שאלון 571 לכיתות יא

פרק 44

פתרון בוידאו של בחינות 2023

בגרות 2023 מועד חורף:

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) לאורך גדת נהר יש שלוש תחנות:
תחנה A, תחנה B ותחנה C - שנמצאת בנקודה מסוימת בין תחנה A לתחנה B.
הנהר זורם מכיוון תחנה A לכיוון תחנה B במהירות קבועה.
שתי סירות, סירה I וסירה II, יצאו בשעה 9:30 מנקודה C ושטו לכיוונים הפוכים:
סירה I שטה (נגד הזרם) אל תחנה A, וסירה II שטה (עם הזרם) אל תחנה B.
מיד לאחר שכל אחת מהסירות הגיעה לתחנה המתאימה, היא הסתובבה ושטה בכיוון ההפוך.
נתון כי המהירות של כל אחת מהסירות במים עומדים היא קבועה.
המהירות של סירה I, כאשר היא שטה עם הזרם, היתה גדולה פי 2 ממהירותה כאשר היא שטה נגד הזרם.
המהירות של סירה II, כאשר היא שטה עם הזרם, היתה גדולה פי 6.5 ממהירותה של **סירה I** כאשר היא שטה נגד הזרם. נסמן ב- x את מהירות הזרם בנהר.

א. הביעו באמצעות x את המהירות של סירה I במים עומדים ואת המהירות של סירה II במים עומדים.

סירה I הגיעה לתחנה A לאחר 2 שעות מרגע היציאה לדרך, ומיד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה B.
סירה II הגיעה לתחנה B לאחר 7 שעות מרגע היציאה לדרך, ומיד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה A.

ב. (1) באיזו שעה נפגשו הסירות?
(2) האם הסירות נפגשו בין תחנה A לתחנה C או בין תחנה B לתחנה C? נמקו את תשובתכם.

הסירות נפגשו במרחק של 90 ק"מ מתחנה C.

ג. מהי מהירות הזרם בנהר?

2) נתונה סדרה הנדסית אינסופית A, שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.
בונים סדרה חדשה B, שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.

א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.

ב. בנוגע לכל אחד מההיגדים (1)-(2) שלהלן, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

(1) אם הסדרה A לא מתכנסת - בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

(2) אם הסדרה A יורדת - בהכרח היא גם מתכנסת.

נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום של כל איברי הסדרה A הוא $\frac{4}{7}$.

ג. מצאו את q.

נתון: n הוא מספר טבעי המקיים $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+...+\frac{b_n}{a_n}=\frac{3367}{1024}$.

ד. מצאו את n.

3) בחנות פירות יש ארגזים ובתוכם פירות.
בארגז א' יש a פירות: 6 תפוחים והשאר אגסים.
בארגז ב' יש b פירות: 11 תפוחים והשאר אגסים.
מוציאים באקראי פרי אחד מארגז א'.
אם יצא תפוח - מעבירים אותו לארגז ב', ואם יצא אגס - מחזירים אותו לארגז א'.
לאחר מכן מוציאים באקראי פרי אחד מארגז ב'.

א. הביעו באמצעות a ו- b את ההסתברות שיצאו 2 תפוחים.

נתון: ההסתברות להוציא באופן המתואר 2 תפוחים היא $\frac{9}{65}$.

ההסתברות להוציא באופן המתואר תפוח אחד ואחר כך אגס אחד היא $\frac{21}{130}$.

ב. מצאו את a ו- b.

ג. חשבו את ההסתברות שמארגז ב' יצא אגס, אם ידוע כי מארגז א' יצא תפוח.

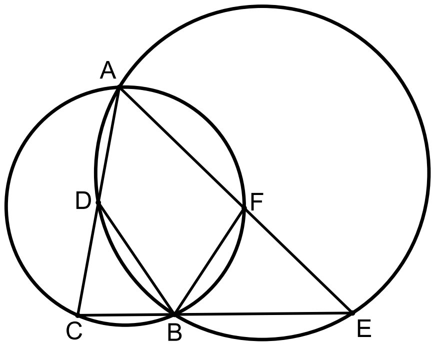
מעבירים את כל הפירות משני הארגזים לארגז אחר, שהיה ריק, ומוציאים ממנו באקראי פרי 6 פעמים, עם החזרה.

ד. מצאו את ההסתברות שב-4 מהפעמים בדיוק יצא תפוח <u>או</u> שבכל 6 הפעמים יצא אגס.

ה. ידוע שב-4 מהפעמים בדיוק יצא תפוח. מצאו את ההסתברות שהתפוחים יצאו ברציפות, בזה אחר בזה.

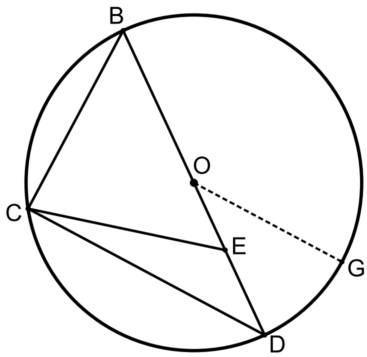
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B (ראו סרטוט).
המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה D.
המיתר AE במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.
הקטע CE עובר דרך הנקודה B.



א. הוכיחו כי $\Delta ACE \sim \Delta BCD$.
נתון: $DC = FE$.
ב. הוכיחו כי $\Delta BFE \cong \Delta BCD$.
ג. (1) הוכיחו כי $AC \cdot BE = AE \cdot BC$.
(2) הוכיחו כי AB הוא חוצה זווית CAE.
ד. הוכיחו כי $\sphericalangle DEC = \sphericalangle FCE$.

5) משולש BCD חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.
הנקודות O ו-E נמצאות על הצלע BD, כך שמתקיים $OE = ED$ (ראו סרטוט).
נסמן $\sphericalangle CDB = \alpha,\ CD = k$.



א. הביעו את $\cos\alpha$ באמצעות k ו- R.
ב. הוכיחו כי $CE = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 + R^2}$.
נתון: $BC = EC$.
ג. חשבו את α.
מעבירים רדיוס OG, המקביל לצלע CD, כמתואר בסרטוט.
ד. חשבו את גודל הזווית OEG.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

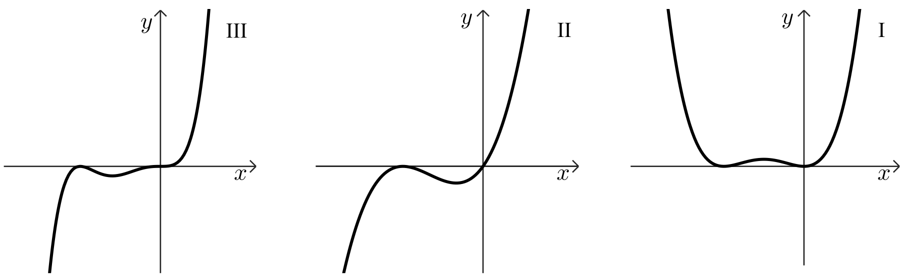
6) נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=x^{n}\cdot\left(x+1\right)^{2}$, כאשר $n>1$ מספר טבעי, והפונקציה $f\left(x\right)$ מוגדרת לכל x.

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f\left(x\right)$ עם הצירים.

ב. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f\left(x\right)$ (אם יש כאלה).
הבחינו בין n זוגי לבין n אי-זוגי.

ג. מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f\left(x\right)$, וקבעו את סוגן.
הביעו את תשובתכם באמצעות n, אם יש צורך.
הבחינו בין n זוגי לבין n אי-זוגי.

לפניכם שלושה גרפים I-III. אחד מהגרפים מתאר את הפונקציה $f\left(x\right)$ עבור n זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקציה $f\left(x\right)$ עבור $n>1$ ואי-זוגי.



ד. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקציה $f\left(x\right)$ עבור n זוגי, ואיזה מהם מתאר את הפונקציה $f\left(x\right)$ עבור $n>1$ ואי-זוגי. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g\left(x\right)=k\cdot f\left(x-6\right)$, כאשר k הוא פרמטר חיובי.

נסמן ב-A את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g\left(x\right)$ ובין ציר ה-x.

ה. הביעו באמצעות k ו-A את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ ובין ציר ה-x. נמקו.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4\sin(x)}{\cos^2(x)-1}$, בתחום $-2\pi\le x\le 2\pi$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה- x .

(3) האם הפונקציה $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית?
הוכיחו את תשובתכם.

ב. ענו על סעיפים (1)-(2) שלהלן עבור התחום $0\le x\le 2\pi$.

(1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים
(אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ (בתחום $-2\pi\le x\le 2\pi$).

ד. הוכיחו כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה- x ,
בתחום $1.9\le x\le 2.2$.

8) לפניכם שלוש פונקציות, שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x)=\frac{x^3-1}{x^2(x+2)}\ ,\quad h(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}\ ,\quad k(x)=\frac{x^3}{x(x+2)}$$

ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקציה מקיימת את כל התכונות הללו. נמקו.

ענו על סעיפים ב-ד עבור הפונקציה שקבעתם בסעיף א.

ב. (1) מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ושל האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

נתון כי לפונקציה זו אין נקודות קיצון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

נסמן נקודה D על גרף הפונקציה, שעבורה $x=t$, $-1<t<1$.

מהנקודה D מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה- x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקציה, כך שנוצר מלבן על ידי הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה- x .

ד. מצאו את ערכו של t, שעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי.
תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

תשובות סופיות:

1) א. $v_{I}=3x$, $v_{II}=12x$ ב. (1) בשעה 19:30 ב. (2) בין תחנה B לתחנה C.
ג. 2.5 קמ"ש.

2) א. הוכחה. ב. (1) נכון. ב. (2) לא נכון. ג. $q=\frac{3}{4}$ ד. $n=6$.

3) א. $\frac{72}{a(b+1)}$ ב. $a=20$ ג. $\frac{7}{13}$ ד. 0.176 ה. 0.2.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

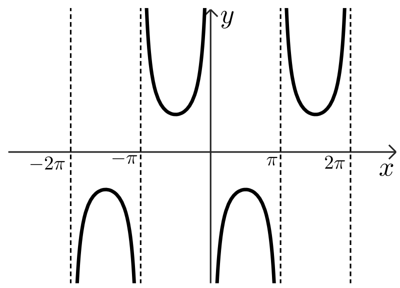
5) א. $\cos\alpha=\frac{k}{2R}$ ב. הוכחה. ג. $\alpha=37.76^\circ$ ד. $\sphericalangle OEG=115.38^\circ$.

6) א. $(0,0)$, $(-1,0)$ ב. עבור n זוגי: תחום חיובית: $x<-1,\ -1<x<0,\ x>0$
(אין תחום שליליות). עבור n אי-זוגי: תחום חיוביות: $x>0$, תחום שליליות:
$x<-1,\ -1<x<0$. ג. עבור n זוגי: מינימום: $x=-1,0$, מקסימום: $x=-\frac{n}{n+2}$.

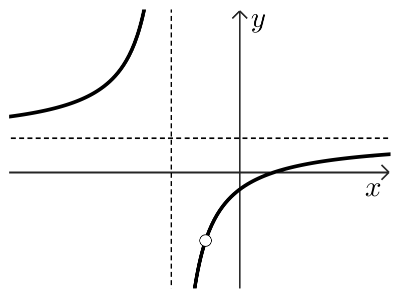
עבור n אי-זוגי: מינימום: $x=-\frac{n}{n+2}$, מקסימום: $x=-1$.

ד. עבור n זוגי: גרף I. עבור $n>1$ אי-זוגי: גרף III. ה. $\frac{A}{k}$.

7) א. (1) $x\neq 0$, $x\neq\pm\pi$, $x\neq\pm 2\pi$ א. (2) $x=0$, $x=\pm\pi$, $x=\pm 2\pi$
א. (3) אי זוגית. ב. (1) אין חיתוך. ב. (2) $\min\left(\frac{3\pi}{2},4\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{2},-4\right)$
ג. להלן סקיצה: ד. הוכחה. ה. 0.72.



8) א. $h(x)$ ב. (1) $x=-2$, $y=1$ ב. (2) $(1,0)$, $(0,-0.5)$
ג. להלן סקיצה: ד. $t=-2+\sqrt{3}$.



בגרות 2023 מועד קיץ א:

ענה על חמש מן השאלות 8-1, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) שני רוכבי אופניים, רוכב א' ורוכב ב', יצאו משני מקומות, A ו-B, בהתאמה, ורכבו זה לקראת זה. המרחק בין המקומות A ו-B הוא $3d$ (d הוא פרמטר חיובי).
רוכב ב' יצא לדרך 2.5 שעות אחרי שרוכב א' יצא לדרך.
בשעה 18:30 התברר שכל אחד מן הרוכבים עבר שליש מן המרחק בין המקומות A ו-B.
המהירות של כל אחד מן הרוכבים הייתה קבועה.
למחרת שוב יצאו הרוכבים מאותם המקומות, A ו-B, ורכבו זה לקראת זה.
כל אחד מן הרוכבים רכב באותה המהירות שבה רכב ביום הראשון.
הפעם הם יצאו באותו הזמן ונפגשו כעבור 9 שעות.

א. (1) באיזו שעה ביום הראשון יצא רוכב א' ממקום A?
(2) הביעו באמצעות d את המהירות של כל אחד מן הרוכבים.

הזמן שנדרש לרוכב א' לעבור קילומטר אחד גדול ב-1.5 דקות מן הזמן שנדרש לרוכב ב' לעבור קילומטר אחד.

ב. מצאו את המרחק בין A ל-B.

2) נתונות שתי סדרות הנדסיות אינסופיות מתכנסות A ו-B, שכל איבריהן שונים מ-0.
האיבר הכללי של הסדרה A הוא a_n ומנתה היא q_A.
האיבר הכללי של הסדרה B הוא b_n ומנתה היא q_B.
משתי הסדרות ההנדסיות A ו-B בונים סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת חדשה
שאיבריה הם: $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$.
כל שלוש הסדרות, הסדרה A, הסדרה B והסדרה החדשה אינן קבועות.

א. הביעו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות q_A ו- q_B.

הסדרה A אינה עולה ואינה יורדת, והסדרה B עולה.

ב. בנוגע לכל אחד משני ההיגדים (1) – (2) שלפניכם, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.
(1) מנת הסדרה החדשה היא חיובית.
(2) כל איברי הסדרה B הם שליליים.

המספרים c_1 , c_2 ו- c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית.
נתון כי c_2 שווה ל- $-c_1$, ומתקיים גם: $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{24}$.

ג. מצאו את c_1.

נתון כי המנה של הסדרה A שווה ל- c_1, ומתקיים גם :

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\ldots=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots}{b_1+b_2+b_3+\ldots}.$$

ד. מצאו את הערך של q_B.

3) במכללה גדולה הועלתה הצעה לקצר את הפסקת הצהריים כדי לסיים מוקדם יותר את יום הלימודים.
בעקבות זאת ערכו משאל ובו השתתפו כל תלמידי שנה א׳ וכל תלמידי שנה ב׳.
על פי תוצאות המשאל התברר כי 80% מן המשתתפים שבעד ההצעה הם תלמידי שנה א׳.
עוד התברר כי מספר תלמידי שנה א׳ שבעד ההצעה שווה למספר תלמידי שנה ב׳ שנגד ההצעה.
מבין המשתתפים במשאל לא היו נמנעים.
נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שבעד ההצעה מבין כל התלמידים שהשתתפו במשאל.

א. בחרו באקראי אחד מתלמידי שנה ב׳. מהי ההסתברות שהוא נגד ההצעה?

ידוע כי ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה א׳ הוא בעד ההצעה, גדולה ב- $\frac{13}{35}$ מן ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה ב׳ הוא בעד ההצעה.

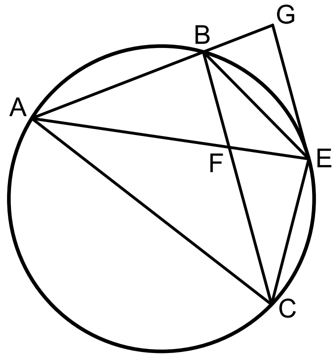
ב. חשבו את הערך של p.

ג. בחרו באקראי אחד מן המשתתפים במשאל. חשבו את ההסתברות שמתקיים לפחות אחד משני התנאים האלה :
(1) המשתתף שנבחר הוא תלמיד שנה ב׳.
(2) המשתתף שנבחר בעד ההצעה.

ד. בחרו באקראי 5 מן המשתתפים במשאל.
ידוע כי כל החמישה שנבחרו הם תלמידי שנה ב׳.
מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם בעד ההצעה וגם לפחות שניים מהם נגד ההצעה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) הנקודות A, B ו-C נמצאות על מעגל.
נקודה E היא אמצע הקשת BC, כמתואר בסרטוט שלפניכם.
בנקודה E מעבירים משיק למעגל.
המשיק חותך את המשך המיתר AB בנקודה G.
המיתרים AE ו-BC נחתכים בנקודה F.



א. הוכיחו: $\Delta ACE \sim \Delta AEG$.

נתון: $AG = 18$, $AE = 9\sqrt{6}$.

ב. חשבו את אורך המיתר AC.

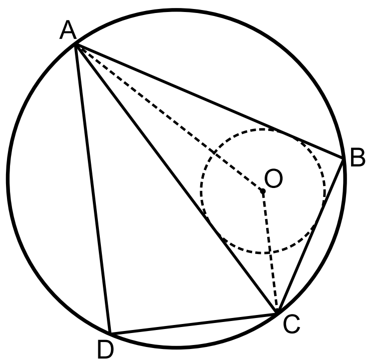
ג. הוכיחו: $BC \parallel GE$.

נתון: שטח המשולש ABF גדול פי 2 משטח המשולש BFE.

ד. חשבו את אורך המיתר AB.

ה. מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC?
נמקו את תשובתכם.

5) דלתון ABCD חסום במעגל שרדיוסו R.
המיתר AC הוא האלכסון הראשי של הדלתון.
הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC
(ראו סרטוט).



נסמן: $\sphericalangle CAB = \alpha$.

א. (1) מצאו את זוויות המשולש AOC
(הביעו באמצעות α במידת הצורך).

(2) הביעו את אורך הקטע AO באמצעות α ו- R.

נתון כי אורך הקטע AO הוא $R\sqrt{2}$.

ב. מצאו את גודל הזווית α.

נתון כי שטח הדלתון הוא $16\sqrt{3}$.

ג. מצאו את R.

ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החוסם את הדלתון לבין מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2a-x^2}{x}$, המוגדרת עבור $x\neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.

(2) הראו שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.

(4) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$, אם יש כאלה.

(5) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ ואת תחום הקעירות כלפי מטה $(\cap)$ של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x)=|f(x)|-b$, b הוא פרמטר חיובי.

הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

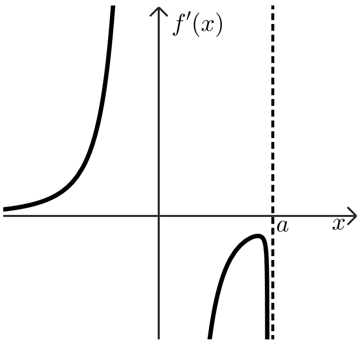
ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ היא: $(3,-8)$.

ד. מצאו את הערכים של a ו- b.

נתונה גם הפונקציה: $s(x)=\int_1^x g(t)dt$, המוגדרת בתחום: $1<x$.

ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתכם.

7) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום: $x \le a$, $x \neq 0$, a הוא פרמטר חיובי.



בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום: $x \neq 0$, $x < a$.

לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש שלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים שמשוואותיהן: $y = 0$, $x = a$, $x = 0$.

בתחום: $x < 0$ פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עולה.

הישר $x = 0$ הוא אסימפטוטה גם לגרף הפונקציה $f(x)$.

$f(a) = 0$.

א. (1) מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקציה $f(x)$ (הביעו את תשובתכם באמצעות a , אם יש צורך). נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו.

נתון כי הישר: $y = 0$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$, בהתאם לתשובתכם בתת סעיף א(2).

נתון כי אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

I. $\frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$ II. $\frac{\sqrt{x-a}}{x^2}$ III. $\frac{\sqrt{a-x}}{x}$ IV. $\frac{\sqrt{x-a}}{x}$

ג. איזה מן הביטויים I-IV מייצג את הפונקציה $f(x)$? נמקו.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = (-2)$, הוא: $\frac{7}{16}$.

ד. מצאו את הערך של a .

ה. הציבו $a = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישר: $x = 1$.

8) נתון מעוין ABCD. נקודה E היא אמצע הצלע BC.

נסמן: $\measuredangle ECD = x$.

נתון: שטח המשולש ECD הוא 25.

א. הביעו באמצעות x את אורך צלע המעוין.

ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE.

תשובות סופיות:

1) א. (1). בשעה 11:00. (2). מהירות רוכב א' היא: $\frac{2d}{15}$, מהירות רוכב ב' היא: $\frac{d}{5}$

ב. 300 קמ"ש.

2) א. $\frac{q_A}{q_B}$ ב. (1). לא נכון. ב. (2). נכון. ג. $c_1=-\frac{1}{8}$ ד. $q_B=\frac{1}{4}$

3) א. 0.8 ב. $\frac{5}{12}$ ג. $\frac{3}{4}$ ד. $\frac{32}{125}=0.256$

4) א. הוכחה. ב. $AC=27$ ג. הוכחה. ד. $AB=12$ ה. $\frac{4}{9}$

5) א. (1). $\frac{\alpha}{2}$, $-\frac{\alpha}{2}$, $45°$, $135°$ (2). $AO=2\sqrt{2}R\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$

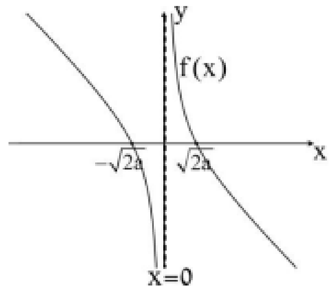
ב. $\alpha=30°$ ג. $R=4$ ד. 2.07

6) א. (1). $x=0$ (2). הוכחה. (3). $\left(\sqrt{2a},0\right)$, $\left(-\sqrt{2a},0\right)$

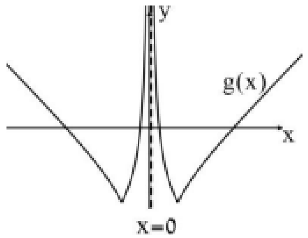
(4). תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x>0$ או $x<0$.

(5). תחומי קעירות כלפי מעלה: $x>0$, תחומי קעירות כלפי מטה: $x<0$.

ב. שרטוט:



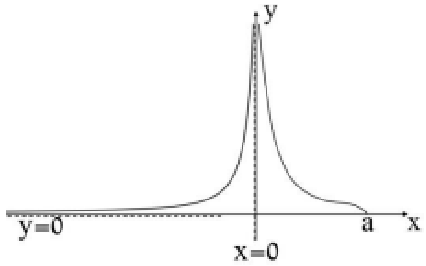
ג. שרטוט:



ד. $a=4.5$, $b=8$ ה. נקודת מינימום.

7) א. (1). תחומי עלייה: $x<0$, תחומי ירידה: $0<x<a$. (2). נקודה אחת.

ב. שרטוט: ג. ביטוי I ד. $a=2$ ה. $\frac{5}{24}$



8) א. $\frac{10}{\sqrt{\sin x}}$ ב. $5\sqrt{3}=8.66$

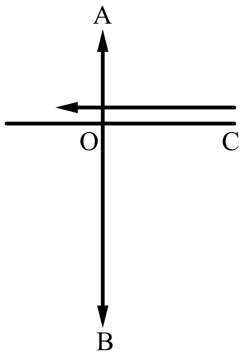
בגרות 2023 מועד קיץ ב:

ענה על <u>חמש</u> מן השאלות 1-8, לפחות על שאלה <u>אחת</u> מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) הנקודה A נמצאת מצפון לנקודה O והנקודה B נמצאת מדרום לנקודה O.
הנקודה C נמצאת ממזרח לנקודה O, במרחק של 12 ק״מ ממנה, כמתואר בסרטוט.
ביום ראשון יצא אורי להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה A.
באותו הזמן יצאה סמדר לריצה מן הנקודה C לכיוון הנקודה O.
מהירות הריצה של סמדר גדולה פי 3 ממהירות ההליכה של אורי.
נתון כי ברגע שהגיע אורי לנקודה A, המרחק האווירי בינו לבין סמדר היה 424 ק״מ. המהירויות של אורי ושל סמדר קבועות.



א. מצאו את המרחק שהלך אורי ואת המרחק שרצה סמדר ביום ראשון, אם נתון שסמדר חלפה בריצתה על פני הנקודה O .

באותו יום יצא בועז להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה B.
בועז יצא להליכה 20 דקות לאחר שיצא אורי להליכה.
מהירות ההליכה של בועז הייתה קבועה וגדולה ב-50% ממהירות ההליכה של אורי.
כאשר הגיע אורי לנקודה A, המרחק בינו לבין בועז היה 23 ק״מ, ובאותו רגע שניהם עצרו.

ב. מצאו את מהירות ההליכה של אורי ואת מהירות ההליכה של בועז.

ביום שני יצאו אורי ובועז להליכה באותו הזמן. כל אחד מהם יצא מאותה הנקודה שבה עצר ביום ראשון, והמשיך ללכת באותו הכיוון שהלך ביום ראשון. בועז הקטין את מהירות הליכתו ב- v קמ״ש
ואורי הגדיל את מהירות הליכתו ב- v קמ״ש.
שניהם עצרו כאשר המרחק ביניהם היה 27 ק״מ.

ג. מצאו כמה דקות הלך אורי ביום שני.

2) נתונה סדרה חשבונית: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ ...,\ a_{3n}$ שבה $3n$ איברים, וההפרש שלה הוא d.
נסמן ב- S_n^* את הסכום של n האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכיחו כי: $S_n^* = \frac{1}{3}\cdot S_{3n}$.

נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של n האיברים האמצעיים שווה ל-0.

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי מתקיים: $a_1 = 19\cdot|d|$.

ג. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

מוחקים כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה: $a_2\ ,\ a_5\ ,\ a_8\ ,\ ...\ ,\ a_{3n-4}$. סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 54.

ד. מצאו את d.

3) עיתון יומי המופץ למנויים שגרים בחיפה או בתל אביב בלבד, אמור להישלח אל ביתם בכל יום עד השעה 6:00. מערכת העיתון ערכה סקר בקרב המנויים, ושאלה בנוגע ליום מסוים אם הם קיבלו את העיתון בזמן. כל המנויים השתתפו בסקר וכל אחד מהם ענה כן או לא.

מתוצאות הסקר עולה כי ההסתברות לבחור באקראי מנוי שקיבל את העיתון בזמן מבין המנויים שגרים בחיפה היא $\frac{2}{3}$, וההסתברות לבחור באקראי מנוי שגר בחיפה מבין המנויים שקיבלו את העיתון בזמן היא $\frac{5}{7}$.

נסמן ב- p את ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין כל המנויים גר בחיפה.
בוחרים באקראי אחד מן המנויים.

א. הביעו באמצעות p את ההסתברות שהמנוי שנבחר גר בתל אביב וקיבל את העיתון בזמן.

נתון כי מספר המנויים שגרים בתל אביב ולא קיבלו את העיתון בזמן גדול פי 1.5 ממספר המנויים שגרים בתל אביב וקיבלו את העיתון בזמן.

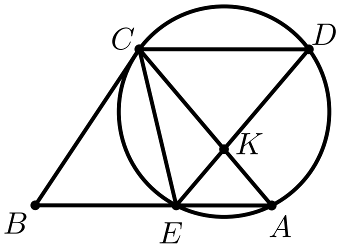
ב. כמה אחוזים מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן?

מבין המנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן, בוחרים באקראי שני מנויים.

ג. מהי ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל אביב והשני שנבחר גר בחיפה?

באותו היום התקשרו למערכת העיתון 6 מנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מהם גרים בחיפה?



4) מנקודה B, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה C, וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו-A, כמתואר בסרטוט.
הנקודה D נמצאת על המעגל כך שהמיתר CD מקביל למיתר EA. המיתרים ED ו-AC נחתכים בנקודה K.

א. הוכיחו: $\Delta CEB \sim \Delta DCE$.

נתון: $AK = 3$, $ED = 7$. נסמן את שטח המשולש CEK ב- S .

ב. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CKD.

נתון: $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$.

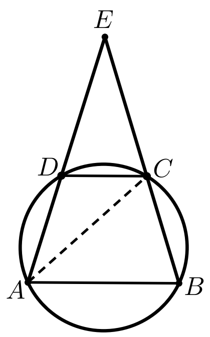
ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEB.

הנקודה O היא מרכז המעגל.

ד. הוכיחו: $\sphericalangle COE = \sphericalangle CKE$.

נתון: $\sphericalangle CAE = 45°$.

ה. הסבירו מדוע הנקודות E , C , O ו-K נמצאות על מעגל אחד.



5) נתון טרפז ABCD $(AB \| DC)$, החסום במעגל.
המשכי הצלעות AD ו-BC נפגשים בנקודה E, כמתואר בסרטוט.
נתון: $\sphericalangle ACB = 60°$.
נסמן: $\sphericalangle CDE = \alpha$, $AC = k$.

א. (1) מצאו את זוויות המשולש ACE
(הביעו באמצעות α אם יש צורך).
(2) הביעו באמצעות α ו- k את אורכי הצלעות AB ו-DC.

נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 3 משטח המשולש DCE.

ב. מצאו את גודל הזווית α.

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו אורך התיכון לצלע EC במשולש AEC הוא 63.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-a^2}{(x-3)^2}$, $0<a<3$ הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים (1)-(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעור ה-x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{x^2}{(x-3)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) הוכיחו כי גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$, על ידי הישר: $x=1$ ועל ידי ציר ה-y.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2+x}}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.

(3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

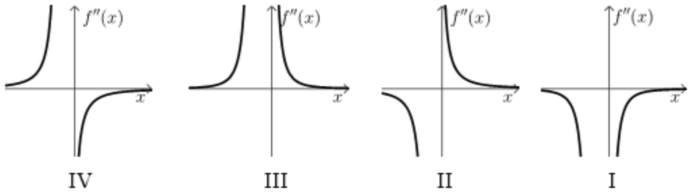
(4) מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקציה $f(x)$.

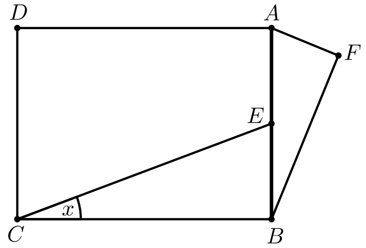
נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. היעזרו בגרף הפונקציה $f(x)$, וקבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$. נמקו את קביעתכם.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים: $x=1$ ו-$x=2$.





8) הנקודה E היא אמצע הקטע AB.
על הקטע AB בונים מלבן ABCD
ומשולש ישר זווית AFB, $\sphericalangle AFB = 90°$,
כמתואר בסרטוט.
נתון: $\sphericalangle ECB = x$, $\sphericalangle FAB = 2x$.
נסמן את אורך הקטע AB ב- h.

א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור x? הסבירו את תשובתכם.

ב. הביעו באמצעות x ו- h את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF.

ג. מצאו את הערך של x שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.

ד. בעבור הערך של x שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן ABCD לשטח המשולש AFB.

תשובות סופיות:

1) א. אורי - 10 קמ"ש, סמדר - 30 קמ"ש.
ב. אורי - 4 קמ"ש, סמדר - 6 קמ"ש.
ג. 24 דקות.

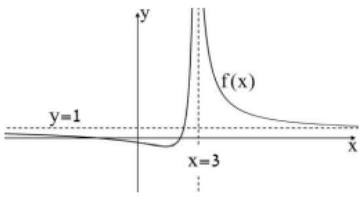
2) א. הוכחה. ב. הפרש הסדרה שלילי. ג. 39 איברים. ד. $d=-3$

3) א. $\frac{4}{15}p$ ב. 56% ג. $\frac{30}{121}$ ד.
0.92

4) א. הוכחה. ב. $\frac{4}{3}S$ ג. $\frac{175}{96}S$ ד. הוכחה.
ה. הוכחה.

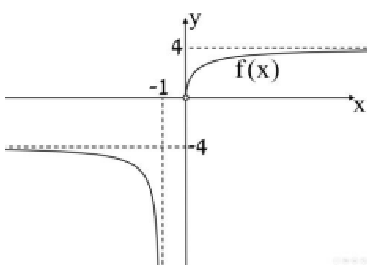
5) א. (1). $\sphericalangle E=180-2\alpha°$, $\sphericalangle ECA=120°$, $\sphericalangle EAC=2\alpha-120°$
(2). $AB=\frac{\sqrt{3k}}{2\sin\alpha}$, $CD=\frac{k\sin(2\alpha-120)}{\sin\alpha}$ ב. $\alpha=75°$ ג. $k=6$
ב. $\alpha=30°$ ג. $R=4$ ד. 2.07

6) א. (1). $x\neq 3$ (2). $x=3$, $y=1$ (3). $(a,0)$, $(-a,0)$, $\left(0,\frac{-a^2}{9}\right)$
(4). $x=\frac{a^2}{3}$ מינימום. (5). סרטוט:



ב. (1). הוכחה. (2). $\frac{a^2}{6}$

7) א. (1). $x>0$ או $0<-1$. (2). לא. (3). $y=4$, $y=-4$, $x=-1$
(4). תחומי עלייה: $x>0$, תחומי ירידה: $x<-1$.
ב. סרטוט: ג. גרף I ד. 0.435



8) א. $0<x<45$ ב. $\frac{h}{2\sin x}-h\cos(2x)$ ג. $x=30°$ ד. 4

בגרות 2023 מועד מיוחד:

ענה על חמש מן השאלות 1-8, (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) רוני ושיר יצאו בשעה 10:00 לריצה לאורך מסלול AB.
רוני יצאה מנקודה A ושיר יצאה מנקודה B.
הן רצו זו לקראת זו ונפגשו בשעה 10:40.
כל אחת מהן רצה במהירות קבועה.
מהירות הריצה של רוני הייתה גבוהה פי 1.4 ממהירות הריצה של שיר.

א. הביעו את אורך המסלול AB באמצעות מהירות הריצה של שיר.

רוני עצרה במקום המפגש למנוחה של שעה, ואילו שיר המשיכה לרוץ באותה המהירות שבה היא רצה לפני כן, עד שהגיעה לנקודה A.
מיד כשהגיעה שיר לנקודה A היא רצה בחזרה לנקודה B, במהירות הגבוהה פי 1.5 ממהירותה ההתחלתית. מייד בסוף המנוחה שלה, המשיכה רוני להתקדם בהליכה לכיוון נקודה B.
מהירות ההליכה של רוני הייתה נמוכה ב-6.6 קמ״ש ממהירות הריצה שלה.
רוני ושיר הגיעו לנקודה B בדיוק באותה השעה.

ב. מצאו את מהירות הריצה ההתחלתית של שיר.

ג. באילו שעות, לאחר הפגישה הראשונה, היה המרחק בין רוני לשיר 3 ק״מ?
מצאו את שתי האפשרויות.

2) נתונה סדרה חשבונית A ובה $2n$ איברים (n הוא מספר טבעי).
d הוא הפרש הסדרה $(d \neq 0)$.

מגדירים סדרה נוספת B באופן הזה: $b_t = \frac{a_t + a_{t+1}}{2}$.

בסדרה B יש $2n-1$ איברים.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה חשבונית, והביעו באמצעות d את ההפרש שלה.

נסמן ב- S_A את סכום האיברים בסדרה A.
נסמן ב- S_B את סכום האיברים בסדרה B.

ב. הוכיחו: $\frac{S_A}{2n} = \frac{S_B}{2n-1}$.

נתון: $S_A = \frac{66}{65} \cdot S_B$, $S_A = 220 + S_B$.

ג. (1) מצאו את n.
(2) מצאו את סכום שני האיברים האמצעיים בסדרה A.

3) כדי להתקבל ללימודים בפקולטה מסוימת מועמד צריך להיבחן בשני מבחנים.
ההסתברות שמועמד יצליח במבחן הראשון היא P , $(P > 0.5)$.
אם המועמד הצליח במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני היא: $P + 0.1$.
אם המועמד נכשל במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני היא: $P - 0.4$.
נתון כי ההסתברות שהמועמד יצליח בדיוק במבחן אחד מבין השניים היא $\frac{1}{4}$.

א. מצאו את P.

כדי להתקבל ללימודים בפקולטה המועמד צריך להצליח בשני המבחנים.

ב. ידוע כי מועמד הצליח לפחות במבחן אחד. מהי ההסתברות שהוא התקבל לפקולטה?

שלושה מועמדים נבחנו בשני המבחנים.

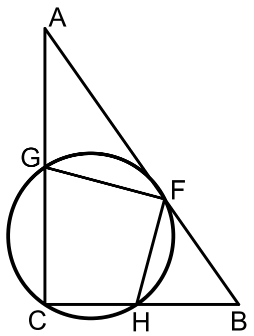
ג. מהי ההסתברות ששני מועמדים מבין השלושה התקבלו לפקולטה ואחד מהם נכשל בשני המבחנים?

n מועמדים נבחנו בשני המבחנים $(n \geq 2)$.

ד. הביעו באמצעות n את ההסתברות שלפחות מועמד אחד התקבל לפקולטה וגם לפחות מועמד אחד לא התקבל לפקולטה.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית, $\sphericalangle ACB = 90°$.
הנקודות H, G ו-F נמצאות על הצלעות CB, AC ו-AB בהתאמה,
כך שהמרובע GCHF חסום במעגל (ראו סרטוט).
נתון: AB משיק למעגל בנקודה F, $AB \parallel GH$.



א. הוכיחו: $FG = FH$.

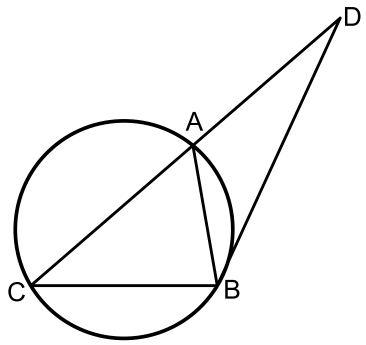
ב. (1) מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle ACF$.

(2) הוכיחו: $\Delta GFC \sim \Delta FBC$.

קוטר המעגל היוצא מנקודה F חותך את הצלע AC בנקודה E.

ג. הוכיחו: $\sphericalangle FEB = \sphericalangle FCB$.

5) המשולש ABC חסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R. המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך הצלע CA בנקודה D, כמתואר בסרטוט. נסמן: $\sphericalangle ABD=\alpha$. נתון: $\sphericalangle DBC=120°$.



א. הביעו את אורכי הצלעות AB ו-BC באמצעות R ו- α , אם יש צורך.

נתון: היחס בין שטח המשולש BDC ובין שטח המשולש BDA הוא 1.8.

ב. מצאו את α .

נתון כי רדיוס המעגל החסום במשולש BDA הוא 6.

ג. מצאו את R.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin(x)\cdot\cos^3(x)$ המוגדרת בתחום: $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

א. (1) האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית? נמקו.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

(3) סרטטו (בקו מקווקו) סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים שבה סרטטתם את גרף הפונקציה $f(x)$.

ענו על סעיף ג בעבור התחום שבו מוגדרות שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

ג. מצאו את המרחק המינימלי בין הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+\sqrt{x^2-9}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ וכלפי מטה $(\cap)$ של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x)=-f(-x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

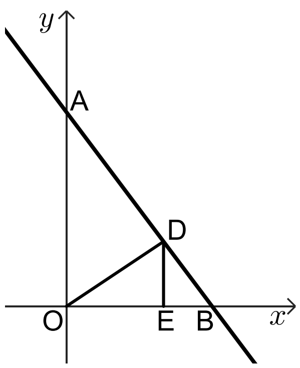
ג. באותה מערכת צירים שבה סרטטתם סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, הוסיפו בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

נתון: $a>5$ הוא פרמטר.

ד. סדרו את הביטויים I-III שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר (כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה).

I. $\int_{a}^{a+1}\left(f(x)-h(x)\right)dx$ II. $\int_{a+1}^{a+2}\left(f(x)-h(x)\right)dx$ III. $\int_{-a+1}^{-a+2}\left(f(x)-h(x)\right)dx$

8) ישר ששיפועו 2- חותך את החלק החיובי של ציר ה- x בנקודה B, ואת החלק החיובי של ציר ה-y בנקודה A.
הנקודה D נמצאת על הישר AB ברביע הראשון.
הנקודה E נמצאת על ציר ה- x כך שהקטע DE מקביל לציר ה- y .
הנקודה O היא ראשית הצירים, כמתואר בסרטוט.
נסמן את אורך הקטע OE ב- p .



נתון: שטח המשולש OED הוא $\frac{p}{2}$.

א. הביעו באמצעות p את משוואת הישר AB.

ב. מצאו את הערך של p שבעבורו היחס בין שטח המשולש OED ובין שטח המשולש ABO הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

1) א. $AB=1.6x$ ב. 9 קמ"ש. ג. $11:00$, $12:16$.

2) א. הוכחה, ההפרש הוא d. ב. הוכחה. ג. (1) $n=33$ (2) 440.

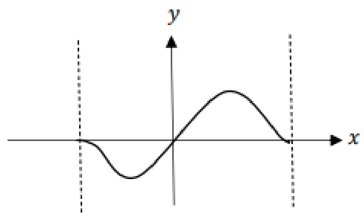
3) א. $p=0.65$ ב. $\frac{39}{59}$ ג. 0.18715 ד. $1-\left(\left(\frac{39}{80}\right)^n+\left(\frac{41}{80}\right)^n\right)$

4) א. הוכחה. ב. (1) 45° (2) הוכחה. ג. הוכחה.

5) א. $AB=2R\sin\alpha$, $BD=\sqrt{3}R$ ב. $\alpha=40.20^\circ$ ג. $R=15.396$

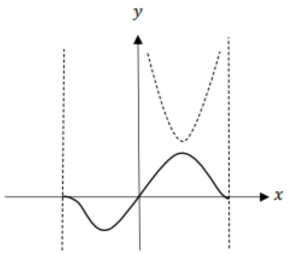
6) א. (1) אי זוגית. (2) $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$, $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ (3) $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{6},0.324\right)$ מקסימום, $\left(-\frac{\pi}{6},-0.324\right)$ מינימום, $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ מקסימום.

(4) שרטוט:



ב. (1) $0<x<\frac{\pi}{2}$ (2) $\left(\frac{\pi}{6},1.756\right)$ מינימום.

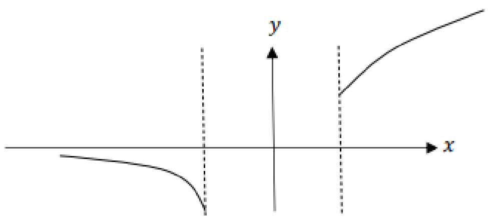
(3) שרטוט:



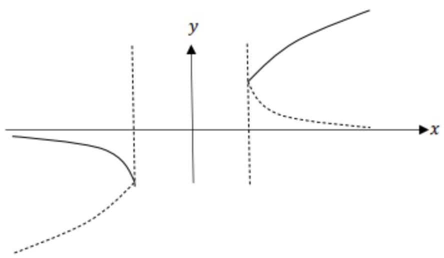
ג. 1.432

7) א. (1) $3\le x$ או $x\le -3$ (2) אין. (3) עלייה: $3<x$, ירידה: $x<-3$.
(4) קעירות כלפי מטה: $3<x$ או $x<-3$, קעירות כלפי מעלה: אין.

ב. שרטוט:



ג. שרטוט:



ד. $III < I < II$

8) א. $y=-2x+1+2p$ ב. $p=\frac{1}{2}$