

פתרון בגרויות במתמטיקה לשאלון 482

פרק 13

פתרון בידאו של בחינות 2012

1	מועד חורף
4	קיץ מועד א
7	קיץ מועד ב

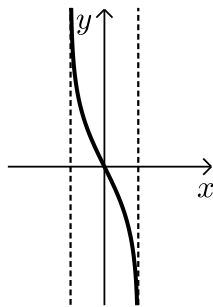
בגרות חורף 2012:

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב (50 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- (1) שני רוכבי אופנוע נמצאים במרחק 1110 ק"מ זה מזה, ורוכבים זה לקראת זה. בשעה הראשונה עבר הרוכב הראשון מרחק של 50 ק"מ, ובכל שעה נוספת עבר 5 ק"מ יותר מהמרחק שעבר בשעה הקודמת. הרוכב השני יצא לדרך 3 שעות אחרי הרוכב הראשון. בשעה הראשונה הוא עבר 90 ק"מ, ובכל שעה נוספת עבר 4 ק"מ פחות מהמרחק שעבר בשעה הקודמת. חשב כעבור כמה שעות מרגע היציאה של הרוכב הראשון ייפגשו שני הרוכבים.



(2) נתונה הפונקציה $f(x) = \log_{\frac{1}{e}}(1+x) - \log_{\frac{1}{e}}(1-x)$ (ראה ציור).

א. מצא את תחום ההגדרה של פונקציה $f(x)$.

ב. הראה כי $f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

בנקודה A הנמצאת ברביע השני, ומעבירים ישר המשיק לגרף

הפונקציה בנקודה B הנמצאת ברביע הרביעי.

נתון כי כל אחד משיפועי המשיקים הוא: $-\frac{8}{3}$.

מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.

ii. דרך הנקודה A העבירו מקביל לציר ה-x, ודרך הנקודה B העבירו מקביל לציר ה-x. היעזר בחוקי הלוגריתמים (בלי להשתמש במחשבון), והראה כי המרחק בין המקבילים הוא $2\ln 3$.

ד. היעזר בגרף של הפונקציה $f(x)$, וקבע אם בתחום ההגדרה של $f(x)$

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא תמיד שלילית, תמיד חיובית או לפעמים שלילית ולפעמים חיובית. נמק.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה (50 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 3-4.

שים לב! אם תענה על שתי השאלות, תיבדקנה רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(3) הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x מקיימת:

$$f(x) \geq 0 \text{ לכל } x$$

$$f(0) = 0 \text{ ואין יותר נקודות שבהן } f(x) = 0$$

$$f(x) \text{ עולה בתחומים } x > 0, x < -\ln 3$$

$$f(x) \text{ יורדת בתחום } -\ln 3 < x < 0$$

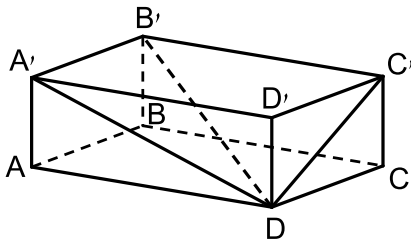
א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, וציין בה את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון.

נתון גם: $f(x) = e^{3x} - 2e^{ax} + e^x$, הוא פרמטר a .

ב. היעזר בנקודות המינימום של הפונקציה $f(x)$, ומצא את ערך הפרמטר a .

ג. דרך נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ העבירו אנך לציר ה- x .

הצב $a = 2$, ומצא את השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .



(4) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$

אורך האלכסון $B'D$ הוא a .

האלכסון $B'D$ יוצר זווית של 60°

עם המקצוע $A'B'$,

ויוצר זווית של 50° עם הפאה $DCC'D'$.

א. הבע באמצעות a את האורך:

i. של הצלע $A'B'$.

ii. של הצלע $B'C'$.

iii. של האלכסון BD .

ב. הבע באמצעות a את נפח התיבה $ABCD A'B'C'D'$.

תשובות סופיות:

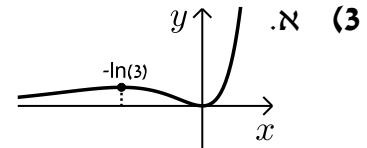
9 (1)

א. $-1 < x < 1$ (2)

ב. הוכחה. ג. (i) $x_B = \frac{1}{2}$, $x_A = -\frac{1}{2}$

ד. פונקציית נגזרת תמיד שלילית. ג. (ii) הוכחה.

ב. 2 ג. $\frac{8}{81}$



א. (i) $0.5a$ (4) א. (ii) $0.76a$ א. (iii) $0.91a$ ב. $0.15a^3$

בגרות קיץ 2012 מועד א':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(1) נתונה סדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $\begin{cases} a_1 = k \\ a_{n+1} = 3a_n - 8 \end{cases}$, $(k \neq 4)$.

b_n היא סדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $b_n = 2a_n - 8$.

א. הראה כי b_n היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי $b_5 = 324$. מצא את הערך של k .

ג. נתון גם כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 120, 13.

מצא את n .

(2) בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציה $f(x)$, ומוצג הישר $y = -x + 4$.

הישר משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = -1$.

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = a - e^{-x}$.

a הוא פרמטר.

א. מצא את הערך של a .

בתשובתך רצוי להשאיר e .

הצב את הערך של a , וענה על הסעיפים ב-ג.

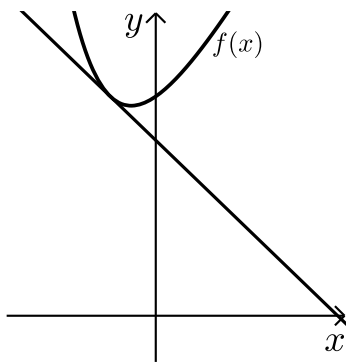
ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את שיעורי ה- y של נקודת ההשקה.

ii. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,

על ידי הישר הנתון ועל ידי ציר ה- y (השטח המקווקו בציור).



פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות

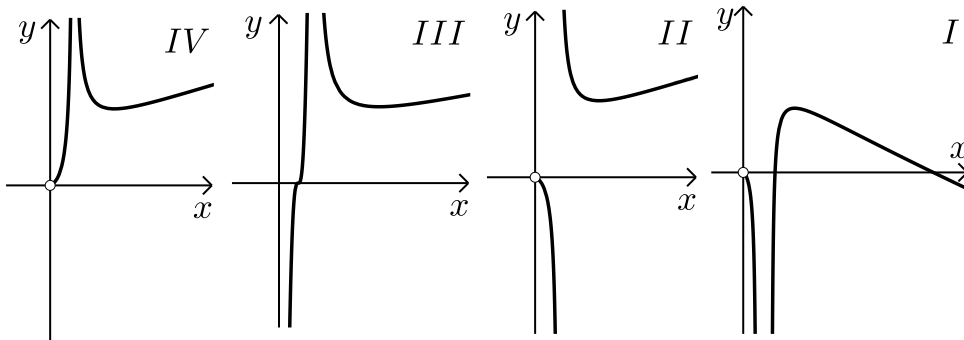
טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

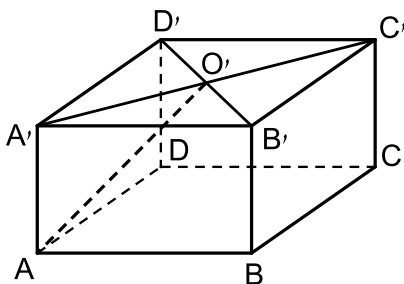
3 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{\ln(2x)}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מבין הגרפים IV-I שלפניך איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$? נמק.



ה. הסבר מדוע עבור $x > \frac{e}{2}$ מתקיים $f(x) > e$.

- 4 נתונה תיבה ABCDA'B'C'D' שבסיסה הוא ריבוע. אלכסוני הבסיס A'B'C'D' נפגשים בנקודה O' (ראה ציור). נתון: אורך צלע הבסיס הוא a, הזווית בין AO' לבסיס ABCD היא 42° .



- א. הבע באמצעות a את נפח התיבה.
- ב. חשב את הזווית בין אלכסון התיבה ובין בסיס התיבה.

תשובות סופיות:

- (1) א. הוכחה. ב. $k=6$ ג. $n=8$
- (2) א. $a=e-1$ ב. (i) $y=5$ ב. (ii) $f(x)=ex-x+e^{-x}+4$
- ג. $\frac{e}{2}-1$
- (3) א. $x > \frac{1}{2}$ או $0 < x < \frac{1}{2}$ ב. $\left(\frac{e}{2}, e\right)$
- ג. ירידה: $\frac{1}{2} < x < \frac{e}{2}$ או $0 < x < \frac{1}{2}$ עלייה: $x > \frac{e}{2}$ ד. איור 2 ה. הוכחה
- (4) א. $0.636a^3$ ב. 24.2°

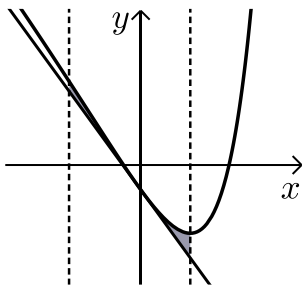
בגרות קיץ 2012 מועד ב':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- (1) כמות של 1000 גרם חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. כעבור מספר שנים נותרו 250 גרם מהחומר. כעבור עוד 4 שנים נותרו 200 גרם מהחומר. מצא כעבור כמה שנים נותרו 250 גרם מהחומר הרדיואקטיבי.



(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x - 2x$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=0$, והעבירו אנך לציר ה- x דרך נקודת המינימום של הפונקציה (ראה ציור).

- מצא את משוואת המשיק.
- מצא את משוואת האנך.
- מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק, על ידי האנך ועל ידי הישר $x = -1$ (השטח המסומן בציור).

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות

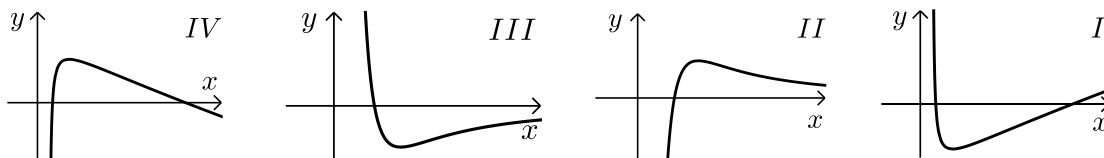
טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

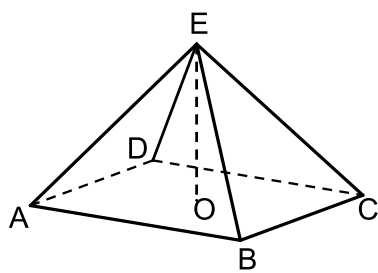
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln x}{x^2}$, a הוא פרמטר שונה מאפס.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $f(x) = 0$ הוא 3.
 מצא את הערך של a .
 הצב $a = 3$ וענה על סעיפים ג-ה:
 ג. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
 ד. לפניך הגרפים I, II, III, IV. איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$? נמק.



ה. האם יש פתרון למשוואה $1 = \frac{3 \ln x}{x^2}$? נמק.



- 4 נתונה פירמידה ישרה EABCD שבסיסה ABCD הוא מלבן (ראה ציור). הזווית בין מקצוע צדדי של הפירמידה לבסיס היא 30° .
 הזווית AOB בין אלכסוני הבסיס היא 120° .
 גובה הפירמידה הוא 10 ס"מ.
 א. חשב את אורך המקצוע BC.
 ב. חשב את הזווית בין הגובה ל-BC בפאה EBC ובין בסיס הפירמידה.

תשובות סופיות:

- | | | | |
|---------------------------|------------------|--------------------|-----------------|
| ג. 0.181 יח"ר | ב. $x = \ln 2$ | א. $y = -2x - 0.5$ | 1) 24.85 שנים. |
| ג. $\max \sqrt{e}, 0.552$ | ב. $a = 3$ | א. $x > 0$ | 2) א. 2 |
| | ה. לא | ד. ציור 2 | 3) א. 17.32 ס"מ |
| | ב. 33.69° | | 4) א. 17.32 ס"מ |