פתרון בגרויות במתמטיקה לשאלון 482

פרק 12

פתרון בוידאו של בחינות 2014

מועד חורף 1
קיץ 2014 מועד א 4
קיץ 2014 מועד ב 7
קיץ 2014 מועד ג 10

בגרות חורף 2014:

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) נתונה סדרה חשבונית עולה: $a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n , ...$. נתון: $a_1 \cdot a_4 = (a_2)^2$.

א. הראה כי האיבר הראשון בסדרה החשבונית שווה להפרש הסדרה.

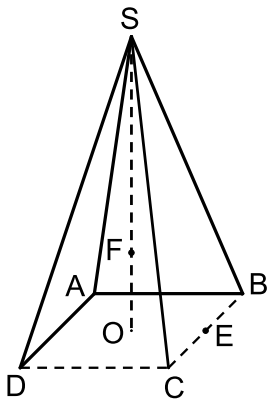
ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. שלושת האיברים a_9 , a_6 , a_4 בסדרה החשבונית הנתונה מהווים סדרה הנדסית. (a_4 הוא האיבר הראשון בסדרה ההנדסית).
מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

ii. סכום שלושת האיברים שבתת-סעיף ב (i) הוא 133.
מצא את הפרש הסדרה החשבונית הנתונה.

iii. סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנתונה מקיים: $S_n > 11,977$.
מצא את n הקטן ביותר המקיים אי-שוויון זה.

2) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע וגובהה SO.
הנקודה E היא אמצע הצלע BC (ראה ציור).
הזווית בין SE לבסיס הפירמידה היא $75°$.
אורך צלע הבסיס הוא a.



א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע באמצעות a את האורך של SE.

ii. הבע באמצעות a את שטח המעטפת של הפירמידה SABCD.

ב. הנקודה F נמצאת על הגובה SO כך ש- $FO = \frac{1}{3}SO$.
בפירמידה הישרה FABCD חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות

טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

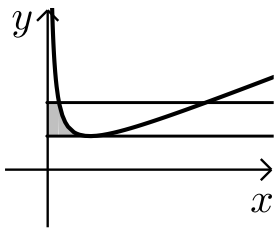
ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. יובל פתח חשבון חדש בבנק והפקיד בו 10,000 שקל.
הסכום שהפקיד גדל בכל חודש ב-2%.
כעבור שנה מרגע ההפקדה משך יובל מהחשבונות 5,000 שקל.
(הסכום שנשאר ממשיך לגדול בכל חודש ב-2%).
כעבור כמה חודשים מרגע המשיכה, שוב יהיו בחשבונות של יובל 10,000 שקל?

ב. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{2x}+\frac{2x}{3}$ בתחום $x>0$.



העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת הקיצון שלה, והעבירו את הישר $y=2\frac{1}{6}$ החותך את גרף הפונקציה בין היתר בנקודה שבה $x=1$
(הנקודה הקרובה לציר ה- y).
מצא את השטח המוגבל על ידי שני הישרים, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- y, השטח המקווקו בציור.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=-2\cos(2x)+a$ בתחום: $0\le x\le\frac{5\pi}{6}$.
a הוא פרמטר המקיים: $0<a<2$.

א. מצא את השיעורים של נקודות המקסימום המוחלט והמינימום המוחלט של הפונקציה $f(x)$ (הבע באמצעות a במידת הצורך).

ב. נתון כי הישר $y=3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.
מצא את הערך של a.
הצב $a=1$, וענה על הסעיפים ג ו-ד.

ג. בתחום הנתון סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. בתחום הנתון מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק $y=3$ ועל ידי ציר ה- y.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=(a-3x)e^{3x}$, a הוא פרמטר.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. ידוע כי שיעור ה-x של נקודת קיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא 1.
מצא את הערך של a.

הצב $a=4$, וענה על הסעיפים ג ו-ד.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ii. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

iii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתון הישר $y=k$, $k\le 0$.
כמה נקודות חיתוך יש לישר זה עם גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

תשובות סופיות:

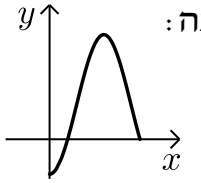
1) א. הוכחה. ב. (i). $q=1.5$ ב. (ii). $d=7$ ב. (iii). $n=59$

2) א. (i). $SE=1.93a$ א. (ii). $3.86a^2$ ב. $a=41.34°$

3) א. 13.31 חודשים. ב. 0.1915 יחידות שטח.

4) א. $\max\left(\frac{\pi}{2},a+2\right)$, $\min(0,a-2)$ ב. 1

ג. להלן סקיצה:



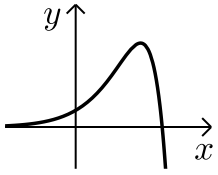
ד. 3.14

5) א. לכל x. ב. 4

ג. (i). ירידה $x>1$, עלייה $x<1$.

ג. (ii). $\left(1\frac{1}{3},0\right)$, $(0,4)$

ג. (iii). להלן סקיצה:



ד. נקודת חיתוך אחת.

בגרות קיץ 2014 מועד א':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

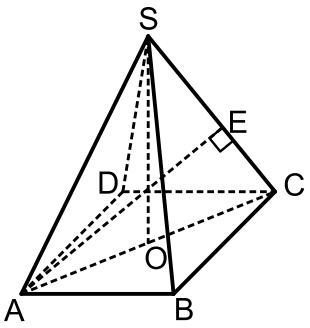
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) אדם קיבל שתי הצעות לקניית שואב אבק בתשלומים חודשיים, הצעה I והצעה II. בשתי ההצעות היה לשואב האבק אותו המחיר.
הצעה I: התשלום הראשון הוא 180 שקלים, וכל תשלום נוסף גדול ב-15 שקלים מהתשלום שקדם לו.
הצעה II: התשלום הראשון הוא 195 שקלים, וכל תשלום נוסף קטן ב-15 שקלים מהתשלום שקדם לו.
מספר התשלומים בהצעה II היה גדול ב-2 ממספר התשלומים בהצעה I.

א. מצא את מספר התשלומים בהצעה II.

ב. מצא את המחיר של שואב האבק.

2) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע ABCD.
האורך של צלע הריבוע הוא a ס"מ.
גובה הפירמידה, SO, שווה לאלכסון הבסיס, AC (ראה ציור).



א. חשב את הזווית שבין SC למישור הבסיס של הפירמידה.

ב. מקדקוד A העבירו אנך למקצוע SC.
האנך חותך את המקצוע בנקודה E (ראה ציור).
הבע באמצעות a את אורך הקטע CE.

ג. נתון ששטח המשולש AEC הוא 40 סמ"ר.
חשב את a.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות

טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-2}{e^{2x}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. ענה על הסעיפים:

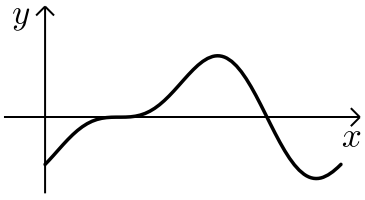
i. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ii. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. דרך נקודות הקיצון של הפונקציה העבירו אנכים לציר ה-x.
מצא את המרחק בין האנכים.

4) בציור שלפניך נתון הגרף של הפונקציה $f(x)=a\sin(2x)-\cos(x)$,
בתחום $0\le x\le 2\pi$. a הוא פרמטר.



לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x=\frac{7\pi}{6}$.

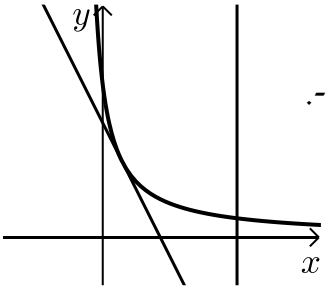
א. מצא את הערך של a.

ב. הצב בפונקציה $a=0.5$, וענה על הסעיפים (i)-(ii).

i. מצא בתחום הנתון את נקודות החיתוך של גרף
הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

ii. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,
על ידי ציר ה-x ועל ידי ציר ה-y (השטח האפור בציור).

5) בציור שלפניך מוצג גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{4}{2x+1}$



בתחום: $x>-0.5$.

א. העבירו משיק לגרף הפונקציה. שיפוע המשיק הוא 2-.

i. מצא את השיעורים של נקודת ההשקה.

ii. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי המשיק, על-ידי הישר $x=3.5$ ועל-ידי ציר ה-x (השטח האפור בציור).

תשובות סופיות:

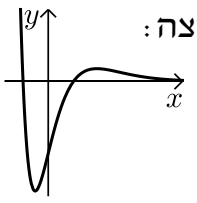
1) א. 7 ב. 1050 ש"ח.

2) א. $\alpha=63.43°$ ב. $CE=0.63a$ ג. 10 ס"מ $a=$.

3) א. לכל x. ב. (i). $\min\left(-1,-e^2\right)$, $\max\left(2,\frac{2}{e^4}\right)$

ב. (ii). $(0,-2)$, $\left(\sqrt{2},0\right)$, $\left(-\sqrt{2},0\right)$

ב. (iii). להלן סקיצה:



ג. 3 יחידות מרחק.

4) א. 0.5 ב. $(1.5\pi,0)$, $(0.5\pi,0)$ ג. 0.5 יחידות שטח.

5) א. (i). $(0.5,2)$ א. (ii). $y=-2x+3$ ב. 1.78

בגרות קיץ 2014 מועד ב':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) נתונה סדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = 4a_n + 9 \end{cases}$.

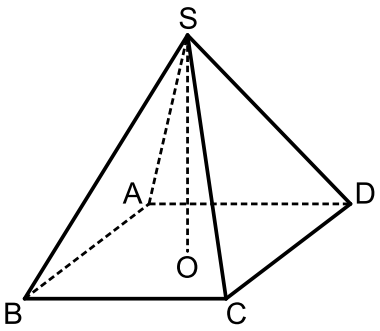
b_n היא סדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $b_n = a_n + 3$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

ב. מצא את סכום 4 האיברים הראשונים בסדרה b_n.

ג. בסדרה b_n סכום 4 האיברים הראשונים קטן ב-43,350 מסכום k האיברים העוקבים שאחרי האיבר הרביעי.
מצא את k.

2) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן ABCD.
SO הוא גובה הפירמידה (ראה ציור).
SK הוא גובה למקצוע CD בפאה SCD.
נתון: $SK = 16$ ס"מ.
הזווית בין SK למישור הבסיס היא $68°$.



א. חשב את אורך המקצוע BC.

ב. נתון גם: $CD = 10$ ס"מ.
i. חשב את הזווית CSD.
ii. ציין זווית אחרת בין שני מקצועות של הפירמידה, השווה בגודלה לזווית CSD.

ג. SL הוא גובה למקצוע AB בפאה SAB.
מצא את הזווית שבין SK ובין SL.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות

טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^x+\frac{e^2}{e^x}-2e$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

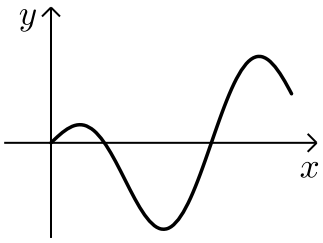
ג. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

על פי הגרף $f(x)$ שסרטטת, מצא עבור אילו ערכים של x הפונקציה $g(x)$ חיובית.

4) בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה: $f(x)=a\cdot\sin(2x)-\frac{1}{2}\sin(x)$



בתחום $0\le x\le 1.5\pi$. a הוא פרמטר.
ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\pi$, מקביל לישר $y=1.5x+3$.

א. מצא את הערך של a.

הצב $a=\frac{1}{2}$, וענה על הסעיפים ב ו- ג.

ב. בתחום $0\le x\le 1.5\pi$, מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.

ג. בתחום $0\le x\le\pi$ מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x.

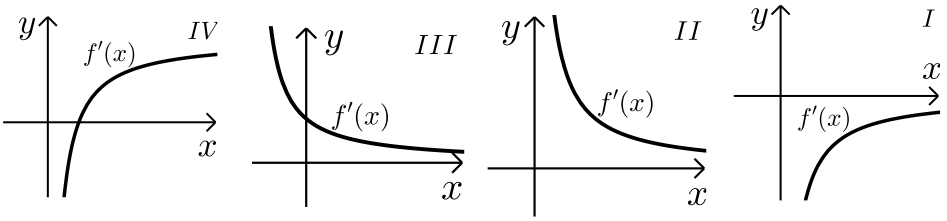
5) נתונה הפונקציה $f(x)=\log_2(x^2)+\frac{1}{3}\log_2(x)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. הראה כי הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה שלה.

ד. מבין הגרפים $I-IV$ שלפניך, קבע איזה גרף הוא הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמק.



ה. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים $x=1$ ו-$x=2$.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה.

ב. $S_4=170$

ג. $k=4$

2) א. $BC=11.99$ ס"מ

ב. (i). $\sphericalangle CSD=34.7°$

ב. (ii). $\sphericalangle ASB$

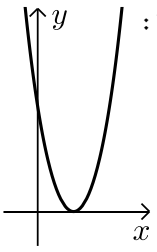
ב. (iii). $44°$

3) א. כל x

ב. $(1,0)$, $(0,e^2-2e+1)$

ג. $\min(1,0)$

ד. סקיצה:



ה. $x\neq 1$.

4) א. $a=\frac{1}{2}$

ב. $(\pi,0)$, $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$, $(0,0)$

ג. 1.25 יח"ר

5) א. $x>0$

ב. $(1,0)$

ג. הוכחה

ד. גרף II

ה. $2\frac{1}{3}$ יח"ר

בגרות קיץ 2014 מועד ג':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1) נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים.

נתון: $a_1=-74$, $d=6$.

האיבר האחרון בסדרה קטן ב-190 מסכום כל האיברים שלפניו.

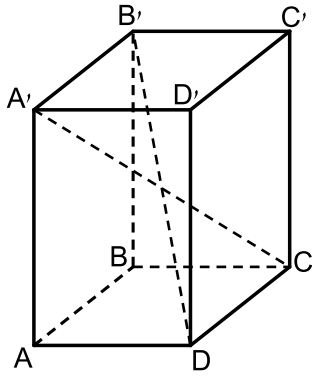
א. מצא כמה איברים יש בסדרה.

ב. מצא כמה איברים חיוביים יש בסדרה.

2) אלכסוני התיבה $ABCDA'B'C'D'$ נפגשים בנקודה O.

נתון: $\sphericalangle DOC=42°$

שטח המשולש DOC הוא 8.4 סמ"ר.



א. מצא את האורך של הצלע OC.

ב. מצא את האורך של המקצוע DC.

ג. הזווית בין אלכסון התיבה לבסיס התיבה ABCD היא $53°$.
מצא את האורך של המקצוע AD.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות

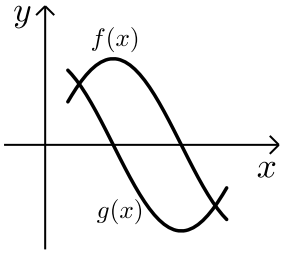
טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3) נתונות הפונקציות: $f(x)=\sin(2x)$, $g(x)=\cos(2x)$

בתחום $\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{2\pi}{3}$ (ראה ציור).



א. מצא את שיעורי ה-x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות בתחום הנתון.

ב. העבירו אנך לציר ה-x דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-x בתחום הנתון.
האנך מחלק לשני שטחים את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות בתחום הנתון.
מצא את השטח שמימין לאנך.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\ln(ax-2)}{ax-2}$, a הוא פרמטר גדול מאפס.

א. הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה.
הישר $x=2$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה.

ב. מצא את הערך של a.
הצב את הערך של a שמצאת, וענה על סעיף ג.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ii. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

iii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{2x-1}-4x$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
תוכל להשאיר ln בתשובתך.

ii. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.
תוכל להשאיר e בתשובתך.

iii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.

ג. העבירו משיק לפונקציה $f(x)$ בנקודת הקיצון שלה.
מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק, על ידי ציר ה- y, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הישר $x=2$.

תשובות סופיות:

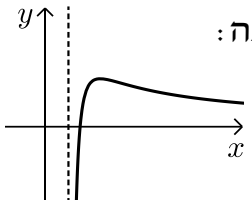
1) א. 30 איברים ב. 17 איברים

2) א. OC = 5.01 ס"מ ב. DC = 3.59 ס"מ ג. 4.84 ס"מ

3) א. $x=\frac{5\pi}{8}$, $x=\frac{\pi}{8}$ ב. 1.21 יח"ר

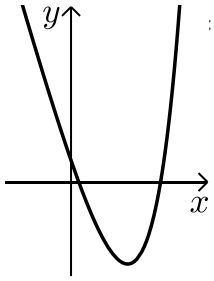
4) א. $x>\frac{2}{a}$ ב. $a=1$ ג. (i). $\max(4.71,0.37)$

ג. (ii). $(3,0)$ ג. (iii). להלן סקיצה:



5) א. כל x ב. (i). $\min(0.846,-1.386)$ ב. (ii). $(0,0.37)$

ב. (iii). להלן סקיצה:



ג. 4.63 יח"ר