פתרון בגרויות במתמטיקה לשאלון 581

פרק 6

פתרון בוידאו של בחינות 2019

בגרות חורף 2019:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) קבוצת פועלים, חוטבי עצים מנוסים, תכננה לכרות 216 מ״ק עץ במספר ימים מסוים (ההספק של הפועלים הוא קבוע).
בשלושת הימים הראשונים עבדו הפועלים על פי ההספק המתוכנן. החל מן היום הרביעי הם הגבירו את קצב עבודתם ומדי יום כרתו 8 מ״ק עץ יותר מן המתוכנן.
הם עבדו בפועל יום אחד פחות ממספר הימים המתוכנן, וכרתו 232 מ״ק עץ סך הכול.

א. (1) על פי התכנון, כמה מ״ק עץ היו אמורים הפועלים לכרות ביום?
(2) כמה ימים עבדו הפועלים בפועל?

ב. במהלך איזה יום מתחילת העבודה סיימו הפועלים לכרות $\frac{2}{3}$ מן הכמות המתוכננת?

לאחר מכן הוצמד פועל מתלמד לכל פועל מנוסה בקבוצה, וכן נוצרה קבוצה חדשה ובה $2m$ פועלים סך הכול (m מנוסים ו-m מתלמדים).
ההספק היומי של הפועלים המנוסים הוא ההספק היומי המתוכנן. כל הפועלים המנוסים עובדים באותו הספק יומי.
ההספק היומי של פועל מתלמד קטן ב-1 מ״ק מן ההספק היומי של פועל מנוסה.
הקבוצה החדשה עבדה 8 ימים.

ג. (1) בטא את ההספק היומי של פועל מנוסה יחיד ושל פועל מתלמד יחיד באמצעות m.
(2) כמה פועלים יש בקבוצה החדשה אם ידוע שהם כרתו 336 מ״ק עץ סך הכול?

2) נתונה סדרה חשבונית $a_1 , a_2 , \dots , a_{2n+3}$ ובה $2n+3$ איברים (n הוא מספר טבעי).
סכום הסדרה גדול פי 43 מן האיבר האמצעי. האיבר האמצעי שונה מ-0.

א. (1) הראה כי סכום הסדרה שווה ל- $(2n+3)\cdot a_{n+2}$.
(2) מצא את מספר האיברים בסדרה.

ב. ידוע כי בסדרה הנתונה סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב-40 מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.
(1) מצא את האיבר האמצעי.
(2) מצא את סכום הסדרה.

נתון כי הפרש הסדרה הנתונה הוא $-a_1$.

ג. קבע האם הסדרה עולה או יורדת.

מכל איברי הסדרה הנתונה בונים סדרה חדשה על ידי חיבור של כל k איברים סמוכים (k הוא מספר טבעי) באופן הזה:

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_k\right)\ ,\ \left(a_2+a_3+\ldots+a_{k+1}\right)\ ,\ \left(a_3+a_4+\ldots+a_{k+2}\right)\ ,\ \ldots$$

ד. הבע באמצעות k את מספר האיברים בסדרה החדשה.

3) בבית ספר תיכון ניגשים תלמידי שכבת י"ב לבחינת המתכונת באזרחות ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות.
נתון: גם בשנת 2017 וגם בשנת 2018 מספר התלמידים שעברו את בחינת המתכונת ונכשלו בבחינת הבגרות היה שווה למספר התלמידים שנכשלו בבחינת המתכונת ועברו את בחינת הבגרות.

א. בשנת 2017 ניגשו 250 תלמידים לבחינת המתכונת ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות. ידוע שאם תלמיד עבר את בחינת המתכונת, ההסתברות שהוא עבר את בחינת הבגרות היא 0.9. שיעורם של הנכשלים בבחינת הבגרות מכלל התלמידים שניגשו לבחינות בשנה זו היה 20%.
(1) מהו מספר התלמידים שעברו גם את בחינת המתכונת וגם את בחינת הבגרות?
(2) ידוע שתלמיד מסוים נכשל בבחינת המתכונת.
מהי ההסתברות שאותו תלמיד עבר את בחינת הבגרות?
(3) בוחרים באקראי (עם החזרה) שני תלמידים שנכשלו בבחינת הבגרות.
מהי ההסתברות ששניהם נכשלו גם בבחינת המתכונת?

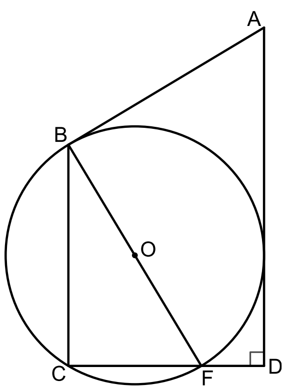
ב. נתון כי בשנת 2018 לא הייתה תלות בין המאורע "עובר את בחינת המתכונת" לבין המאורע "עובר את בחינת הבגרות", וכי ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת הבגרות בשנה זו היא a $\left(0<a<1\right)$. הבע באמצעות a את ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת המתכונת ונכשל בבחינת הבגרות בשנה זו.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

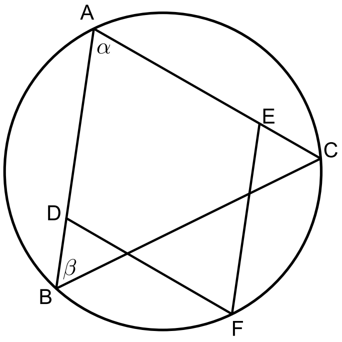
שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) המשולש BCF חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. BF הוא קוטר במעגל.
מן הנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל- האחד משיק למעגל בנקודה B והאחר חותך את המשך הצלע CF בנקודה D, כמתואר בציור שלפניך.
נתון: $AD \perp CD$.



א. הוכח: $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BAD$.
נתון: K היא נקודה על הצלע BC, כך ש-FK חוצה את $\sphericalangle BFC$.
ב. הוכח: $KC = \frac{CF \cdot BO}{AB}$.
ג. הוכח: $KB \cdot AB = 2R^2$.
ד. הסבר מדוע שטח ΔBFK גדול משטח ΔKFC.

5) ABC הוא משולש החסום במעגל שרדיוסו R . הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AB ו-AC בהתאמה, והנקודה F נמצאת על הקשת BC כך שהמרובע ADFE הוא מעוין (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$.



א. (1) הבע באמצעות α ו- β את $\sphericalangle ABF$.

(2) הבע באמצעות R , α ו- β את אורך האלכסון AF.

ב. הבע באמצעות R , α ו- β את אורך צלע המעוין.

נתון כי AF הוא קוטר במעגל.

ג. הראה כי שטח המעוין הוא $2R^2\tan\frac{\alpha}{2}$.

נתון כי רדיוס המעגל החסום במעוין ADFE הוא $\frac{3}{2}R$.

ד. חשב את β .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתון: הפונקציה $g''(x)=-\frac{18}{x^4}+\frac{18}{(x-4)^4}$ היא פונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $g(x)$.

הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ מוגדרות באותו תחום.

נתון כי משוואת המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודת הפיתול שלה היא $y=\frac{3}{2}x-3$.

א. (1) מצא את הפונקציה $g(x)$.

(2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נגדיר: $h(x)=|g(x)|$.

ב. באותה מערכת צירים שבה סרטטת סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, הוסף בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

ג. נתון כי: $\int_a^2 g(x)dx=t$, $0<a<2$, t הוא פרמטר.

הבע באמצעות t את $\int_a^2 (h(x)-g(x))dx$.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=2\sin x+\cos 2x-1$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{2}\pi$.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ הוזז שמאלה ב- $\frac{\pi}{2}$ כך שהתקבלה פונקציה $g(x)$ המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

ב. (1) בטא את הפונקציה $g(x)$ באמצעות הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) הוכח כי $g(x)$ היא פונקציה זוגית.

לפניך 3 ביטויים, III-I:

I: $\int_{}^{\frac{\pi}{2}} f(x+\pi)dx$ II: $\int_{}^{0} f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx$ III: $\int_{}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$

ג. ציין איזה מן הביטויים III-I שווה ל- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

נמק את תשובתך. אין צורך בחישוב.

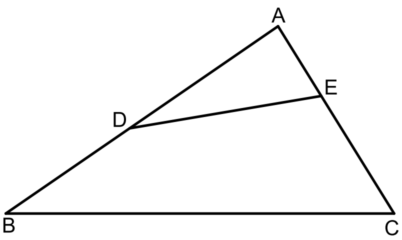
8) במשולש ABC נתון: AB = 30, AC = 20.

$\sphericalangle CAB=\alpha$, α הוא קבוע.

הנקודה D נמצאת על הצלע AB והנקודה E נמצאת על הצלע AC (ראה ציור).

נתון: שטח המשולש ADE שנוצר באופן הזה הוא רבע משטח המשולש ABC.

סמן את אורך הקטע AD ב- x.



א. הבע באמצעות x את אורך הקטע AE.

ב. (1) הבע באמצעות α את האורך המינימלי של הקטע DE.

(2) הסק מתת-סעיף ב(1) את הערך של x שבעבורו היחס $\frac{DE}{BC}$ הוא מינימלי. הסבר.

תשובות סופיות:

1) א. (1) 24 מ״ק ליום. (2) 8 ימים. ב. במהלך היום השישי.

ג. (1) $\frac{24}{m}$ הספק יומי של פועל מנוסה, $\frac{24}{m}-1$ הספק יומי של פועל מתלמד. (2) 12 פועלים.

2) א. (1) הוכחה. (2) 43. ב. (1) 40 (2) 1720 ג. עולה. ד. $44-k$.

3) א. (1) 180 תלמידים (2) 0.4 (3) 0.36 ב. $a-a^2$.

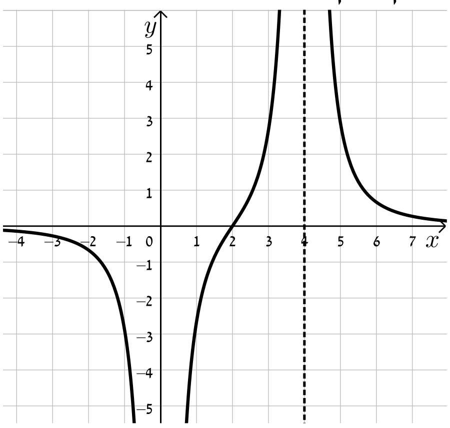
4) א - ג. הוכחות. ד. $S_{\text{BFK}} > S_{\text{KFC}}$.

5) א. (1) $\beta+\frac{\alpha}{2}$ (2) $2R\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)$ ב. $\dfrac{R\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

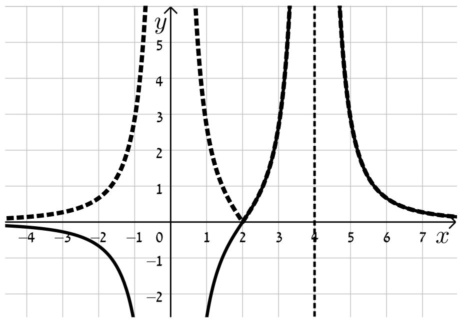
ג. הוכחה. ד. $53.13°$.

6) א. (1) $g(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{(x-4)^2}$ (2) $x\neq 0$, $x\neq 4$

(3) עולה: $0<x<4$, יורדת: $x<0$, $x>4$ (4) להלן סקיצה:



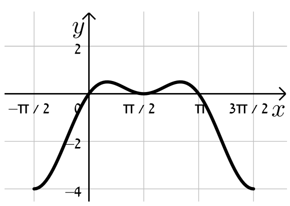
ב. להלן סקיצה: ג. $-2t$.



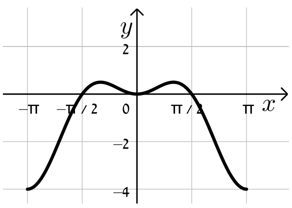
7) א. (1) $(\pi,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$

(2) $\min\left(\frac{3\pi}{2},-4\right)$, $\max\left(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{2},-4\right)$.

(3) להלן סקיצה:



ב. (1) $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ (2) להלן סקיצה:



(3) הוכחה. ג. גרף II.

8) א. $\frac{150}{x}$ ב. (1) $\sqrt{300-300\cos\alpha}$ (2) $\sqrt{150}$.

בגרות קיץ 2019 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) במאפייה יש שתי מכונות לייצור עוגות: מכונה I ומכונה II.
כל אחת מן המכונות מייצרת עוגות בקצב קבוע משלה.
ביום ראשון זמן העבודה של שתי המכונות היה שווה.
ביום ראשון מכונה I יצרה 80 עוגות יותר ממספר העוגות שייצרה מכונה II.
ביום שני ייצרה מכונה II את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה I ביום ראשון,
ומכונה I ייצרה את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה II ביום ראשון.
ביום שני היה זמן העבודה של מכונה II ארוך פי $\frac{25}{9}$ מזמן העבודה
של מכונה I באותו יום.

א. חשב כמה עוגות סך הכול ייצרו שתי המכונות ביום ראשון.
נסמן: T_1 - הזמן הדרוש למכונה I לייצר עוגה אחת.
T_2 - הזמן הדרוש למכונה II לייצר עוגה אחת.

ב. חשב את היחס $\frac{T_1}{T_2}$. נמק.

ג. (1) בפרק זמן מסוים מכונה I ייצרה בדיוק 47 עוגות.
כמה עוגות שלמות ייצרה מכונה II בפרק הזמן הזה? הסבר.
(2) ידוע ששתי המכונות עבדו אותו פרק זמן, וכל אחת מהן ייצרה מספר שלם של עוגות. האם ייתכן שבפרק הזמן הזה שתי המכונות יחד ייצרו 26 עוגות? נמק.

2) a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא q. $|q| \neq 1$.
נתון: $a_3 \cdot a_7 = 1$.

א. חשב את a_5 (מצא את שתי האפשרויות).

נתון: $a_5 > 0$.

ב. (1) הבע את a_1 באמצעות q.

(2) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_1}$? אם כן – מצא אותו. אם לא – נמק.

(3) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_{13}}$? אם כן – מצא אותו. אם לא – נמק.

ג. (1) הבע באמצעות q את 7 האיברים הראשונים של הסדרה a_n.

(2) נתון: $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k = 1$ (k הוא מספר טבעי).
מצא את הערך של k, והסבר מדוע הוא הערך האפשרי היחיד של k.

3) גלי ונטע משחקות משחק ובו אפשר לקבוע את מספר הסיבובים.
בכל סיבוב אחת מהן זוכה והאחרת מפסידה.
המנצחת במשחק כולו תהיה זו תזכה ביותר סיבובים מחברתה.
אם לשתיהן מספר שווה של זכיות בסיבובים, התוצאה במשחק כולו תהיה תיקו.

נתון: בכל סיבוב הסיכוי של נטע לזכות הוא $\frac{1}{3}$.

א. ביום ראשון שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק.
(1) מהי ההסתברות שנטע ניצחה במשחק כולו?
(2) מהי ההסתברות לתוצאת תיקו במשחק כולו?

ב. גם ביום שני שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק.
הפעם הן החליטו מראש שאם התוצאה במשחק של 4 הסיבובים תהיה תיקו – הן ישחקו עוד 3 סיבובים כדי להכריע את תוצאת המשחק, ומי שתזכה ביותר סיבובים תנצח במשחק כולו. מהי ההסתברות שנטע תנצח במשחק כולו?

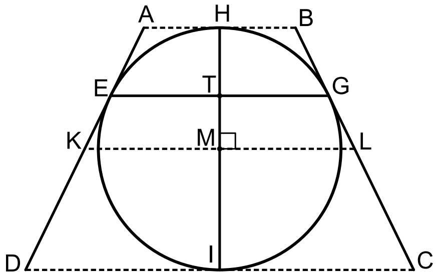
ג. ידוע שנטע ניצחה במשחק כולו בדיוק באחד משני הימים: ראשון או שני.
מה הסיכוי שהיא ניצחה במשחק כולו ביום שני?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) EG הוא מיתר במעגל שמרכזו M ורדיוסו r.
דרך הנקודות E ו-G העבירו משיקים למעגל.
דרך מרכז המעגל, M, העבירו ישר המקביל למיתר EG וחותך את המשיקים
בנקודות K ו-L כמתואר בציור.
דרך מרכז המעגל, M, העבירו אנך ל-KL אשר חותך את המיתר EG בנקודה T
ואת המעגל הנקודות H ו-I, כמתואר בציור.
נסמן: $TG = a$.



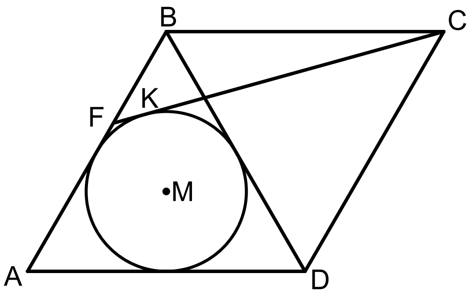
א. (1) הוכח: $TG \cdot ML = MG^2$.
(2) הבע את אורך הקטע KL באמצעות a ו- r.

דרך הנקודות H ו-I העבירו משיקים למעגל,
כך שנוצר טרפז שווה שוקיים ABCD שחוסם
את המעגל, כמתואר בציור.

ב. (1) הוכח: $BC = KL$.
(2) הבע את היקף הטרפז ABCD באמצעות a ו- r.

ג. האם היחס בין היקף הטרפז ABCD והיקף המעגל יכול להיות קטן מ- $\frac{4}{\pi}$? נמק.

5) ABCD הוא מעוין שאורך צלעו הוא a.
נתון: $\sphericalangle BAD = 60^\circ$.
במשולש ABD חסום מעגל שמרכזו M.
מן הקדקוד C העבירו משיק למעגל שהמשכו
חותך את הצלע AB בנקודה F והוא משיק למעגל
בנקודה K (ראה ציור).



א. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.
ב. (1) הסבר מדוע הנקודה M נמצאת על אלכסון המעוין AC.
(2) חשב את גודל הזווית ACF.
ג. הבע באמצעות a את שטח המשולש ACF.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה משפחת הפונקציות : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a}$. a הוא פרמטר המקיים : $-4<a<2$.

א. (1) מצא את תחום ההגדה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הסבר מדוע לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטה מקבילה לציר ה- y .

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x .

(4) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(5) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) הבע באמצעות a את שיעורי ה- x שבעבורם $f'(x)=0$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את הערך של a שבעבורו $f'(x)\neq 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

הצב $a=-1$ במשוואת הפונקציה $f(x)$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. (1) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)?

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את $\int_3^4 \frac{1}{f(x)}dx$. תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3\sin x$ המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

א. (1) קבע אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x תחום הנתון.

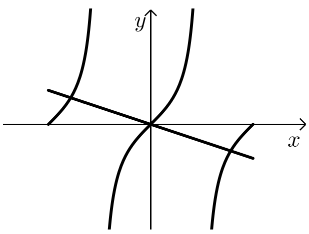
(3) הסבר מדוע הפונקציה $f(x)$ היא אי-שלילית בתחום הנתון.

(4) קבע אם פונקציית הנגזרת $f'(x)$, היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

ב. (1) הראה ששיעורי ה-x שעבורם $f'(x)=0$ מקיימים: $\tan x=-\frac{1}{3}x$.

(2) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$h(x)=-\frac{1}{3}x$ ו-$g(x)=\tan x$ בתחום $-\pi\le x\le\pi$.



היעזר בציור וקבע כמה נקודות בתחום $-\pi\le x\le\pi$ מקיימות: $f'(x)=0$.

נתון: שיעור ה-x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא 2.46 בקירוב.

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור התחום $-\pi\le x\le\pi$.

ג. (1) מה הם שיעורי ה-x של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, בתחום.

(2) כמה נקודות פיתול לכל הפחות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק.

8) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x)=\sqrt{-x^2+7x}$ ו- $g(x)=\sqrt{14-2x}$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בראשית הצירים ובנקודה B, ואת גרף הפונקציה $g(x)$ הוא חותך בנקודות B ו-D, כמתואר בציור.

א. (1) מצא את תחומי ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ ו- $g(x)$.

(2) מצא את שיעורי ה- x של הנקודות B ו-D.

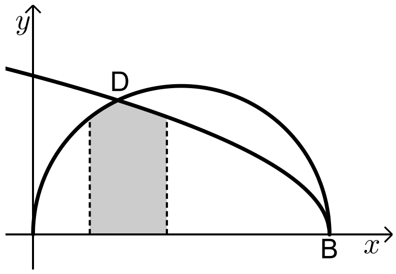
a הוא פרמטר המקיים: $1\le a\le 2$.

השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי האנכים $x=a$ ו- $x=a+1$ ועל ידי ציר ה- x , מסתובב סביב ציר ה- x .

ב. (1) חשב את a שבעבורו נפח גרף הסיבוב המתקבל הוא המקסימלי.

(2) מצא את a שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המינימלי.

אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



תשובות סופיות:

1) א. 320 עוגות. ב. $\frac{T_1}{T_2}=\frac{3}{5}$ ג. (1) 28 עוגות שלמות.
ג. (2) לא יתכן.

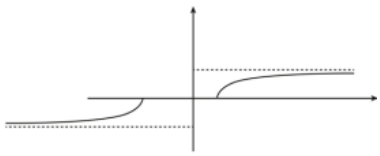
2) א. $a_5=1$ או $a_5=-1$ ב. (1) $a_1=\frac{1}{q^4}$ ב. (2) $n=9$
ב. (3) אין כזה. ג. (1) $\frac{1}{q^4}\,,\,\frac{1}{q^3}\,,\,\frac{1}{q^2}\,,\,\frac{1}{q}\,,1\,,q\,,q^2$ ג. (2) $k=9$

3) א. (1) $\frac{1}{9}$ א. (2) $\frac{8}{27}$ ב. $\frac{137}{729}$ ג. $\frac{137}{211}$

4) א. (1) הוכחה. א. (2) $\mathrm{KL}=\frac{2r^2}{a}$ ב. (1) הוכחה.
ב. (2) $P_{\mathrm{ABCD}}=\frac{8r^2}{a}$ ג. לא.

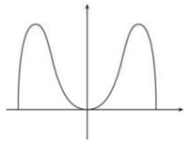
5) א. $R=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ ב. (1) הוכחה. ב. (2) $\sphericalangle\mathrm{ACF}=14.478°$ ג. $S_{\mathrm{ACF}}=0.267a^2$

6) א. (1) $x\le -2\ ,\ x\ge 1$ א. (2) הוכחה. א. (3) $y=-\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{1}{2}$
א. (4) $(-2,0)\ ,\ (1,0)$ א. (5) $f(x)<0$ עבור $x<-2$, $f(x)>0$ עבור $x>1$.
ב. (1) $x=\frac{8-a}{2a+2}$ ב. (2) $a=-1$ ג. (1) $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.
ג. (2)

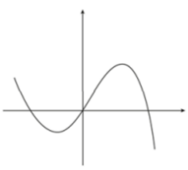


ד. 2.16 יח״ר $=6\sqrt{2}-2\sqrt{10}$

7) א. (1) $f(x)$ זוגית. א. (2) $(\pi,0)\ ,\ (0,0)\ ,\ (-\pi,0)$ א. (3) הוכחה.
א. (4) $f'(x)$ אי זוגית. ב. (1) הוכחה. ב. (2) שלוש נקודות.
ג. (1) $x=\pi$ מינימום קצה, $x=2.46$ מקסימום, $x=0$ מינימום,
$x=-2.46$ מקסימום, $x=-\pi$ מינימום קצה.
ג. (2)



ד. (1)



ד. (2) 2 נקודות פיתול לפחות.

8) א. (1) $0\le x\le 7: f(x)\ ,\ x\le 7: g(x)$ א. (2) $x_B=7, x_D=2$
ב. (1) $a=1.63$ ב. (2) $a=1$

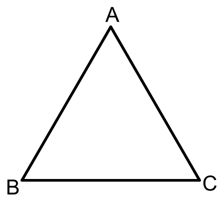
בגרות קיץ 2019 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) בציור שלפניך מתואר מסלול לרכיבה באופניים בצורת משולש שווה צלעות ABC, שאורך צלעו a מטר.



ביום מסוים יצאו שני רוכבי אופניים באותו הזמן מן הנקודה A לכיוון הנקודה B.

הם רכבו לאותו הכיוון לאורך המסלול המשולש.

כל אחד מהם רכב במהירות קבועה. המהירות של רוכב א גדולה ב-2 מטרים לשנייה מן המהירות של רוכב ב.

כאשר הגיע רוכב א אל הנקודה A לאחר שהשלים פעמיים את המסלול המשולש, הגיע רוכב ב אל הנקודה B בפעם השנייה.

א. מצא את המהירות של כל אחד מרוכבי האופניים.

ב. באיזו נקודה על המשולש יהיה רוכב ב, כאשר יגיע רוכב א אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול המשולש?

כאשר הגיע רוכב א אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול, הוא הסתובב והחל לרכוב לכיוון הנגדי - מן הנקודה A לכיוון הנקודה C - בלי לשנות את מהירותו.
רוכב ב המשיך לרכוב בכיוון הנסיעה המקורי, בלי לשנות את מהירותו.
הרוכבים נפגשו בנקודה M.

ג. מצא על איזו צלע של המשולש נמצאת הנקודה M, ומצא באיזה יחס הנקודה M מחלקת את הצלע שמצאת.

למחרת שוב יצאו הרוכבים מן הנקודה A, רכבו לכיוון הנקודה B והמשיכו לרכוב במסלול המשולש, כל אחד מהם רכב באותה המהירות שרכב ביום שלפני כן.
רוכב א חלף על פני רוכב ב בפעם הראשונה 6 דקות אחרי שיצאו לדרך.

ד. מצא את היקף המשולש. נמק את תשובתך.

2) נתונה סדרה a_n המקיימת לכל n את הכלל: $a_{n+1}+a_n=6n+5$.

א. הוכח כי מתקיים: $a_{n+2}=a_n+c$ (c הוא מספר קבוע), ומצא את c.

ב. כתוב דוגמה לסדרה a_n המקיימת את הכלל, והיא אינה סדרה חשבונית (כתוב לפחות 4 איברים ראשונים בסדרה).

נתון כי הסדרה a_n כולה היא חשבונית.

ג. חשב את a_1.

בנו סדרה חדשה בת $2n+1$ איברים: $a_1-1\,,\ a_2-2\,,\ a_3-3\,,\ \ldots.\,,\ a_{2n+1}-(2n+1)$

האיבר האמצעי בסדרה החדשה הוא 43.

ד. חשב את סכום הסדרה החדשה.

3) בקופסה יש 12 כדורים כחולים, 20 כדורים אדומים ו-8 כדורים צהובים.
על 28 מן הכדורים רשומה הספרה 1, ועל השאר רשומה הספרה 0.

$\frac{1}{4}$ מן הכדורים שרשומה עליהם הספרה 1 הם צהובים.

מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה 1 גדול פי 4 ממספר הכדורים הכחולים שרשומה עליהם הספרה 0.

דני מוציא באקראי כדור מן הקופסה.

א. מהי ההסתברות שהכדור שהוציא דני הוא כדור כחול ושרשומה עליו הספרה 1?

ב. אם ידוע שדני הוציא כדור כחול או כדור שרשומה עליו הספרה 1, מהי ההסתברות שהוא הוציא כדור שרשומה עליו הספרה 0?

דני החזיר את הכדור לקופסה, וכעת הוא משחק במשחק: הוא מוציא באקראי כדור מן הקופסה, רושם לעצמו את הספרה שעליו ומחזיר את הכדור לקופסה.
בכל פעם שהוא מוציא כדור שרשומה עליו הספרה 1 הוא צובר נקודה.
הוא יפסיק לשחק כאשר הוא יצבור 5 נקודות.

ג. מהי ההסתברות שדני יצבור 5 נקודות אחרי 6 פעמים בדיוק?

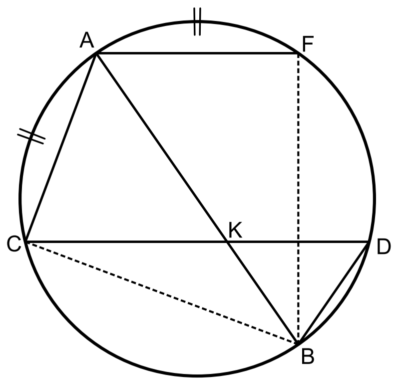
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) AB הוא קוטר במעגל. CD ו-AF הם שני מיתרים במעגל המקבילים זה לזה.
AB ו-CD נחתכים בנקודה K (ראה ציור).

נתון כי $\overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{AF}$ (הקשתות המסומנות בציור).



א. (1) הוכח כי: $\sphericalangle FAB=\sphericalangle CAB$.

(2) הוכח כי: $BK=BD$.

ב. הוכח כי המרובע AFKC הוא מעוין.

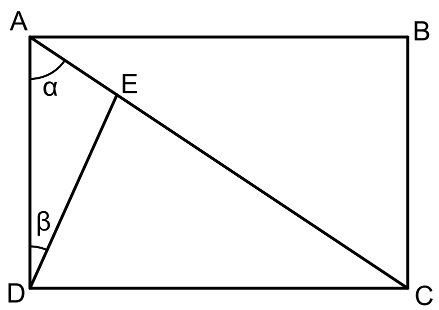
ג. נתון גם כי: $BD\cdot AB=CD\cdot AC$.

(1) הוכח כי $\Delta BDC\sim\Delta CAB$.

(2) הוכח כי CD הוא קוטר במעגל.

5) נתון מלבן ABCD. הנקודה E נמצאת על האלכסון AC (ראה ציור).

נתון כי: $\sphericalangle ADE=\beta$, $\sphericalangle DAC=\alpha$.



R_1 הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן ABCD.

R_2 הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

א. הבע את היחס $\frac{R_1}{R_2}$ באמצעות α ו- β.

ב. הראה כי כאשר $\alpha=\beta$ מתקיים: $\frac{R_1}{R_2}<2$.

ג. נתון כי: $\alpha=60^\circ$, $\beta=15^\circ$.

(1) הראה כי ΔDEC הוא משולש שווה שוקיים.

(2) הבע את BE^2 באמצעות R_1.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=a\cos 2x+\sin^2 x$ המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$, a פרמטר.

א. האם הפונקציה $f\left(x\right)$ היא זוגית או אי-זוגית או אף לא אחת מהן? נמק.

ב. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f\left(x\right)$ (הבע באמצעות a אם צריך), אם נתון כי הפונקציה אינה קבועה? קבע את סוגן בהתאם לערך של a (התייחס לשתי האפשרויות עבור a).

ג. מצא את הערך של a שעבורו הפונקציה $f\left(x\right)$ היא קבועה. נמק.

נתון: $a>1$.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'\left(x\right)$.

ה. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'\left(x\right)$ ועל ידי ציר ה-x שווה ל-12. מצא את a.

7) נתון מעגל ובו קוטר AB. רדיוס המעגל הוא 10.
הנקודה P נמצאת על הקוטר AB בין מרכז המעגל ובין הנקודה B.
דרך הנקודה P מעבירים אנך ל-AB החותך את המעגל בנקודות C ו-D.
מצא את השטח המקסימלי של המשולש ACD.

8) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+bx-c}{x^2-4}$, c ו- b הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצא את b.

נתון: לגרף הפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.

ג. מצא את תחום הערכים של c.

ד. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה (הבע באמצעות c אם צריך).

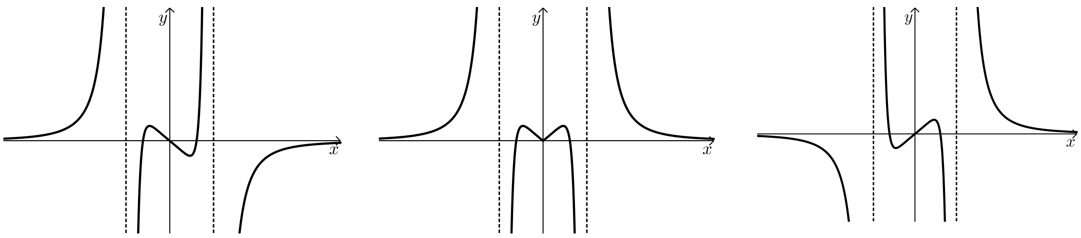
(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$,

וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$. לפניך גרפים I-III:

(1) איזה מן הגרפים, I-III, הוא גרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) הבע באמצעות c את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .



III II I

תשובות סופיות:

1) א. מהירות רוכב א׳: 6מ׳/שניה. מהירות רוכב ב׳: 4מ׳/שניה.

ב. רוכב ב׳ יהיה על נקודה B. ג. $\frac{BM}{MC}=\frac{4}{1}$, M נמצאת בין B ל- C.

ד. $P_{ABC}=$ 720 מ׳

2) א. $c=6$ ב. ....,0,11,6,17 ג. $a_1=4$

ד. סכום הסדרה החדשה הוא: 1,763.

3) א. $\frac{9}{40}$ ב. $\frac{3}{31}$ ג. 0.252105

4) א. (1) הוכחה. א. (2) הוכחה. ב. הוכחה.

ג. (1) הוכחה. ג. (2) הוכחה.

5) א. $\frac{R_1}{R_2}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$ ב. הוכחה. ג. (1) הוכחה.

ג. (2) $BE^2=R_1^2\left(4-\sqrt{3}\right)$

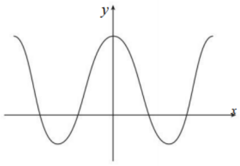
6) א. $f(x)$ זוגית. ב. עבור $a<\frac{1}{2}$:

$$\min(-\pi,a)\ ,\ \max\left(-\frac{\pi}{2},1-a\right)\ ,\ \min(0,a)\ ,\ \max\left(\frac{\pi}{2},1-a\right)\ ,\ \min(\pi,a)$$

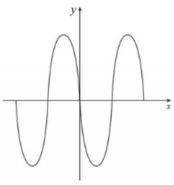
עבור $a>\frac{1}{2}$:

$$\max(-\pi,a)\ ,\ \min\left(-\frac{\pi}{2},1-a\right)\ ,\ \max(0,a)\ ,\ \min\left(\frac{\pi}{2},1-a\right)\ ,\ \max(\pi,a)$$

ג. $a=\frac{1}{2}$ ד. (1)



ד. (2)

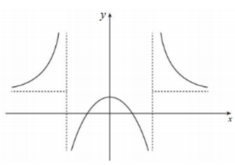


ה. $a=2$

7) $S_{ACD}=75\sqrt{3}$

8) א. $x\neq-2, x\neq2$ ב. $b=0$ ג. $0<c<4$ ד. (1) $\max\left(0,\frac{c}{4}\right)$

ד. (2) $y=1$. סקיצה:



ה. (1) III.

ה. (2) $S=\frac{C^2}{16}$