שאלון 581

פרק 32

פתרון בוידאו של בחינות 2021

חורף מועד א 1
מועד נבצרים 6
חורף מועד ב 11
קיץ מועד א 16
קיץ מועד מיוחד 23
קיץ מועד ב 28

בגרות 2021 מועד חורף א':

ענה על חמש מהשאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, תיבדקנה רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1) שני שליחים, אייל וברק, יצאו בשעה 8:00 זה לקראת זה כדי למסור חבילה.
אייל יצא מעיר A וברק יצא מעיר B.

לאחר שאייל עבר $\frac{1}{6}$ מן הדרך לכיוון עיר B, הוא גילה כי שכח את החבילה בעיר A. הוא חזר לעיר A, אסף את החבילה, ומייד יצא שוב לכיוון עיר B.
אייל נסע כל הזמן במהירות קבועה.
ברק נסע גם הוא במהירות קבועה, הגבוהה ב-20% ממהירות הנסיעה של אייל.
ברק ואייל נפגשו בנקודה הנמצאת 75 ק"מ מעיר A.

א. מצא את אורך הדרך שבין שתי הערים.

אייל וברק נסעו בכבישים בין-עירוניים, שמהירות הנסיעה המותרת בהם היא מ-50 עד 110 קמ"ש. גם אייל וגם ברק נסעו במהירות מותרת.

ב. (1) האם ייתכן שאייל וברק נפגשו בשעה 9:40? נמק.
(2) האם ייתכן שאייל וברק נפגשו בשעה 10:00? נמק.

2) a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא q.

נתון: $0<a_1\ ,\ 0<q<1$.

b_n היא סדרה הנדסית אין-סופית עולה שהמנה שלה היא r.

נתון: $b_1=a_6$. הסדרה c_n מוגדרת כך: $c_n=\frac{a_{n+5}}{b_n}$.

א. הסבר מדוע כל איברי הסדרות a_n , b_n ו- c_n הם חיוביים.

ב. הוכח כי c_n היא סדרה הנדסית, ומצא את c_1.

ג. (1) הסבר מדוע המנה של הסדרה c_n גדולה מ-0 וקטנה מ-1.

(2) נתון: סכום הסדרה c_n הוא $\frac{6}{5}$, $\frac{b_2}{a_8}=18$.

מצא את q ואת r.

3) ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיה שיער מתולתל היא x.
ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיו עיניים חומות היא $2x$.
ההסתברות שעיניו של ילד שנולד במשפחת לוי יהיו חומות, אם ידוע ששיערו מתולתל קטנה פי 1.5 מן ההסתברות ששיערו לא יהיה מתולתל אם ידוע שעיניו חומות. יונתן הוא אחד הילדים במשפחת לוי.

א. (1) הראה שההסתברות שעיניו של יונתן הן חומות ושיערו מתולתל היא $\frac{1}{2}x$.

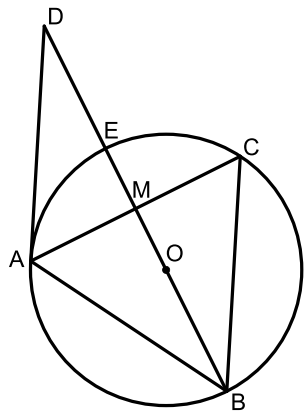
(2) מצא את ההסתברות ששיערו של יונתן הוא מתולתל אם ידוע שעיניו חומות.

ב. (1) הבע באמצעות x את ההסתברות ששיערו של יונתן אינו מתולתל וגם עיניו אינן חומות.

(2) נתון: $x=0.2$.
במשפחת לוי נולדו ארבעה ילדים בדיוק.
מהי ההסתברות שלפחות לשלושה מארבעת הילדים במשפחת לוי יש שיער מתולתל ועיניים חומות?

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) הישר AD משיק למעגל בנקודה A.
הנקודה B נמצאת על המעגל כך שהקטע BD עובר דרך מרכז המעגל, O, וחותך את המעגל בנקודה נוספת, E.
הנקודה C נמצאת על המעגל כך ש-$BC \parallel AD$.
הישרים BD ו-AC חותכים זה את זה בנקודה M (ראה ציור).



א. הוכח: $AB=AC$.
נתון: AE חוצה את הזווית MAD.

ב. הוכח: $BM \perp AC$.

ג. הוכח כי אורך הקטע AE שווה לרדיוס המעגל.

ד. הוכח כי ABCD הוא מעוין.

5) ABC הוא משולש קהה זווית $(\sphericalangle BAC > 90°)$.
נתון: $AB+AC=4a$ (a הוא פרמטר), $AB:AC=3:5$,
שטח המשולש ABC הוא $\frac{15\sqrt{3}}{16}a^2$.

א. (1) חשב את גודל הזווית BAC.

(2) חשב את גודלי הזוויות ABC ו-ACB.

במעגל החוסם את המשולש ABC אפשר לחסום מחומש משוכלל ששטחו הוא 100.

ב. חשב את a.

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=6x\left(x^3-1\right)^3$, המוגדרת לכל x.

ענה על הסעיפים א-ג. אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

א. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(4) בעבור אילו ערכים של k הישר $y=k$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה המשוואה: $6x\left(x^3-1\right)^3=m$. m הוא פרמטר.

הסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$, וקבע בעבור אילו ערכי m למשוואה הנתונה יש בדיוק שני פתרונות חיוביים שונים, ובעבור אילו ערכי m יש לה פתרון אחד שלילי ופתרון אחד חיובי. נמק את תשובותיך.

ג. היעזר בסרטוט וקבע אם קיים $a>0$ שבעבורו האינטגרל $\int_0^a f(x)dx$ מקבל ערך מינימלי. אם כן, מהו ערכו של a זה? נמק את תשובתך.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=2\sin^2 x-1$, המוגדרת לכל x.

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום $-\pi\le x\le\pi$.

א. (1) הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\dfrac{\cos 2x\left(1-\sin x\right)}{\sin x-1}$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) בעבור אילו ערכים של x: $f(x)=g(x)$? נמק.

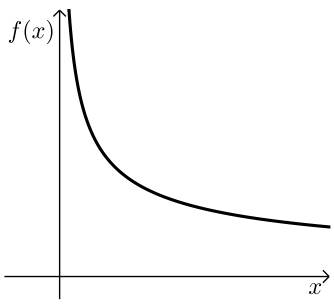
(3) האם לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטות אנכיות? נמק.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. נתונה הפונקציה: $h(x)=-f(x)+b$ (b הוא פרמטר), שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. נתון: $\int_{-\pi}^{0} h(x)dx=\dfrac{3\pi}{2}$.

מצא את ערכו של הפרמטר b.

8) בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}$,



שתחום הגדרתה הוא $x>0$.

מבין כל הנקודות שעל גרף הפונקציה $f(x)$,

הנקודה A היא הקרובה ביותר

לראשית הצירים, O.

א. (1) מצא את שיעורי הנקודה A.

(2) האם הישר AO מאונך לישר המשיק

לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A? נמק.

נתונה הפונקציה: $g(x)=-f(-x)$, המוגדרת בתחום $x<0$.

ענה על סעיף ב בעבור התחום $-4\le x\le -1$.

ב. (1) מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון,

מה הם שיעורי הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים?

(2) מצא את שיעורי הנקודה הרחוקה ביותר מראשית הצירים,

מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון.

תשובות סופיות:

1) א. 275 ק"מ. ב. (1). לא. ב. (2). כן.

2) א. הוכחה. ב. (1). הוכחה, $c_1=1$. ב. (2). $q=\frac{1}{3}$, $r=2$.

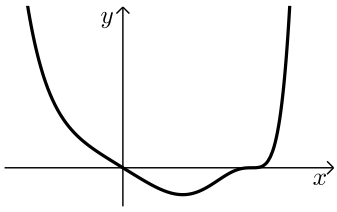
3) א. (1). הוכחה. א. (2). $\frac{1}{4}$. ב. (1). $1-2\frac{1}{2}x$. ב. (2). 0.0037.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

5) א. (1). $\sphericalangle BAC=120°$. א. (2). $\sphericalangle ABC=38.21°, \sphericalangle ACB=21.79°$. ב. $a=3.21$.

6) א. (1). $(0,0)$, $(1,0)$. א. (2). מינימום $(0.464,-2.03)$.

א. (3). להלן סרטוט:



א. (4). $k=0$ או $k=-2.03$.

ב. שתי פתרונות חיוביים: $-2.03<m<0$, פיתרון אחד שלילי ואחד חיובי: $m>0$.

ג. $a=1$.

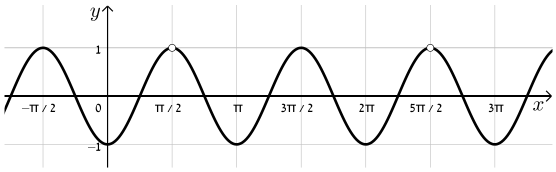
7) א. (1). הוכחה. א. (2). $\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$, $\left(\frac{1}{4}\pi,0\right)$, $\left(-\frac{1}{4}\pi,0\right)$, $\left(-\frac{3}{4}\pi,0\right)$, $(0,-1)$.

א. (3). $(\pi,-1)$ מינימום, $\left(\frac{1}{2}\pi,1\right)$ מקסימום, $(0,-1)$ מינימום, $\left(-\frac{1}{2}\pi,1\right)$ מקסימום,

$(-\pi,-1)$ מינימום. ב. (1). $-\pi\le x\le\pi$, $x\ne\frac{1}{2}\pi$.

ב. (2). $-\pi\le x\le\pi$, $x\ne\frac{1}{2}\pi$. ב. (3). לא.

ב. (4). להלן סרטוט:



ג. $b=1\frac{1}{2}$.

8) א. (1). $A\left(2,2\sqrt{2}\right)$. א. (2). כן. ב. (1). $\left(-2,-2\sqrt{2}\right)$. ב. (2). $(-4,-2)$.

בגרות 2021 מועד חורף נבצרים:

ענה על חמש מהשאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, תיבדקנה רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1) יואב ואודי רכבו על אופניים מיישוב A ליישוב B, באותה הדרך.
יואב יצא מיישוב A וכעבור 3 שעות הגיע ליישוב B.
זמן מה לאחר יציאתו של יואב מיישוב A, יצא גם אודי מיישוב A והגיע ליישוב B רבע שעה לפני יואב. יואב ואודי נפגשו בדרך ליישוב B כעבור שעה וחצי מרגע יציאתו של אודי מיישוב A. מהירות הרכיבה של יואב ומהירות הרכיבה של אודי היו קבועות.

א. מצא כמה זמן עבר מרגע יציאתו של יואב מיישוב A ועד רגע יציאתו של אודי מיישוב A (מצא את שתי האפשרויות).

ב. נתון: יואב ואודי נפגשו במרחק 12 ק"מ מיישוב B.
מהירות הרכיבה של אודי גדולה מ-20 קמ"ש.
מצא מהי מהירות הרכיבה של יואב ומהי מהירות הרכיבה של אודי.

2) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$.
סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 4.
מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה, ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \ldots$.
סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא 2.4-.

א. מצא את האיבר הראשון ואת המנה של הסדרה a_n (הסדרה המקורית).

מן האיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\ldots, \frac{a_{n+1}}{a_n^2}, \ldots, \frac{a_4}{a_3^2}, \frac{a_3}{a_2^2}, \frac{a_2}{a_1^2}$.

נסמן את הסדרה השלישית ב- c_n.

ב. הוכח כי הסדרה c_n היא סדרה הנדסית, מצא את המנה שלה ואת c_1.

ג. נתון כי הסכום: $c_{k+1}+c_{k+2}+\ldots+c_{3k}$ גדול פי 4096 מסכום $2k$ האיברים הראשונים בסדרה c_n. מצא את k.

3) בחברת תקשורת גדולה נבדקו הרגלי הצפייה של הלקוחות.
נמצא כי מספר הלקוחות שצופים בערוצי מוזיקה גדול פי 1.5 ממספר הלקוחות שאינם צופים בהם. $\frac{2}{3}$ מן הלקוחות שצופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה.
40% מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה.
בוחרים באקראי לקוח מן הלקוחות של החברה.

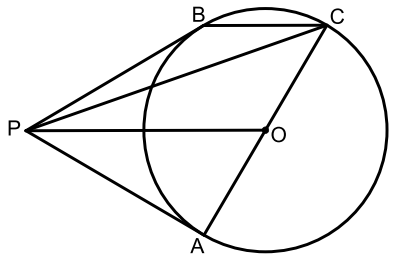
א. מהי ההסתברות שהלקוח שנבחר צופה גם בערוצי ספורט וגם בערוצי מוזיקה?

ב. נמצא שהלקוח שנבחר צופה בערוצי מוזיקה או בערוצי ספורט.
מהי ההסתברות שהוא אינו צופה בערוצי מוזיקה?

ג. מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט, בחרו באקראי 4 לקוחות.
מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם צופים בערוצי מוזיקה?

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) הנקודות A ו-B נמצאות על מעגל שמרכזו O.
המשיקים למעגל בנקודות A ו-B נפגשים בנקודה P.
ההמשך של AO חותך את המעגל בנקודה C (ראה סרטוט).



א. הוכח: $PO \parallel BC$.

נסמן: $k = \frac{PO}{BC}$.

ב. הבע באמצעות k את היחס בין שטח המשולש PBC
ובין שטח המשולש OPC.

ג. נסמן ב- S את שטח המשולש PAO.
הבע באמצעות S ו- k את שטח המרובע PACB.

5) ABCD הוא טרפז חסום במעגל $(AB \parallel DC)$.

נתון: $AB = a$, $CD = b$ $(a < b)$, $\sphericalangle BCD = 60°$.

א. הבע את האורך של שוקי הטרפז, BC ו-AD, באמצעות a ו- b.

נתון: $a = 6$, אורך האלכסון BD הוא $6\sqrt{7}$.

ב. חשב את b.

ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R.
(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.
(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r.

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax}{\sqrt{x^2-16}}$, $a\neq 0$ הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ענה על הסעיפים ב-ד בעבור $a>0$.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש צורך, הבע באמצעות a).

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a<0$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ המוגדרת בתחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$. נתון: $a=1$.

ו. (1) מצא את תחום השליליות של הפונקציה $g(x)$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, הישר $x=5$, הישר $x=6$ וציר ה-x.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-4$.

ענה על סעיפים א-ה בעבור התחום: $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה-x.

ב. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה: $g(x)=-f(-x)+b$. b הוא פרמטר.

נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה-x. מצא את b.

ו. מצא בתחום: $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה-x.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=1-\frac{2}{x+1}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$,

ואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. העבירו ישר המקביל לציר ה-x.

הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת הישר $y=\frac{1}{2}x$ בנקודה B.

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t.

נתון: $t<-1$.

מצא את הערך של t שבעבורו האורך של הקטע AB הוא מינימלי.

תשובות סופיות:

1) א. $t=\frac{3}{4}$ או $t=\frac{1}{2}$. ב. יואב: 16 קמ"ש, אודי: 24 קמ"ש.

2) א. $a_1=12$, $q=\frac{1}{4}$. ב. $q_c=4$, $c_1=\frac{1}{48}$. ג. $k=6$.

3) א. $p=\frac{1}{2}$. ב. $p=\frac{5}{17}$. ג. 0.5248.

4) א. הוכחה. ב. $\frac{1}{k}$. ג. $\frac{2k+1}{k}S$.

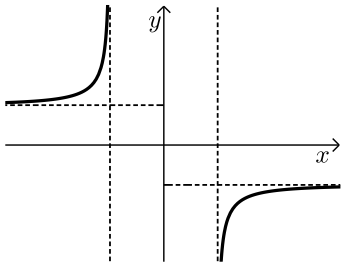
5) א. $b-a$. ב. $b=18$. ג. **(1)** $R=9.165$, $R=2\sqrt{21}$.

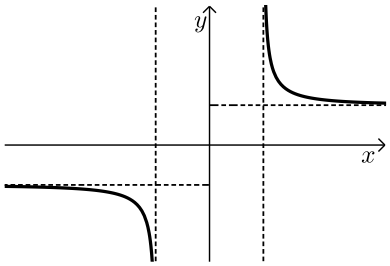
ג. **(2)** $AB+CD=AD+BC=24$. ג. **(3)** $r=3\sqrt{3}$.

6) א. $x>4$ או $x<-4$. ב. אנכית: $x=4$, $x=-4$. אופקית: $y=a$, $y=-a$.

ג. עלייה: אין. ירידה: $x>4$ או $x<-4$. ד. להלן סרטוט:

ה. להלן סרטוט:





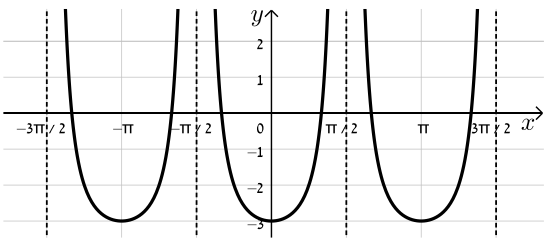
ו. **(1)** $x>4$. ו. **(2)** $\frac{22}{45}$.

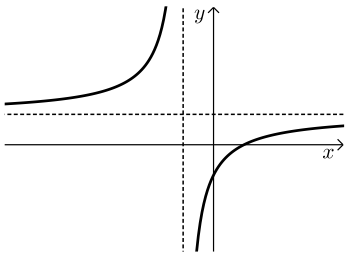
7) א. **(1)** $-\frac{3}{2}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$, $x\neq\frac{\pi}{2}$, $x\neq-\frac{\pi}{2}$.

א. **(2)** $x=\frac{3}{2}\pi$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{-3}{2}\pi$. ב. הוכחה.

ג. $(\pi,-3)$ מינימום, $(0,-3)$ מינימום, $(-\pi,-3)$ מינימום.

ד. להלן סרטוט: ה. $b=-3$. ו. 4.91.





8) א. **(1)** $x\neq-1$, אסימפטוטות: $x=-1$, $y=1$.

א. **(2)** עלייה: $x>-1$ או $x<-1$. ירידה: אין. א. **(3)** סרטוט לעיל:

ב. $t=-3$.

בגרות 2021 מועד חורף ב':

ענה על חמש מהשאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, תיבדקנה רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1) יואב ודני יצאו באותו הזמן לרכוב על אופניים.
הם רכבו במסלול ישר שהחל בנקודה A והסתיים בנקודה B.
לאורך המסלול רכב כל אחד מהם במהירות קבועה.
יואב הגיע לנקודה B, ומייד חזר באותו המסלול לנקודה A.
כאשר היה יואב בדרכו חזרה מ-B ל-A והגיע לאמצע המסלול AB, הגיע דני לנקודה B.

א. מהו היחס בין המהירות של יואב ובין המהירות של דני? נמק.

40 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, כאשר יואב היה בדרכו חזרה מ-B ל-A, נפגשו יואב ודני.

ב. הבע את אורך המסלול AB באמצעות המהירות של דני.

30 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, יואב עדיין לא הגיע לנקודה B, והמרחק של דני מן הנקודה A היה גדול ב-5 ק"מ מן המרחק של יואב מן הנקודה B.

ג. מצא את אורך המסלול AB.

ד. כמה זמן עבר מרגע יציאתם של יואב ודני מן הנקודה A עד שהמרחק ביניהם היה 2 ק"מ? מצא שתיים מבין שלוש האפשרויות.

2) הסדרה a_n היא סדרה הנדסית המקיימת לכל n טבעי את הכלל: $3a_{n+2}+5a_{n+1}-2a_n=0$.

נתון כי: $a_1 \neq 0$.

א. מצא את שני הערכים האפשריים למנת הסדרה a_n.

נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל **ולא מתכנסת** ב-$b_1 , b_2 , b_3 , \ldots$.

נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל **ומתכנסת** ב-$c_1 , c_2 , c_3 , \ldots$.

ב. הסבר מדוע הסדרה: $b_1c_1 , b_2c_2 , b_3c_3 , \ldots$ היא סדרה הנדסית מתכנסת.

נתון: $b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 , \ldots =15$, $b_1=c_1=m$.

ג. מצא את m (רשום את שתי האפשרויות).

ענה על סעיף ד בעבור ה-m הקטן מבין שתי האפשרויות שמצאת בסעיף ג.

ד. נתון: $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_k=1705$. מצא את k.

3) בכד יש כדורים בשלושה צבעים בלבד: **אדום, צהוב, כחול**.
נתון:

ההסתברות להוציא כדור אדום היא $\frac{5}{8}$.

מספר הכדורים הצהובים גדול פי 3 ממספר הכדורים הכחולים.

$\frac{4}{5}$ מן הכדורים האדומים שבכד ו-$\frac{8}{9}$ מן הכדורים הצהובים שבכד **מחוספסים**, וכל שאר הכדורים שבכד **חלקים**. הוציאו באקראי כדור מן הכד והחזירו אותו לכד. את הפעולה הזאת (הוצאה באקראי והחזרה) עשו 8 פעמים.

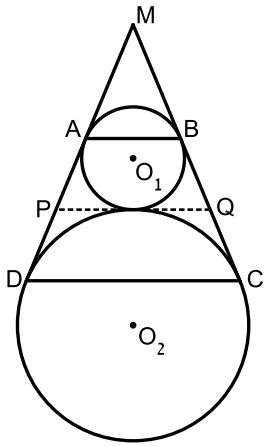
א. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן הכדורים שהוציאו הם **מחוספסים**?
ענה על סעיף ב בעבור כד שבו 32 כדורים.

ב. הוציאו באקראי בזה אחר זה 2 כדורים מן הכד (ללא החזרה).
(1) מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים?
(2) ידוע ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים.
מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוציאו היה בצבע אדום?
ענה על סעיף ג' בעבור כד שבו n כדורים.
נתון: $50 < n < 100$.

ג. מצא את n (את שתי האפשרויות).

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) בציור שלפניך מתוארים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.
מרכזי המעגלים הם הנקודות O_1 ו-O_2, והרדיוסים שלהם הם R_1 ו-R_2 בהתאמה. מן הנקודה M, הנמצאת מחוץ לשני המעגלים, יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל O_1 בנקודות A ו-B, ולמעגל O_2 בנקודות D ו-C, כמתואר בציור.
המשיק בנקודה המשותפת לשני המעגלים חותך את הישרים MD ו-MC בנקודות P ו-Q בהתאמה.



א. הוכח כי המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

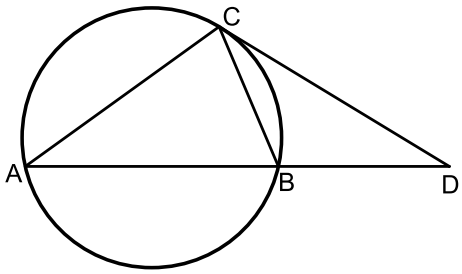
ב. הוכח כי PQ שווה לשוק הטרפז ABCD.

ג. הוכח כי: $\sphericalangle O_1QO_2 = 90°$.

נתון: $R_1 = 4$, $R_2 = 9$.

ד. מצא את PQ.

5) בציור שלפניך מתואר משולש חד-זווית ABC החסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R.
המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך הקטע AB בנקודה D.
נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא $2R$.
נסמן: $\sphericalangle BAC=\alpha$.



א. הבע את BD באמצעות R ו- α.

נתון: $\frac{CD}{BD}=\frac{3}{2}$.

ב. מצא את α.

נתון: שטח המשולש CBD הוא 27.

ג. מצא את R.

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^3(x)\cdot\sin(x)$ בתחום: $0\le x\le\pi$.

א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=a\cdot f(x)$, $a>0$ הוא פרמטר.

ג. הבע באמצעות a את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=0$.

הישר שמצאת בסעיף ג אינו חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה נוספת.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר שמצאת בסעיף ג ועל ידי הישר $x=\frac{\pi}{2}$ שווה ל- $\left(\frac{\pi^2}{2}-1\right)$.

ד. מצא את a.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+a}{\sqrt{x}}$, a הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) בעבור אלו ערכים של הפרמטר a אין לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון? נמק.

(2) במקרים שיש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון, הבע באמצעות a את שיעוריה וקבע את סוגה.

ג. סרטט בנפרד סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ לכל אחד מן התחומים i-iii של הפרמטר a שלפניך:

i. $a>0$.

ii. $a<0$.

iii. $a=0$.

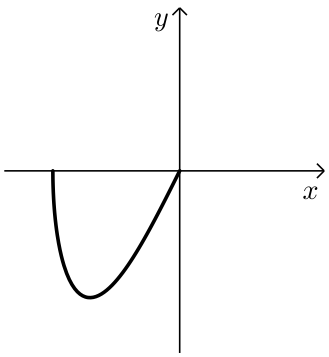
נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x)-b$, b הוא פרמטר.

נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה-x בשתי נקודות.

ד. (1) מצא את התחום של הפרמטר a. נמק.

(2) הבע את התחום של הפרמטר b באמצעות a. נמק.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{a-x^2}$, $a>0$ הוא פרמטר.



א. (1) הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הוכח שהפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

(3) בסרטוט שלפניך מתואר חלק מגרף הפונקציה $f(x)$.

העתק את הסרטוט למחברת והשלם אותו כך שיתאר את גרף הפונקציה $f(x)$ כולו.

דרך נקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון מעבירים אנך לציר ה-x.

האנך חותך את ציר ה-x בנקודה B.

ישר העובר דרך נקודה A ודרך ראשית הצירים, O, חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה נוספת, C. דרך הנקודה C מעבירים אנך לציר ה-x.

האנך חותך את ציר ה-x בנקודה D.

נתון: הסכום המקסימלי של שטחי המשולשים AOB ו-COD הוא $4\sqrt{2}$.

ב. מצא את a.

תשובות סופיות:

1) א. 1.5. ב. $\frac{5}{6}v$. ג. 10 ק"מ. ד. 20 דקות, 36 דקות, 44 דקות.

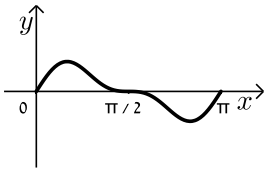
2) א. $q=\frac{1}{3}$, $q=-2$. ב. הוכחה. ג. $m=5$, $m=-5$.
ד. $k=10$.

3) א. $\frac{189}{8,192}$ ב. (1). $\frac{267}{496}$ (2). $\frac{40}{89}$ ג. $n=64$, $n=96$.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. $PQ=12$.

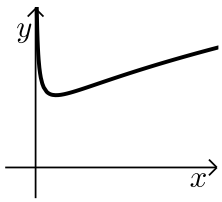
5) א. $2R\sin\alpha\sqrt{5-4\cos\alpha}$. ב. $\alpha=36.34°$. ג. 5.696.

6) א. $(0,0)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$ מקסימום, $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{-3\sqrt{3}}{16}\right)$ מינימום, $(\pi,0)$ מקסימום.
ב. להלן סרטוט:

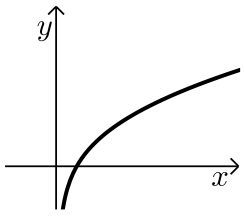


ג. $y=ax$. ד. $a=4$.

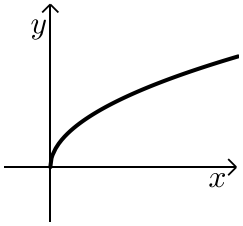
7) א. $0<x$. ב. (1). $a\le 0$. (2). $\left(a,2\sqrt{a}\right)$ מינימום.
ג. i. סרטוט:



ג. ii. סרטוט:

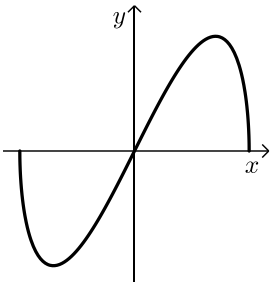


ג. iii. סרטוט:



ד. (1). $0<a$. ד. (2). $2\sqrt{a}<b$.

8) א. (1). $-\sqrt{a}\le x\le\sqrt{a}$. א. (2). הוכחה. א. (3). להלן סרטוט:



ב. $a=6$.

בגרות 2021 מועד קיץ א':

ענה על ארבע מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 25 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) בבית מלון יש שתי מעליות, מעלית א' ומעלית ב'.
שתי המעליות התחילו לעלות מקומת הקרקע (גובה 0) באותו הזמן.
מעלית א' עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 14 שניות, ולאחר לכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה שגובהה 33 מטרים. מעלית ב' עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 7 שניות, ולאחר מכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה שגובהה 81 מטרים. מעלית א' הגיעה לקומה שגובהה 33 מטרים בדיוק באותו זמן שבו הגיעה מעלית ב' לקומה שגובהה 81 מטרים.
לאחר מכן, התחילו שתי המעליות לרדת בדיוק באותו זמן.
מעלית א' ירדה 15 מטרים, ובדרכה עצרה עצירת ביניים, שנמשכה 9 שניות.
בזמן שירדה מעלית א', ירדה מעלית ב' ב-63 מטרים ברציפות, ללא עצירות ביניים.
ידוע כי המהירות של כל אחת מן המעליות בעלייה שווה למהירות של כל אחת מהן בירידה.
כמו כן ידוע כי המעליות נעות במהירויות קבועות.

א. חשב את המהירות של כל אחת משתי המעליות.

מעלית א' הייתה בקומת הקרקע של בית המלון, ואילו מעלית ב' הייתה בקומה הנמצאת מעל קומה שגובהה 42 מטרים. שתי המעליות התחילו לנוע באותו זמן לכיוון הקומה שגובהה 42 מטרים.
מעלית א' עלתה לקומה זו מקומת הקרקע ללא עצירות ביניים.
מעלית ב' ירדה לקומה זו מן הקומה שבה היא הייתה ובדרכה עצרה עצירת ביניים אחת, שנמשכה 6 שניות. שתי המעליות הגיעו לקומה שגובהה 42 מטרים בדיוק באותו זמן.

ב. האם מעלית ב' הייתה בקומה העליונה של בית המלון כאשר היא התחילה לרדת? נמק את תשובתך.

2) נתונה סדרה a_n שסכום n האיברים הראשונים שלה, לכל n טבעי, הוא: $S_n = k \cdot n^2 - p \cdot n$. $p > 0$, $k > 0$ הם פרמטרים.

א. (1) הבע את האיבר הכללי של הסדרה באמצעות k, p ו- n, בעבור $n \geq 2$.

(2) הנוסחה שמצאת בתת-סעיף א(1) נכונה בעבור כל n טבעי, הסבר מדוע.

(3) הוכח כי הסדרה היא סדרה חשבונית והבע את d, ההפרש של הסדרה, באמצעות k.

נתונות שתי סדרות הנדסיות b_n ו- c_n. מנת הסדרה b_n שווה ל- d (הפרש הסדרה החשבונית a_n). הסדרה c_n היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה שווה ל- $\frac{2}{d}$.

נתון: $a_1 = b_1 = c_1$, $k = 1.5$, $p = 4.5$.

ב. הסבר מדוע הסדרה c_n היא סדרה מתכנסת.

נתון כי היחס בין סכום m האיברים הראשונים של הסדרה b_n ובין סכום כל איברי הסדרה האינסופית c_n הוא $40\frac{1}{3}$.

ג. חשב את m.

ד. האם הסדרה c_n היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת? נמק את תשובתך.

3) בבית ספר תיכון גדול מאוד, מספר התלמידים גדול פי 9 ממספר המורים.
בבית הספר נערך סקר שהשתתפו בו כל המורים והתלמידים בבית הספר, והם בלבד.
המשתתפים בסקר נשאלו אם הם נבדקו לגילוי קורונה.
נמצא כי 80% מן המורים בבית הספר נבדקו לגילוי קורונה.

כמו כן נמצא כי $\frac{13}{15}$ מכלל המשתתפים בסקר (מורים ותלמידים), שנבדקו לגילוי קורונה, היו תלמידים.

א. מהי ההסתברות שמבין כלל המשתתפים בסקר ייבחר באקראי תלמיד שלא נבדק לגילוי קורונה?

בחרו באקראי בזה אחר זה 5 משתתפים מבין כלל משתתפי הסקר.

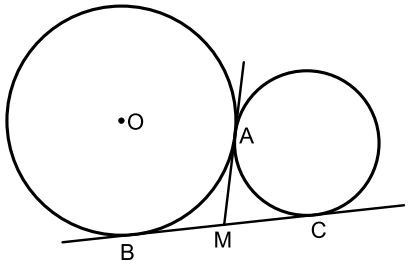
ב. מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם נבדקו לגילוי קורונה?

ג. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, לפחות משתתף אחד נבדק לגילוי קורונה.
מהי ההסתברות שלפחות 4 מן המשתתפים שנבחרו נבדקו לגילוי קורונה?

ד. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, בדיוק 2 נבדקו לגילוי קורונה.
מהי ההסתברות שהאחרון שנבחר נבדק לגילוי קורונה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A (ראה סרטוט).
הנקודה O היא מרכז המעגל השמאלי.
מעבירים בנקודה A משיק משותף לשני המעגלים.
B ו-C הן נקודות ההשקה של ישר נוסף שמשיק לשני המעגלים.
שני המשיקים נחתכים בנקודה M.



א. הוכח כי הזווית $\sphericalangle BAC$ ישרה.

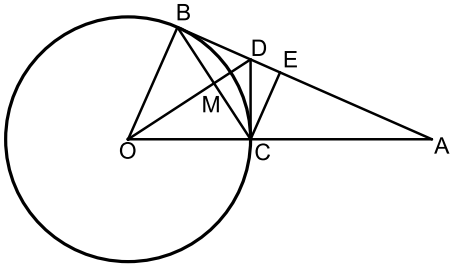
ב. הוכח כי: $4\cdot AM^2 = AC^2 + AB^2$.

נתון: $AC = 6,\ AB = 8$.

ג. חשב את רדיוס המעגל שמרכזו הוא בנקודה O.

ד. חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{\Delta OBM}}{S_{\Delta AMC}}$.

5) DB ו-DC משיקים למעגל שמרכזו O, כמתואר בסרטוט.
רדיוס המעגל: R.
המשך BD חותך את המשך OC בנקודה A.
הקטע OD והמיתר BC נחתכים בנקודה M.
הקטע CE מאונך ל-AB.



נסמן: $\sphericalangle ABC = \alpha$.

א. הסבר מדוע אפשר לחסום במעגל:
(1) את המרובע OBDC.
(2) את המרובע MDEC.

נסמן: d_1 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע OBDC.
d_2 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע MDEC.
d_3 הוא קוטר המעגל החוסם את המשולש AOD.

ב. הבע באמצעות α ו-R את d_1, את d_2 ואת d_3.

ג. מצא את הערך של α שבעבורו מתקיים: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונות הפונקציות: $g(x)=\frac{x}{(x^2-2)^3}$, $f(x)=\frac{x}{(x^2-2)^2}$.

א. ענה על תת-סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

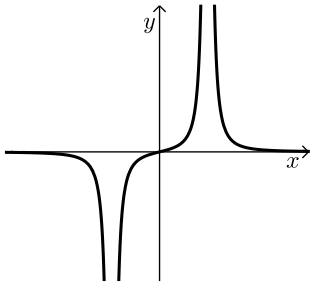
(3) הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

(4) הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ב. (1) הגרף שלפניך מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $g(x)$.

קבע איזו מן הפונקציות הגרף מתאר. נמק את קביעתך.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.



נתונה פונקציה $h(x)$ המקיימת: $h'(x)=f(x)$.

$f(x)$ ו-$h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של $h(x)$?

ד. חשב את:

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. נמק את תשובתך.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה-x והישרים: $x=-1$, $x=1$.

נתונה הפונקציה: $k(x)=f(x)+b$, $b\neq 0$ הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית?

נמק את תשובתך.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-4a}}{x^3}$, $a>0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ה, בטא את תשובותיך באמצעות a לפי הצורך.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. הוכח שהפונקציה $f(x)$ אי-זוגית.

ג. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

ה. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$, אם יש כאלה?

ידוע כי בכל אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$,

יש לגרף של $f(x)$ ולגרף של $g(x)$ משיק משותף.

ו. (1) הוסף לסרטוט שבמחברתך סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

פרט את שיקוליך.

(2) מהו הערך של a? נמק את תשובתך.

8) במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a.

נתון: $\sphericalangle BAC=\alpha$ (α ברדיאנים).

נסמן: $\sphericalangle ABC=x$ ($0<x<\pi-\alpha$).

א. הבע באמצעות a , x ו-α את היקף המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות α את ערך ה-x שבעבורו היקף המשולש ABC הוא מקסימלי.

ג. הסבר מדוע מתקיים המשפט הזה:

מכל המשולשים בעלי צלע נתונה וזווית מולה נתונה, המשולש בעל ההיקף המקסימלי הוא משולש שווה שוקיים.

תשובות סופיות:

1) א. מעלית א': 3 מטרים בשניה, מעלית ב': 4.5 מטרים בשניה. ב. לא.

2) א. (1). $a_n = 2kn - k - p$. (2). הוכחה. (3). $d = 2k$.

ב. הסבר $\left(q = \frac{2}{3}\right)$. ג. $m = 5$. ד. עולה.

3) א. 0.38. ב. 0.33696. ג. $\frac{351}{1,031} = 0.340446$.

ד. 0.4.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$. ד. $\frac{25}{18}$.

5) א. (1). הוכחה. (2). הוכחה.

ב. $d_1 = \frac{R}{\cos\alpha}$, $d_2 = R\tan\alpha$, $d_3 = \frac{R}{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}$. ג. $\alpha = 30°$.

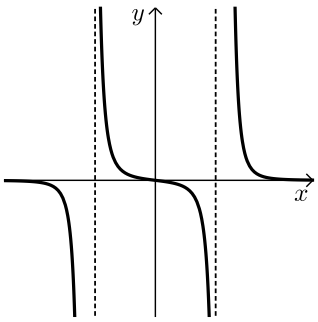
6) א. (1). $f(x)$: $x \neq \pm\sqrt{2}$, $g(x)$: $x \neq \pm\sqrt{2}$.

(2). $f(x)$: $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $y = 0$, $g(x)$: $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $y = 0$.

(3). $f(x)$: הוכחה, $g(x)$: הוכחה.

(4). $f(x)$: הוכחה, $g(x)$: הוכחה.

ב. (1). $f(x)$. (2). להן סרטוט:



ג. עליה: $x > \sqrt{2}$ או $0 < x < \sqrt{2}$, ירידה: $-\sqrt{2} < x < 0$ או $x < -\sqrt{2}$,

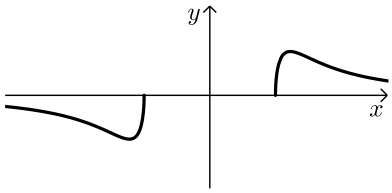
ד. (1). 0. (2). $\frac{1}{2}$. ה. לא זוגית ולא אי זוגית.

7) א. $\sqrt{\frac{4a}{3}} \le x$ או $x \le -\sqrt{\frac{4a}{3}}$. ב. הוכחה. ג. (1). $\left(\sqrt{\frac{4a}{3}}, 0\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}}, 0\right)$.

(2). $\left(\sqrt{2a}, \frac{1}{2a}\right)$ מקסימום, $\left(-\sqrt{2a}, -\frac{1}{2a}\right)$ מינימום, $\left(\sqrt{\frac{4a}{3}}, 0\right)$ מינימום,

$\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}}, 0\right)$ מקסימום.

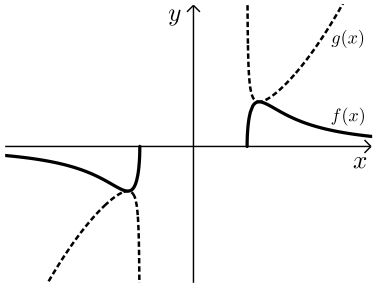
ד. סרטוט:



ה. (1) $\sqrt{\frac{4a}{3}} < x$ או $x < -\sqrt{\frac{4a}{3}}$.

(2) $x = \sqrt{\frac{4a}{3}}$, $x = -\sqrt{\frac{4a}{3}}$.

ו. (1). סרטוט:



(2). $a = \frac{1}{2}$.

8) א. $a + \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin x + \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin(\alpha + x)$.

ב. $\frac{\pi - \alpha}{2}$.

ג. הוכחה.

בגרות 2021 קיץ מועד מיוחד:

ענה על <u>ארבע</u> מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 25 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) ביום ראשון יצא אודי ברכיבה על אופניים ממטולה לכיוון טבריה.
באותה שעה בדיוק יצאה רעות ברכיבה על אופניים מטבריה לכיוון מטולה,
ורכבה באותה הדרך. כל אחד מן הרוכבים רכב במהירות קבועה.
כעבור 2 שעות נפגשו שני רוכבי האופניים.
הזמן שנדרש לאודי כדי לעבור את הדרך ממטולה לטבריה גדול ב-54 דקות מן הזמן שנדרש לרעות לעבור דרך זו.

א. מצא את היחס בין מהירות הרכיבה של רעות ובין מהירות הרכיבה של אודי.

ב. מצא כמה זמן נדרש לכל אחד מן הרוכבים כדי לעבור את כל הדרך שבין מטולה ובין טבריה.

ביום שני יצאו 2 רוכבי האופניים יחד מטבריה לכיוון מטולה באותו הזמן.
הם רכבו באותה הדרך ובאותן המהירויות כמו ביום ראשון. רעות הגיעה למטולה ומייד הסתובבה וחזרה לכיוון טבריה.
היא נפגשה עם אודי לאחר שעברה מרחק של 7 ק"מ ממטולה.

ג. מצא את אורך הדרך בין מטולה ובין טבריה.

ד. מצא את המהירות שבה רכב כל אחד משני הרוכבים.

2) נתונה סדרה חשבונית ובה $2n+1$ איברים (n הוא מספר טבעי).
איברי הסדרה הם: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_{2n+1}$ והפרש הסדרה הוא d.

א. הוכח כי ההפרש בין סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ובין סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שווה לאיבר האמצעי בסדרה.
נסמן ב- T את ההפרש בין סכום האיברים ב- n המקומות האחרונים ובין סכום האיברים ב- n המקומות הראשונים.

ב. הבע את T באמצעות d ו- n.

נתון:
- סכום כל איברי הסדרה שווה לסכום האיברים ב- $2n$ המקומות האחרונים.
- סכום האיברים הראשון והאחרון הוא 204.
- $T = 3,468$.

ג. מצא כמה איברים יש בסדרה.

3) בחממה גדולה של פרחים יש אך ורק פרחים לבנים וסגולים.
ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים לבנים גדולה פי 2.25 מן ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים סגולים.

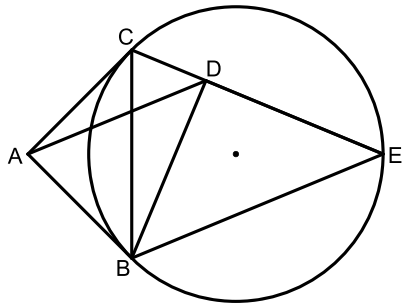
א. חשב את אחוז הפרחים הסגולים בחממת הפרחים.
בחממה זו, לכמה מן הפרחים הלבנים, ורק להם, יש עלים גדולים.
לשאר הפרחים יש עלים קטנים.
ירדן בחרה באקראי שני פרחים. ההסתברות שירדן בחרה פרח אחד שיש לו עלים קטנים ופרח אחד שיש לו עלים גדולים היא 0.455.

ב. (1) חשב את אחוז הפרחים בחממה שיש להם עלים גדולים.
(2) חשב את ההסתברות שירדן בחרה פרח סגול, אם ידוע שרק לאחד מן הפרחים שהיא בחרה יש עלים גדולים.

ג. כינרת הכינה זר מ-7 פרחים לבנים בדיוק, שנבחרו באקראי בחממה.
חשב את ההסתברות שיש בזר פרח אחד לפחות שיש לו עלים גדולים ופרח אחד לפחות שיש לו עלים קטנים.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) מנקודה A יוצאים שני ישרים, המשיקים למעגל בנקודות B ו-C (ראה סרטוט).
נתון כי: $\sphericalangle CAB = 90°$.
BE ו-CE הם מיתרים במעגל.
המעגל החוסם את המשולש ABC
חותך את המיתר CE בנקודה D.

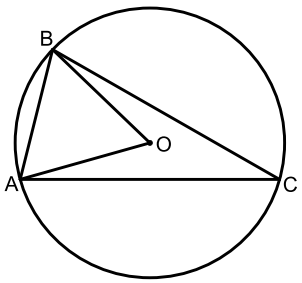


א. הוכח כי: $BD = DE$.

ב. הוכח כי: $\Delta ADB \sim \Delta CEB$.

ג. הוכח כי: $S_{\Delta CEB} = 2S_{\Delta ADB}$.

5) משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.
נתון כי: $\sphericalangle BAC = 80°$.
נסמן את הזווית AOB ב- α ואת הצלע AB ב- k.



א. הוכח כי: $\cos\alpha = 1 - \frac{k^2}{2R^2}$.

נתון כי: $k = \frac{3}{4}R$.

ב. הבע באמצעות R (בלבד) את שטח המשולש ABC.
נסמן ב- r את רדיוס המעגל החסום במשולש AOB.

ג. חשב את היחס $\frac{R}{r}$.

בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי הנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $f(k)=1$, $t<k$, t הוא פרמטר.

ג. קבע איזה מן הביטויים שלפניך גדול יותר. נמק את קביעתך.

$\int_t^k f(x)dx$ או $\int_t^k \left(f(x)\right)^2 dx$.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים: $x=-8$ ו-$x=-1$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos(mx)+\cos(2x)$ המוגדרת לכל x.

m הוא פרמטר השונה מאפס.

נתון כי בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{4}$, שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא 2-.

א. הוכח כי m הוא מספר שלם שמתחלק ב-4 ללא שארית.

הצב $m=4$ וענה על סעיפים ב'-ד' שלפניך.

ענה על סעיף ב' בתחום: $0\le x\le \pi$.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

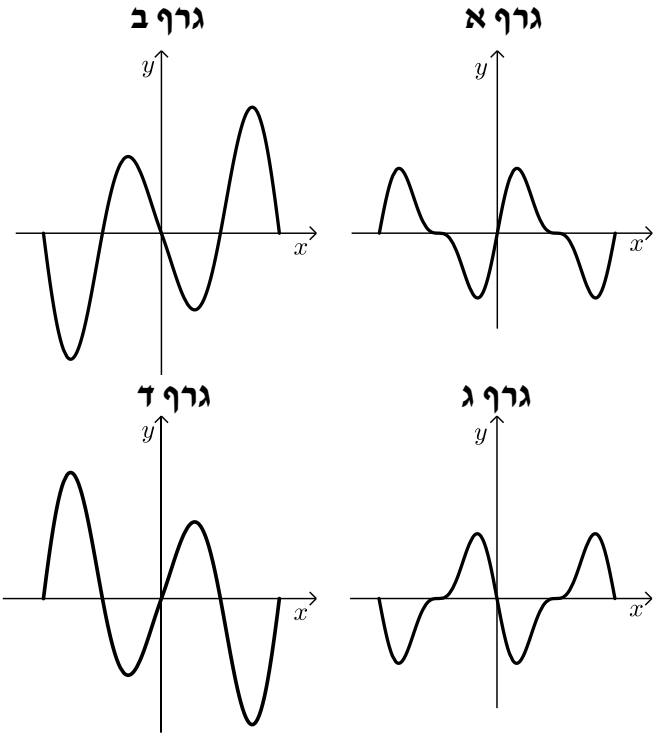
ענה על סעיפים ג'-ד' בתחום: $-\pi\le x\le \pi$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$. הסבר של שיקוליך.

נתונה פונקציה $k(x)$ המקיימת: $k'(x)=f(x)$, $k(0)=0$.

ד. אחד מן הגרפים א'-ד' שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$.

היעזר בתשובתך על סעיף ג' וקבע איזה מן הגרפים שלפניך מתאים לגרף הפונקציה $k(x)$. נמק את קביעתך.



8) נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{x-1}{x-3}$, $g(x)=\frac{x-3}{x-1}$.

ענה על סעיף א' בעבור <u>כל אחת</u> משתי הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

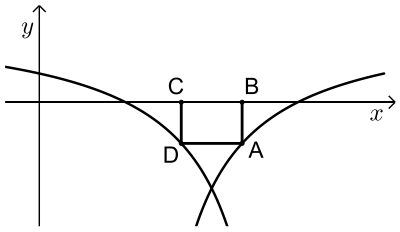
א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

בסרטוט שלפניך מתואר חלק מן הגרף של הפונקציה $f(x)$, חלק מן הגרף של הפונקציה $g(x)$, ומלבן החסום ביניהם וביו ציר ה-x.

צלע BC של המלבן מונחת על ציר ה-x , והצלע הנגדית, AD, מחברת בין נקודה על הגרף של $f(x)$ ובין נקודה על הגרף של $g(x)$, כמתואר בסרטוט.

נסמן ב-t את שיעור ה-x של הנקודה A.



ב. קבע מהו תחום הערכים האפשרי של t.

ג. (1) הבע באמצעות t את אורך הצלע AB.

(2) הוכח ששיעור ה-x של הנקודה D הוא $4-t$.

(3) הבע באמצעות t את שטח המלבן ABCD.

ד. מצא את t שבעבורו שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{5}{4}$. ב. רעות: 3.6 שעות, אודי: 4.5 שעות. ג. 63 ק"מ.
ד. רעות: 17.5 קמ"ש, אודי: 14 קמ"ש.

2) א. הוכחה. ב. $T=n(n+1)d$. ג. 67.

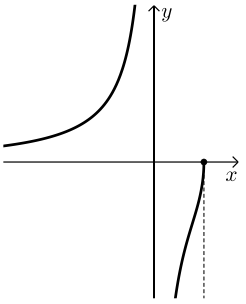
3) א. 40%. ב. (1) 35%. (2) $\frac{8}{13}$. ג. 0.9748.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

5) א. הוכחה. ב. $0.72R^2$. ג. 3.96.

6) א. (1) $x\neq 0\ ,\ x\leq\frac{1}{2}$. (2) $\left(\frac{1}{2},0\right)$. (3) $x=0\ ,\ y=0$.

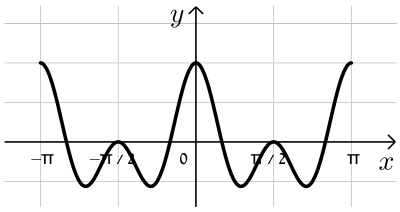
(4) עליה: $0<x<\frac{1}{2}$ או $x<0$, ירידה: אין. ב. סרטוט:



ג. $\int_t^k f(x)dx$ גדול יותר. ד. $\frac{35}{72}$.

7) א. הוכחה. ב. (1) עם x: $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$, עם y: $(0,2)$.

(2) $(0,2)$ מקסימום, $(0.29\pi,-1.12)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ מקסימום, $(0.71\pi,-1.12)$ מינימום, $(\pi,2)$ מקסימום. ג. סרטוט:



ד. גרף א'.

8) א. (1) $f(x):\ x\neq 3\ ,\ g(x):\ x\neq 1$. (2) $f(x):(1,0)$, $g(x):(3,0)$, $\left(0,\frac{1}{3}\right)$, $(0,3)$.

ב. $2<t<3$. ג. (1) $\frac{3-t}{t-1}$. (2) הוכחה. (3) $\frac{(2t-4)(3-t)}{t-1}$.

ד. $t=2.41$.

בגרות 2021 מועד קיץ ב':

ענה על ארבע מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 25 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) נטע, דניאלה ורוני מתאמנות בהליכה ובריצה במסלול AB שאורכו 40 ק"מ.
בשעה 8:00 יצאה נטע מנקודה A והלכה במהירות של 4 קמ"ש לכיוון נקודה B.
בשעה 9:36 יצאה דניאלה מנקודה B ורצה לכיוון נקודה A. שעתיים לאחר צאתה של נטע, יצאה רוני מנקודה B ורצה במהירות של 12 קמ"ש לכיוון נקודה A. נטע ורוני נפגשו ולאחר מכן המשיכו בדרכן. שעה ו-36 דקות אחרי שנטע ורוני נפגשו, הגיעה דניאלה לנקודה A. המהירות של כל אחת מן המתאמנות היא קבועה באימון כולו.

א. באיזו שעה נפגשו נטע ורוני?

ב. מהי מהירות הריצה של דניאלה? נמק את תשובתך.

ג. האם שלוש המתאמנות נפגשו בנקודה אחת לאורך המסלול? נמק את תשובתך.
כל מתאמנת שמגיעה לקצה המסלול מייד מסתובבת וחוזרת לנקודה שממנה היא יצאה.

ד. באיזה מרחק מן הנקודה B נפגשו נטע ורוני בפעם השנייה? נמק את תשובתך.

2) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית a_n שאיבריה: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$ והמנה שלה q.

א. הבע באמצעות a_1 ו- q את ערכי הסכומים שלפניך.

(1) $A = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{40}$.

(2) $B = a_4 + a_8 + a_{12} + \ldots + a_{40}$.

נתון כי a_n היא סדרה עולה וכי: $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$.

ב. מצא את ערכו של q.

בונים מן הסדרה a_n הנתונה סדרה הנדסית אין-סופית b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = 3a_{n+1}$.

ג. מצא את המנה של הסדרה b_n.

בונים סדרה הנדסית אין-סופית חדשה: $\ldots , \frac{1}{b_4} , -\frac{1}{b_3} , \frac{1}{b_2} , -\frac{1}{b_1}$.

ד. הבע את הסכום של כל איברי הסדרה החדשה באמצעות a_1.

נתונה הסדרה: $\frac{1}{a_1} , a_1 , b_1$.

ה. (1) האם ייתכן שסדרה זו חשבונית? נמק את תשובתך.
(2) האם ייתכן שסדרה זו הנדסית? נמק את תשובתך.

3) בתחרות ספורט שנערכת בבית ספר משתתפים תלמידים רבים. כל משתתף צריך להצליח לעבור 3 מכשולים בזה אחר זה לפי הסדר. משתתף שלא מצליח לעבור מכשול מודח מייד מן התחרות. ההסתברות להצליח לעבור מכשול שונה ממכשול למכשול, אך שווה לכל המשתתפים. משתתף שמצליח לעבור את כל שלושת המכשולים עולה לשלב חצי הגמר. 28% מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים. ההסתברות שמשתתף שמצליח לעבור את שני המכשולים הראשונים יודח מן התחרות גדולה פי 3 מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר.

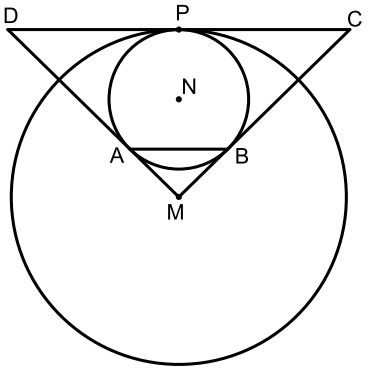
א. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר.
ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון ולא יעבור את המכשול השני היא 0.42.

ב. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות לא יצליח לעבור את המכשול הראשון.

ג. בחרו באקראי שלושה משתתפים : עומר, גל וליאור.
ידוע ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.
(1) חשב את ההסתברות שבדיוק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר.
(2) חשב את ההסתברות שמבין השלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה P (ראה סרטוט).
מרכזי המעגלים הם הנקודות M ו-N,
והרדיוסים שלהם הם R_1 ו- R_2 בהתאמה, $R_2 < R_1$.
מעבירים משיק משותף לשני המעגלים דרך הנקודה P.
מן הנקודה M יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל שמרכזו N בנקודות A ו-B.
ישרים אלה חותכים את המשיק המשותף לשני המעגלים בנקודות C ו-D כמתואר בסרטוט.



א. הוכח כי $AB \perp MN$.

ב. הוכח כי $AB \parallel DC$.

ג. הוכח כי $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$.

נתון : $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$, $MN = 8$.

ד. (1) מצא את R_1 ואת R_2 .
(2) מצא את DC.

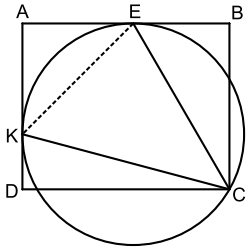
5) המרובע ABCD הוא מלבן ששתיים מצלעותיו, AB ו-AD, משיקות למעגל שרדיוסו R בנקודות E ו-K בהתאמה (ראה סרטוט). הנקודה C נמצאת על המעגל.

א. הוכח: $\sphericalangle KCE = 45°$.

נתון: $\sphericalangle KCD = \alpha$, $0° < \alpha < 45°$.

ב. (1) הבע באמצעות α את הזוויות של המשולש KCE.

(2) הבע באמצעות R ו- α את האורכים של צלעות המשולש KCE.



ג. הבע באמצעות α את היחס $\frac{EB}{AE}$.

נתון: $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ד. חשב את α.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $a > 0$ הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות a אם יש צורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{\left(f(x)\right)^2}$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה. הסתמך על הסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

הצב $a = 2$.

ו. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים $x = 3$ ו- $x = 4$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}+3$.

ענה על הסעיפים שלפניך בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

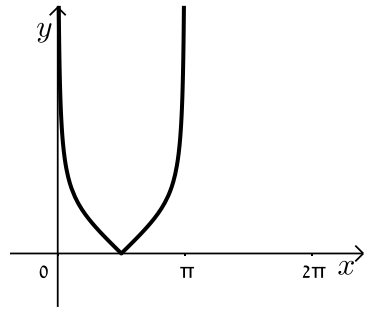
(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

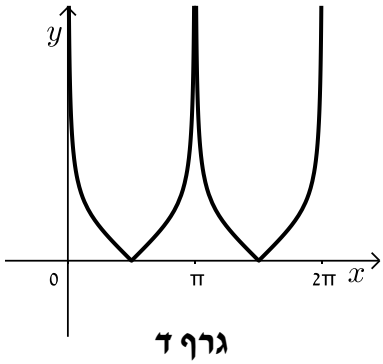
נתונות שתי פונקציות: $k(x)=f(x)-3$, $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$.

ג. אחד מן הגרפים א-ד שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$, ואחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $g(x)$. קבע איזה מן הגרפים מתאר כל אחת מן הפונקציות ונמק את קביעותיך.

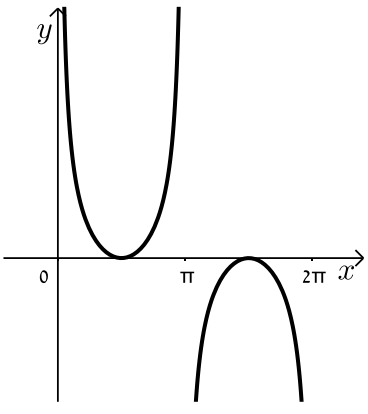
גרף א



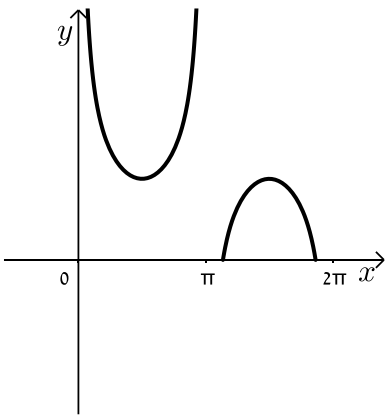
גרף ב



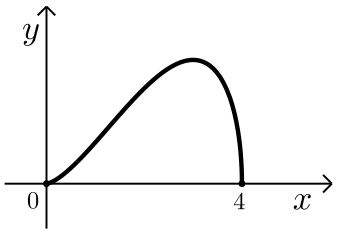
גרף ג



גרף ד



8) בסרטוט שלפניך מוצגת הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax^4+bx^3}$.



נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $0\le x\le 4$.

א. (1) הוכח כי $b=-4a$.

(2) לפניך שתי טענות I-II. רק אחת מהן נכונה.
קבע מהי הטענה הנכונה, ונמק את קביעתך.

I. $b<0$, $a>0$.

II. $b>0$, $a<0$.

הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ המוגדרת גם היא בתחום: $0\le x\le 4$.
מהנקודה P מעבירים ישר המאונך לציר ה-x.
M היא נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה-x, ו-O היא ראשית הצירים.

ב. מהו שיעור ה-x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי?
נמק את תשובתך.

ג. בעבור שיעור ה-x שמצאת בסעיף ב, בטא באמצעות a את השטח המקסימלי של המשולש PMO.

ד. אם ידוע כי שיעור ה-x של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ <u>אינה</u> יורדת, מהו שיעור ה-x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

תשובות סופיות:

1) א. 12:00. ב. 10 קמ"ש. ג. כן. ד. 8 ק"מ.

2) א. (1). $\frac{a_1q\left(q^{40}-1\right)}{q^2-1}$. (2). $\frac{a_1q^3\left(q^{40}-1\right)}{q^4-1}$. ב. $q=3$. ג. $q=3$.

ד. $-\frac{1}{12a_1}$. ה. (1). לא. (2). כן.

3) א. 0.07. ב. 0.3. ג. (1). 0.027. (2). 0.009.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

ד. (1). $R_1=14$, $R_2=6$. (2). $DC=12\sqrt{7}$.

5) א. הוכחה. ב. (1). $\sphericalangle CKE=45°+\alpha$, $\sphericalangle CEK=90°-\alpha$, $\sphericalangle KCE=45°$.

(2). $KE=\sqrt{2}R$, $CK=2R\cos\alpha$, $CE=2R\sin\left(45°+\alpha\right)$.

ג. $\frac{EB}{AE}=2\sin\left(45°+\alpha\right)\cdot\sin\left(45°-\alpha\right)=\sin\left(90°+2\alpha\right)=\cos2\alpha$.

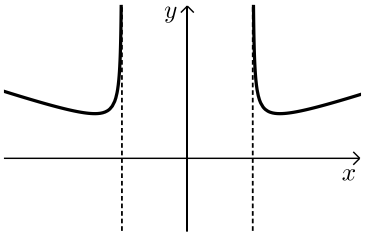
ד. $22.5°$.

6) א. $a<x$ או $x<-a$. ב. הוכחה. ג. (1). אין. (2). $x=a$, $x=-a$.

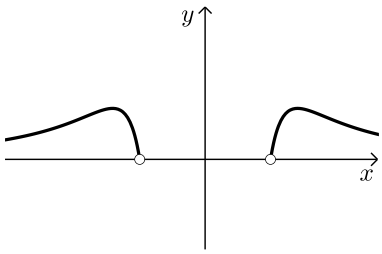
(3). $\left(\sqrt{2}a,2a\right)$ מינימום, $\left(-\sqrt{2}a,2a\right)$ מינימום.

ד. $\left(\sqrt{2}a,4a^2\right)$, $\left(-\sqrt{2}a,4a^2\right)$.

(4). סרטוט:



ה. סרטוט:



ו. $\frac{71}{1,296}$.

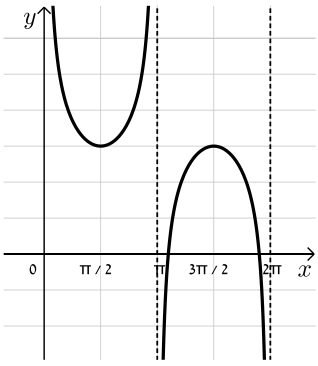
7) א. (1). $0<x<2\pi$, $x\neq0$. (2). $x=2\pi$, $x=\pi$, $x=0$.

(3). עלייה: $\pi<x<1.5\pi$ או $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, יורדת: $1.5\pi<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$.

(4). $\left(\frac{3\pi}{2},3\right)$ מקסימום, $\left(\frac{\pi}{2},3\right)$ מינימום.

ב. ראה סרטוט בצד:

ג. $k(x)$: גרף ג', $g(x)$: גרף א'.



8) א. (1). הוכחה. (2). II. ב. $x=3.2$. ג. $-41.94a$.

ד. $x=3$.