

פתרון בגרועות במתמטיקה לשאלון 582

פרק 3

פתרון בודאו של בחינות 2022

1		חורף
5		מועד נבצרים
9		קיץ מועד א
14		קיץ מועד ב

בגרות 2022 מועד חורף:

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

- (1) הנקודה $(t, 0)$ היא מוקד של פרבולה קנונית ומוקד של אליפסה קנונית.
 t הוא פרמטר חיובי.
 אורך הציר הראשי של האליפסה הוא $4t$.
 בסעיפים שלפניך הבע את תשובותיך באמצעות t , אם יש צורך.
 א. מצא את משוואת הפרבולה ואת משוואת האליפסה.
 המדריך של הפרבולה חותך את האליפסה בשתי נקודות, A ו-B.
 הנקודה A נמצאת מעל לנקודה B.
 ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
 ישר המאונך לציר ה- x עובר במוקד הפרבולה וחותך את הפרבולה בשתי נקודות C ו-D.
 הנקודה C נמצאת מעל לנקודה D.
 ג. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
 ד. (1) הסבר מדוע ארבע הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על מעגל אחד.
 (2) מצא את שיעורי מרכז המעגל הזה.

- (2) נתונים שני מישורים: $\pi_1: z-3=0$, $\pi_2: ay+z-8=0$, a הוא פרמטר שונה מ-0. הזווית בין המישורים היא 45° .
 א. מצא את הערכים האפשריים עבור הפרמטר a .
 הנקודה $A(2, -2, 6)$ נמצאת על אחד המישורים הנתונים.
 מן הנקודה A הורידו אנך למישור האחר.
 האנך חותך את המישור האחר בנקודה B.
 ב. מצא את אורך הקטע AB.
 l הוא ישר החיתוך בין שני המישורים π_1 ו- π_2 .
 ג. מצא את ההצגה הפרמטרית של l .
 מן הנקודה B העבירו אנך לישר l . האנך חותך את הישר l בנקודה C.
 ד. מצא את שטח המשולש ABC (תוכל לסרטט את המשולש במערכת צירים לשם כך).

(3) נתונים שני מספרים מרוכבים : $z_1 = (2a^2 + 5a + 4) + (2a^2 + 3a + 2)i$

$z_2 = (a^2 + 8a + 8) + (2 - a^2 + 2a)i$

a הוא פרמטר ממשי.

א. מצא את הערך של a שבעבורו המספרים z_1 ו- z_2 צמודים זה לזה.
הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ב-ג.

נתונים המספרים : $w_1 = \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$, $w_2 = \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$. n הוא מספר טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי :

(1) המספר w_1 הוא מספר ממשי.

(2) המספר w_2 הוא מספר מדומה טהור.

ג. נתונה המשוואה : $|z - p| = m$. p ו- m הם פרמטרים ממשיים, z הוא מספר מרוכב. מה הם הערכים של p ו- m שבעבורם המשוואה הנתונה מתארת מעגל במישור גאוס שעליו נמצאים המספרים w_1 ו- w_2 לכל n טבעי? נמק.

ענה על אחת מן השאלות 4-5 ($33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + m}{4}$. m הוא פרמטר.

ידוע כי הישר $y = -1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את m .

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה : $g(x) = \frac{1}{f(x)} + 1$

ג. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון פרמטר t בתחום $0 < t < \ln 4$.

ה. מצא את הערך של t שבעבורו ערך הביטוי $\int_0^t g(x) dx$ הוא מקסימלי.

נמק את תשובתך.

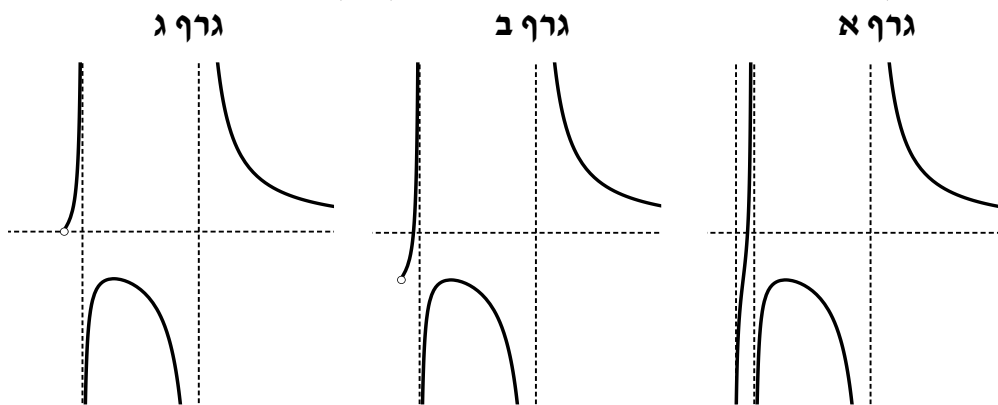
(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{(\ln(x))^2 - 1}$

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. לפניך שלושה גרפים שבהם לא מסומנים הצירים x ו- y . הקווים המרוסקים מייצגים את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, והעיגול הריק מייצג נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת. קבע איזה מן הגרפים מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$, העתק אותו למחברתך, והוסף בו את מערכת הצירים. פרט של שיקוליד.



ג. (1) האם יש פתרון למשוואה $f(x) = 1$? נמק את תשובתך.

(2) מהו הערך של k שבעבורו יש למשוואה $f(x) = k$ פתרון יחיד?

נמק את תשובתך.

נתונות הפונקציות: $g(x) = \frac{1}{f(x)-1}$, $h(x) = (\ln(x))^2 + 1$

נסמן מלבן ABCD. הנקודות A ו-B הן שתי נקודות על ציר ה- x שבהן הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת. הנקודות C ו-D נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$.

ד. מהו שטח המלבן ABCD? נמק את תשובתך.

תשובות סופיות:

(1) א. משוואת האליפסה: $\frac{x^2}{4t^2} + \frac{y^2}{3t^2} = 1$, משוואת הפרבולה: $y^2 = 4tx$.

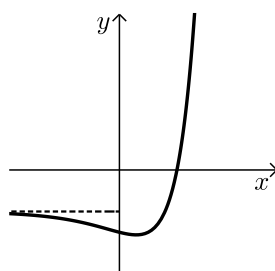
ב. $A\left(-t, \frac{3t}{2}\right), B\left(-t, -\frac{3t}{2}\right)$. ג. $C(t, 2t), D(t, -2t)$.

ד. (1). טרפז שווה שוקיים. (2). $\left(\frac{7t}{16}, 0\right)$.

(2) א. $a = \pm 1$. ב. 3. ג. $x = (0, -5, 3) + t(1, 0, 0)$. ד. 4.5.

(3) א. $a = -1$. ב. (1). הוכחה. (2). הוכחה. ג. $m = 1, p = 0$.

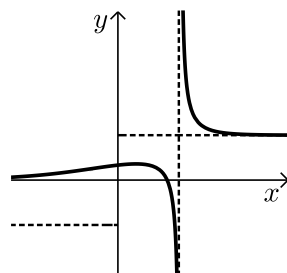
(4) א. (1). כל x . (2). $m = -4$. (3). $(\ln 4, 0), (0, -1.5)$.



(4). $\min\left(\ln \frac{3}{2}, \frac{-25}{16}\right)$. ב.

ג. (1). $x \neq \ln 4$. (2). $y = 0, y = 1, x = \ln 4$.

ה. $t = \ln 3$.



(5) א. (1). $x \neq \frac{1}{e}, e, x > 0$. (2). $y = 1, x = \frac{1}{e}, x = e$.

(3). תחומי עלייה: $0 < x < \frac{1}{e}$ או $\frac{1}{e} < x < 1$.

תחומי ירידה: $e < x$ או $1 < x < e$. ב. גרף ג'.

ג. (1). לא. (2). $k = 0$. ד. $S = \frac{2e^2 - 2}{e} = 2\left(e - \frac{1}{e}\right)$.

בגרות 2022 מועד חורף נבצרים:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

- (1) מעגל שמרכזו בנקודה M חסום במשולש ABC. הצלע AB נמצאת על הישר: $2x + y - 13 = 0$ והצלע AC נמצאת על הישר: $-x + 2y + 4 = 0$. מרכז המעגל M נמצא על הישר: $y = x - 1$. ראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש ABC.
 - א. מצא את משוואת המעגל החסום במשולש ABC.
 - נתון כי הישר BM מאונך לציר ה-x.
 - ב. מצא את משוואת הצלע BC.
 - ג. מצא את המרחק בין מרכז המעגל החסום במשולש ABC ובין מרכז המעגל החוסם את המשולש הזה.

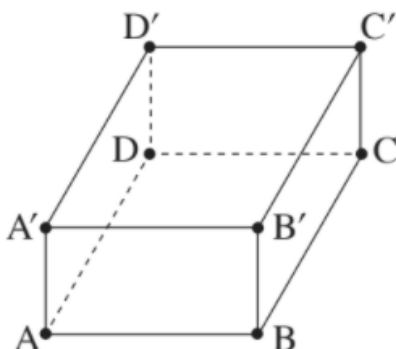
- (2) נתונה מנסרה ישרה ABCDA'B'C'D', שבסיסה הוא מעוין ABCD (ראה סרטוט).

נקודה F נמצאת על המישור ACD' כך ש: $\overrightarrow{D'F} = t\overrightarrow{D'A} + \frac{1}{4}\overrightarrow{D'C}$, t הוא פרמטר.

נתון: DF מאונך למישור ACD', $\angle ADC = 120^\circ$, $|\overrightarrow{DC}| = 4$.

נסמן: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$.

- א. בטא את $\overrightarrow{DF}$ באמצעות: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.
- ב. מצא את t.
- ג. חשב את נפח המנסרה.
- נתון: הנקודה D היא ראשית הצירים, הקודקוד A נמצא על החלק החיובי של ציר ה-x, הקודקוד D' נמצא על החלק החיובי של ציר ה-z, $C = (-2, \sqrt{12}, 0)$.
- ד. מצא את שיעורי הנקודה F.



(3) ענה :

- א. פתור את המשוואה : $(z+i)^2 - 2 - 2\sqrt{3}i = 0$, z הוא מספר מרוכב.
- נסמן את החלקים הממשיים של פתרונות המשוואה ב- a_1 וב- a_2 כך ש- $a_1 < a_2$.
- נתונים שני מקומות גאומטריים :
- I. $|z - ia_1| = \sqrt{3}$
- II. $|z - ia_2| = \sqrt{3}$
- ב. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.
- הישר $y = x$ נמצא במישור גאוס. ישר זה חותך את המקומות הגאומטריים שסרטטת בסעיף ב בראשית הצירים ובשתי נקודות אחרות שמיוצגות על ידי שני המספרים המרוכבים w_1 ו- w_2 .
- ג. פתור את המשוואה : $z^3 = w_1 \cdot \overline{w_1} \cdot w_2 \cdot \overline{w_2}$, z הוא מספר מרוכב.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

- (4) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{ax}{\ln(x) - a}$, $a > 0$ הוא פרמטר.
- בסעיפים א-ב, בטא את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.
- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
- ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
- (2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האנך לציר ה- x העובר בנקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר $x = e^{a+2}$ ועל ידי ציר ה- x , הוא 3.
- ג. מצא את a .

5 נתונה הפונקציה : $f(x) = 9^{-x} - 6 \cdot 3^{-x} + m$, m הוא פרמטר.

א. בתת-סעיפים (1)-(3) בטא את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x .

ב. מצא את הערך של הפרמטר m .

ג. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) היעזר בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $\ln(f(x))$.

ד. הסבר מדוע : $\int_0^1 [\ln(f(x)) - \ln(4)] dx < \ln\left(\frac{9}{4}\right)$.

תשובות סופיות:

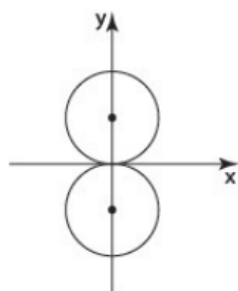
1) א. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$ ב. $y = 2x + 1$ ג. 2.5

2) א. $\overrightarrow{DF} = t\overrightarrow{u} + \frac{1}{4}\overrightarrow{v} + \left(\frac{3}{4} - t\right)\overrightarrow{w}$ ב. $t = \frac{1}{4}$ ג. $V = 16\sqrt{3}$

ד. $F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{12}}{4}, 1\right)$

3) א. $Z_1 = -\sqrt{3} - 2i$, $Z_2 = \sqrt{3}$ ב. להלן סרטוט:

ג. $\sqrt[3]{36}\text{cis}240^\circ$, $\sqrt[3]{36}\text{cis}120^\circ$, $\sqrt[3]{36}$



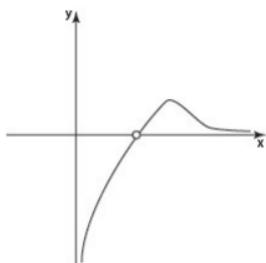
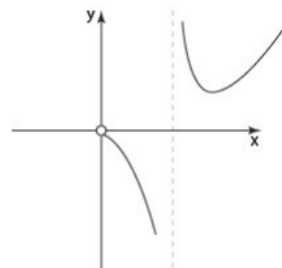
2) (e^{a+1}, ae^{a+1}) מינימום.

4) א. (1) $0 < x \neq e^a$

ב. (1) $0 < x \neq e^a$ (2) $\left(e^{a+1}, \frac{1}{ae^{a+1}}\right)$ מקסימום.

(3) להלן סרטוט:

(3) להלן סרטוט: ג. $a = \frac{1}{2}$



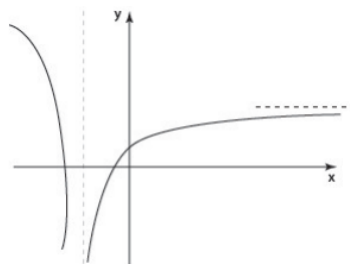
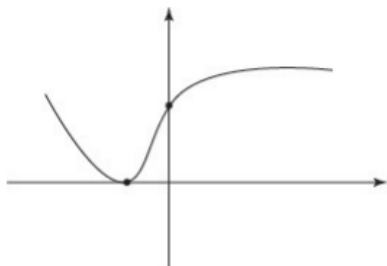
(2) $y = m$ (3) $(-1, m-9)$ מינימום.

5) א. (1) כל x .

ג. (1) להלן סרטוט:

ב. $m = 9$

(2) להלן סרטוט:



ד. הוכחה.

בגרות 2022 מועד קיץ א':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.

מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא: $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, הוא פרמטר חיובי.

מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא: $(x-15)^2 + y^2 = R^2$. אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9, והיחס בין אורכי הרדיוסים של המעגלים הוא: $1:2$, $r < R$.

א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו M.

נתון כי: $a < 15$.

ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.

ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.

ד. הישר: $mx - y + n = 0$ הוא משיק משותף לשני המעגלים.

מצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).

נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ.

משוואות המעגלים הן: $(x-t)^2 + y^2 = r^2$; $(x-k)^2 + y^2 = R^2$, ו- k הם

פרמטרים. ערכי הרדיוסים r ו-R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.

ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים

גם למעגלים האלה? אם כן – מצאו את t ואת k. אם לא – נמקו.

(2)

נתונות ארבע נקודות הנמצאות באותו המישור :
 $A(4, p, -1)$, $B(7, 5, 5)$, $C(1, -1, 2)$, $D(-2, 5, -4)$, p הוא פרמטר.

- א. מצאו את משוואת המישור ABCD.
- ב. חשבו את ערך הפרמטר p .
- ג. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא ריבוע.
- הנקודה S היא קודקוד של פירמידה SABCD שבסיסה ABCD.
- המקצוע SC מונח על הישר : $x = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$.
- נתון כי נפח הפירמידה הוא 81.
- ד. מצאו את שיעורי הנקודה S (שתי אפשרויות).
- נתון מישור נוסף π המאונך למקצוע SC.
- ה. מצאו את הזווית שבין המישור ABCD ובין המישור π .

(3)

נתונה המשוואה : $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$, z הוא מספר מרוכב.
 z_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור
 גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

- א. מצאו את משוואת המעגל.
- חוסמים במעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר z_1 .
- ב. חשבו את שטח הריבוע.
- ג. מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.
- מכפילים ב- $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי
 הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב- $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 60^\circ) + i\sin(\alpha + 60^\circ))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי
 הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי. הנקודות במישור גאוס המייצגות את
 התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.
- נתון : r_1 ו- r_2 חיוביים, $r_1 \neq r_2$.
- ד. מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את התשובה.
- נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי 1.2 משטח הריבוע בסעיף ב.
- ה. חשבו את $r_1 \cdot r_2$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$ המוגדרת לכל x .

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות

לציר ה- y (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1-e^x}{e^x-x}$, המוגדרת לכל x .

ב. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות

לציר ה- y .

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר

ה- x (אם יש כאלה).

(3) הוכיחו כי: $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x-x)^2}$.

ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ומצאו כמה נקודות מקסימום

וכמה נקודות מינימום יש לפונקציה $g(x)$. נמקו את התשובה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישר: $x = -1$.

5) נתונה הפונקציה : $f(x) = x + \ln(x^2 - 15)$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.

נתונה הפונקציה : $g(x) = e^{f(x)}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

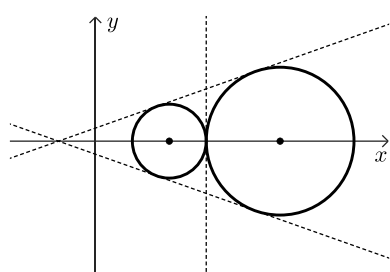
(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה : $y = f'(x) \cdot g(x)$, על ידי

ציר ה- x ועל ידי הישרים : $x = -6$ ו- $x = -5$.

תשובות סופיות:

1 א. משוואת המעגל שמרכזו N : $(x-15)^2 + y^2 = 36$, משוואת המעגל שמרכזו M :



ב. להלן סקיצה : $(x-6)^2 + y^2 = 9$, $(x-24)^2 + y^2 = 9$

ג. $x=9$. ד. $m_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$, $n_1 = \frac{3}{\sqrt{8}}$, $m_2 = -\frac{1}{\sqrt{8}}$, $n_2 = -\frac{3}{\sqrt{8}}$

ה. $t = -21$, $k = -21$

2 א. $2x - y - 2z + 1 = 0$. ב. $p = 11$. ג. הוכחה.

ד. $(-2, -10, -1)$, $(4, 8, 5)$, 72.5°

3 א. $x^2 + y^2 = 10$. ב. 20 . ג. $(-3, -1)$, $(-1, 3)$, $(1, -3)$

ד. מקבילית . ה. 2.4

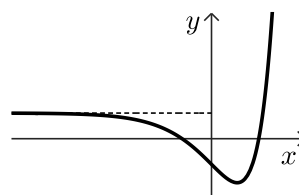
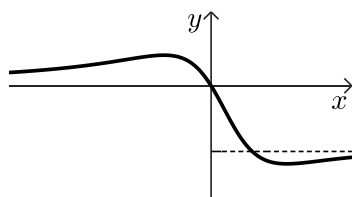
4 א. (1) $y = 1$: $x \rightarrow \infty$. א. (2) $(0, -1)$. א. (3) עלייה : $x > 1$, ירידה : $x < 1$.

א. (4) להלן סקיצה : ב. (1) $x \rightarrow \infty : y = -1$, $x \rightarrow -\infty : y = 0$

ב. (2) $(0, 0)$. ב. (3) הוכחה.

ג. נק' מינימום אחת, נק' מקסימום אחת.

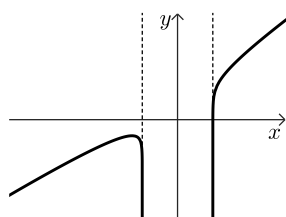
ד. להלן סקיצה :



ה. $\ln \frac{e+1}{e} \approx 0.31$

א. (2) $x = -\sqrt{15}$, $x = \sqrt{15}$

א. (4) להלן סקיצה :



5 א. (1) $x < -\sqrt{15}$, $x > \sqrt{15}$

א. (3) $\max(-5, -2.7)$

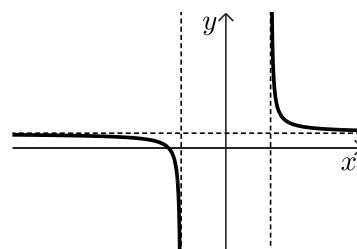
ב. (1) $x < -\sqrt{15}$, $x > \sqrt{15}$

ב. (2) $x = -\sqrt{15}$, $x = \sqrt{15}$, $y = 1$

ב. (3) $(-5, 0)$

ג. (1) $\max(-5, 0.067)$

ב. (4) להלן סקיצה :



ג. (2) עלייה : $x < -5$, $x > \sqrt{15}$, ירידה : $-5 < x < -\sqrt{15}$. ד. 0.015

בגרות 2022 מועד קיץ ב':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונות הנקודות $A(-5,3)$ ו- $B(0,-2)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.
נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה- x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו.

נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M .

ג. מהי משוואת האליפסה?

נסמן ב- F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה- x עובר במוקד השמאלי של האליפסה. הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו- T , ואת המעגל M בנקודות K ו- L .

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF .

(2) נתונה פירמידה $OABC$ שבסיסה משולש ABC .

נסמן: $\vec{OA} = \underline{u}$, $\vec{OB} = \underline{v}$, $\vec{OC} = \underline{w}$.

נתון: $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$.

הנקודה H מקיימת: $\vec{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}$, s, t, k הם פרמטרים.

נתון כי $\vec{OH}$ מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

א. הוכיחו כי: $t = s = k$.

הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

ב. הוכיחו כי: $\vec{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$, והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC .

ג. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הווקטור $\vec{OP}$ שבעבורו נפח הפירמידה $PABC$ כפול מנפח הפירמידה $OABC$ (שתי אפשרויות).

ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה-x, הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה-y, והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה-z. נתון: $|u| = a$.

ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP.

ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC.

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $20\frac{5}{6}$. חשבו את a .

(3) המספר: $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

$$\text{נתון: } \frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

א. מצאו את α .

$$\text{נתון: } |2iz| + \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$$

ב. מצאו את R .

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

קודקודי הבסיס B ו-C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו- $\frac{\bar{z}}{z}$.

קודקוד הראש A מתאים למספר $z+k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k ?

(2) חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

א. (1) מצאו את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה- x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ ($g'(x) = f(x)$).

ד. (1) מהו תחום העלייה של הפונקציה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב- B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקציה $g(x)$ הוא הגבוה

מבין כל נקודות הפיתול שלה. נתון כי שיעור ה- y של הנקודה B הוא $\frac{e - \sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(5) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקציה מוגדרת לכל x ורציפה,

הפונקציה היא אי-זוגית, הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה, ולפונקציה יש

נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם: $(-1, -a)$, a הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = \ln(f(x))$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $h(x)$

המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקציה $h(x)$ חותך

את ציר ה- x בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך

את ציר ה- x בשתי נקודות.

נתון: $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ וגם: $g(0) = 0$.

ג. (1) מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל: $\int_{-5}^t g(x) dx$, $t > -5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים: $\int_{-5}^5 g(x) dx = 2 \cdot \int_{-5}^t g(x) dx$? נמקו.

תשובות סופיות:

(1) א. $x - y + 3 = 0$ ב. $M(0,3), R=5$ ג. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ד. $\frac{5}{3}$

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

ג. $\overrightarrow{OP_1} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}, \overrightarrow{OP_2} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$

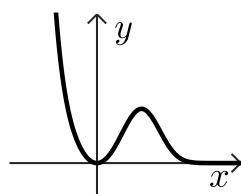
ד. $\ell = t(1,1,1)$ ה. $x + y + z - a = 0$ ו. $a = 5$

(3) א. $\alpha = 240^\circ$ ב. $R = 3$ ג. הוכחה.

ד. (1) $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ד. (2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(4) א. (1) $x \neq 0$ א. (2) מינימום: $x = 0$, מקסימום: $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx 0.87$

ב. $a = 1$ ג. להלן סקיצה: ד. (1) כל x ד. (2) 2 נקודות.



ה. $g(x) = \frac{e - e^{1-x^3}}{3}$

(5) א. להלן סקיצה: ב. (1) $x > 0$ ב. (2) $x = 0$ ב. (3) $a > 1$

ג. (1) $g(x) = 2\ln(1+x^2)$ ב. להלן סקיצה:

ג. (2) זוגית. ד. $t = 0$

