

# פתרון בגרויות במתמטיקה לשאלון 482

פרק 14

## פתרון בידאו של בחינות 2012

|   |       |            |
|---|-------|------------|
| 1 | ..... | מועד חורף  |
| 4 | ..... | קיץ מועד א |
| 7 | ..... | קיץ מועד ב |

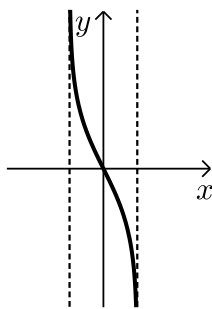
## בגרות חורף 2012:

### פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב (50 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- (1) שני רוכבי אופנוע נמצאים במרחק 1110 ק"מ זה מזה, ורוכבים זה לקראת זה. בשעה הראשונה עבר הרוכב הראשון מרחק של 50 ק"מ, ובכל שעה נוספת עבר 5 ק"מ יותר מהמרחק שעבר בשעה הקודמת. הרוכב השני יצא לדרך 3 שעות אחרי הרוכב הראשון. בשעה הראשונה הוא עבר 90 ק"מ, ובכל שעה נוספת עבר 4 ק"מ פחות מהמרחק שעבר בשעה הקודמת. חשב כעבור כמה שעות מרגע היציאה של הרוכב הראשון ייפגשו שני הרוכבים.



(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = \log_{\frac{1}{e}}(1+x) - \log_{\frac{1}{e}}(1-x)$  (ראה ציור).

א. מצא את תחום ההגדרה של פונקציה  $f(x)$ .

ב. הראה כי  $f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ .

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$ .

בנקודה A הנמצאת ברביע השני, ומעבירים ישר המשיק לגרף

הפונקציה בנקודה B הנמצאת ברביע הרביעי.

נתון כי כל אחד משיפועי המשיקים הוא:  $-\frac{8}{3}$ .

מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.

ii. דרך הנקודה A העבירו מקביל לציר ה-x, ודרך הנקודה B העבירו מקביל לציר ה-x. היעזר בחוקי הלוגריתמים (בלי להשתמש במחשבון), והראה כי המרחק בין המקבילים הוא  $2\ln 3$ .

ד. היעזר בגרף של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע אם בתחום ההגדרה של  $f(x)$

פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  היא תמיד שלילית, תמיד חיובית או לפעמים שלילית ולפעמים חיובית. נמק.

**פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה (50 נקודות)**

ענה על אחת מהשאלות 3-4.

שים לב! אם תענה על שתי השאלות, תיבדקנה רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

**(3) הפונקציה  $f(x)$  המוגדרת לכל  $x$  מקיימת:**

$$f(x) \geq 0 \text{ לכל } x$$

$$f(0) = 0 \text{ ואין יותר נקודות שבהן } f(x) = 0$$

$$f(x) \text{ עולה בתחומים } x > 0, x < -\ln 3$$

$$f(x) \text{ יורדת בתחום } -\ln 3 < x < 0$$

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ , וציין בה את שיעורי ה- $x$

של נקודות הקיצון.

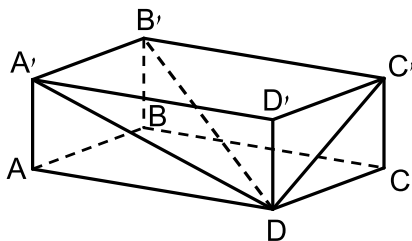
נתון גם:  $f(x) = e^{3x} - 2e^{ax} + e^x$ ,  $a$  הוא פרמטר.

ב. היעזר בנקודות המינימום של הפונקציה  $f(x)$ , ומצא את ערך הפרמטר  $a$ .

ג. דרך נקודת המקסימום של הפונקציה  $f(x)$  העבירו אנך לציר ה- $x$ .

הצב  $a = 2$ , ומצא את השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$

ועל ידי ציר ה- $x$ .



**(4) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$**

אורך האלכסון  $B'D$  הוא  $a$ .

האלכסון  $B'D$  יוצר זווית של  $60^\circ$

עם המקצוע  $A'B'$ ,

ויוצר זווית של  $50^\circ$  עם הפאה  $DCC'D'$ .

א. הבע באמצעות  $a$  את האורך:

i. של הצלע  $A'B'$ .

ii. של הצלע  $B'C'$ .

iii. של האלכסון  $BD$ .

ב. הבע באמצעות  $a$  את נפח התיבה  $ABCD A'B'C'D'$ .

תשובות סופיות:

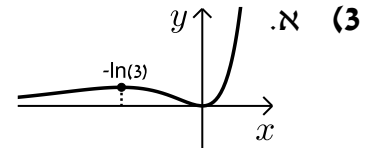
(1) 9

(2) א.  $-1 < x < 1$

ב. הוכחה. ג. (i).  $x_B = \frac{1}{2}$ ,  $x_A = -\frac{1}{2}$

ד. פונקציית נגזרת תמיד שלילית. ג. (ii). הוכחה.

ב. 2 ג.  $\frac{8}{81}$



(4) א. (i).  $0.5a$  א. (ii).  $0.76a$  א. (iii).  $0.91a$  ב.  $0.15a^3$

## בגרות קיץ 2012 מועד א':

**פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ( $33\frac{1}{3}$  נקודות)**

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(1) נתונה סדרה המוגדרת לכל  $n$  טבעי על ידי הכלל:  $\begin{cases} a_1 = k \\ a_{n+1} = 3a_n - 8 \end{cases}$ ,  $(k \neq 4)$ .

$b_n$  היא סדרה המוגדרת לכל  $n$  טבעי על ידי הכלל:  $b_n = 2a_n - 8$ .

א. הראה כי  $b_n$  היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי  $b_5 = 324$ . מצא את הערך של  $k$ .

ג. נתון גם כי סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$  הוא 120, 13.

מצא את  $n$ .

(2) בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציה  $f(x)$ , ומוצג הישר  $y = -x + 4$ .

הישר משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = -1$ .

הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = a - e^{-x}$ .

$a$  הוא פרמטר.

א. מצא את הערך של  $a$ .

בתשובתך רצוי להשאיר  $e$ .

הצב את הערך של  $a$ , וענה על הסעיפים ב-ג.

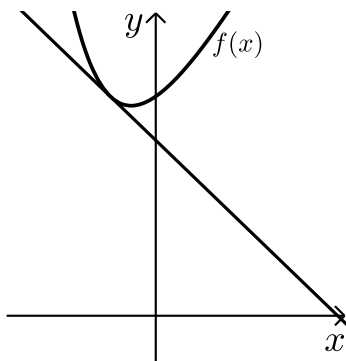
ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את שיעורי ה- $y$  של נקודת ההשקה.

ii. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

על ידי הישר הנתון ועל ידי ציר ה- $y$  (השטח המקווקו בציור).



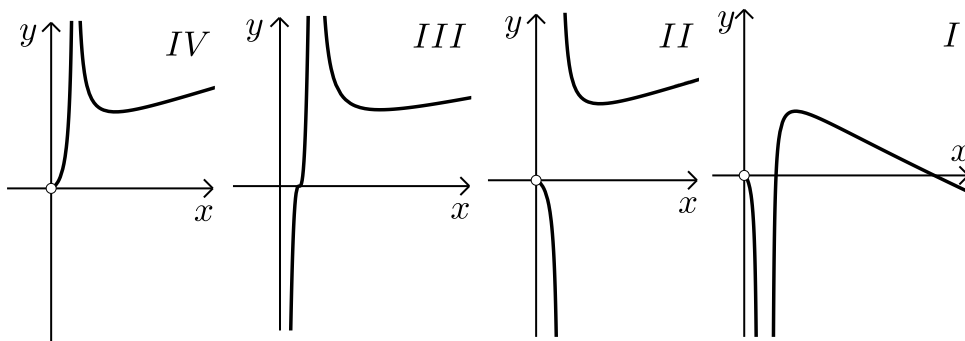
**פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה (  $66\frac{2}{3}$  נקודות)**

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

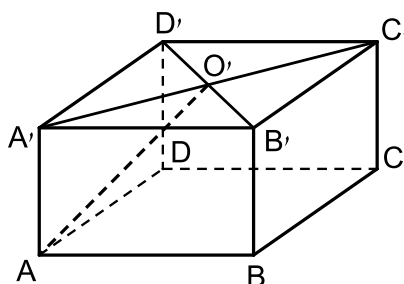
(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2x}{\ln(2x)}$ .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מבין הגרפים IV-I שלפניך איזה גרף הוא של הפונקציה  $f(x)$ ? נמק.



ה. הסבר מדוע עבור  $x > \frac{e}{2}$  מתקיים  $f(x) > e$ .

- (4) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה הוא ריבוע. אלכסוני הבסיס  $A'B'C'D'$  נפגשים בנקודה  $O'$  (ראה ציור). נתון: אורך צלע הבסיס הוא  $a$ , הזווית בין  $AO'$  לבסיס  $ABCD$  היא  $42^\circ$ .



- הבע באמצעות  $a$  את נפח התיבה.
- חשב את הזווית בין אלכסון התיבה ובין בסיס התיבה.

**תשובות סופיות:**

- (1) א. הוכחה.      ב.  $k=6$       ג.  $n=8$
- (2) א.  $a=e-1$       ב. (i)  $y=5$       ב. (ii)  $f(x)=ex-x+e^{-x}+4$
- ג.  $\frac{e}{2}-1$
- (3) א.  $x > \frac{1}{2}$  או  $0 < x < \frac{1}{2}$       ב.  $\left(\frac{e}{2}, e\right)$
- ג. ירידה:  $\frac{1}{2} < x < \frac{e}{2}$  או  $0 < x < \frac{1}{2}$  עלייה:  $x > \frac{e}{2}$       ד. איור 2      ה. הוכחה
- (4) א.  $0.636a^3$       ב.  $24.2^\circ$

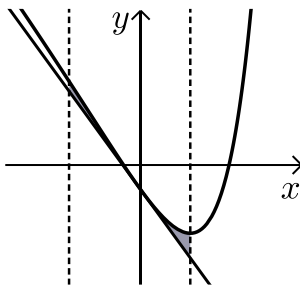
## בגרות קיץ 2012 מועד ב':

**פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ( $33\frac{1}{3}$  נקודות)**

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- (1) כמות של 1000 גרם חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. כעבור מספר שנים נותרו 250 גרם מהחומר. כעבור עוד 4 שנים נותרו 200 גרם מהחומר. מצא כעבור כמה שנים נותרו 250 גרם מהחומר הרדיואקטיבי.



(2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x - 2x$ .

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=0$ , והעבירו אנך לציר ה- $x$  דרך נקודת המינימום של הפונקציה (ראה ציור).

- מצא את משוואת המשיק.
- מצא את משוואת האנך.
- מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק, על ידי האנך ועל ידי הישר  $x=-1$  (השטח המסומן בציור).

**פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות**

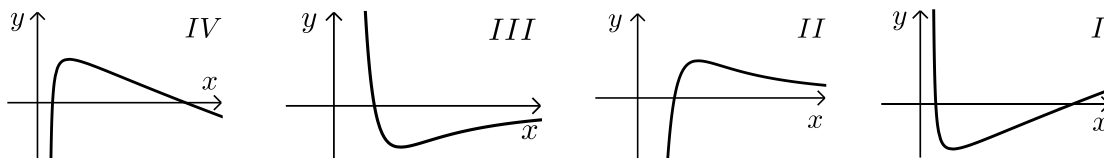
**טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה (  $66\frac{2}{3}$  נקודות)**

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

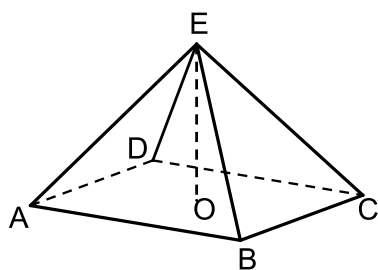
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

**(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln x}{x^2}$ ,  $a$  הוא פרמטר שונה מאפס.**

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $f(x) = 0$  הוא 3. מצא את הערך של  $a$ .
- הצב  $a = 3$  וענה על סעיפים ג-ה:
- מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
- לפניך הגרפים I, II, III, IV. איזה גרף הוא של הפונקציה  $f(x)$ ? נמק.



ה. האם יש פתרון למשוואה  $1 = \frac{3 \ln x}{x^2}$ ? נמק.



**(4) נתונה פירמידה ישרה EABCD שבסיסה ABCD**

הוא מלבן (ראה ציור). הזווית בין מקצוע צדדי של

הפירמידה לבסיס היא  $30^\circ$ .

הזווית AOB בין אלכסוני הבסיס היא  $120^\circ$ .

גובה הפירמידה הוא 10 ס"מ.

א. חשב את אורך המקצוע BC.

ב. חשב את הזווית בין הגובה ל-BC בפאה EBC ובין בסיס הפירמידה.

### תשובות סופיות:

- |                    |                  |                           |                        |
|--------------------|------------------|---------------------------|------------------------|
| א. $y = -2x - 0.5$ | ב. $x = \ln 2$   | ג. $0.181$ יח"ר           | (1) 24.85 שנים.        |
| א. $x > 0$         | ב. $a = 3$       | ג. $\max \sqrt{e}, 0.552$ | (2) א. $y = -2x - 0.5$ |
| ד. ציור 2          | ה. לא            |                           | (3) א. $x > 0$         |
| א. $17.32$ ס"מ     | ב. $33.69^\circ$ |                           | (4) א. $17.32$ ס"מ     |