פתרון בגרויות במתמטיקה לשאלון 582

פרק 8

פתרון בוידאו של בחינות 2017

מועד חורף 1
קיץ מועד א 5
קיץ מועד ב 10

בגרות חורף 2017:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נתונות שתי פרבולות:

I. $y^2 = 4x$

II. $y^2 = -4x$

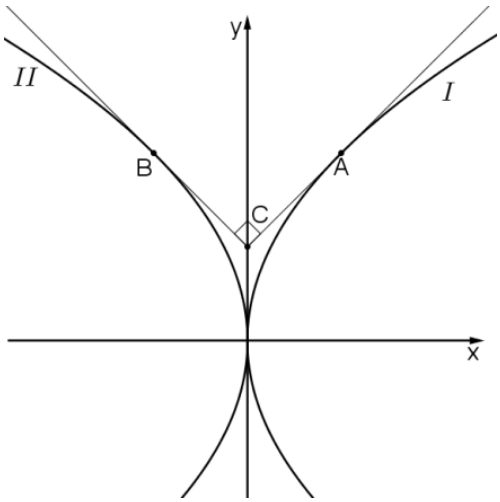
A היא נקודה על פרבולה I.

B היא נקודה על פרבולה II.

הנקודות A ו-B נמצאות על ציר ה-x.

העבירו לפרבולות I ו-II משיקים דרך הנקודות A ו-B, בהתאמה, כמתואר בציור.

נתון ששני המשיקים מאונכים זה לזה ונחתכים בנקודה C, הנמצאת על ציר ה-y.



א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. נתון: C, B, A, הם שלושה מקדקודיו של ריבוע ACBM.

(1) מצא את שיעורי הקדקוד M.

(2) נתון מעגל שמערכו M. המעגל משיק לישרים AC ו-BC.

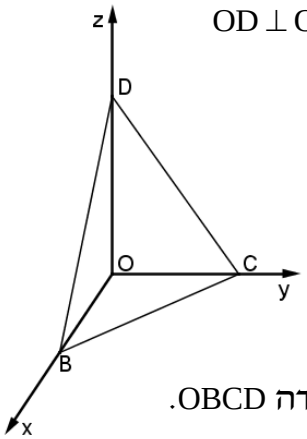
מצא את משוואת המעגל, והסבר מדוע A ו-B הן נקודות ההשקה.

2) נתונה פירמידה משולש OBCD שבה $OD \perp OC$, $OC \perp OB$, $OB \perp OD$ כמתואר בציור. נתון: $OB = 3$, $OC = 4$, $OD = 6$.

הנקודות K ו-P נמצאות על המקצועות OB ו-OD בהתאמה, כך שמתקיים:

$OK : KB = 2:1$, $OP : PD = 1:1$.

דרך הנקודות K ו-P עובר מישור המקביל למקצוע CD וחותך את OC בנקודה Q.



א. מצא את היחס בין OQ ל-QC. נמק את תשובתך.

ב. מצא את היחס בין נפח הפירמידה OKPQ לנפח הפירמידה OBCD.

ג. מצא את הזווית בין הישר CB למישור KPQ.

3) z הוא מספר מרוכב. נתונים שני מקומות גיאומטריים:

I. $z\bar{z}+i(z-\bar{z})+z+\bar{z}=0$ II. $|z|^2+i(\bar{z}-z)=0$

א. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.
המקומות הגאומטריים הנתונים נחתכים בשתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ $(x_1<x_2)$.

ב. מצא את השיעורים של הנקודות A ו-B.

ג. נתונה הנקודה $P(x_0,y_0)$. הנקודה P נמצאת במרחק שווה מכל הנקודות שעל המקום הגאומטרי I. נתון: $z_0=x_0+y_0\cdot i$.
הוכח שהמספר הצמוד ל-z_0 נמצא על המקום הגאומטרי II.

ד. נתון: $z_1=x_1+y_1\cdot i$ (x_1,y_1 הם שיעורי הנקודה A שמצאת בסעיף ב).
נתונה סדרה חשבונית שבה האיבר הראשון הוא $5z_1$ וההפרש הוא z_0.
מצא את כל ערכי n שעבורם S_n (סכום n האיברים הראשונים בסדרה) הוא מספר ממשי (אם יש כאלה).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{ax^2+bx+2}$, a ו-b הם פרמטרים.
נתון כי הפונקציה היא זוגית.

א. מצא את b.

לפונקציה יש בדיוק שתי נקודות פיתול.

ב. הוכח כי $a<0$.

ג. הפונקציה הנתונה קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום: $-0.5<x<0.5$ וקעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחומים: $x>0.5$ ו-$x<-0.5$.

ד. מצא את a.

ה. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

ז. נתונה הפונקציה $h(x)=f'(x)\cdot f''(x)$. מהו התחום שבו הפונקציה $h(x)$ חיובית?

5) נתונות שתי פונקציות:

$g(x)=\ln\left(2-e^{x}\right)$, $f(x)=\ln\left(ae^{x}-be^{2x}\right)$ a ו- b הם פרמטרים.

נתון: $a>0$, $b>0$.

ידוע שלשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה. הוכח: $a=2b$.

ידוע שלשתי הפונקציות יש נקודה משותפת אחת בלבד.

נקודה זו היא נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$.

א. חשב את a, את b ואת שיעורי נקודת הקיצון של $f(x)$.

ב. הוכח כי $g(x)$ יורדת וקעורה כלפי מטה $\cap$ בכל תחום הגדרתה.

ג. הוכח שההפרש בין הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ הוא פונקצית קווית.

ד. (1) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ (אם יש כאלה).

(2) סרטט על מערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של שתי הפונקציות.

בסרטוט הדגש את גרף הפונקציה $f(x)$.

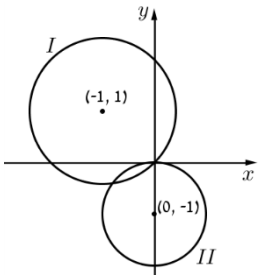
תשובות סופיות:

1) א. $A(1,2), B(-1,2)$ ב. i. $M(0,3)$ ב. ii. $x^2+(y-3)^2=2$

2) א. 1 ב. $\frac{1}{6}$ ג. $7.35°$

3) א. סקיצה בצד. ב. $A(-0.8,-0.4), B(0,0)$

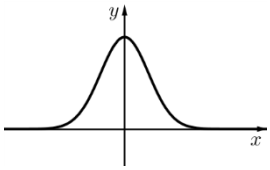
ג. הוכחה



ד. $n=5$

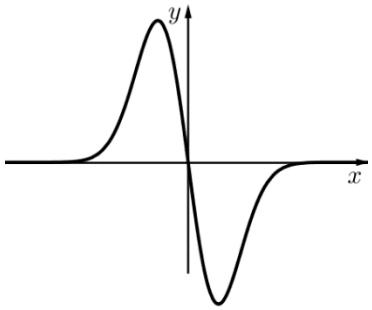
4) א. $b=0$ ב. הוכחה ג. $a=-2$ ד. i. $y=0$

ד. ii. להלן סקיצה:



ו. $0<x<\frac{1}{2}$, $x<-\frac{1}{2}$.

ה. להלן סקיצה:

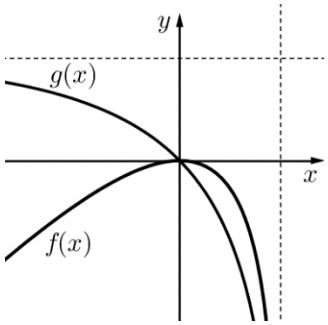


5) א. הוכחה

ב. $a=2$, $b=1$, $\max(0,0)$ ג. הוכחה ד. הוכחה

ה. i. $f(x): x=\ln 2$, $g(x): y=\ln 2,\ x=\ln 2$

ה. ii. להלן סקיצה:



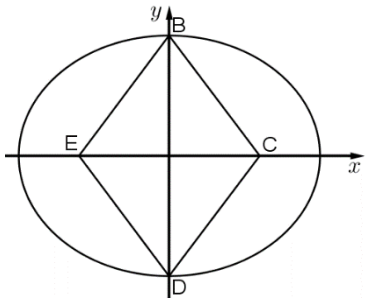
בגרות קיץ 2017 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נתון מעוין BCDE.
הקדקודים B ו-D נמצאים על ציר ה- y.
והקדקודים C ו-E נמצאים על ציר ה- x.
נתון: אורך צלע המעוין הוא 5,
אורך גובהו הוא 4.8 ואורך האלכסון BD
גדול מאורך האלכסון CE.
דרך הקדקודים B ו-D עוברת אליפסה קנונית
(ראה ציור), שמוקדיה הם הנקודות C ו-E.



א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את השיעורים של קדקודי המעוין.

ii. מצא את משוואת האליפסה.

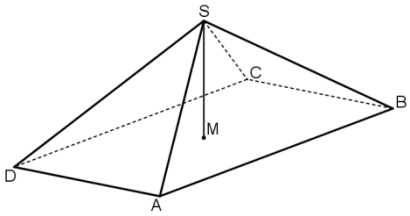
פרבולה שמשוואתה $y^2=2px$ חותכת את האליפסה ברביע הראשון בנקודה M.
נתון: שיעור ה- y של M הוא $\sqrt{15}$.

ב. הוכח שמוקד הפרבולה נמצא בנקודה C.

ג. דרך הנקודה E מעבירים ישר המקביל לציר ה- y.
P היא נקודה על הפרבולה שמרחקה מהישר הזה הוא k.
מצא את היחס $\frac{PC}{k}$. הסבר.

2) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ABCD הוא ריבוע.

M היא נקודה כך ש- $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$.



א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הוכח: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

ii. הוכח ש- $\overrightarrow{SM}$ מאונך ל- $\overrightarrow{AC}$.

iii. נמק מדוע SM הוא גובה בפירמידה.

נתון: $A\left(\sqrt{3},1,0\right)$, $C\left(-\sqrt{3},-1,0\right)$, הנקודות B ו-D נמצאות במישור $z=0$ ונפח הפירמידה SABCD הוא 16.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את שיעורי הנקודה M.

ii. מצא את שיעורי הקדקוד S (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הנקודות שמצאת בתת-סעיף ב (ii) ב- S_1 וב- S_2.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת המישור AS_1S_2.

ii. האם הנקודה C נמצאת על המישור AS_1S_2? נמק.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את המספרים המרוכבים z המקיימים $z^3=-1$.

נסמן את פתרונות המשוואה מסעיף א ב- z_1, z_2 ו- z_3.

נתון כי z_2 הוא ממשי.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה ש- z_1, z_2 ו- z_3 הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.

ii. z_1, z_2 ו- z_3 הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית z_n.
מצא את z_5, האיבר החמישי בסדרה.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. z_{13}, z_{14} ו- z_{15} (האיברים ה-13, ה-14 וה-15 בסדרה z_n שמצאת בסעיף ב) מיוצגים על ידי הנקודה A, B ו-C במישור גאוס, בהתאמה.
חשב את שטח המשולש ABC.

ii. K, L ו-M הן שלוש נקודות במישור גאוס המייצגות שלושה איברים עוקבים בסדרה z_n. הסבר מדוע המשולש KLM חופף למשולש שאת שטחו מצאת בתת סעיף ג (i).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{x^2}-2x}{e^{x^2}}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ii. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

iv. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

היעזר בתשובותיך על סעיף א וענה על סעיף ב.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הסבר מדוע הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x.

ii. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומה סוגן? נמק את תשובתך.

iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

iv. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה). נמק את תשובתך.

v. הוסף לסרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$ סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

5) נתונה הפונקציה: $h(x)=\frac{x+3}{x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של $h(x)$.

ב. מצא את התחום שבו $h(x)>0$.

בתחום שבו $h(x)>0$ נתונה הפונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(x)=\frac{h'(x)}{h(x)}$.

נתון שגרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך הנקודה $(3,\ln 2)$, וידוע שלפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת.

ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות סופיות:

1) א. (i). $B(0,4)$, $C(3,0)$, $D(0,-4)$, $E(-3,0)$. א. (ii). $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

ב. מוקד הפרבולה $C(3,0)$. ג. $\frac{PC}{k}=1$.

2) א. (i). הוכחה. א. (ii). הוכחה.

א. (iii). שמחברים את קדקוד הפירמידה הישרה עם מרכז המעגל החוסם את הבסיס מקבלים את גובה הפירמידה. ב. (i). $M(0,0,0)$.

ב. (ii). $S(0,0,-6)$ או $S(0,0,6)$.

ג. (i). $x-\sqrt{3}y=0$. ג. (ii). C נמצאת על המישור.

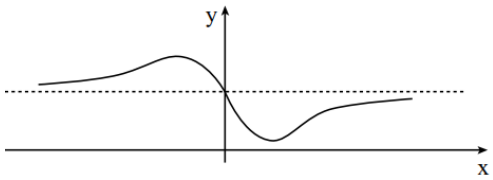
3) א. $z_1=\text{cis}60°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=\text{cis}180°=-1$, $z_3=\text{cis}300°=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ב. (i). הוכחה. ב. (ii). $z_5=\text{cis}180°=-1$. ג. (i). $S_{ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

4) א. (i). לכל x. א. (ii). $\min\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0.142\right)$, $\max\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1.858\right)$

א. (iii). עלייה: $x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$, ירידה: $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

א. (iv). $y=1$ א. (v). להלן סקיצה:

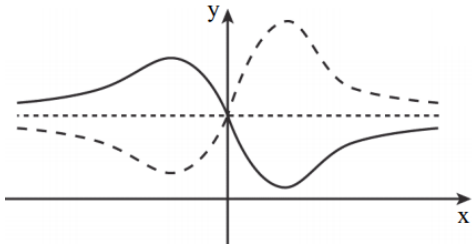


ב. (i). $f(x)$ שונה לכל x , $\frac{1}{f(x)}$ שונה לכל x.

ב. (ii). $\min\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0.538\right)$, $\max\left(\frac{\sqrt{2}}{2},7.031\right)$

ב. (iii). עלייה: $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$, ירידה: $x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ ב. (iv). $y=1$.

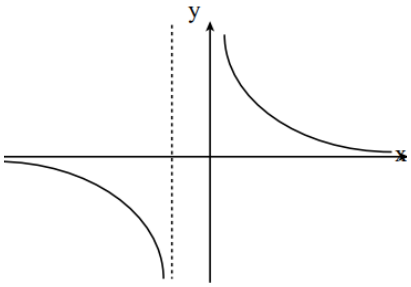
ב. (v). להלן סקיצה:



5) א. $x\neq 0$ ב. $x<-3$, $x>0$ ג. $f(x)=\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)$

ד. $x=0$, $x=-3$, $y=0$ ה. ירידה: $x>0$, $x<-3$, עלייה: אף x.

ו. להלן סקיצה:



בגרות קיץ 2017 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים (66$\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נתונה הנקודה $A(20,0)$.

B היא נקודה שנמצאת על ציר ה- y ואינה ראשית הצירים.

דרך הנקודה B מעבירים ישר ℓ_1, המקביל לציר ה- x.

דרך ראשית הצירים O, מעבירים ישר ℓ_2, שמאונך לישר AB.

הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 נחתכים בנקודה C.

א. הוכח שהמקום הגאומטרי של הנקודות C הנבנות כמתואר נמצא על פרבולה, ומצא את משוואתה.

ב. D היא נקודה כלשהי הנמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת בסעיף א.
הנקודה F היא מוקד הפרבולה. נתון הישר $x=k$. $k<0$ הוא פרמטר.
דרך הנקודה D העבירו ישר המקביל לציר ה- x וחותך את הישר $x=k$ בנקודה N.
קיים ערך של k שעבורו כל משולש NDF שנבנה כמתואר הוא שווה שוקיים.

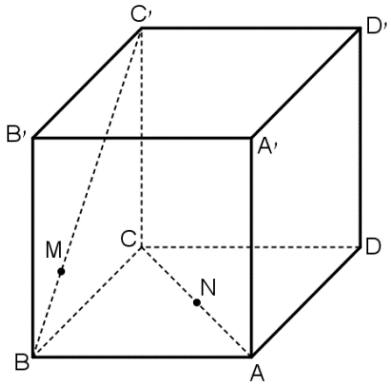
i. מצא את הערך של k. נמק.

ii. נתון: הנקודה D נמצאת ברביע הראשון.
מצא את שיעורי הנקודה D שעבורה המשולש NDF הוא שווה צלעות.

2) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D'

נסמן: $\overrightarrow{CB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{CD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{CC'}=\underline{w}$.

נתון: $\overrightarrow{AN}=s\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BM}=t\cdot\overrightarrow{BC'}$.



א. מצא את היחס $\frac{s}{t}$ שעבורו MN מקביל למישור AA'B'B $(t\neq 0)$.

נתון: $s=\frac{1}{2}$, $t=\frac{1}{4}$.

ב. חשב את הזווית שבין MN ובין המישור ABCD.

ג. מהו המצב ההדדי של הישרים AB ו-MN? נמק.

3) במעגל שמרכזו בראשית הצירים במישור גאוס חסום משולש שווה צלעות ABC.
הקדקוד A מתאים למספר המרוכב: $z_1 = a - \sqrt{3}\cdot a\cdot i$ ($a>0$ הוא פרמטר ממשי).
נתון: הקדקוד B נמצא ברביע הראשון.

א. הבע באמצעות a את המספרים המרוכבים z_2 ו-z_3 המתאימים לקדקודים B ו-C בהתאמה.

נתון: $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$.

ב. מצא את a.

ג. המספר z_1^{6n+5} מתאים לנקודה P במישור גאוס. n הוא מספר שלם.
הנקודה O היא ראשית הצירים. הראה שהנקודה B נמצאת על הקרן OP.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה $g(x) = 2x^2 + c$. c הוא פרמטר.
הפונקציה $f(x)$ מוגדרת כך: $f(x) = e^{g(x)}$.
הגרפים של פונקציות הנגזרת, $f'(x)$ ו-$g'(x)$, נחתכים בנקודה ששיעור ה-x שלה הוא 2.

א. מצא את c.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הוכח ש-$f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

ii. מצא את שיעורי כל הנקודות בהן הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו-$g'(x)$ חותכים זה את זה.

iii. עבור אילו ערכי x $f'(x) > g'(x)$?

iv. סרטט סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו-$g'(x)$ באותה מערכת צירים.

ג. נתון: $M(2,8)$, $N(-2,-8)$.
MN הוא אלכסון של מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים.
הראה שגרף הפונקציה $f'(x)$ מחלק את המלבן לשני חלקים שווים בשטחם.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+m\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. m הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום הערכים של m.

ii. הבע את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ באמצעות m, וקבע את סוגה.

ג. הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ושיעוריה אינם תלויים ב-m.

i. מצא את שיעורי הנקודה P.

ii. מצא את הערך של m שעבורו הנקודה P היא נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

הצב את m שמצאת בתת-סעיף ג (ii) וענה על הסעיפים ד-ה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f(x)-x}{x}$. חשב את $\int_1^e g(x)\,dx$.

תשובות סופיות:

1) א. $y^2=20x$ ב. (i) $k=-5$ ב. (ii) $D\left(15,10\sqrt{3}\right)$.

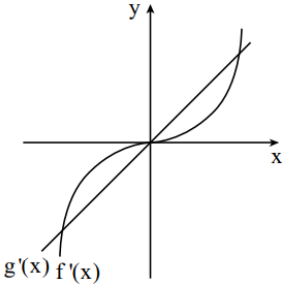
2) א. $\frac{s}{t}=1$ ב. $24.09°$ ג. מצטלבים.

3) א. $z_3=-2ai=2a\cdot\text{cis}180°$, $z_2=a+\sqrt{3}ai=2a\cdot\text{cis}60°$, $z_1=a-\sqrt{3}ai=2a\cdot\text{cis}300°$

ב. $a=1$ ג. הוכחה.

4) א. $c=-8$ ב. (i) הוכחה ב. (ii) $(0,0)$, $(2,8)$, $(-2,-8)$.

ב. (iii) $-2<x<0$, $x>2$ ב. (iv) להלן סקיצה:

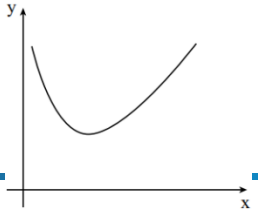


ג. הוכחה.

5) א. $x>0$ ב. (i) $m>0$

ב. (ii) $\min\left(m,m(1-\ln m)\right)$

ג. (i) $P(1,1)$ ג. (ii) $m=1$.



ד. להלן סקיצה:

ה. $-\frac{1}{2}$