (הוצאה עם החזרה).

א. מהי ההסתברות שבחרו לפחות תלמיד אחד שמתנדב ולפחות תלמיד אחד שאינו מתנדב?

נתון כי 55% מן התלמידים אינם חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים, ו-$\frac{1}{12}$ מן התלמידים שאינם חברים בתנועת נוער מתנדבים.

ב. כמה אחוזים מן התלמידים חברים בתנועת נוער?

במחקר השתתפו 100 תלמידים סך הכול.

ג. כמה מן התלמידים חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים?

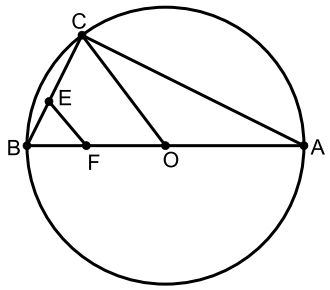
ד. בוחרים באקראי 3 מן התלמידים שאינם מתנדבים (הוצאה ללא החזרה).

(1) מהי ההסתברות שהתלמיד הראשון שנבחר חבר בתנועת נוער וששני התלמידים שנבחרו אחריו אינם חברים בתנועת נוער?

(2) מהי ההסתברות שאחד מן התלמידים שנבחרו חבר בתנועת נוער והשניים האחרים אינם חברים בתנועת נוער אם ידוע שהתלמיד הראשון שנבחר אינו חבר בתנועת נוער?

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-AB הוא קוטר במעגל.



הנקודה E נמצאת על הצלע BC, והנקודה F נמצאת על הקטע BO, כמתואר בסרטוט.

נתון כי המרובע CEFO הוא בר חסימה במעגל.

א. הוכיחו: $EF = EB$.

המעגל החוסם את המרובע CEFO חותך את הצלע AC בנקודה D כך ש-ED מקביל ל-AB.

ב. (1) הוכיחו כי המרובע EDOB הוא מקבילית.

(2) הוכיחו: $OD \perp AC$.

הישר ℓ משיק בנקודה C למעגל החוסם את המשולש ABC.

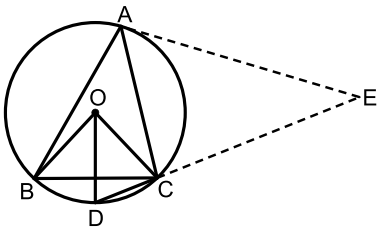
ג. הוכיחו כי הישר ℓ משיק למעגל החוסם את המרובע CEFO.

5) משולש ABC חד זוויות חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

הנקודה D היא אמצע הקשת הקטנה BC, כמתואר בסרטוט.

נתון: $\sphericalangle ABC = 60^\circ$

נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$



א. הביעו באמצעות R ו-α את שטחי המשולשים ABC ו-ODC.

נתון כי היחס בין שטח המשולש ABC

ובין שטח המשולש ODC הוא: $2\sqrt{3}\sin 80^\circ$.

ב. מצאו את הערך של α.

הנקודה E נמצאת על המשך המיתר DC כך ש-$\sphericalangle CAE = 50^\circ$, כמתואר בסרטוט.

ג. הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החסום במשולש ACE.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-1}{(x-a)^3}$, המוגדרת בתחום: $x\neq a$, a הוא פרמטר שונה מ-0.

א. ענו על התת-סעיפים (1)-(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-y.

ב. מצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון שנמצאת משמאל לאסימפטוטה האנכית לציר ה-x, וקבעו את סוגה.

הגרפים 1-4 שבסוף השאלה מתארים את הפונקציה $f(x)$ בעבור ערכים שונים של a.

ג. התאימו לכל אחד מן הערכים I-IV של a את הגרף המתאים לו, ונמקו את תשובותיכם.

I. $a=-1$ II. $a=0.5$ III. $a=1$ IV. $a=2$

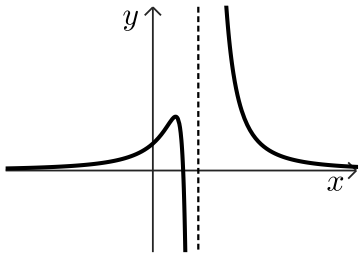
נתונה הפונקציה $g(x)$, המקיימת: $g(x)=f(x-b)$ בעבור הערך של a המתאים לגרף 2. b הוא פרמטר חיובי.

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-x היא: $t,0$, $1<t<5$.

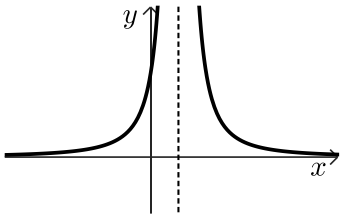
נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר $x=t$ ועל ידי הישר $x=5$ הוא 1.75.

ד. מצאו את הערך של b.

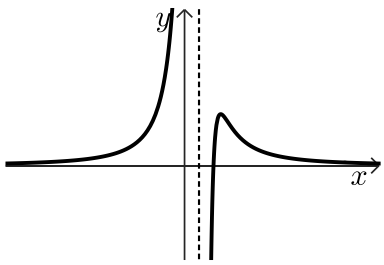
1



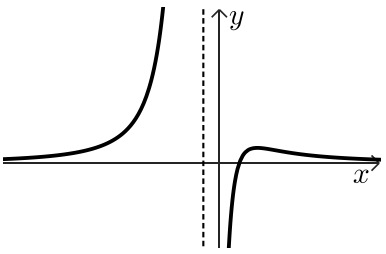
2



3



4



7) נתונה הפונקציה: $f(x)=b+\cos x\sin x$, המוגדרת בתחום: $-\pi\le x\le\pi$,
b הוא פרמטר.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי לגרף הפונקציה $f(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

ב. לפניכם שלוש אפשרויות I-III לערכים של b.
קבעו איזו אפשרות יכולה להתאים לפונקציה $f(x)$, ונמקו את קביעתכם.

I. $b=0$ II. $0<b<1$ III. $1\le b$

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$, כאשר: $\cos x=\frac{1}{4}$, הוא: $-\frac{5}{8}$.

ג. מצאו את הערך של b.

הציבו $b=1$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=f(x)^2\cdot f'(x)$. הפונקציה $g(x)$
מוגדרת בתחום: $0\le x\le\pi$.

ו. חשבו את השטח ברביע הראשון, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$
ועל ידי ציר ה-x.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}$, המוגדרת בתחום: $x\ge 0$,
ונתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{16}{x^2+3}$, המוגדרת לכל x.

א. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה $g(x)$.

(3) סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

בנקודה $C(t,0)$ מעבירים אנך לציר ה-x, $t>0$.

האנך חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של הפונקציה $g(x)$
בנקודה B.

ב. הביעו באמצעות t את מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC.

ג. הוכיחו כי מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC מקסימלית כאשר הנקודה
B היא נקודת פיתול של הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $k(x)=\frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2+3}$, המוגדרת בתחום: $x\ge 4$.

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים של השאלה.
מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $k\ \ x$, וקבעו את סוגה. נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות:

1) א. $1.6v$ ב. $t=\frac{1.3}{2-0.6v}$ ג. $v_2=3$

2) א. $n=7$ ב. הוכחה, $\frac{1}{4}$ ג. $a_1=\frac{4}{3}$

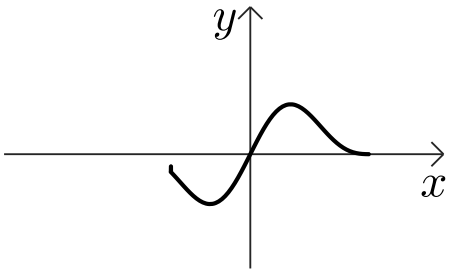
3) א. 0.672 ב. 40% ג. 8 ד. (1). 0.0097
(2). 0.228

4) א. הוכחה. ב. (1). הוכחה. (2). הוכחה. ג. הוכחה

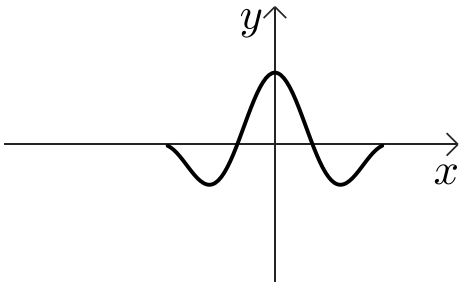
5) א. $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}R^2\sin\alpha\sin(120°-\alpha)$, $S_{\Delta ODC}=\frac{R^2\sin\alpha}{2}$ ב. $\alpha=40°$
ג. $r=0.52R$

6) א. (1). אנכית: $x=a$, אופקית: $y=0$ (2). $\left(0,\frac{1}{a^3}\right)$
ב. $a>1$, מקסימום. ג. גרף 1 : IV , גרף 2 : III , גרף 3 : II , גרף 4 : I
ד. $b=4$

7) א. אי זוגית. ב. $b\geq 1$ ג. $b=1$
ד. $\min(\pi,0)$, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $\max(-\pi,0)$
ה. (1). להלן סרטוט:

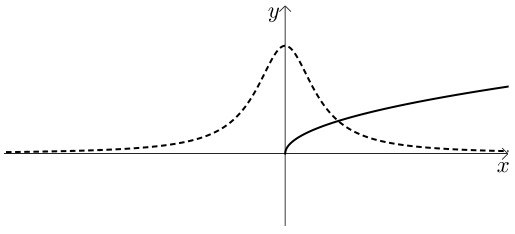


(2). להלן סרטוט:



ו. $\frac{27\sqrt{3}}{64}$

8) א. (1). (2).
(3). להלן סרטוט:



ב. $AC\cdot BC=\frac{16\sqrt{t}}{t^2+3}$ ג. הוכחה. ד. $\max(5,2)$