

פתרון בגרויות במתמטיקה לשאלון 582

פרק 5

פתרון בידאו של בחינות 2020

1	מועד חורף
5	קיץ מועד א
9	קיץ מועד ב

בגרות חורף 2020:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) הנקודה A נמצאת על האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ברביע הראשון.

a ו-b הם פרמטרים חיוביים.

נתון: $a > b$, אורך הציר הגדול של האליפסה הוא F_1F_2 . F_1 ו- F_2 הם מוקדי האליפסה.

היקף המשולש FAF_2 הוא 25 ושטחו 12.

א. מצא את משוואת האליפסה.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

דרך הנקודה A עוברת פרבולה שמשוואתה היא $y^2 = 2px$ ($p > 0$ אינו שלם).

דרך הנקודה A העבירו משיק לפרבולה. המשיק חותך את ציר ה-x בנקודה L.

ג. מצא את שיעור ה-x של הנקודה L.

הפרבולה והאליפסה נחתכות בנקודה נוספת, B.

הנקודה D נמצאת על הישר AB.

ד. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל נקודות מפגשי

התיכונים במשולשים ALD.

(2) הישר ℓ עובר דרך ראשית הצירים, O, ומאונך למישור π .

הנקודה $P(-1, -1, 2)$ היא נקודת החיתוך של הישר ℓ והמישור π .

א. מצא את משוואת המישור π .

OABCD היא פירמידה ישרה שבסיסה, ABCD, הוא מלבן הנמצא על המישור π

(הנקודה O היא ראשית הצירים). הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של

המישור π עם ציר ה-x ועם ציר ה-y בהתאמה.

ב. (1) מצא את שיעורי הקודקודים A ו-B.

(2) מצא את שיעורי הקודקודים C ו-D.

ג. חשב את גודל הזווית בין הפאה הצדדית AOB בפירמידה OABCD ובין

בסיס הפירמידה.

הנקודות $F(-4, -2, 0)$ ו- $G(-2, -4, 0)$ נמצאות על הקטע AB.

ד. (1) הראה כי $|FG| = \frac{1}{3}|AB|$.

(2) מצא שיעורים של שתי נקודות, H ו-I, כך שנפח הפירמידה OFGHI

הוא $\frac{1}{3}$ מנפח הפירמידה OABCD. נמק את תשובתך.

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה $z^3 = -1$ (הוא מספר מרוכב). פרט את חישוביך.

a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא $2i$.

ב. הראה כי לכל n טבעי $a_{n+4} = 16a_n$.

הנקודות A, B, C ו-D במישור גאוס מייצגות את איברי הסדרה a_1, a_2, a_3

ו- a_4 בהתאמה. a_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה $z^3 = -1$.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

ג. (1) סרטט סקיצה של המרובע ABCD.

(2) מצא את שטח המרובע ABCD.

ד. הנקודות A', B', C' ו-D' מייצגות את איברי הסדרה a_5, a_6, a_7 ו- a_8

בהתאמה. מצא את היחס בין שטח המרובע A'B'C'D' ובין שטח

המרובע ABCD $\left(\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} \right)$. נמק.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות $\left(33\frac{1}{3} \right)$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{\frac{a}{x-1}} + c$.

a ו- c הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון: משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$ היא $y=1$,

הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודות $(0, e^{-4})$.

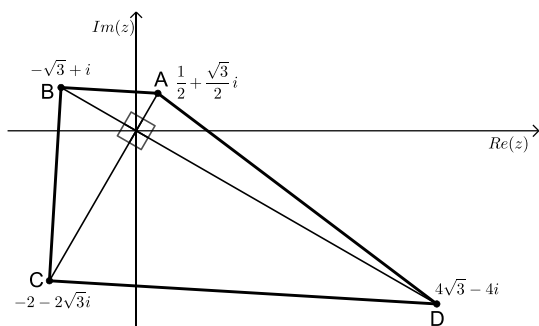
- ב. מצא את הערך של c ואת הערך של a .
- ג. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
(2) מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)?
לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול יחידה בנקודה שבה $x = -1$.
- ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
(2) לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.
- ה. העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה.
המשיק עובר בראשית הצירים. הסבר מדוע השטח הנמצא ברביע השני ומוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y קטן מ- $\frac{1}{2}e^{-2}$.

(5) נתונה פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = \frac{\ln(-x)+2}{x}$

- לפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ יש אותו תחום הגדרה.
- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
(3) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ והקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$.
- ב. (1) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$?
(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.
נתון : $f(-e^{-2}) = 0$.
- ג. (1) מצא ביטוי אלגברי לפונקציה $f(x)$.
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{x^2}{42.25} + \frac{y^2}{6.25} = 1$ (אפשר גם: $\frac{4x^2}{169} + \frac{4y^2}{25} = 1$)
 ב. $A(3.9, 2)$ ג. $x_L = -3.9$ ד. $x = 1.3$
 (2) א. $x + y - 2z + 6 = 0$ ב. $A(-6, 0, 0)$, $B(0, -6, 0)$ (1)
 ב. $C(4, -2, 4)$, $D(-2, 4, 4)$ (2) ג. 35.26°
 ד. (1) הוכחה ד. (2) למשל: $H(2, 0, 4)$, $I(0, 2, 4)$
 (3) א. $\text{cis}60^\circ$, $\text{cis}180^\circ$, $\text{cis}300^\circ$ (אפשר גם: $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1 , $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$)



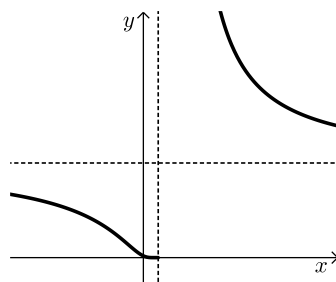
- ב. הוכחה. ג. (1) להלן סקיצה: ג. (2) 25 ד. היחס הוא 256.

- (4) א. $x \neq 1$ ב. $a = 4$, $c = 0$

- ג. (1) עלייה: אין, ירידה: $x < 1$, $x > 1$

- ג. (2) הפונקציה חיובית בכל ת.ה.

- ד. (1) להלן סקיצה:



- ד. (2) $0 < k < 1$, $k > 1$

- ה. הוכחה.

- (5) א. (1) $x < 0$ א. (2) עלייה: $-\frac{1}{e^2} < x < 0$, ירידה: $x < -\frac{1}{e^2}$

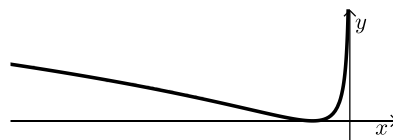
- א. (3) הקעירות כלפי מעלה: $-\frac{1}{e^2} < x < 0$, קעירות כלפי מטה: $x < -\frac{1}{e^2}$



- ב. (1) $x = 0$, $y = 0$ ב. (2) להלן סקיצה:

$$F(x) = \frac{\ln^2(-x)}{2} + 2\ln(-x) + 2 \quad (1)$$

- ג. (2) להלן סקיצה:



(3) z_1 ו- z_2 הם שני מספרים מרוכבים שונים.

נתון: $z_2 = \cos \frac{7\alpha}{3} + i \sin \frac{7\alpha}{3}$, $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{z_1}{z_2}$ הוא מספר ממשי.

א. (1) מצא את α ואת $\frac{z_1}{z_2}$.

(2) הראה כי $z_1 \cdot z_2$ הוא מספר מדומה.

נתון: $w = \frac{z_1}{z_2} + z_1 \cdot z_2$.

ב. מצא את כל פתרונות המשוואה $z^3 = w^6$.

ג. (1) האם הפתרונות שמצאת בסעיף ב יכולים להתאים לקודקודים

של משושה משוכלל במישור גאוס?

אם כן, מצא את שיעוריהם של שאר קודקודי המשושה.

(2) תן דוגמה למספר טבעי $n > 6$ שבעבורו הפתרונות שמצאת בסעיף ב

מהווים קודקודים של מצולע משוכלל בעל n קודקודים.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln((e^x - b)^2 + 1)$, b הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות b .

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) נמק מדוע $f(x) \geq 0$ בכל תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את המשוואה של האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(4) קבע בעבור אילו ערכים של b יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון,

ואם יש כזאת, מצא את שיעוריה, והראה שהיא נקודת מינימום.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $b = 2$.

- ב. מצא את כל הערכים של b שבעבורם הישר $y = \ln 5$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$. נמק.
- ג. נתון כי בעבור אחד מן הערכים של b שמצאת בסעיף ב, אין לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון. בעבור הערך הזה של b , קבע אם הפונקציה $f(x)$ עולה או יורדת. נמק.
- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = e^x(x-5)$, המוגדרת לכל x .
- א. הראה כי: $f'(x) = e^x(x-4)$ וכי $f''(x) = e^x(x-3)$.
- $f^{(n)}(x)$ היא נגזרת מסדר n של $f(x)$ (למשל $f^{(3)}(x) = f'''(x)$). נתונה החוקיות: $f^{(n)}(x) = e^x(x-5+n)$ בעבור כל n טבעי.
- ב. מצא את $f'''(x)$ והראה כי החוקיות הנתונה מתקיימת בעבורה. ענה על סעיף ג. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות n .
- ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f^{(n)}(x)$ עם הצירים. (2) מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f^{(n)}(x)$. (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f^{(n)}(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
- (4) הראה כי הגרפים של הפונקציה $f^{(m)}(x)$ ו- $f^{(k)}(x)$ אינם נחתכים בעבור שני מספרים טבעיים שונים m ו- k .
- (5) סרטט על מערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ וכתוב איזה מן הגרפים מתאים לכל אחת מן הפונקציות.
- ד. הסתמך על החוקיות הנתונה ומצא לפונקציה $f(x)$ פונקציה קדומה, $F(x)$, אם נתון כי הגרף של הפונקציה $F(x)$ עובר בראשית הצירים. אמת את תשובתך על ידי גזירה.

תשובות סופיות:

א. $y = -\frac{3}{4}x, y = 0$ (1) ב. $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 36$ (1)

א. $(-1.6, 1.2), (2, 0)$ (2) ב. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$ (1)

א. $\overline{AM} = \frac{5}{3}\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$ (2) ב. $\alpha = \frac{1}{5}, \beta = \frac{1}{5}$ (1)

א. $x + 2y + 3z - 26 = 0$ (2) ב. $x + 2y + 3z - 26 = 0$ (2)

א. $K(-3, 4, 7)$ (3)

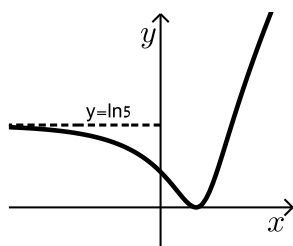
א. $\alpha = \frac{3\pi}{4}, \frac{z_1}{z_2} = \text{cis}(-\pi) = -1$ (1) א. $z_1 \cdot z_2 = i$ (2)

א. $2\text{cis}\frac{1}{6}\pi, 2\text{cis}\frac{5}{6}\pi, 2\text{cis}\frac{3}{2}\pi$ (2) ב. $(0, 2), (-\sqrt{3}, -1), (\sqrt{3}, -1)$ (1)

א. $n = 9$ (2)

א. $y = \ln(b^2 + 1)$ (3) א. x כל (1) א. (2) הוכחה

א. $b > 0, \min(\ln b, 0)$ (4) א. (5) להלן סקיצה:



א. $b = 2, b = -2$ (2)

א. עבור $b = -2$ אין נקודות קיצון

א. והפונקציה $f(x)$ בכל תחום הגדרתה.

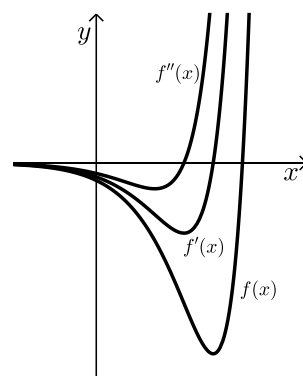
א. הוכחה. (5)

א. $f'''(x) = e^x(x-2)$ (2)

א. $(0, n-5), (5-n, 0)$ (1)

א. $\min(4-n, -e^{4-n})$ (3)

א. (5) להלן סקיצה:



א. $y = 0$ (2)

א. (4) הוכחה.

א. $F(x) = e^x(x-6) + 6$ (2)

בגרות קיץ 2020 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) הישר $4x - 3y = 0$ משיק למעגל שמרכזו $(5a, 0)$. a הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את משוואת המעגל באמצעות a .

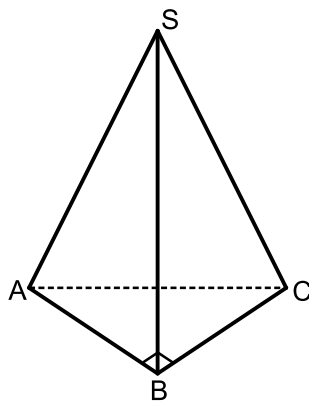
מנקודה G , הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר, המשיק למעגל בנקודה K .

ב. הבע באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות G שבעבורן המרחק GK שווה למרחק שלהן מן הישר $x = -3a$ וצייר סקיצה שלו.

נתון: אורך הקטע GK הקצר ביותר האפשרי הוא 7.5.

ג. (1) מה הם שיעורי הנקודה G שבעבורה אורך הקטע GK הוא 7.5? נמק.

(2) מצא תא ערכו של הפרמטר a . נמק.



2) נתונים שני ישרים:

$$l_1: \underline{x} = (6, 10, -7) + k(3, 5, -4)$$

$$l_2: \underline{x} = (15, 0, 6) + t(9, 0, 13)$$

ונתון הווקטור: $\underline{u} = (6, 0, -8)$.

הנקודה A נמצאת על הישר l_1 והנקודה C

נמצאת על הישר l_2 כך ש- $\overrightarrow{AC} = \underline{u}$.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו- C .

$SABC$ היא פירמידה ישרה שבסיסה ABC , הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).

הנקודה S נמצאת על הישר l_2 והנקודה B נמצאת על הישר l_1 .

ב. מצא את שיעורי הנקודה B .

ג. מצא את משוואת המישור ABC .

מן הנקודה C העלו אנך למישור ABC .

ד. חשב את הזווית שבין האנך ובין הישר l_2 .

(3) z הוא מספר מרוכב.

א. פתור את המשוואה $z^5 = 2^5$.

הנקודות $A_1, A_2, \dots, A_n$ במישור גאוס מתאימות לפתרונות המשוואה $z^n = 2^n$ ($n \geq 3$ הוא מספר טבעי).

חיברו את הנקודות $A_1, A_2, \dots, A_n$ ויצרו מצולע משוכלל קמור. נתון כי שטח המצולע שהתקבל שווה ל- n .

ב. מצא את n .

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב.

$w = a + bi$ הוא פתרון של המשוואה $z^n = 2^n$ כך ש- $a \cdot b > 0$ כלומר: $[\operatorname{Re}(w) \cdot \operatorname{Im}(w) > 0]$.

ג. באילו רביעים נמצאים פתרונות w כאלה?

ארבע הנקודות הנמצאות ברביעים שמצאת בסעיף ג הן קודקודיו של מלבן. אם מכפילים כל אחד מן המספרים המתאימים לארבע הנקודות הללו במספר $z_0 = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$), מתקבל מלבן חדש, שצלעותיו מקבילות לצירים.

ד. מצא את הזווית θ . נמק.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - ae^x + 3}$, a הוא פרמטר.

הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת בעבור $x = 0$.

א. (1) מצא את a ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

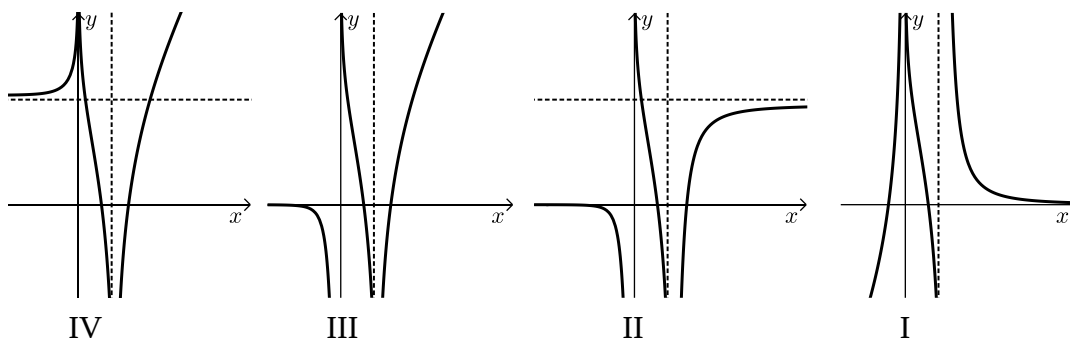
(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. אחד מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, המוגדרת בתחום ההגדרה של $f(x)$. איזה מהם מתאר אותה? נמק.

ד. נתונה הפונקציה: $h(x) = f(x+k)$.

עבור איזה ערך של $k \neq 0$ יש לפונקציה $h(x)$ אסימפטוטה שמשוואתה היא $x=0$? נמק.



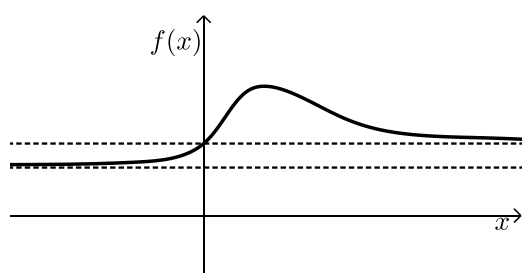
5) הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x) = \ln(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x .

א. הראה כי לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $\ln(f(x))$ יש נקודות קיצון באותם שיעורי x ושנקודות הקיצון הללו הן מאותו הסוג (מינימום/מקסימום).

בציור שלפניך מתואר גרף של פונקציה $f(x)$, כך ש- $f(x)$ ו- $g(x) = \ln(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון יחידה ששיעוריה הם $(1, 2)$, ושתי אסימפטוטות:

אסימפטוטה שמשוואתה היא $y=1$,

ואסימפטוטה נוספת שמשוואתה היא $y = \frac{2}{3}$.



גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y

כאשר $y=1$.

ענה על סעיף ב בהסתמך על הגרף המתואר בציור.

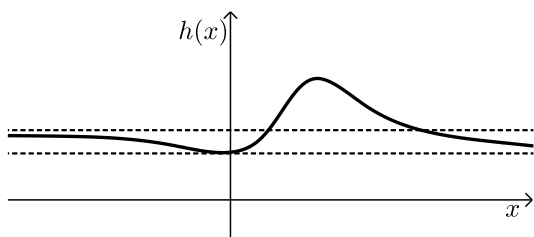
ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?

(3) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות צירים?

(4) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$. נמק.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.



נגדיר: $h(x) = f(x) - g(x)$.

לפניך סרטוט של גרף הפונקציה $h(x)$.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון

של הפונקציה $h(x)$.

קבע את סוגן בעזרת הגרף.

(2) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על

גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מאונך לציר ה- x .

מהו שיעור ה- x שבעבורו אורך הקטע AB הוא 1? נמק.

תשובות סופיות:

(1) א. $(x-5a)^2 + y^2 = 16a^2$ ב. $y^2 = 16ax$ ג. (1) $G(0,0)$ ד. (2) $a = 2.5$

(2) א. $A(0,0,1)$, $C(6,0,-7)$ ב. $B(3,5,-3)$ ג. $4x + 3z - 3 = 0$ ד. 18.43°

(3) א. $2, 2\text{cis}72^\circ, 2\text{cis}144^\circ, 2\text{cis}216^\circ, 2\text{cis}288^\circ$ ב. $n = 12$

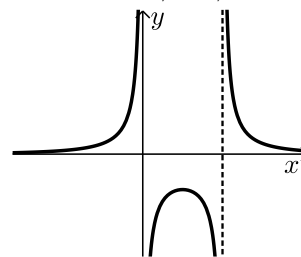
ג. רביעים I, III. ד. $\theta = 45^\circ$

(4) א. (1) $a = 4$, תחום הגדרה: $x \neq 0, x \neq \ln 3$

א. (2) $y = 0, y = 2, x = \ln 3, x = 0$

א. (3) עולה: $0 < x < \ln 1.5, x < 0$, יורדת: $x > \ln 3, \ln 1.5 < x < \ln 3$

ב. להלן סקיצה: ג. גרף IV. ד. $k = \ln 3$



(5) א. הוכחה. ב. (1) כל x ב. (2) $\max(1, \ln 2)$

ב. (3) $y = 0, y = \ln \frac{2}{3}$ ב. (4) חיובית: $x > 0$, שלילית: $x < 0$

ב. (5) להלן סקיצה: ג. (1) $\min(0,1), \max(1,1.306)$ ג. (2) $x = 0$

