שאלון 582

פרק 27

פתרון בוידאו של בחינות 2016

מועד חורף 1
קיץ מועד א 4
קיץ מועד ב 8

בגרות חורף 2016:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

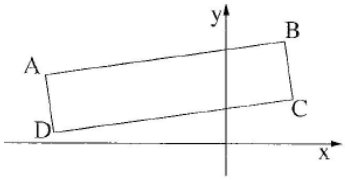
ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) מעגל שמרכזו על ציר ה-x עובר דרך הנקודות $(1,4)$ ו- $(-6,3)$ (שאינן קדקודי המלבן שבציור).

הצלע AB של המלבן ABCD מונחת על ישר העובר דרך הנקודות האלה.

קדקודי המלבן ABCD נמצאים ברביע הראשון וברביע השני.



א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-x.

ב. המשכי הצלעות BC ו- AD עוברים דרך נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-x.

נתון כי המרחק של הצלע DC מראשית הצירים הוא $\sqrt{2}$.

מצא את שטח המלבן ABCD.

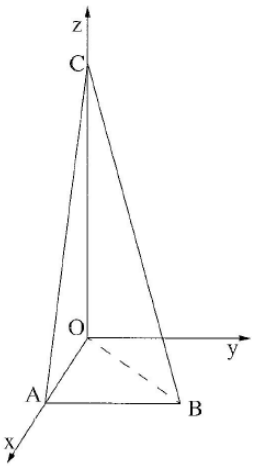
2) נתונה פירמידה AOBC.

המקצוע AO מונח על החלק החיובי של ציר ה-x,

המקצוע CO מונח על החלק החיובי של ציר ה-z,

והמקצוע AB נמצא במישור $[xy]$, כך ששיעור ה-x ושיעור ה-y של הקדקוד B חיוביים (ראה ציור).

נתון: $AO=3$, $CO=12$, $BO=5$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.



א. מהו המצב ההדדי בין הישר AB ובין ציר ה-y? נמק.

ב. מצא את הזווית בין המישור CAB ובין המישור $[zy]$.

ג. נקודה D נמצאת במישור CAB ובמישור $[xy]$ כך ש- $CB=CD$.

מצא את הזווית בין הישר CD למישור $[zy]$.

3) המספר המרוכב z_1 נמצא במישור גאוס ברביע הראשון על מעגל שרדיוסו 2 ומרכזו ראשית הצירים O. המספר המרוכב z_2 נמצא במישור גאוס ברביע השני על מעגל שרדיוסו 4 ומרכזו ראשית הצירים O.
נתון כי הזווית בין הקטע OO_{z_2} ובין הקטע OO_{z_1} היא $60°$.
המספרים z_1 ו- z_2 הם האיבר הראשון והאיבר השני בסדרה הנדסית בהתאמה.
z_4 הוא האיבר הרביעי בסדרה זו.

א. הראה כי z_1 ו- z_4 נמצאים על קו ישר אחד העובר דרך ראשית הצירים.

ב. נתון גם: $z_1 \cdot z_4 = -32i$. מצא את הארגומנט (הזווית) של z_4.
מצא את שטח המשולש $z_1 z_2 z_4$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\ln(ax-2)}{ax-2}$, a הוא פרמטר שונה מ- 0.
ענה על הסעיפים א ו-ב עבור $a>0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):
(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) את האסימפטוטה של הפונקציה המאונכת לציר ה- x.
(3) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
(4) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

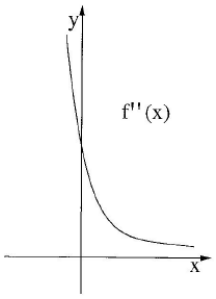
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ענה על הסעיפים ג ו-ד עבור $a<0$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתון כי האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים נפגשות בנקודה $(-2,0)$.
מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף הפונקציה, על ידי ציר ה- x
ועל ידי הישר $x=\frac{e+2}{a}$ (ערך מספרי).

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{e^x}$, a הוא פרמטר גדול מ- 4.



בציור שלפניך נתון הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

הגרף של $f''(x)$ אינו חותך את ציר ה- x.

הפונקציה $f''(x)$ מוגדרת לכל x, ויורדת בכל תחום הגדרתה.

א. (1) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה). הבע באמצעות a במידת הצורך.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול? נמק.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. האם לפונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$ יש נקודות פיתול? נמק.

ג. השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x=1$, שווה ל $-5\frac{8}{e}$.

מצא את הערך של a.

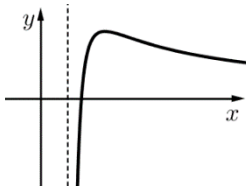
תשובות סופיות:

1) א. $(-7,0)$, $(3,0)$ ב. 23.8

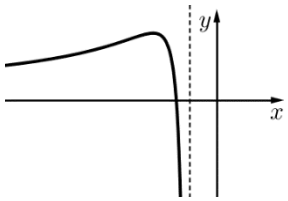
2) א. מקבילים ב. $14.04°$ ג. $13.34°$

3) א. הוכחה ב. $225°$ ג. 31.17

4) א. i. $x>\frac{2}{a}$ א. ii. $x=\frac{2}{a}$ א. iii. $\left(\frac{3}{a},0\right)$



א. iv. $\max\left(\frac{e+2}{a},\frac{1}{e}\right)$ ב. סקיצה בצד.

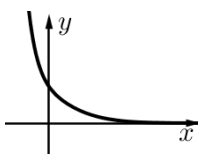


ג. סקיצה בצד. ד. 0.5

5) א. i. $(0,a)$ א. ii. עלייה: אין, ירידה: כל x

א. iii. לא א. iv. סקיצה בצד.

ב. לא ג. 5



בגרות קיץ 2016 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים (66$\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 33$\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נתון טרפז ABCD $(AB \| CD)$. המשכי השוקיים BC ו-AD נפגשים בראשית הצירים.
השוק BC מונחת על החלק החיובי של ציר ה-x. הקדקודים A ו-D נמצאים ברביע השלישי. הבסיס AB מונח על הישר $3x-4y-15=0$. גובה הטרפז הוא 6.
היעזר בסרטוט סקיצה של הטרפז במערכת צירים וענה על סעיפים א' ו-ב'.

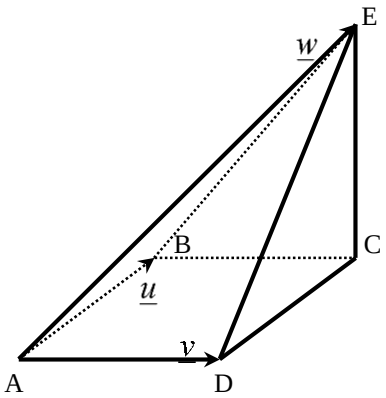
א. מצא את משוואת הבסיס CD.

ב. נתון כי הקדקודים A ו-C נמצאים על מעגל שמרכזו בקדקוד B.

i. מצא את רדיוס המעגל.

ii. מצא את השיעורים של הקדקוד D.

2) בפירמידה ABCDE שבסיסה ריבוע נתון: $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DE}$,
הווקטור $\overrightarrow{AE}$ יוצר זוויות שוות עם הווקטורים $\overrightarrow{AD}$ ו-$\overrightarrow{AB}$,
אורך צלע הבסיס הוא 5. נסמן: $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AE}=\underline{w}$ (ראה ציור).



א. מצא את הערך של המכפלה הסקלרית $\underline{v}\cdot\underline{w}$, ושל המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{w}$.

הנקודה H נמצאת על המקצוע EC כך ש-$\overrightarrow{EH}=\frac{2}{5}\overrightarrow{EC}$.

נתון: $\left|\overrightarrow{AH}\right|=2\sqrt{17}$.

ב. מצא את אורך המקצוע AE.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי המשולש EDC הוא ישר-זווית, ומצא את שטחו.

ii. מצא את נפח הפירמידה המשולשת AEDC.

3) נתון: $z^2-2Rcis\theta\cdot z-3R^2cis(2\theta)=0$, z הוא מספר מרוכב,
$0<\theta<90°$, R הוא מספר ממש חיובי.
פתרונות המשוואה הנתונה הם z_1 ו- z_2 . z_1 נמצא ברביע הראשון.

א. הבע באמצעות θ ו- R את z_1 ואת z_2 .

ב. נתון כי משוואת הישר העובר דרך z_1 ו- z_2 היא $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. מצא את θ .

המספר המרוכב z_3 מקיים: $z_3=\overline{z}_1$.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. סרטט במישור גאוס את המספרים z_1 , z_2 , z_3 .

ii. נתון כי שטח המשולש z_1Oz_3 הוא $225\sqrt{3}$ (O - ראשית הצירים)
מצא את הערך המוחלט של z_2 .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=-3x^2\cdot e^{x^3}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,
וקבע את סוגן. בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

ii. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

iii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

iv. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=|f(x)|$.
הוסף סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ לסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הסגור בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$
ובין הישר $x=-1$.

ג. הפונקציות $h(a)$ ו- $t(a)$ מקיימות: $t(a)=\int_{-1}^{a}g(x)dx$, $h(a)=\int_{-1}^{a}f(x)dx$, $a\geq-1$
מצא את השיעורים של נקודת הפגישה בין הגרפים של הפונקציות $h(a)$ ו- $t(a)$.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\ln x\right)$.

א. ענה על הסעיפים:

i. מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

ii. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

iii. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה) וקבע את סוגן.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה) וקבע את סוגן.

ii. מצא את השיעורים של נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של הפונקציה $f(x)$, וסקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ii. ברביע הראשון הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$ נפגשים בנקודה אחת. באיזה תחום ערכים נמצא שיעור ה-x של נקודה זו?

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x)=f(x)$.

נתון: $g(1)=a$, $g\left(\sqrt{e}\right)=b$, $g(e)=c$.

הבע באמצעות a, b ו-c את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים $x=1$ ו-$x=e$.

תשובות סופיות:

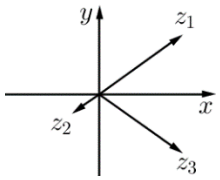
1) א. $DC:\ -3x+4y+45=0$ ב. (i) $R=10$ ב. (ii) $D(-9,-18)$

2) א. $\underline{w}\cdot\underline{v}=25\ ,\ \underline{w}\cdot\underline{u}=25$ ב. $AE=10$ ג. (i) 17.68 יח"ר

ג. (ii) 29.46 יח"נ.

3) א. $z_1=Rcis\theta\ ,\ z_2=R\text{cis}(180°+\theta)=-R\text{cis}\,\theta$ ב. $30°$

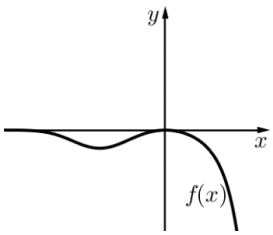
ג. (i) להלן סקיצה:



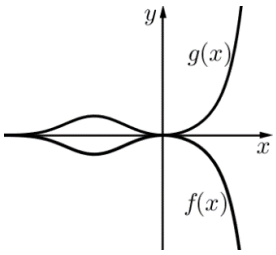
ג. (ii) 10

4) א. (i) $\min(-0.873,-1.175)\ ,\ \max(0,0)$ א. (ii) $(0,0)$

א. (iii) להלן סקיצה:



א. (iv) להלן סקיצה:



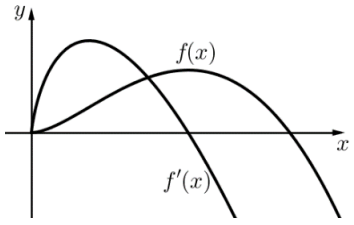
ב. 1.264

ג. $(-1,0)$

5) א. (i) $x>0$ א. (ii) $(\sqrt{e},0)$

א. (iii) $\max\left(1,\frac{1}{4}\right)$ ב. (i) $\max\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ ב. (ii) $\left(\frac{1}{e},\frac{3}{4e^2}\right)$

ג. (i) להלן סקיצה:



ג. (ii) $\frac{1}{e}<x<1$ ד. $S=2b-a-c$.

בגרות קיץ 2016 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים (66$\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 33$\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נתונה פרבולה שמשוואתה $y^2=2px$.
שני ישרים המשיקים לפרבולה בנקודות K ו-L נפגשים בנקודה A, שהיא נקודת החיתוך של מדריך הפרבולה עם ציר ה-x.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי שיעור ה-x של K שווה לשיעור ה-x של L.

ii. הראה כי המשיקים מאונכים זה לזה.

נתון מעגל, שמרכזו M נמצא על ציר ה-x.
המשיקים לפרבולה הנתונה הנקודות K ו-L משיקים גם למעגל זה בנקודות אלה.
הצב $p=2$, וענה על הסעיפים ב, ג.

ב. מצא את משוואת המעגל שמרכזו M.

ג. מצא את משוואת המעגל החסום במרובע AKML.

2) נתון מעגל הנמצא במישור π ומרכזו בראשית הצירים $O(0,0,0)$.
הישר $\ell_1: \underline{x}=(2,2,0)+t(1,2,1)$ נמצא במישור π ומשיק למעגל זה בנקודה B.

א. מצא את השיעורים של הנקודה B.

ב. הישר $\ell_2: \underline{x}=(0,1,1)+s(2,-1,1)$ חותך את מישור π בנקודה A.

i. הראה כי הנקודה A נמצאת על המעגל הנתון.

ii. מצא את שטח המשולש AOB.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתון המספר המרוכב: $z=\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)^3}{\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2}$.

i. מצא את $|z|$ ואת הארגומנט (הזווית) של z.

ii. מצא את הערכים של n (n מספר טבעי) שעבורם z^n הוא מספר מדומה טהור.

ב. נתון המקום הגאומטרי $\left|(z+\bar{z})-m(z-\bar{z})\right|=40$, m הוא מספר ממשי גדול מ-1.

i. זהה את המקום הגאומטרי, נמק.

ii. הנקודה שמיוצגת על ידי המספר $12+8i$ נמצאת על המקום הגאומטרי.
מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של המקום הגאומטרי עם הצירים.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=9^x-2\cdot3^x-3$ המוגדרת לכל x.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ii. מצא את האסימפטוטה האופקית לגרף הפונקציה.

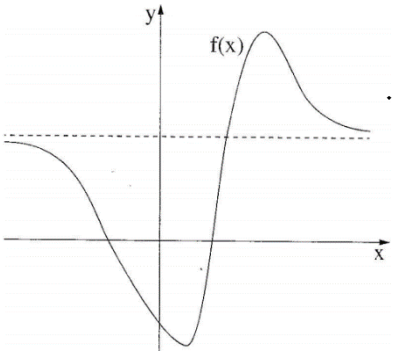
iii. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

iv. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. מצא את השטח מימין לציר ה- y, המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה- y ועל ידי האסימפטוטה האופקית. תוכל להשאיר $\ln$ בתשובתך.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+4$. השטח שמצאת בסעיף ב שווה לשטח מימין לציר ה- y, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- y ועל ידי הישר $y=k$.
מהו הערך של k? נמק.

5) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$:



נתון כי הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ מוגדרות לכל x.

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת שמשוואתה $y=1.5e$ כמתואר בציור.

נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן : $A(4,3e)$, $B(1,-1.5e)$.

הנקודות $C(-2,0)$, $D(2,0)$, $E(5,2e)$, נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $x<-2$ ובתחום $2<x<5$,

וקעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $x>5$ ובתחום $-2<x<2$.

א. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, וקבע את סוגן. נמק.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת : $g(x)=\ln\left[f(x)\right]$.

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ii. מצא את האסימפטוטות של $g(x)$ המאונכות לציר ה-x.

iii. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

iv. לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת שמשוואתה $y=\ln(1.5e)$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

1) א. (i). הוכחה. א. (ii). הוכחה. ב. $(x-3)^2+y^2=8$

ג. $(x-1)^2+y^2=2$

2) א. $(1,0,-1)$ ב. (i). הוכחה. ב. (ii). $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) א. (i). $|z|=1$ א. (ii). $2k+1$ ($k>0$, n אי זוגי)

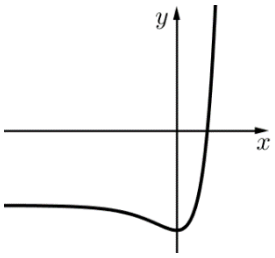
ב. (i). אליפסה קנונית.

ב. (ii). ציר x : $(-20,0)$, $(20,0)$, ציר y : $(0,-10)$, $(0,10)$

4) א. (i). ציר x : $(1,0)$, ציר y : $(0,-4)$

א. (ii). $y=-3$ (עבור $x\to\infty$)

א. (iii). $\min(0,-4)$ א. (iv). להלן סקיצה:



ב. $\frac{1}{2\ln 3}=0.455$ ג. 1

5) א. $\min: x=5$, $\min: x=-2$, $\max: x=2$

ב. (i). $x<-2$, $x>2$ ב. (ii). $x=-2$, $x=2$

ב. (iii). $\max(4,\ln(3e))$ ב. (iv). להלן סקיצה:

