שאלון 571 לכיתות יא

פרק 48

פתרון בוידאו של בחינות 2018

בגרות חורף 2018:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) בכפר נופש יש שתי בריכות: בריכה א' ובריכה ב'.
הנפח של בריכה א' הוא V_1 והנפח של בריכה ב' הוא V_2.
את הבריכות ממלאים באמצעות 4 צינורות בעלי אותו הספק.
ביום כלשהו שתי הבריכות היו ריקות.
התחילו למלא את הבריכה א' באמצעות ארבעת הצינורות.
כאשר התמלאה בריכה א' לכדי $\frac{1}{6}$ מנפחה, העבירו אחד מן הצינורות לבריכה ב'
והתחילו למלא אותה באמצעותו.
כאשר התמלאה בריכה א' עד למחציתה, העבירו עוד שני צינורות למילוי בריכה ב'.
מילוי שתי הבריכות הסתיים באותו הזמן. כל הצינורות הזרימו מים ללא הפסקה עד
שהתמלאו שתי הבריכות. חשב את היחס $\frac{V_1}{V_2}$.

2) a_n היא סדרה חשבונית שההפרש שלה, d, שונה מ-0.
נתון: $a_7 = -a_{17}$.

א. מצא את a_{12}.

ב. (1) האם קיים בסדרה איבר שערכו שווה ל- $-a_1$? נמק.
(2) מצא מספר טבעי n שעבורו סכום n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל- 0.

ג. האם קיים n טבעי שעבורו: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$? אם כן – מלא n כזה, אם לא – נמק.

ד. האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמק
(הבחן בין מקרים שונים).

3) למיכל יש קובייה מאוזנת, על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2,
ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4. לגלית יש קובייה מאוזנת אחרת.
על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב אחד מן המספרים : 1 או 3.
מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים.
המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק.
בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת.
המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקובייה שלה גבוה יותר.
נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$.

א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1? נמק את תשובתך.

ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?

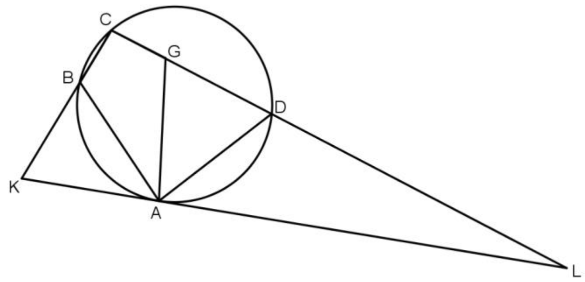
ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) המרובע ABCD חסום במעגל.
הנקודה G נמצאת על הצלע CD כך ש- $AB = AG$ וגם $CB = CG$.
המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD בנקודה L
וחותך את המשך הצלע CB בנקודה K (ראה ציור).



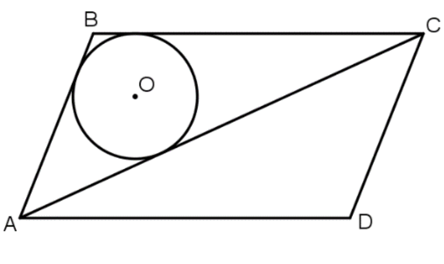
א. הוכח כי $AD = AG$.

ב. (1) הוכח כי $\Delta ABK \sim \Delta CDA$.

(2) הוכח כי $AD^2 = BK \cdot CD$.

ג. הראה כי $\frac{S_{\Delta LDA}}{S_{\Delta KAB}} = \frac{LA}{AK}$.

5) נתונה מקבילית ABCD. AC הוא האלכסון הארוך, כמתואר בציור.
במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו O.
נתון : הנקודה O נמצאת במרחקים 6 ו-3 מן הישרים AD ו-AC בהתאמה, $OA = 10$.



א. חשב את גודלי זוויות המקבילית.

ב. חשב את אורך האלכסון AC.

ג. חשב את שטח המקבילית.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונות הפונקציות $\mathrm{f}(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, $g(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

ענה על סעיף א עבור התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכת לציר ה- x .

(3) מלא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה גם על סעיף ב עבור התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$.

ב. (1) מלא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הוכח: $g(x)=-f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ג. מצא את ערך הביטוי $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$. נמק את תשובתך.

7) נתונה משפחת הפונקציות: $f\left(x\right)=\frac{\left(x-2\right)^2}{x^2-a}$. a הוא פרמטר $a\neq 0$, $a\neq 4$.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a במידת הצורך.
הבחן בין $a>0$ ובין $a<0$ במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f\left(x\right)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ עם הצירים.

(3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f\left(x\right)$ המקבילה לציר ה- x .

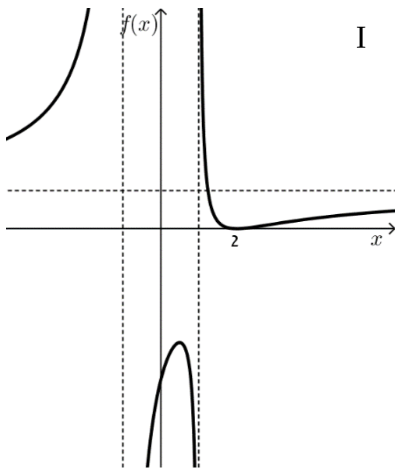
(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f\left(x\right)$ המאונכות לציר ה- x (אם יש כאלה).

ענה על סעיף ב. הבע באמצעות a במידת הצורך.
הבחן בין $a>4$ ובין $a<4$ במידת הצורך.

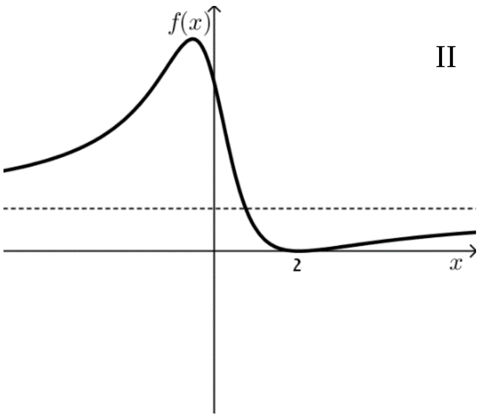
ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f\left(x\right)$, וקבע את סוגן.

ג. לפניך שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה $f\left(x\right)$, כל אחד עבור ערך אחר של a .
כתוב מהו תחום הערכים של a המתאים לכל אחד מן הגרפים I-III.
נמק את תשובתך.

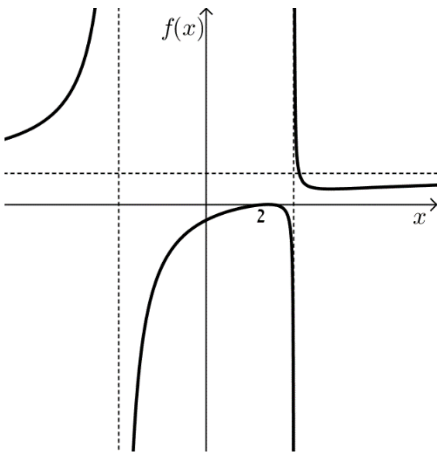
I



II



III



8) נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{x^3}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f\left(x\right)$ בנקודה שבה $x=t$.

נתון: $1\le t\le 5$.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. מצא את שיעורי ה- x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.

ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

1) $\frac{V_1}{V_2}=\frac{18}{29}$.

2) א. $a_{12}=0$.   ב. (1) כן, $a_{23}=-a_1$.   (2) $n=23$.   ג. לא

ד. אם האיבר הראשון שלילי, הסדרה עולה: 11 איברים שליליים.

אם האיבר הראשון חיובי, הסדרה יורדת: לא ניתן לדעת.

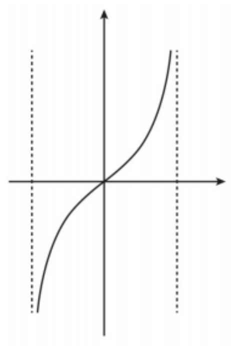
3) א. על פאה אחת   ב. 0.3466.   ג. 0.5533.

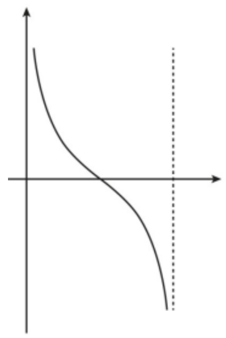
4) א. הוכחה   ב. (1) הוכחה   (2) הוכחה   ג. הוכחה

5) א. $54.33°$, $125.67°$.   ב. $AC=27.08$.   ג. $S_{ABCD}=171.73$.

6) א. (1) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.   (2) $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$.   (3) עלייה: $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, ירידה: אין

(4) להלן סקיצה: ב. (1) $0<x<\pi$.   (2) הוכחה   (3) להלן סקיצה: ג. 0





7) א. (1) עבור $a<0$: כל x . עבור $a>0$: $x\neq\sqrt{a}$, $x\neq-\sqrt{a}$.

(2) $(2,0)$, $\left(0,-\frac{4}{a}\right)$.   (3) $y=1$.

(4) עבור $a<0$: אין. עבור $a>0$: $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$.

ב. עבור $a>4$: $\min\left(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a}\right)$, $\max(2,0)$, עבור $a<4$: $\min(2,0)$, $\max\left(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a}\right)$.

ג. I : $a>4$. II : $a<0$. III : $0<a<4$.

8) א. $x=\sqrt{3}$.   ב. $x=5$.

בגרות קיץ 2018 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה הסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) שני רוכבי אופניים, אמיר ומשה, יצאו בשעה $6:00$ זה לכיוונו של זה.
אמיר רכב במהירות קבועה מעיר א לעיר ב, ומשה רכב במהירות קבועה מעיר ב לעיר א. אמיר ומשה עברו זה על פני זה, והמשיכו כל אחד ליעדו. אמיר הגיע לעיר ב שעתיים אחרי שעבר על פני משה, ואילו משה הגיע לעיר א 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.

א. באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?

נסמן את מהירות נסיעתו של אמיר באות V.
בדיוק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני זה, יצאה יסמין, רכובה על אופנוע, מעיר א לעיר ב, במהירות קבועה. נתון שיסמין הגיעה לעיר ב אחרי אמיר, אך לפני שמשה הגיע לעיר א.

ב. (1) הבע באמצעות V את המרחק בין עיר א לעיר ב.
(2) הבע באמצעות V את טווח המהירויות האפשרי של יסמין.

2) a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת שסכומה שלילי.
a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה, ו- q היא מנת הסדרה.

א. לפניך ארבע טענות (I-IV). רק אחת מהן בהכרח נכונה. ציין את מספרה ונמק.

I. $q<0$

II. $a_1<0$ וגם $q<0$

III. $a_1<0$

IV. $a_1>0$ או $q<0$

נסמן ב- T את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים בסדרה a_n,
ונסמן ב- R את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה a_n.
p הוא פרמטר. נתון: $T+p\cdot R=0$.

ב. הבע את p באמצעות q.

b_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא p.

ג. האם b_n היא סדרה מתכנסת? נמק.

ד. נתון: p שלילי. הראה שלכל n טבעי, $a_{n+1}>a_n$
(כלומר, הראה שהסדרה a_n היא סדרה עולה).

3) בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון. 37% מהתלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן. $\frac{35}{37}$ מהם עברו את המבחן.
מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.

א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?

ב. יעל והדס ניגשו למבחן.
ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן.
האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.

ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו למבחן.
מהי ההסתברות שבדיוק שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?

ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן.
מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות I-II :
I. התלמיד נעזר בחבריו.
II. התלמיד לא עבר את המבחן.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

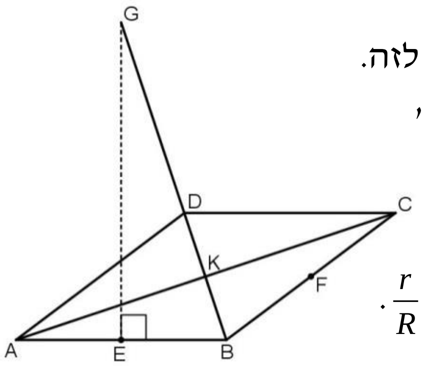
4) ABCD הוא מעוין. E ו-F הן אמצעי הצלעות AB ו-BC, בהתאמה.
הנקודה K היא מפגש האלכסונים של המעוין. מהנקודה E העלו אנך ל-AB, החותך את המשך האלכסון BD בנקודה G (ראה ציור).

א. הוכח : הנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.
הקטע GF חותך את האלכסון AC בנקודה M, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC.

ב. הוכח שהמשולשים MFC, BKC ו-BFG דומים זה לזה.
נסמן ב- R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC,
וב- r את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.

ג. (1) הוכח כי $\frac{MF}{CF}=\frac{MC}{GB}$, וכי $\frac{MF}{CF}=\frac{BK}{CK}$.

(2) הראה כי היחס בין אלכסוני המעוין שווה ל- $\frac{r}{R}$.



5) ABC הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90^\circ)$.

M היא נקודה על היתר, כך ש- $AM:MC = \sqrt{3}:4$. נתון: $\sphericalangle ABM = 30^\circ$, $BM = 8$.

א. (1) סמן $MC = 4x$ וחשב את זוויות המשולש ABC.

(2) חשב את הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו-CMB.

ב. נסמן את מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו-CBM ב- O_1 ו- O_2, בהתאמה.

(1) הסבר מדוע המרובע BO_1MO_2 הוא דלתון.

(2) חשב את אורך הקטע O_1O_2.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}}$. a הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

א. הוכח: $a>1$.

ענה על סעיף ב. אם יש צורך, הבע באמצעות a.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המקבילות לציר ה- x.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $a=3$.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x, ועל ידי הישרים $x=\frac{2}{3}$ ו- $x=2$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל x.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x, ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו- $x=b$ $\left(b>\frac{1}{3}\right)$.

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו- $x=b$, שווה ל- $2S$ בעבור כל b.

הבע את $g(x)$ באמצעות $f(x)$ בתחום $x>\frac{1}{3}$ (כתוב את שתי האפשרויות).

7) $f(x)$ היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל x, כך ש- $f(x)\neq 0$ לכל x.

א. הוכח שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע מסוים,

אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת באותו הקטע;

ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה $g(x)=\sin^2 x+\cos x+2$, המוגדרת לכל x.

ב. האם קיים x שבעבורו $g(x)=0$? נמק.

ג. (1) האם הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל x מתקיים: $g(x)=g(x+2\pi)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0\leq x\leq \pi$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\pi\leq x\leq 3\pi$.

נתונה הפונקציה: $h(x)=\frac{1}{\sin^2 x+\cos x+2}$.

ענה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ד. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$? נמק.

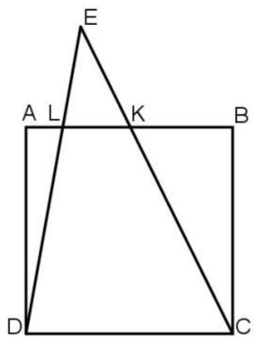
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $-\pi\leq x\leq \pi$, באותה מערכת צירים שבה סרטטת את גרף הפונקציה $g(x)$.

8) ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ.

K ו-L הן נקודות על הצלע AB.

נתון כי הישרים CK ו-DL חותכים זה את זה בנקודה E, הנמצאת מחוץ לריבוע ABCD (ראה איור).

נסמן: $LK=x$.



א. הבע באמצעות x את גובה המשולש KLE.

ב. עבור איזה ערך של x סכום שטחי המשולשים BCK, ADL ו-KLE הוא מינימלי? נמק.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

תשובות סופיות:

1) א. אמיר ומשה עברו זה על פני זה בשעה $10:00$.

ב. (1) $6V$ (2) x: מהירותו של יסמין. $\frac{3}{4}V<x<3V$

2) א. טענה III (סכום הסדרה הוא $\frac{a_1}{1-q}$, כמו כן: $-1<q<1$, לכן כש-a_1 שלילי, הסכום שלילי).

ב. $P=-\frac{1}{q}$ ג. לא מתכנסת ($-1<q<1 \Rightarrow p>1$ או $p<-1$). ד. הוכחה.

3) א. $\frac{2}{9}$ ב. כן $\left(\frac{35}{37}>\frac{56}{63}\right)$ ג. 0.1763 ד. 0.44

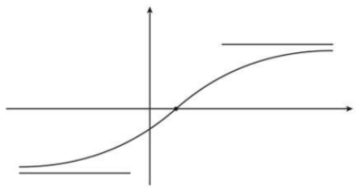
4) א+ב+ג. (2+1) הוכחה.

5) א. (1) 53.13°, 36.87°, 90° (2) $R_{\Delta ABM}=5$ יח"א, $R_{\Delta CBM}=6\frac{2}{3}$ יח"א.

ב. (1) $BO_2=MO_2=5$ יח"א, $BO_2=MO_2=6\frac{2}{3}$ יח"א (2) $8\frac{1}{3}$ יח"א.

6) א. הוכחה ב. (1) $\left(\frac{1}{a},0\right)$ $(0,-1)$ (2) $y=\sqrt{a}$, $y=-\sqrt{a}$ (3) עולה לכל x.

(4)



ג. 2 ד. $g(x)=-f(x)$, $g(x)=3f(x)$

7) א. הוכחה.

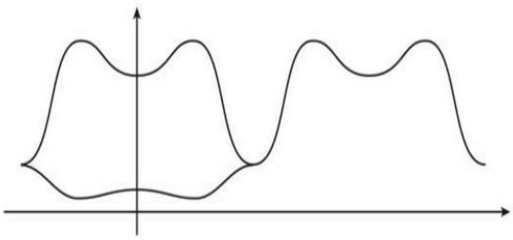
ב. לא ($2+\sin^2 x\ge 2$, $\cos x\ge -1$, לכן סכומם גדול מ-1 או שווה לו ולכן לא יכול להיות שווה 0).

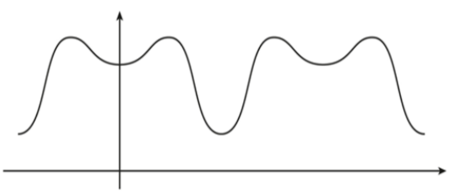
ג. (1) כן ($\sin^2 x$ ו-$\cos x$ הן פונקציות זוגיות). (2) הוכחה.

(3) $(0,3)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{3},3\frac{1}{4}\right)$ מקסימום, $(\pi,1)$ מינימום. (4) להלן סרטוט:

ד. (1) כל x.

(2)





8) א. $\frac{6x}{6-x}$ ב. $6-3\sqrt{2}$ סמ"ר.

בגרות קיץ 2018 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) המרחק מביתה של רננה עד בית הספר הוא 500 מטרים.
רננה יצאה מביתה אל בית הספר והלכה במהירות קבועה.
3 דקות לאחר שיצאה מביתה, יצא משם אביה בעקבותיה כדי להביא לה כריך ששכחה.
הוא רץ במהירות קבועה של 2.5 מטרים לשנייה.
כאשר הגיע האב לרננה הם עמדו ושוחחו במשך 2 דקות והוא נתן לה את הכריך,
ולאחר מכן הלך כל אחד מהם לדרכו – רננה לבית הספר והאב בחזרה אל הבית.
רננה המשיכה ללכת באותה המהירות שהלכה לפני כן, והאב הלך במהירות של
1.5 מטרים לשנייה.
אביה של רננה הגיע אל הבית בדיוק באותו הזמן שהגיעה רננה אל בית הספר.

א. חשב את מהירות ההליכה של רננה.

ב. כמה זמן עבר מן הרגע שרננה יצאה מביתה ועד שהגיעה אל בית הספר?

2) הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1}=-\frac{c^{n-2}}{a_n}$, $a_1=-\frac{1}{c}$.

נתון: $c>0$.

א. הוכח כי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה הנדסית, וכי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים גם הם סדרה הנדסית.

ב. (1) רשמו את 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .
הבע את תשובתך באמצעות c אם יש צורך.

(2) הבע באמצעות c את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

(3) הוכח שלכל n טבעי, הסכום של $2n-1$ האיברים הראשונים בסדרה a_n אינו תלוי ב- n .

ג. הסדרה b_n מוגדרת באופן הזה: $b_n=-\frac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}$.

(1) הראה כי b_n היא סדרה הנדסית.

(2) מהו תחום הערכים של c שבעבורם b_n היא סדרה הנדסית יורדת?

(3) נתון שהסדרה האינסופית b_n היא סדרה יורדת.
הבע באמצעות c את סכומה.

3) במבחן רב-ברירה ("אמריקניי") יש 5 שאלות.
לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.
התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.
תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.
כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות וסימן אותן.
בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.
(1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?
(2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות וסימן אותן.
בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, <u>אינה</u> נכונה, ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה. מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות וסימנה אותן.
בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש-k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה באקראי אחת מן התשובות הנכונות בכל שאלה.
ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן. מצא את k. נמק.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

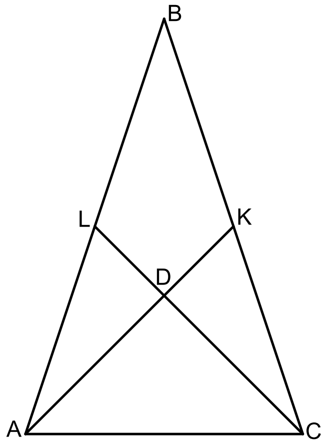
שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = BC)$.
AK ו-CL הם תיכונים במשולש, החותכים זה את זה בנקודה D.
נתון: $AK \perp CL$.

א. הוכח: $BD = AC$.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}}$.

ג. M הוא מרכז המעגל החוסם את המרובע ALKC.
(1) הוכח: $\sphericalangle AML = 90°$.
(2) מצא את היחס $\frac{AM}{AD}$.
תוכל להשאיר שורש בתשובתך.



5) ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$. BD הוא חוצה זווית במשולש ABC.
המשך הקטע BD חותך את המעגל החוסם את המשולש ABC בנקודה E.
גודל הזווית ABC הוא 2β.

א. הבע באמצעות β את $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$, היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ADE. אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלת.

נתון: BE שווה בארכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC.

ב. חשב את היחס $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$.

נסמן ב- a את אורך השוק AB.

ג. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל החסום על ידי המשולש ABC.
בתשובותיך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

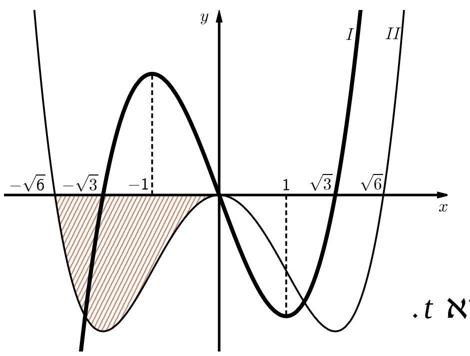
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) לפניך הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$
(פונקציית הנגזרת הראשונה ופונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$)
בתחום $-2.5 \le x \le 2.5$. שני הגרפים עוברים בראשית הצירים.

א. התאם בין הגרפים I ו-II ובין הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$. נמק.

ב. (1) כמה נקודות קיצון פנימיות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק.



ג. עבור איזה ערך של x, בתחום $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$,
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הנגזרת, $f'(x)$,
הוא מינימלי?

נתון: $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה הוא t.

ה. הבע באמצעות t את השטח המוגבל על ידי גרף II
ועל ידי החלק השלילי של ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).

ו. נתון: קיימים a, b ו- c ממשיים כך ש- $f(x)=ax^5+bx^3+c$.

מצא את c ואת היחס $\frac{a}{b}$.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ענה על הסעיפים ב-ה עבור התחום $x\geq\frac{2}{7}$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית.

מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה על סעיף ו עבור התחום $x>0$.

ו. נסתכל על נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

לפניך שלוש טענות (1-3). אחת מהן נכונה. איזו מהן היא הנכונה? נמק.

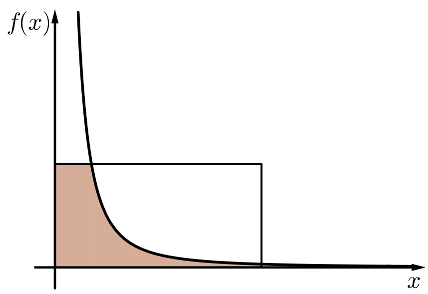
(1) ככל שמתקרבים ל- $x=0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וקטן.

(2) המרחק בין כל שתי נקודות חיתוך סמוכות נשאר קבוע.

(3) ככל שמתקרבים ל- $x=0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וגדל.

8) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום $x>0$,
ומלבן ששתיים מצלעותיו נמצאות על הצירים והוא נמצא ברביע הראשון.
נתון: שטח המלבן הוא 4.

נסמן ב- a את אורך צלע המלבן שנמצאת על ציר ה- x . נתון: $a\geq\frac{1}{4}$.



א. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הצירים, על ידי צלעות המלבן ועל ידי גרף הפונקציה $f(x)$ (השטח המקווקו בציור).

ב. עבור איזה ערך של a השטח שמצאת בסעיף א הוא מקסימלי?

תשובות סופיות:

1) א. 1 מטר לשנייה. ב. 620 שניות ($10\frac{1}{3}$ דקות).

2) א. הוכחה. ב. (1)

$$a_1=-\frac{1}{c}\ ,\ a_2=1\ ,\ a_3=-1\ ,\ a_4=c\ ,\ a_5=-c\ ,\ a_6=c^2\ ,\ a_7=-c^2$$

(2) $S_7=-\frac{1}{c}$ (3) הוכחה. ג. (1) הוכחה (2) $c>1$ (3) $S=\frac{2c^2}{c-1}$

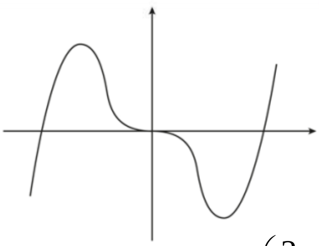
3) א. (1) $\frac{27}{64}$ (2) $\frac{37}{64}$ ב. $\frac{4}{9}$ ג. $k=2$

4) א. הוכחה. ב. $\frac{S_{\text{BLDK}}}{S_{\text{ABC}}}=\frac{1}{3}$ ג. (1) הוכחה. (2) $\frac{\text{AM}}{\text{AD}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=0.79$

5) א. $\frac{S_{\Delta\text{ABC}}}{S_{\Delta\text{ADE}}}=\frac{\sin 2\beta\sin 4\beta\sin 3\beta}{\sin^3\beta}$ ב. 20.99 ג. $r=0.16a$

6) א. $f'(x): II,\ \ f''(x): I$ ב.(1) 2 (כמספר נקודות החיתוך של $f'(x)$ עם ציר ה-x).

(2) 3 (כמספר נקודות החיתוך של $f'(x)$ עם ציר ה-x). ד.



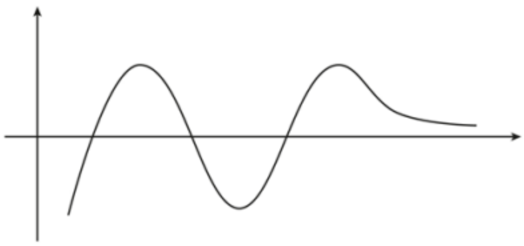
ג. $x=1$ ה. $S=t$ ו. $c=0$, $\frac{a}{b}=-\frac{1}{10}$

7) א. $x\neq 0$ ב. $(1,0)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(\frac{1}{3},0\right)$

ג. $(2,1)$ מקסימום, $\left(\frac{2}{3},-1\right)$ מינימום, $\left(\frac{2}{5},1\right)$ מקסימום, $\left(\frac{2}{7},-1\right)$ מינימום.

ד. $y=0$ ה.

ו. i.



8) א. $S=\frac{4\sqrt{a}-1}{a}$ ב. $a=\frac{1}{4}$