

פתרון בגריות במתמטיקה לשאלון 582

פרק 8

פתרון בידאו של בחינות 2017

1	מועד חורף
5	קיץ מועד א
10	קיץ מועד ב

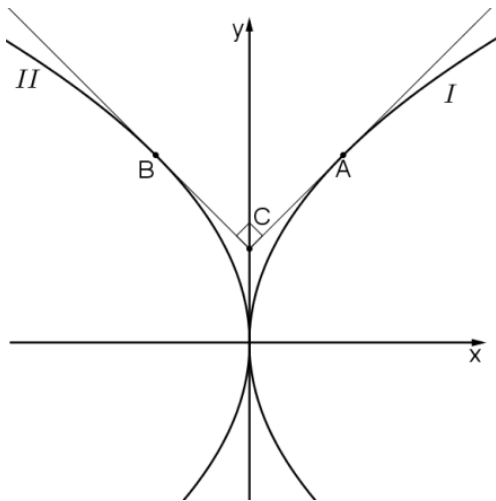
בגרות חורף 2017:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



(1) נתונות שתי פרבולות:

$$I. y^2 = 4x$$

$$II. y^2 = -4x$$

A היא נקודה על פרבולה I.

B היא נקודה על פרבולה II.

הנקודות A ו-B נמצאות על ציר ה-x.

העבירו לפרבולות I ו-II משיקים דרך

הנקודות A ו-B, בהתאמה, כמתואר בציור.

נתון ששני המשיקים מאונכים זה לזה

ונחתכים בנקודה C, הנמצאת על ציר ה-y.

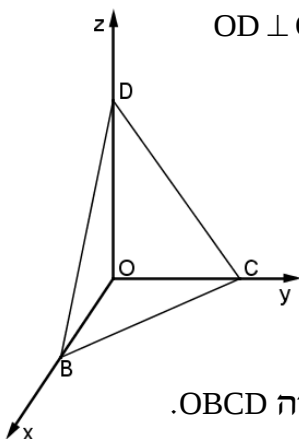
א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. נתון: A, B, C, הם שלושה מקדקודיו של ריבוע ACBM.

(1) מצא את שיעורי הקדקוד M.

(2) נתון מעגל שמערכו M. המעגל משיק לישרים AC ו-BC.

מצא את משוואת המעגל, והסבר מדוע A ו-B הן נקודות ההשקה.



(2) נתונה פירמידה משולש OBCD שבה $OD \perp OC$, $OC \perp OB$, $OB \perp OD$

כמתואר בציור. נתון: $OD = 6$, $OC = 4$, $OB = 3$.

הנקודות K ו-P נמצאות על המקצועות OB

ו-OD בהתאמה, כך שמתקיים:

$$OP : PD = 1 : 1, \quad OK : KB = 2 : 1$$

דרך הנקודות K ו-P עובר מישור המקביל למקצוע CD

וחותך את OC בנקודה Q.

א. מצא את היחס בין OQ ל-QC. נמק את תשובתך.

ב. מצא את היחס בין נפח הפירמידה OKPQ לנפח הפירמידה OBCD.

ג. מצא את הזווית בין הישר CB למישור KPQ.

(3) z הוא מספר מרוכב. נתונים שני מקומות גיאומטריים :

$$I. \quad z\bar{z} + i(z - \bar{z}) + z + \bar{z} = 0 \quad II. \quad |z|^2 + i(\bar{z} - z) = 0$$

א. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.

המקומות הגאומטריים הנתונים נחתכים בשתי נקודות $A(x_1, y_1)$

$$I. \quad B(x_2, y_2) \quad II. \quad (x_1 < x_2)$$

ב. מצא את השיעורים של הנקודות A ו-B.

ג. נתונה הנקודה $P(x_0, y_0)$ הנקודה P נמצאת במרחק שווה מכל הנקודות

$$I. \quad \text{נתון: } z_0 = x_0 + y_0 \cdot i$$

הוכח שהמספר הצמוד ל- z_0 נמצא על המקום הגאומטרי II.

ד. נתון: $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$ הם שיעורי הנקודה A שמצאת בסעיף ב).

נתונה סדרה חשבונית שבה האיבר הראשון הוא $5z_1$ וההפרש הוא z_0 .

מצא את כל ערכי n שעבורם S_n (סכום n האיברים הראשונים בסדרה)

הוא מספר ממשי (אם יש כאלה).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{ax^2+bx+2}$, a ו- b הם פרמטרים.

נתון כי הפונקציה היא זוגית.

א. מצא את b .

לפונקציה יש בדיוק שתי נקודות פיתול.

ב. הוכח כי $a < 0$.

ג. הפונקציה הנתונה קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום: $-0.5 < x < 0.5$ וקעורה

כלפי מעלה $\cup$ בתחומים: $x > 0.5$ ו- $x < -0.5$.

ד. מצא את a .

ה. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

ז. נתונה הפונקציה $h(x) = f'(x) \cdot f''(x)$. מהו התחום שבו הפונקציה $h(x)$ חיובית?

(5) נתונות שתי פונקציות :

$$f(x) = \ln(ae^x - be^{2x}), g(x) = \ln(2 - e^x)$$

נתון: $a > 0, b > 0$.

ידוע שלשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה. הוכח: $a = 2b$.
ידוע שלשתי הפונקציות יש נקודה משותפת אחת בלבד.

נקודה זו היא נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$.

א. חשב את a , את b ואת שיעורי נקודת הקיצון של $f(x)$.

ב. הוכח כי $g(x)$ יורדת וקעורה כלפי מטה $\cap$ בכל תחום הגדרתה.

ג. הוכח שההפרש בין הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ הוא פונקציה קווית.

ד. (1) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$

(אם יש כאלה).

(2) סרטט על מערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של שתי הפונקציות.

בסרטוט הדגש את גרף הפונקציה $f(x)$.

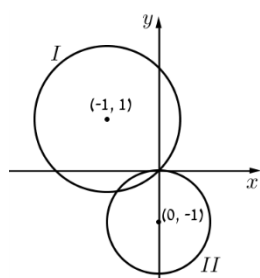
תשובות סופיות:

(1) א. $A(1,2), B(-1,2)$ ב. i. $M(0,3)$ ג. ii. $x^2 + (y-3)^2 = 2$

(2) א. 1 ב. $\frac{1}{6}$ ג. 7.35°

(3) א. סקיצה בצד. ב. $A(-0.8, -0.4), B(0,0)$

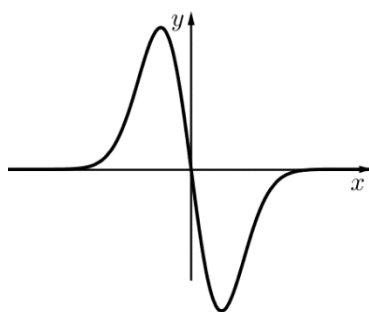
ג. הוכחה



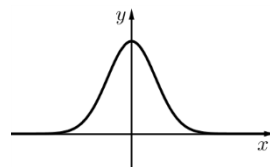
ד. $n = 5$

(4) א. $b = 0$ ב. הוכחה ג. $a = -2$ ד. i. $y = 0$

ה. להלן סקיצה:



ד. ii. להלן סקיצה:



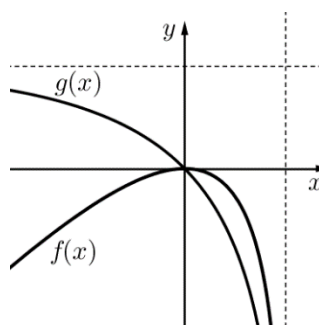
ו. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, 0 < x < \frac{1}{2}$

(5) א. הוכחה

ב. $a = 2, b = 1, \max(0,0)$ ג. הוכחה ד. הוכחה

ה. i. $f(x): x = \ln 2, g(x): y = \ln 2, x = \ln 2$

ה. ii. להלן סקיצה:



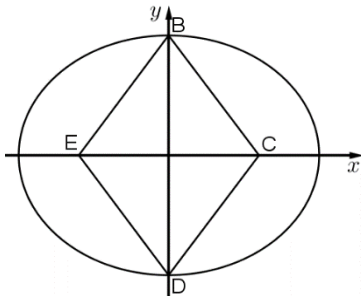
בגרות קיץ 2017 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



(1) נתון מעוין BCDE.

הקדקודים B ו-D נמצאים על ציר ה- y .

והקדקודים C ו-E נמצאים על ציר ה- x .

נתון: אורך צלע המעוין הוא 5,

אורך גובהו הוא 4.8 ואורך האלכסון BD

גדול מאורך האלכסון CE.

דרך הקדקודים B ו-D עוברת אליפסה קנונית

(ראה ציור), שמוקדה הם הנקודות C ו-E.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את השיעורים של קדקודי המעוין.

ii. מצא את משוואת האליפסה.

פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ חותכת את האליפסה ברביע הראשון בנקודה M.

נתון: שיעור ה- y של M הוא $\sqrt{15}$.

ב. הוכח שמוקד הפרבולה נמצא בנקודה C.

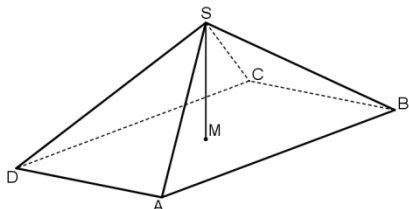
ג. דרך הנקודה E מעבירים ישר המקביל לציר ה- y .

P היא נקודה על הפרבולה שמרחקה מהישר הזה הוא k .

מצא את היחס $\frac{PC}{k}$. הסבר.

(2) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ABCD הוא ריבוע.

$$M \text{ היא נקודה כך ש- } \vec{SM} = \frac{1}{2}\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{SC}$$



א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. הוכח : $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

ii. הוכח ש- $\vec{SM}$ מאונך ל- $\vec{AC}$.

iii. נמק מדוע SM הוא גובה בפירמידה.

נתון : $A(\sqrt{3}, 1, 0)$, $C(-\sqrt{3}, -1, 0)$, הנקודות B ו-D נמצאות במישור $z = 0$

ונפח הפירמידה SABCD הוא 16.

ב. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מצא את שיעורי הנקודה M.

ii. מצא את שיעורי הקדקוד S (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הנקודות שמצאת בתת-סעיף ב (ii) ב- S_1 וב- S_2 .

ג. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מצא את משוואת המישור AS_1S_2 .

ii. האם הנקודה C נמצאת על המישור AS_1S_2 ? נמק.

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא את המספרים המרוכבים z המקיימים $z^3 = -1$.

נסמן את פתרונות המשוואה מסעיף א ב- z_1, z_2, z_3 .

נתון כי z_2 הוא ממשי.

ב. ענה על הסעיפים הבאים :

i. הראה ש- z_1, z_2, z_3 הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.

ii. z_1, z_2, z_3 הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית z_n .

מצא את z_5 , האיבר החמישי בסדרה.

ג. ענה על הסעיפים הבאים :

i. z_{13}, z_{14}, z_{15} (האיברים ה-13, ה-14 וה-15 בסדרה z_n שמצאת בסעיף ב)

מיוצגים על ידי הנקודה A, B ו-C במישור גאוס, בהתאמה.

חשב את שטח המשולש ABC.

ii. L, K ו-M הן שלוש נקודות במישור גאוס המייצגות שלושה איברים עוקבים

בסדרה z_n . הסבר מדוע המשולש KLM חופף למשולש שאת שטחו מצאת

בתת סעיף ג (i).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{x^2} - 2x}{e^{x^2}}$

א. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ii. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
- iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- iv. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
- v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

היעזר בתשובותיך על סעיף א וענה על סעיף ב.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. הסבר מדוע הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x .
- ii. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומה סוגן? נמק את תשובתך.
- iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
- iv. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה). נמק את תשובתך.
- v. הוסף לסרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$ סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(5) נתונה הפונקציה: $h(x) = \frac{x+3}{x}$

א. מצא את תחום ההגדרה של $h(x)$.

ב. מצא את התחום שבו $h(x) > 0$.

בתחום שבו $h(x) > 0$ נתונה הפונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$.

נתון שגרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך הנקודה $(3, \ln 2)$, וידוע שלפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת.

ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות סופיות:

(1) א. (i) $B(0,4)$, $C(3,0)$, $D(0,-4)$, $E(-3,0)$. א. (ii) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

ב. מוקד הפרבולה $C(3,0)$. ג. $\frac{PC}{k} = 1$

(2) א. (i) הוכחה . א. (ii) הוכחה.

א. (iii) שמחברים את קדקוד הפירמידה הישרה עם מרכז המעגל החוסם את

הבסיס מקבלים את גובה הפירמידה . ב. (i) $M(0,0,0)$

ב. (ii) $S(0,0,6)$ או $S(0,0,-6)$

ג. (i) $x - \sqrt{3}y = 0$. ג. (ii) C נמצאת על המישור.

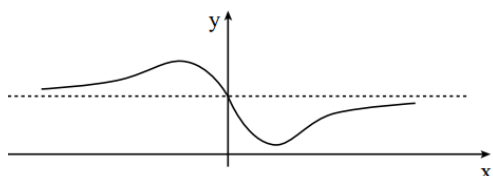
(3) א. $z_1 = \text{cis}60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \text{cis}180^\circ = -1$, $z_3 = \text{cis}300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ב. (i) הוכחה . ב. (ii) $z_5 = \text{cis}180^\circ = -1$. ג. (i) $S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

4 א. (i) לכל x . א. (ii) $\min\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0.142\right), \max\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1.858\right)$.

א. (iii) עלייה: $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, ירידה: $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

א. (iv) $y = 1$. א. (v) להלן סקיצה:

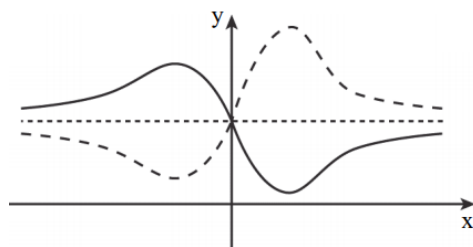


ב. (i) $f(x)$ שונה לכל x , $\frac{1}{f(x)}$ שונה לכל x .

ב. (ii) $\min\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0.538\right), \max\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 7.031\right)$.

ב. (iii) עלייה: $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, ירידה: $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$. ב. (iv) $y = 1$.

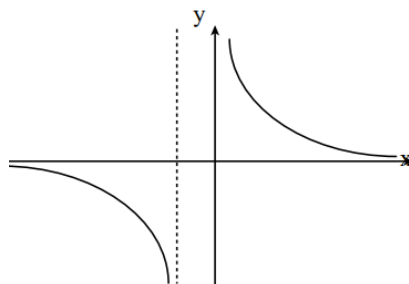
ב. (v) להלן סקיצה:



5 א. $x \neq 0$. ב. $x < -3, x > 0$. ג. $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x}\right)$.

ד. $y = 0, x = -3, x = 0$. ה. ירידה: $x < -3, x > 0$, עלייה: אף x .

ו. להלן סקיצה:



בגרות קיץ 2017 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) נתונה הנקודה $A(20,0)$.

B היא נקודה שנמצאת על ציר ה- y ואינה ראשית הצירים.

דרך הנקודה B מעבירים ישר ℓ_1 , המקביל לציר ה- x .

דרך ראשית הצירים O, מעבירים ישר ℓ_2 , שמאונך לישר AB.

הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 נחתכים בנקודה C.

א. הוכח שהמקום הגאומטרי של הנקודות C הנבנות כמתואר נמצא על פרבולה, ומצא את משוואתה.

ב. D היא נקודה כלשהי הנמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת בסעיף א.

הנקודה F היא מוקד הפרבולה. נתון הישר $x=k$, $k < 0$ הוא פרמטר.

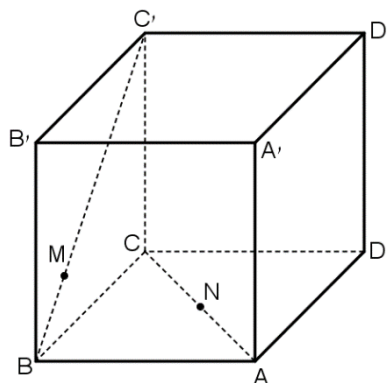
דרך הנקודה D העבירו ישר המקביל לציר ה- x וחיתך את הישר $x=k$ בנקודה N.

קיים ערך של k שעבורו כל משולש NDF שנבנה כמתואר הוא שווה שוקיים.

i. מצא את הערך של k . נמק.

ii. נתון: הנקודה D נמצאת ברביע הראשון.

מצא את שיעורי הנקודה D שעבורה המשולש NDF הוא שווה צלעות.



(2) נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$

נסמן: $\overrightarrow{CC'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{CB} = \underline{u}$.

נתון: $\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BC'}$, $\overrightarrow{AN} = s \cdot \overrightarrow{AC}$.

א. מצא את היחס $\frac{s}{t}$ שעבורו MN

מקביל למישור $AA'B'B$ ($t \neq 0$).

נתון: $t = \frac{1}{4}$, $s = \frac{1}{2}$.

ב. חשב את הזווית שבין MN ובין המישור ABCD.

ג. מהו המצב ההדדי של הישרים AB ו-MN? נמק.

- (3) במעגל שמרכזו בראשית הצירים במישור גאוס חסום משולש שווה צלעות ABC. הקדקוד A מתאים למספר המרוכב: $z_1 = a - \sqrt{3} \cdot a \cdot i$ ($a > 0$) הוא פרמטר ממשי). נתון: הקדקוד B נמצא ברביע הראשון.
- א. הבע באמצעות a את המספרים המרוכבים z_2 ו- z_3 המתאימים לקדקודים B ו-C בהתאמה.
- נתון: $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$.
- ב. מצא את a .
- ג. המספר z_1^{6n+5} מתאים לנקודה P במישור גאוס. n הוא מספר שלם. הנקודה O היא ראשית הצירים. הראה שהנקודה B נמצאת על הקרן OP.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- (4) נתונה הפונקציה $g(x) = 2x^2 + c$. c הוא פרמטר.
- הפונקציה $f(x)$ מוגדרת כך: $f(x) = e^{g(x)}$.
- הגרפים של פונקציות הנגזרת, $f'(x)$ ו- $g'(x)$, נחתכים בנקודה ששיעור ה- x שלה הוא 2.
- א. מצא את c .
- ב. ענה על הסעיפים הבאים:
- i. הוכח ש- $f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.
- ii. מצא את שיעורי כל הנקודות בהן הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $g'(x)$ חותכים זה את זה.
- iii. עבור אילו ערכי x $f'(x) > g'(x)$?
- iv. סרטט סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $g'(x)$ באותה מערכת צירים.
- ג. נתון: $M(2,8)$, $N(-2,-8)$.
- MN הוא אלכסון של מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים.
- הראה שגרף הפונקציה $f'(x)$ מחלק את המלבן לשני חלקים שווים בשטחם.

5 נתונה הפונקציה: $f(x) = x + m \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. m הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום הערכים של m .

ii. הבע את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ באמצעות m ,

וקבע את סוגה.

ג. הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ושיעוריה אינם תלויים ב- m .

i. מצא את שיעורי הנקודה P .

ii. מצא את הערך של m שעבורו הנקודה P היא נקודת המינימום

של הפונקציה $f(x)$.

הצב את m שמצאת בתת-סעיף ג (ii) וענה על הסעיפים ד-ה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{f(x) - x}{x}$. חשב את $\int_1^e g(x) dx$.

תשובות סופיות:

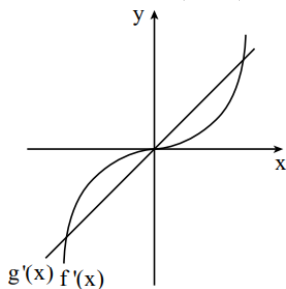
1. א. $y^2 = 20x$ ב. (i). $k = -5$ ב. (ii). $D(15, 10\sqrt{3})$

2. א. $\frac{S}{t} = 1$ ב. 24.09° ג. מצטלבים.

3. א. $z_1 = a - \sqrt{3}ai = 2a \cdot \text{cis}300^\circ$, $z_2 = a + \sqrt{3}ai = 2a \cdot \text{cis}60^\circ$, $z_3 = -2ai = 2a \cdot \text{cis}180^\circ$ ב. $a = 1$ ג. הוכחה.

4. א. $c = -8$ ב. (i). הוכחה ב. (ii). $(0, 0)$, $(2, 8)$, $(-2, -8)$ ב. (iii). $-2 < x < 0$, $x > 2$ ג. הוכחה.

ב. (iv). להלן סקיצה:



5. א. $x > 0$ ב. (i). $m > 0$

ב. (ii). $\min(m, m(1 - \ln m))$

ג. (i). $P(1, 1)$

ד. להלן סקיצה:

ה. $-\frac{1}{2}$

