

# שאלון 582

פרק 21

## פתרון בידאו של בחינות 2022

|    |       |             |
|----|-------|-------------|
| 1  | ..... | חורף        |
| 5  | ..... | מועד נבצרים |
| 9  | ..... | קיץ מועד א  |
| 14 | ..... | קיץ מועד ב  |

## בגרות 2022 מועד חורף:

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה –  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

**שים לב!** אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

### פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

#### מספרים מרוכבים

- (1) הנקודה  $(t, 0)$  היא מוקד של פרבולה קנונית ומוקד של אליפסה קנונית.  
 $t$  הוא פרמטר חיובי.  
 אורך הציר הראשי של האליפסה הוא  $4t$ .  
 בסעיפים שלפניך הבע את תשובותיך באמצעות  $t$ , אם יש צורך.  
 א. מצא את משוואת הפרבולה ואת משוואת האליפסה.  
 המדריך של הפרבולה חותך את האליפסה בשתי נקודות, A ו-B.  
 הנקודה A נמצאת מעל לנקודה B.  
 ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.  
 ישר המאונך לציר ה- $x$  עובר במוקד הפרבולה וחותך את הפרבולה בשתי נקודות C ו-D.  
 הנקודה C נמצאת מעל לנקודה D.  
 ג. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.  
 ד. (1) הסבר מדוע ארבע הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על מעגל אחד.  
 (2) מצא את שיעורי מרכז המעגל הזה.

- (2) נתונים שני מישורים:  $\pi_1: z-3=0$ ,  $\pi_2: ay+z-8=0$ ,  $a$  הוא פרמטר שונה מ-0. הזווית בין המישורים היא  $45^\circ$ .  
 א. מצא את הערכים האפשריים עבור הפרמטר  $a$ .  
 הנקודה  $A(2, -2, 6)$  נמצאת על אחד המישורים הנתונים.  
 מן הנקודה A הורידו אנך למישור האחר.  
 האנך חותך את המישור האחר בנקודה B.  
 ב. מצא את אורך הקטע AB.  
 $l$  הוא ישר החיתוך בין שני המישורים  $\pi_1$  ו- $\pi_2$ .  
 ג. מצא את ההצגה הפרמטרית של  $l$ .  
 מן הנקודה B העבירו אנך לישר  $l$ . האנך חותך את הישר  $l$  בנקודה C.  
 ד. מצא את שטח המשולש ABC (תוכל לסרטט את המשולש במערכת צירים לשם כך).

(3) נתונים שני מספרים מרוכבים :  $z_1 = (2a^2 + 5a + 4) + (2a^2 + 3a + 2)i$

$z_2 = (a^2 + 8a + 8) + (2 - a^2 + 2a)i$

$a$  הוא פרמטר ממשי.

א. מצא את הערך של  $a$  שבעבורו המספרים  $z_1$  ו- $z_2$  צמודים זה לזה.  
הצב את הערך של  $a$  שמצאת וענה על הסעיפים ב-ג.

נתונים המספרים :  $w_1 = \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$  ,  $w_2 = \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$  .  $n$  הוא מספר טבעי.

ב. הוכח כי לכל  $n$  טבעי :

(1) המספר  $w_1$  הוא מספר ממשי.

(2) המספר  $w_2$  הוא מספר מדומה טהור.

ג. נתונה המשוואה :  $|z - p| = m$  .  $p$  ו- $m$  הם פרמטרים ממשיים,  $z$  הוא מספר מרוכב. מה הם הערכים של  $p$  ו- $m$  שבעבורם המשוואה הנתונה מתארת מעגל במישור גאוס שעליו נמצאים המספרים  $w_1$  ו- $w_2$  לכל  $n$  טבעי? נמק.

ענה על אחת מן השאלות 4-5 ( $33\frac{1}{3}$  נקודות).

**שים לב!** אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

### פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + m}{4}$  .  $m$  הוא פרמטר.

ידוע כי הישר  $y = -1$  הוא אסימפטוטה של הפונקציה  $f(x)$  .

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$  .

(2) מצא את  $m$  .

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  .

נתונה הפונקציה :  $g(x) = \frac{1}{f(x)} + 1$

ג. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$  .

(2) מצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה  $g(x)$  .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

נתון פרמטר  $t$  בתחום  $0 < t < \ln 4$ .

ה. מצא את הערך של  $t$  שבעבורו ערך הביטוי  $\int_0^t g(x) dx$  הוא מקסימלי.

נמק את תשובתך.

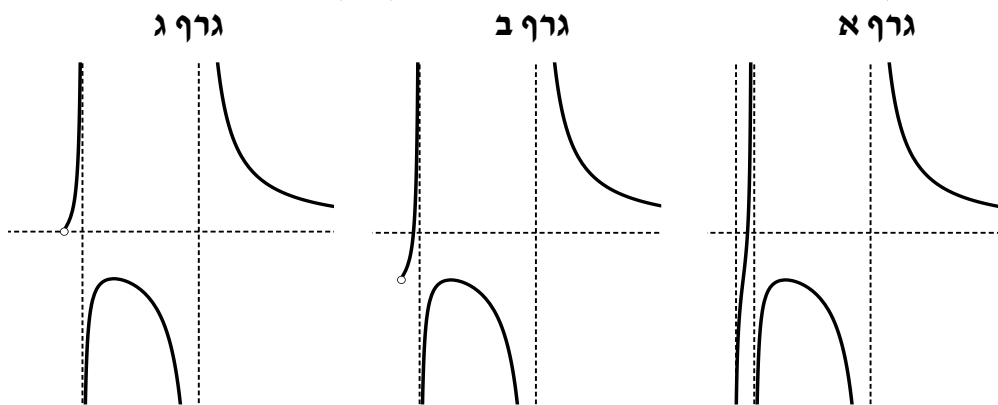
(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{(\ln(x))^2 - 1}$

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה  $f(x)$ .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. לפניך שלושה גרפים שבהם לא מסומנים הצירים  $x$  ו- $y$ . הקווים המרוסקים מייצגים את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים, והעיגול הריק מייצג נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת. קבע איזה מן הגרפים מתאים לגרף הפונקציה  $f(x)$ , העתק אותו למחברתך, והוסף בו את מערכת הצירים. פרט של שיקוליד.



ג. (1) האם יש פתרון למשוואה  $f(x) = 1$ ? נמק את תשובתך.

(2) מהו הערך של  $k$  שבעבורו יש למשוואה  $f(x) = k$  פתרון יחיד?

נמק את תשובתך.

נתונות הפונקציות:  $g(x) = \frac{1}{f(x)-1}$ ,  $h(x) = (\ln(x))^2 + 1$

נסמן מלבן ABCD. הנקודות A ו-B הן שתי נקודות על ציר ה- $x$  שבהן הפונקציה  $g(x)$  אינה מוגדרת. הנקודות C ו-D נמצאות על גרף הפונקציה  $h(x)$ .

ד. מהו שטח המלבן ABCD? נמק את תשובתך.

## תשובות סופיות:

(1) א. משוואת האליפסה:  $\frac{x^2}{4t^2} + \frac{y^2}{3t^2} = 1$ , משוואת הפרבולה:  $y^2 = 4tx$ .

ב.  $A\left(-t, \frac{3t}{2}\right), B\left(-t, -\frac{3t}{2}\right)$ . ג.  $C(t, 2t), D(t, -2t)$ .

ד. (1). טרפז שווה שוקיים. (2).  $\left(\frac{7t}{16}, 0\right)$ .

(2) א.  $a = \pm 1$ . ב. 3. ג.  $x = (0, -5, 3) + t(1, 0, 0)$ .

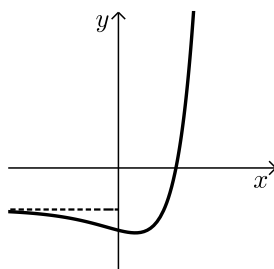
ד. 4.5.

(3) א.  $a = -1$ . ב. (1). הוכחה. (2). הוכחה.

ג.  $m = 1, p = 0$ .

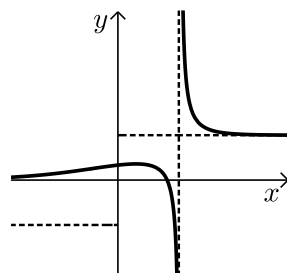
(4) א. (1). כל  $x$ . (2).  $m = -4$ . (3).  $(\ln 4, 0), (0, -1.5)$ .

(4).  $\min\left(\ln \frac{3}{2}, \frac{-25}{16}\right)$ . ב.



ג. (1).  $x \neq \ln 4$ . (2).  $y = 0, y = 1, x = \ln 4$ .

ה.  $t = \ln 3$ .



(5) א. (1).  $x \neq \frac{1}{e}, e, x > 0$ . (2).  $y = 1, x = \frac{1}{e}, x = e$ .

(3). תחומי עלייה:  $0 < x < \frac{1}{e}$  או  $\frac{1}{e} < x < 1$ .

תחומי ירידה:  $e < x$  או  $1 < x < e$ . ב. גרף ג'.

ג. (1). לא. (2).  $k = 0$ . ד.  $S = \frac{2e^2 - 2}{e} = 2\left(e - \frac{1}{e}\right)$ .

## בגרות 2022 מועד חורף נבצרים:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה –  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

**שים לב!** אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

### פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

#### מספרים מרוכבים

- (1) מעגל שמרכזו בנקודה M חסום במשולש ABC. הצלע AB נמצאת על הישר:  $2x + y - 13 = 0$  והצלע AC נמצאת על הישר:  $-x + 2y + 4 = 0$ . מרכז המעגל M נמצא על הישר:  $y = x - 1$ . ראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש ABC.
  - א. מצא את משוואת המעגל החסום במשולש ABC.
  - נתון כי הישר BM מאונך לציר ה-x.
  - ב. מצא את משוואת הצלע BC.
  - ג. מצא את המרחק בין מרכז המעגל החסום במשולש ABC ובין מרכז המעגל החוסם את המשולש הזה.

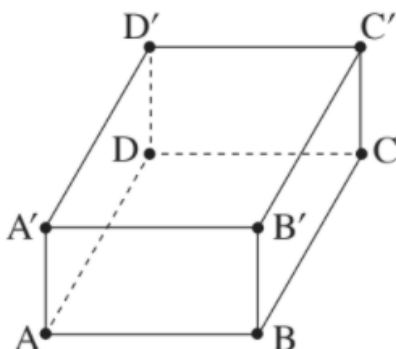
- (2) נתונה מנסרה ישרה ABCDA'B'C'D', שבסיסה הוא מעוין ABCD (ראה סרטוט).

נקודה F נמצאת על המישור ACD' כך ש:  $\overrightarrow{D'F} = t\overrightarrow{D'A} + \frac{1}{4}\overrightarrow{D'C}$ , t הוא פרמטר.

נתון: DF מאונך למישור ACD',  $\angle ADC = 120^\circ$ ,  $|\overrightarrow{DC}| = 4$ .

נסמן:  $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$ .

- א. בטא את  $\overrightarrow{DF}$  באמצעות:  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ .
- ב. מצא את t.
- ג. חשב את נפח המנסרה.
- נתון: הנקודה D היא ראשית הצירים, הקודקוד A נמצא על החלק החיובי של ציר ה-x, הקודקוד D' נמצא על החלק החיובי של ציר ה-z,  $C = (-2, \sqrt{12}, 0)$ .
- ד. מצא את שיעורי הנקודה F.



(3) ענה :

- א. פתור את המשוואה :  $(z+i)^2 - 2 - 2\sqrt{3}i = 0$ ,  $z$  הוא מספר מרוכב.
- נסמן את החלקים הממשיים של פתרונות המשוואה ב-  $a_1$  וב-  $a_2$  כך ש-  $a_1 < a_2$ .
- נתונים שני מקומות גאומטריים :
- I.  $|z - ia_1| = \sqrt{3}$
- II.  $|z - ia_2| = \sqrt{3}$
- ב. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.
- הישר  $y = x$  נמצא במישור גאוס. ישר זה חותך את המקומות הגאומטריים שסרטטת בסעיף ב בראשית הצירים ובשתי נקודות אחרות שמיוצגות על ידי שני המספרים המרוכבים  $w_1$  ו-  $w_2$ .
- ג. פתור את המשוואה :  $z^3 = w_1 \cdot \overline{w_1} \cdot w_2 \cdot \overline{w_2}$ ,  $z$  הוא מספר מרוכב.

### פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

- (4) נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{ax}{\ln(x) - a}$ ,  $a > 0$  הוא פרמטר.
- בסעיפים א-ב, בטא את תשובותיך באמצעות  $a$ , אם יש צורך.
- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגה.
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- נתונה הפונקציה :  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
- ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .
- (2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , וקבע את סוגה.
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .
- נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$ , על ידי האנך לציר ה- $x$  העובר בנקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , על ידי הישר  $x = e^{a+2}$  ועל ידי ציר ה- $x$ , הוא 3.
- ג. מצא את  $a$ .

5 נתונה הפונקציה :  $f(x) = 9^{-x} - 6 \cdot 3^{-x} + m$ ,  $m$  הוא פרמטר.

א. בתת-סעיפים (1)-(3) בטא את תשובותיך באמצעות  $m$ , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

נתון כי גרף הפונקציה  $f(x)$  משיק לציר ה- $x$ .

ב. מצא את הערך של הפרמטר  $m$ .

ג. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

(2) היעזר בסקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $\ln(f(x))$ .

ד. הסבר מדוע :  $\int_0^1 [\ln(f(x)) - \ln(4)] dx < \ln\left(\frac{9}{4}\right)$ .

תשובות סופיות:

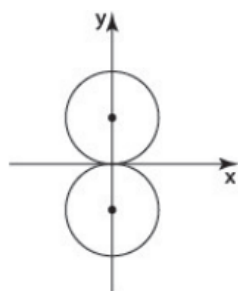
1) א.  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$  ב.  $y = 2x + 1$  ג. 2.5

2) א.  $\overrightarrow{DF} = t\overrightarrow{u} + \frac{1}{4}\overrightarrow{v} + \left(\frac{3}{4} - t\right)\overrightarrow{w}$  ב.  $t = \frac{1}{4}$  ג.  $V = 16\sqrt{3}$

ד.  $F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{12}}{4}, 1\right)$

3) א.  $Z_1 = -\sqrt{3} - 2i$ ,  $Z_2 = \sqrt{3}$  ב. להלן סרטוט:

ג.  $\sqrt[3]{36}\text{cis}240^\circ$ ,  $\sqrt[3]{36}\text{cis}120^\circ$ ,  $\sqrt[3]{36}$



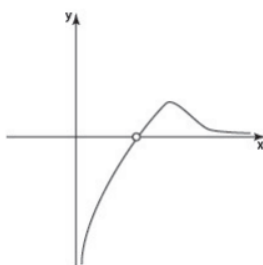
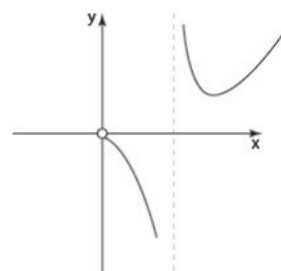
2)  $(e^{a+1}, ae^{a+1})$  מינימום.

4) א. (1)  $0 < x \neq e^a$

ב. (1)  $0 < x \neq e^a$  (2)  $\left(e^{a+1}, \frac{1}{ae^{a+1}}\right)$  מקסימום.

(3) להלן סרטוט:

(3) להלן סרטוט: ג.  $a = \frac{1}{2}$



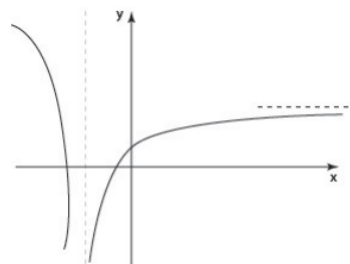
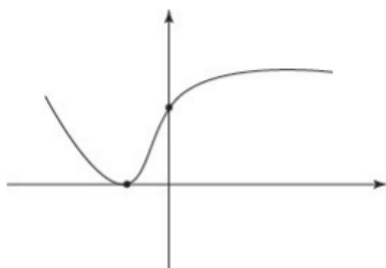
(2)  $y = m$  (3)  $(-1, m-9)$  מינימום.

5) א. (1) כל  $x$ .

ג. (1) להלן סרטוט:

ב.  $m = 9$

(2) להלן סרטוט:



ד. הוכחה.

## בגרות 2022 מועד קיץ א':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה –  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

**שים לב!** אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

### פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

#### מספרים מרוכבים

(1) נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.

מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא:  $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ , הוא פרמטר חיובי.

מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא:  $(x-15)^2 + y^2 = R^2$ . אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9, והיחס בין אורכי הרדיוסים של המעגלים הוא:  $1:2$ ,  $r < R$ .

א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו M.

נתון כי:  $a < 15$ .

ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.

ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.

ד. הישר:  $mx - y + n = 0$  הוא משיק משותף לשני המעגלים.

מצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).

נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ.

משוואות המעגלים הן:  $(x-t)^2 + y^2 = r^2$ ;  $(x-k)^2 + y^2 = R^2$ , ו- k הם

פרמטרים. ערכי הרדיוסים r ו-R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.

ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים

גם למעגלים האלה? אם כן – מצאו את t ואת k. אם לא – נמקו.

(2)

נתונות ארבע נקודות הנמצאות באותו המישור :  
 $A(4, p, -1)$  ,  $B(7, 5, 5)$  ,  $C(1, -1, 2)$  ,  $D(-2, 5, -4)$  ,  $p$  הוא פרמטר.

- מצאו את משוואת המישור ABCD.
- חשבו את ערך הפרמטר  $p$ .
- הוכיחו כי המרובע ABCD הוא ריבוע.
- הנקודה S היא קודקוד של פירמידה SABCD שבסיסה ABCD. המקצוע SC מונח על הישר :  $x = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$ . נתון כי נפח הפירמידה הוא 81.
- מצאו את שיעורי הנקודה S (שתי אפשרויות).
- נתון מישור נוסף  $\pi$  המאונך למקצוע SC.
- מצאו את הזווית שבין המישור ABCD ובין המישור  $\pi$ .

(3)

נתונה המשוואה :  $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$  ,  $z$  הוא מספר מרוכב.  
 $z_1$  הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

- מצאו את משוואת המעגל.
- חוסמים במעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר  $z_1$ .
- חשבו את שטח הריבוע.
- מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.
- מכפילים ב-  $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$  כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב-  $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 60^\circ) + i\sin(\alpha + 60^\circ))$  כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי. הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.
- נתון :  $r_1$  ו-  $r_2$  חיוביים,  $r_1 \neq r_2$ .
- מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את התשובה.
- נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי 1.2 משטח הריבוע בסעיף ב.
- חשבו את  $r_1 \cdot r_2$ .

## פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$  המוגדרת לכל  $x$ .

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות

לציר ה- $y$  (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $y$ .

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{1-e^x}{e^x-x}$ , המוגדרת לכל  $x$ .

ב. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה  $g(x)$  המאונכות

לציר ה- $y$ .

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $g(x)$  עם ציר

ה- $x$  (אם יש כאלה).

(3) הוכיחו כי:  $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x-x)^2}$ .

ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  ומצאו כמה נקודות מקסימום

וכמה נקודות מינימום יש לפונקציה  $g(x)$ . נמקו את התשובה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$

ועל ידי הישר:  $x = -1$ .

5) נתונה הפונקציה :  $f(x) = x + \ln(x^2 - 15)$  .

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$  .

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  , וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  .

$f'(x)$  היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  .

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  .

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.

נתונה הפונקציה :  $g(x) = e^{f(x)}$  המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה  $f(x)$  .

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$  , וקבעו את סוגה.

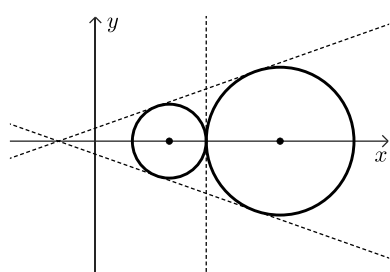
(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה  $g(x)$  .

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה :  $y = f'(x) \cdot g(x)$  , על ידי

ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים :  $x = -6$  ו- $x = -5$  .

## תשובות סופיות:

(1) א. משוואת המעגל שמרכזו N :  $(x-15)^2 + y^2 = 36$ , משוואת המעגל שמרכזו M :



ב. להלן סקיצה :  $(x-6)^2 + y^2 = 9$ ,  $(x-24)^2 + y^2 = 9$

ג.  $x=9$  ד.  $m_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$ ,  $n_1 = \frac{3}{\sqrt{8}}$ ,  $m_2 = -\frac{1}{\sqrt{8}}$ ,  $n_2 = -\frac{3}{\sqrt{8}}$

ה.  $t = -21$ ,  $k = -21$

(2) א.  $2x - y - 2z + 1 = 0$  ב.  $p = 11$  ג. הוכחה.

ד.  $(-2, -10, -1)$ ,  $(4, 8, 5)$ ,  $72.5^\circ$

(3) א.  $x^2 + y^2 = 10$  ב. 20 ג.  $(-3, -1)$ ,  $(-1, 3)$ ,  $(1, -3)$

ד. מקבילית. ה. 2.4

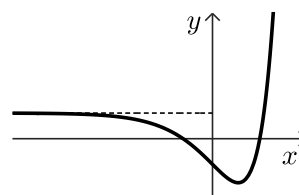
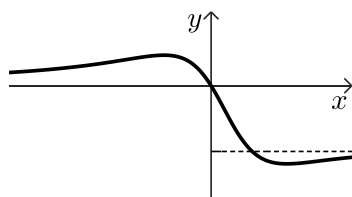
(4) א. (1)  $y = 1$  :  $x \rightarrow \infty$  א. (2)  $(0, -1)$  א. (3) עלייה :  $x > 1$ , ירידה :  $x < 1$ .

א. (4) להלן סקיצה : ב. (1)  $x \rightarrow \infty : y = -1$ ,  $x \rightarrow -\infty : y = 0$

ב. (2)  $(0, 0)$  ב. (3) הוכחה.

ג. נק' מינימום אחת, נק' מקסימום אחת.

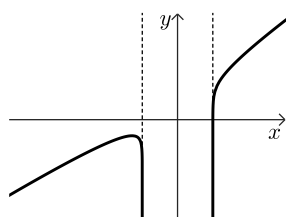
ד. להלן סקיצה :



ה.  $\ln \frac{e+1}{e} \approx 0.31$

א. (2)  $x = -\sqrt{15}$ ,  $x = \sqrt{15}$

א. (4) להלן סקיצה :



(5) א. (1)  $x < -\sqrt{15}$ ,  $x > \sqrt{15}$

א. (3)  $\max(-5, -2.7)$

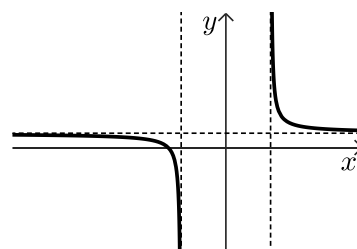
ב. (1)  $x < -\sqrt{15}$ ,  $x > \sqrt{15}$

ב. (2)  $x = -\sqrt{15}$ ,  $x = \sqrt{15}$ ,  $y = 1$

ב. (3)  $(-5, 0)$

ג. (1)  $\max(-5, 0.067)$

ב. (4) להלן סקיצה :



ג. (2) עלייה :  $x < -5$ ,  $x > \sqrt{15}$ , ירידה :  $-5 < x < -\sqrt{15}$  ד. 0.015

## בגרות 2022 מועד קיץ ב':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה –  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

**שים לב!** אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

### פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

#### מספרים מרוכבים

(1) נתונות הנקודות  $A(-5,3)$  ו-  $B(0,-2)$ .

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע  $AB$  הוא מיתר שלהם.

מעגל  $M$  הוא אחד מן המעגלים שהקטע  $AB$  הוא מיתר שלהם.  
נקודות החיתוך של המעגל  $M$  עם ציר ה- $x$  הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל  $M$  ואת הרדיוס שלו.

נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל  $M$ .

ג. מהי משוואת האליפסה?

נסמן ב- $F$  את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה- $x$  עובר במוקד השמאלי של האליפסה. הישר חותך את האליפסה בנקודות  $Q$  ו- $T$ , ואת המעגל  $M$  בנקודות  $K$  ו- $L$ .

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש  $KLF$  לבין שטח המשולש  $TQF$ .

(2) נתונה פירמידה  $OABC$  שבסיסה משולש  $ABC$ .

נסמן:  $\vec{OA} = \underline{u}$ ,  $\vec{OB} = \underline{v}$ ,  $\vec{OC} = \underline{w}$ .

נתון:  $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$ ,  $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ .

הנקודה  $H$  מקיימת:  $\vec{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}$ ,  $s, t, k$  הם פרמטרים.

נתון כי  $\vec{OH}$  מאונך לבסיס  $ABC$  של הפירמידה.

א. הוכיחו כי:  $t = s = k$ .

הנקודה  $M$  נמצאת בבסיס  $ABC$  של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

ב. הוכיחו כי:  $\vec{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$ , והסבירו מדוע  $OM$  הוא גובה לבסיס  $ABC$  של הפירמידה.

הנקודה  $P$  נמצאת על הישר  $\ell$  שעליו מונח הגובה לבסיס  $ABC$ .

ג. הביעו באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  את הווקטור  $\vec{OP}$  שבעבורו נפח הפירמידה  $PABC$  כפול מנפח הפירמידה  $OABC$  (שתי אפשרויות).

ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה-x, הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה-y, והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה-z. נתון:  $|u| = a$ .

ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר  $\ell$  שעליו נמצא הקטע OP.

ה. הביעו באמצעות  $a$  את משוואת המישור ABC.

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא  $20\frac{5}{6}$ . חשבו את  $a$ .

(3) המספר:  $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$  נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

$$\text{נתון: } \frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

א. מצאו את  $\alpha$ .

$$\text{נתון: } |2iz| + \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$$

ב. מצאו את  $R$ .

ג. נתונה המשוואה:  $w^9 = \frac{z^3}{27}$  ( $z$  הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר  $\frac{z}{\bar{z}}$  הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

קודקודי הבסיס B ו-C מתאימים למספרים:  $\frac{z}{\bar{z}}$  ו- $\frac{\bar{z}}{z}$ .

קודקוד הראש A מתאים למספר  $z+k$ ,  $k$  הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של  $k$ ?

(2) חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).

**פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות**

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2 e^{a-x^3}$  המוגדרת לכל  $x$ ,  $a$  הוא פרמטר.

א. (1) מצאו את התחום שבו הפונקציה  $f(x)$  חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  לבין ציר ה- $x$  הוא  $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$ .

ב. מצאו את הערך של  $a$ .

הציבו  $a=1$ , וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

הפונקציה  $f(x)$  היא נגזרת של הפונקציה  $g(x)$  ( $g'(x) = f(x)$ ).

ד. (1) מהו תחום העלייה של הפונקציה  $g(x)$ ? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה  $g(x)$ ? נמקו.

נסמן ב- $B$  את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקציה  $g(x)$  הוא הגבוה

מבין כל נקודות הפיתול שלה. נתון כי שיעור ה- $y$  של הנקודה  $B$  הוא  $\frac{e - \sqrt[3]{e}}{3}$ .

ה. מצאו את הפונקציה  $g(x)$ .

(5) נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת את התכונות האלה: הפונקציה מוגדרת לכל  $x$  ורציפה,

הפונקציה היא אי-זוגית, הישר  $y=0$  הוא אסימפטוטה של הפונקציה, ולפונקציה יש

נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם:  $(-1, -a)$ ,  $a$  הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה הפונקציה:  $h(x) = \ln(f(x))$ .

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $h(x)$ .

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $h(x)$

המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של  $a$  שבעבורו גרף הפונקציה  $h(x)$  חותך

את ציר ה- $x$  בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$ , אם ידוע שהגרף שלה חותך

את ציר ה- $x$  בשתי נקודות.

נתון:  $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ .

$g(x)$  היא פונקציה המקיימת:  $g'(x) = f(x)$  וגם:  $g(0) = 0$ .

ג. (1) מצאו את הפונקציה  $g(x)$ .

(2) האם הפונקציה  $g(x)$  היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל:  $\int_{-5}^t g(x) dx$ ,  $t > -5$ .

ד. מהו הערך של  $t$  שבעבורו מתקיים:  $\int_{-5}^5 g(x) dx = 2 \cdot \int_{-5}^t g(x) dx$ ? נמקו.

תשובות סופיות:

(1) א.  $x - y + 3 = 0$  ב.  $M(0,3), R=5$  ג.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  ד.  $\frac{5}{3}$

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

ג.  $\overrightarrow{OP_1} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}, \overrightarrow{OP_2} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$

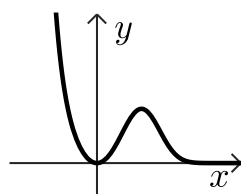
ד.  $\ell = t(1,1,1)$  ה.  $x + y + z - a = 0$  ו.  $a = 5$

(3) א.  $\alpha = 240^\circ$  ב.  $R = 3$  ג. הוכחה.

ד. (1)  $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$  ד. (2)  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(4) א. (1)  $x \neq 0$  א. (2) מינימום:  $x = 0$ , מקסימום:  $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx 0.87$

ב.  $a = 1$  ג. להלן סקיצה: ד. (1) כל  $x$  ד. (2) 2 נקודות.



ה.  $g(x) = \frac{e - e^{1-x^3}}{3}$

(5) א. להלן סקיצה: ב. (1)  $x > 0$  ב. (2)  $x = 0$  ב. (3)  $a > 1$

ג. (1)  $g(x) = 2\ln(1+x^2)$  ב. להלן סקיצה:

ג. (2) זוגית. ד.  $t = 0$

