פתרון בגרויות במתמטיקה לשאלון 481

פרק 10

פתרון בוידאו של בחינות 2015

מועד חורף 1
קיץ מועד א 5
קיץ מועד ב 10

בגרות חורף 2015:

פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

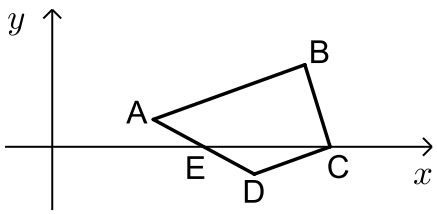
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) בתחילת השנה מחיר ספה היה גדול ב-1500 שקל ממחיר כורסה.
בסוף השנה עלה מחיר הספה ב-8%, ומחיר הכורסה ירד ב-10%.
מחיר הספה עלה באותו הסכום שהמחיר של 2 כורסאות ירד.

א. מצא את מחיר הספה, ואת מחיר הכורסה לפני שינוי המחירים.

ב. משה קנה בסוף השנה 3 כורסאות וספה אחת.
בכמה אחוזים קטן הסכום ששילם עבור הקניה שלו מהסכום שהיה משלם לפני שינוי המחירים?

2) במרובע ABCD הקדקוד C נמצא על ציר ה-x (ראה ציור).



נתון: $A(4,1)$, $B(10,3)$, $AB \parallel DC$, $\sphericalangle BCD = 90°$.

א. מצא את השיעורים של הקדקוד C.
הישר AD עובר דרך הנקודה $E(6,0)$.

ב. האם הנקודה E היא אמצע הצלע AD? נמק.

ג. האם EC הוא קוטר במעגל החוסם את המשולש EDC? נמק.

3) בשקית א' יש 7 מטפחות צהובות ו-5 מטפחות אדומות.
בשקית ב' יש 10 מטפחות: חלקן צהובות והשאר אדומות.
הוציאו באקראי מטפחת אחת משקית א' ומטפחת אחת משקית ב'.
ההסתברות ששתי המטפחות צהובות היא $\frac{7}{40}$.

א. כמה מטפחות צהובות היו בשקית ב' ?

ב. מחזירים כל מטפחת לשקית שממנה הוציאו אותה,
ומוציאים באקראי מטפחת משקית א' ומטפחת משקית ב'.
ידוע כי המטפחות שהוצאו הן בצבעים שונים.
מהי ההסתברות שהמטפחת שהוצאה משקית ב' היא צהובה?

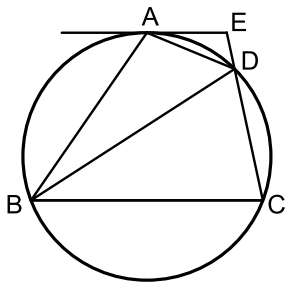
ג. מחזירים שוב כל מטפחת לשקית שממנה הוציאו אותה.
בוחרים באקראי שקית, ומוציאים ממנה באקראי בלי החזרה שתי מטפחות.
מהי ההסתברות ששתי המטפחות הן אדומות?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) המרובע ABCD חסום במעגל.
בנקודה A העבירו משיק למעגל.
המשיק נפגש עם המשך CD בנקודה E (ראה ציור).
נתון: AD חוצה-זווית EDB.



א. הוכח כי $\Delta AED \sim \Delta BAD$.

נתון גם כי שטח המשולש BAD גדול פי 4 משטח המשולש AED.

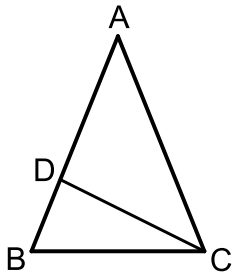
ב. חשב פי כמה גדול היקף המשולש BAD מהיקף המשולש AED.

ג. נתון גם כי $AD = a$.

(1) הבע באמצעות a את האורך של BD.

(2) מצא את היחס $\frac{BD}{DE}$.

5) במשולש שווה-שוקיים ABC (AB = AC)
נקודה D נמצאת על השוק AB (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, שטח המשולש ABC הוא 12.5 סמ"ר.



א. הבע באמצעות α את אורך השוק של המשולש ABC.

נתון גם: $\alpha = 44°$, BD = 2 ס"מ.

ב. מצא את האורך של DC.

ג. מצא את גודל הזווית BCD.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2-x}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=f(x)-2$.
הסתמך על סעיף א, וענה על התת-סעיפים שלפניך.

(1) מה הן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הם השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה)?

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+2$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

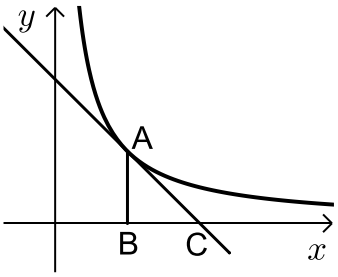
(2) האם גרף הפונקציה חותך את הצירים? נמק.

(3) על פי התת-סעיפים הקודמים סרטט סקיצה של גרף הפונקציה, אם נתון כי הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה שלה.

ב. (1) הוסף לסקיצה שסרטטת את הישר $y=3x+2$, ואת הישר $x=4$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי שני הישרים שהוספת, על ידי ציר ה-x ועל ידי ציר ה-y.

8) בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{4}{x}$ ברביע הראשון.



דרך הנקודה A שעל גרף הפונקציה העבירו משיק לגרף הפונקציה, והעבירו אנך לציר ה-x.
המשיק חותך את ציר ה-x בנקודה C,
והאנך חותך את ציר ה-x בנקודה B (ראה ציור).
נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t.

א. (1) הבע באמצעות t את שיפוע המשיק.
(2) הבע באמצעות t את משוואת המשיק.
(3) הבע באמצעות t את האורך של הקטע BC.

ב. מצא את הערך של t שעבורו סכום הקטעים AB + BC הוא מינימלי.

תשובות סופיות:

1) א. ספה: 2500 ₪, כורסה: 1000 ₪. ב. ב-1.818%.

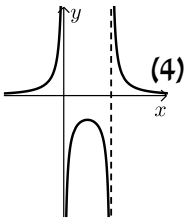
2) א. $C(11,0)$ ב. כן. ג. לא.

3) א. 3 ב. $\frac{15}{64}$ ג. $\frac{17}{55}$.

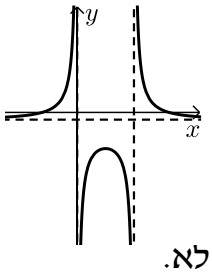
4) א. הוכחה. ב. פי 2. ג. (1) $2a$ (2) 4.

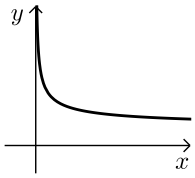
5) א. $\frac{5}{\sqrt{\sin\alpha}}$ ב. 4.18 ס"מ. ג. 26.34°.

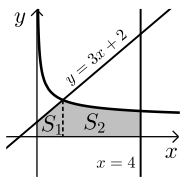
6) א. (1) $x\neq 0$, $x\neq 1$ (2) $y=0$, $x=1$, $x=0$ (3) $\max\left(\frac{1}{2},-8\right)$

(4)


ב. (1) $y=-2$, $x=1$, $x=0$ (2) $\max\left(\frac{1}{2},-10\right)$

(3)


7) א. (1) $x>0$ (2) לא. (3)


ב. (1)


(2) 15.5 יח"ר.

8) א. (1) $\frac{-4}{t^2}$ (2) $y=\frac{-4}{t^2}x+\frac{8}{t}$ (3) $BC=t$ ב. $t=2$.

בגרות קיץ 2015 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נתון מלבן שרוחבו x ס"מ, ואורכו גדול פי 1.2 מרוחבו.
הגדילו את אורך המלבן ב-10%, והקטינו את רוחב המלבן ב-10%.
התקבל מלבן חדש.

א. (1) הבע באמצעות x את שטח המלבן החדש.
(2) בכמה אחוזים השתנה השטח של המלבן הנתון?

ב. R הוא הרדיוס של המעגל החוסם את המלבן הנתון.
נתון כי $R=\sqrt{61}$ (ס"מ). מצא את שטח המלבן החדש.

2) נתון כי מעגל, שמשוואתו $(x-3)^2+(y+k)^2=25$,
עובר דרך ראשית הצירים. k הוא פרמטר.

א. (1) מצא את שני הערכים של k.
(2) רשום את המשוואות של שני המעגלים המתאימים לערכים של k שמצאת.

ב. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של כל אחד משני המעגלים.

ג. סרטט את שני המעגלים במערכת צירים אחת.

ד. הישר $x=a$ משיק לשני המעגלים, $a>0$.
(1) מצא את a.
(2) מה הם השיעורים של נקודות ההשקה?

3) בקופסה I יש 3 כדורים אדומים ו-6 כדורים ירוקים.
בקופסה II יש 12 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים.
בוחרים באקראי קופסה, ומוציאים ממנה 2 כדורים זה אחר זה (ללא החזרה).

א. מהי ההסתברות ש-2 הכדורים יהיו באותו צבע?

ב. מהי ההסתברות ש-2 הכדורים יהיו בצבעים שונים?

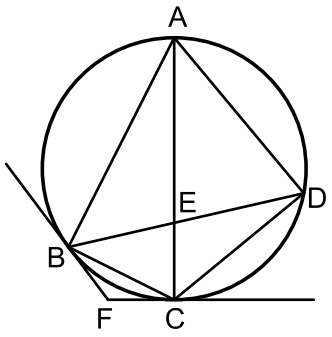
ג. ידוע כי 2 הכדורים היו באותו צבע.
מהי ההסתברות שהם הוצאו מקופסה I?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) מרובע חסום במעגל.
אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה E.
העבירו משיק למעגל בנקודה B
ומשיק למעגל ABCD בנקודה C.
המשיקים נפגשים בנקודה F (ראה ציור).
נתון $\sphericalangle ABC = 90°$.



א. (1) הוכח: $\sphericalangle ADB + \sphericalangle FBC = 90°$.

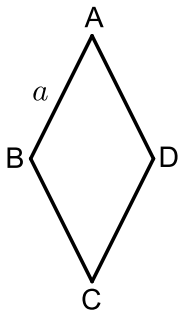
(2) הוכח: $\sphericalangle BFC = 2 \cdot \sphericalangle ADB$.

ב. (1) הוכח: $\Delta BEC \sim \Delta AED$

(2) נתון גם: $BE \cdot DE = 21$, $AE = 7$.
מצא את קוטר המעגל.

הערה: הפתרון של סעיף ב אינו תלוי בפתרון של סעיף א.

5) במעוין ABCD שצלעו a (ראה ציור)
נתון: $\sphericalangle BAD = 2\alpha$, $\sphericalangle BAD < 90°$.



א. (1) הבע את AC ואת BD באמצעות a ו- α .

(2) נתון גם: $AC \cdot BD = a^2$. מצא את α .

ב. נתון גם כי רדיוס המעגל החוסם את
המשולש ABD הוא 10 ס"מ.
מצא את שטח המעוין ABCD (ערך מספרי).

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{-x^2+2x+3}{x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x)=f(x)$.

($g'(x)$ ו-$g(x)$ מוגדרות באותו תחום).

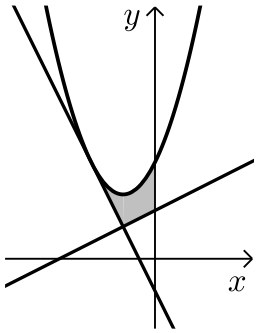
העבירו משיקים לגרף הפונקציה $g(x)$ המקבילים לציר ה-x.

מה הם שיעורי ה-x של נקודות ההשקה של המשיקים האלה? נמק.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+ax+b$.

a ו-b הם פרמטרים.

הישר $y=-2x-1$ משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-2$ (ראה ציור).

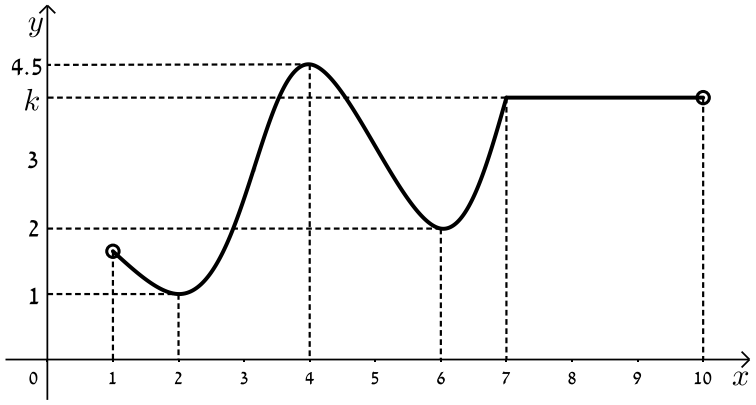


א. מצא את הערך של a ואת הערך של b.

הצב $a=2$ ו- $b=3$ וענה על סעיף ב.

ב. מצא את השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק, על ידי הישר $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ועל ידי ציר ה-y (השטח המקווקו בציור).

8) בציור שלפניך מוצג גרף של הפונקציה $f(x)$ בתחום $1<x<10$:



הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הציר, וענה על הסעיפים א, ב, ג, ד.

א. מצא עבור אילו ערכים של x השונים מ-7 מתקיים :

(1) $f'(x)<0$. נמק.

(2) $f'(x)>0$. נמק.

(3) $f'(x)=0$. נמק.

ב. נתון : $\int_{7}^{9} k dx = 8$, k הוא הפרמטר המסומן על ציר ה- y בציור.

מצא את הערך של הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=9$.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $2\le x\le 6$.

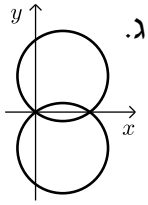
ד. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x , בתחום $2\le x\le 4$ (ערך מספרי).

תשובות סופיות:

1) א. (1) $1.188x^2$ (2) 1% ב. 118.8 סמ"ר.

2) א. (1) $k=\pm 4$ (2) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$, $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.

ב. $(0,0)$, $(0,8)$, $(0,0)$; $(6,0)$, $(0,-8)$, $(0,0)$; $(6,0)$

ג. 

ד. (1) $a=8$ (2) $(8,4)$, $(8,-4)$

3) א. $\frac{11}{20}=0.55$ ב. $\frac{9}{20}=0.45$ ג. $\frac{5}{11}$.

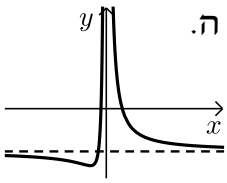
4) א. (1) הוכחה. א. (2) הוכחה. ב. (1) הוכחה.

ב. (2) 10.

5) א. (1) $AC=2a\cos\alpha$, $BD=2a\sin\alpha$ א. (2) $15°$

ב. 186.602 סמ"ר.

6) א. $x\neq 0$ ב. $x=0$, $y=-1$ ג. $(3,0)$, $(-1,0)$

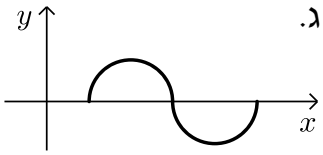
ד. $\min\left(-3,-\frac{4}{3}\right)$ ה. 

ו. $x=-1$, $x=3$.

7) א. $b=3$, $a=2$ ב. $1\frac{5}{12}$.

8) א. (1) $1<x<2$ או $4<x<6$. א. (2) $2<x<4$ או $6<x<7$.

א. (3) $x=2$, $x=4$, $x=6$, $7<x<10$. ב. 4.

ג. 

ד. 3.5.

בגרות קיץ 2015 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

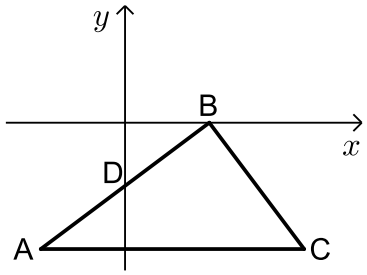
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) בסוף העונה קנתה דנה שלושה פריטי לבוש: חולצה, חצאית ומכנסיים.
לפני סוף העונה היה המחיר של החולצה x שקלים, המחיר של החצאית היה גבוה ב-40 שקל מהמחיר של החולצה, והמחיר של המכנסיים היה פי 2 ממחיר החולצה.
נתון כי המחיר של המכנסיים היה הגבוה ביותר מבין שלושת המחירים.

א. בסוף העונה קיבלה דנה הנחה של 30% עבור פריט הלבוש הזול ביותר, הנחה של 20% עבור פריט הלבוש היקר ביותר והנחה של 25% עבור פריט הלבוש השלישי. דנה שילמה עבור שלושת הפריטים 274 שקלים.
מה היה מחיר המכנסיים לפני סוף העונה?

ב. בכמה אחוזים היה המחיר הכולל של שלושת הפריטים בסוף העונה נמוך ממחירם הכולל לפני סוף העונה?

2) נתון משולש ישר-זווית שבו $\sphericalangle ABC = 90°$.
הצלע AB מונחת על הישר $3x - 4y = 12$.
הישר חותך את ציר ה-x בנקודה B
ואת ציר ה-y בנקודה D.
הצלע AC מקבילה לציר ה-x.
הנקודה D היא אמצע הצלע AB (ראה ציור).



א. מצא את משוואת הצלע AC.

ב. מצא את השיעורים של הנקודה C.

ג. נתון כי המרובע BACF הוא מקבילית $(BF \parallel AC\ ,\ AB \parallel CF)$.
מצא את השיעורים של הנקודה F.

ד. מצא את השטח של המקבילית BACF.

3) שניים מהלומדים (בנים / בנות) באוניברסיטה גדולה מועמדים לתפקיד של יושב ראש אגודת הסטודנטים באוניברסיטה. 40% מהלומדים הם בנים, והשאר בנות. $\frac{3}{4}$ מהבנים תומכים במועמד א', והשאר תומכים במועמד ב'.

$\frac{1}{3}$ מהבנות תומכות במועמד ב', והשאר תומכות במועמד א'.

א. מצא את אחוז התומכים במועמד א'.

ב. מבין הלומדים נבחר באקראי תומך במועמד א' (בן / בת).
מהי ההסתברות שנבחרה בת?

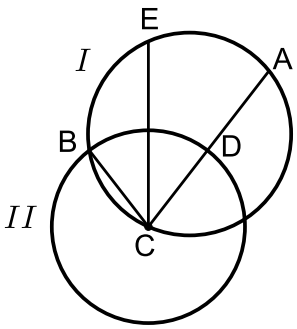
ג. בחרו באקראי 4 לומדים באוניברסיטה (בנים / בנות).
מהי ההסתברות שיותר ממחיצתם תומכים במועמד א'?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

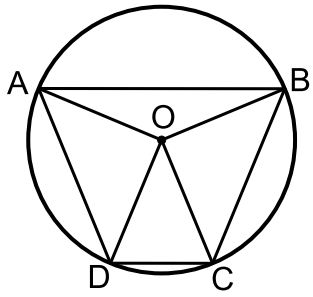
4) נקודה B היא אחת מנקודות החיתוך של שני מעגלים, I ו- II. נקודה C היא מרכז המעגל II, והיא נמצאת על המעגל I.
הנקודות A ו-E נמצאות על המעגל I
כך ש- $\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{EA}$. המיתר AC חותך את המעגל II בנקודה D (ראה ציור).



א. הוכח: $\Delta EBC \cong \Delta EDC$.

ב. המיתר EC חותך את המיתר AB בנקודה F.
הוכח: $\Delta EBF \sim \Delta ECD$.

5) טרפז $ABCD$ $(AB \| DC)$ חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle DOC = 45°$, $\sphericalangle AOB = 135°$.



א. (1) מצא את $\sphericalangle BOC$.
(2) מצא את $\sphericalangle BAD$.

ב. נתון כי גובה הטרפז הוא 13.065 ס"מ.
מצא את R.

ג. הראה כי שטח המשולש AOB שווה לשטח המשולש DOC.

ד. מצא את שטח הטרפז ABCD.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה $f(x)=8(2x-1)^3$ המוגדרת לכל x.

א. (1) מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

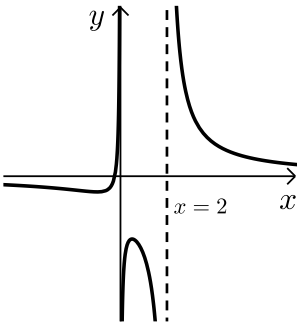
ג. הגרף של הפונקציה $g(x)$ הוא קו ישר. ישר זה עובר דרך נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(1) מצא את משוואת הישר.

(2) מצא את הערך של $g\left(\frac{1}{4}\right)$ ואת הערך של $f(1/4)$.

(3) מצא את השטח הרביע הרביעי, המוגבל על ידי הישר ועל ידי גרף הפונקציה $f(x)$.

7) בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה: $f(x)=\frac{4x+1}{ax^2-2x}$



a הוא פרמטר.

א. מצא את הערך של a.

הצב $a=1$, וענה על הסעיפים ב, ג, ד.

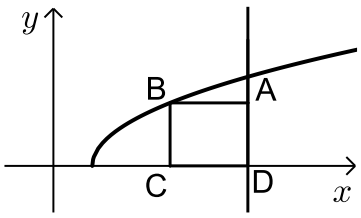
ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ד. (1) מה הן האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0<x<2$.

8) הקדקוד B של המלבן ABCD נמצא על גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{2x-4}$.



הצלע AD מונחת על הישר $x=10$ והצלע DC מונחת על ציר ה-x. (ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה B כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

ב. גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה-x בנקודה F (ראה ציור).

מצא את שטח המשולש BFC כאשר שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי. (הערה: תוכל להשאיר שורש בתשובותיך).

תשובות סופיות:

1) א. 160 ₪. ב. 23.89%.

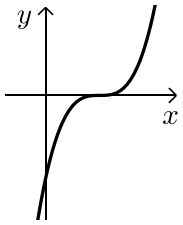
2) א. $y=-6$. ב. $(8.5,-6)$. ג. $(16.5,0)$. ד. 75 יח"ר.

3) א. 70%. ב. $\frac{4}{7}$. ג. 0.6517.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

5) א. (1) $90°$ (2) $67.5°$. ב. 10 ס"מ. ג. 170.71 סמ"ר.

6) א. (1) $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $(0,-8)$ (2) עלייה: כל x, ירידה: אין. ב.



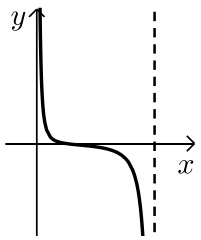
ג. (1) $y=16x-8$ (2) $f\left(\frac{1}{4}\right)=-1$, $g\left(\frac{1}{4}\right)=-4$

(3) 1 יח"ר.

7) א. $a=1$. ב. $x\neq 2$, $x\neq 0$.

ג. עלייה: $0<x<\frac{1}{2}$ או $-1<x<0$; ירידה: $x>2$ או $\frac{1}{2}<x<2$ או $x<-1$.

ד. (1) $x=2$, $x=0$, $y=0$ (2)



8) א. $\left(4\frac{2}{3},2.31\right)$. ב. 3.08 יח"ר.