שאלון 572

פרק 25

פתרון בוידאו של בחינות שנת 2022

קיץ מועד א 1
קיץ מועד ב 6

בגרות קיץ 2022 מועד א':

יש לענות על שלוש מן השאלות 1–5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.

מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא: $(x-a)^2+y^2=r^2$,

a הוא פרמטר חיובי.

מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא: $(x-15)^2+y^2=R^2$.

אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9, והיחס בין אורכי הרדיוסים של המעגלים הוא: $1:2$, $r<R$.

א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו M.

נתון כי: $a<15$.

ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.

ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.

ד. הישר: $mx-y+n=0$ הוא משיק משותף לשני המעגלים.

מצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).

נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ.

משוואות המעגלים הן: $(x-t)^2+y^2=r^2$; $(x-k)^2+y^2=R^2$, t ו- k הם פרמטרים.

ערכי הרדיוסים r ו- R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.

ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים גם למעגלים האלה? אם כן – מצאו את t ואת k. אם לא - נמקו.

2) נתונות ארבע נקודות הנמצאות באותו המישור:

$A(4,p,-1)$, $B(7,5,5)$, $C(1,-1,2)$, $D(-2,5,-4)$ הוא פרמטר.

א. מצאו את משוואת המישור ABCD.

ב. חשבו את ערך הפרמטר p.

ג. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא ריבוע.

הנקודה S היא קודקוד של פירמידה SABCD שבסיסה ABCD.

המקצוע SC מונח על הישר: $x=(0,-4,1)+t(1,3,1)$.

נתון כי נפח הפירמידה הוא 81.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה S (שתי אפשרויות).

נתון מישור נוסף π המאונך למקצוע SC.

ה. מצאו את הזווית שבין המישור ABCD ובין המישור π.

3) נתונה המשוואה: $z^2+z\bar{z}=z+2\bar{z}+9+7i$, z הוא מספר מרוכב.

z_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

א. מצאו את משוואת המעגל.

חוסמים במעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר z_1.

ב. חשבו את שטח הריבוע.

ג. מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.

מכפילים ב- $r_1\cdot(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב- $r_2\cdot(\cos(\alpha+60°)+i\sin(\alpha+60°))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי. הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.

נתון: r_1 ו- r_2 חיוביים, $r_1\neq r_2$.

ד. מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את התשובה.

נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי 1.2 משטח הריבוע בסעיף ב.

ה. חשבו את $r_1\cdot r_2$.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=xe^x-2e^x+1$ המוגדרת לכל x.

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- y (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1-e^x}{e^x-x}$, המוגדרת לכל x.

ב. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לציר ה- y.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) הוכיחו כי: $g'(x)=\frac{f(x)}{(e^x-x)^2}$.

ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ומצאו כמה נקודות מקסימום וכמה נקודות מינימום יש לפונקציה $g(x)$. נמקו את התשובה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר: $x=-1$.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+\ln(x^2-15)$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.

נתונה הפונקציה: $g(x)=e^{f(x)}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.

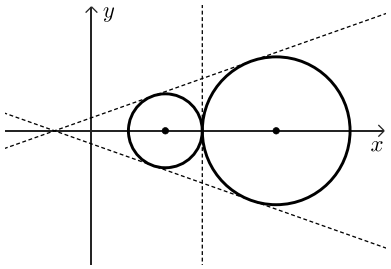
ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה: $y=f'(x)\cdot g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים: $x=-6$ ו- $x=-5$.

תשובות סופיות:

1) א. משוואת המעגל שמרכזו N: $(x-15)^2+y^2=36$, משוואות המעגל שמרכזו M:

$(x-24)^2+y^2=9$, $(x-6)^2+y^2=9$

ב. להלן סקיצה:



ג. $x=9$.

ד. $n_2=-\frac{3}{\sqrt{8}}$, $m_2=-\frac{1}{\sqrt{8}}$, $n_1=\frac{3}{\sqrt{8}}$, $m_1=\frac{1}{\sqrt{8}}$.

ה. $k=-21$, $t=-21$.

2) א. $2x-y-2z+1=0$ ב. $p=11$ ג. הוכחה.

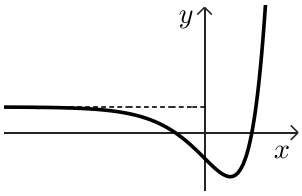
ד. $(-2,-10,-1)$, $(4,8,5)$, $72.5°$.

3) א. $x^2+y^2=10$ ב. 20. ג. $(1,-3)$, $(-1,3)$, $(-3,-1)$.

ד. מקבילית. ה. 2.4.

4) א. (1) $y=1:\ x\to\infty$ א. (2) $(0,-1)$ א. (3) עלייה: $x>1$, ירידה: $x<1$.

א. (4) להלן סקיצה:

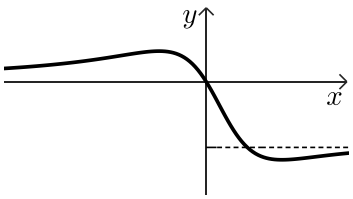


ב. (1) $y=0:\ x\to-\infty$, $y=-1:\ x\to\infty$.

ב. (2) $(0,0)$ ב. (3) הוכחה.

ג. נק' מינימום אחת, נק' מקסימום אחת.

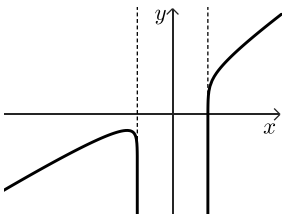
ד. להלן סקיצה:



ה. $\ln\frac{e+1}{e}\approx 0.31$.

5) א. (1) $x>\sqrt{15}$, $x<-\sqrt{15}$ א. (2) $x=\sqrt{15}$, $x=-\sqrt{15}$.

א. (3) $\max(-5,-2.7)$ א. (4) להלן סקיצה:

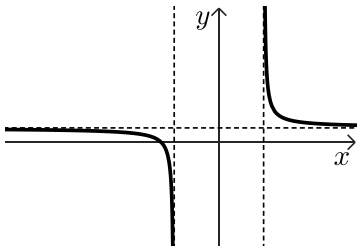


ב. (1) $x>\sqrt{15}$, $x<-\sqrt{15}$.

ב. (2) $y=1$, $x=\sqrt{15}$, $x=-\sqrt{15}$.

ב. (3) $(-5,0)$.

ב. (4) להלן סקיצה:



ג. (1) $\max(-5,0.067)$.

ג. (2) עלייה: $x>\sqrt{15}$, $x<-5$, ירידה: $-5<x<-\sqrt{15}$. ד. 0.015.

בגרות קיץ 2022 מועד ב':

יש לענות על שלוש מן השאלות 1–5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) נתונות הנקודות $A(-5,3)$ ו-$B(0,-2)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה- x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו.

נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M.

ג. מהי משוואת האליפסה?

נסמן ב-F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה- x עובר במוקד השמאלי של האליפסה. הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו-T, ואת המעגל M בנקודות K ו-L.

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF.

2) נתונה פירמידה OABC שבסיסה משולש ABC.

נסמן: $\overrightarrow{OA}=\underline{u}$, $\overrightarrow{OB}=\underline{v}$, $\overrightarrow{OC}=\underline{w}$.

נתון: $\sphericalangle AOB=\sphericalangle BOC=\sphericalangle COA=90°$, $|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|$.

הנקודה H מקיימת: $\overrightarrow{OH}=t\underline{u}+s\underline{v}+k\underline{w}$. t, s ו- k הם פרמטרים.

נתון כי $\overrightarrow{OH}$ מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

א. הוכיחו כי: $t=s=k$.

הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

ב. הוכיחו כי: $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}$, והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC.

ג. הביעו באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, את הווקטור $\overrightarrow{OP}$ שבעבורו נפח הפירמידה PABC כפול מנפח הפירמידה OABC (שתי אפשרויות).

ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה- x , הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה- y , והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה- z . נתון: $|\underline{u}| = a$.

ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP.

ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC.

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $20\frac{5}{6}$. חשבו את a .

3) המספר: $z = R(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

א. מצאו את α .

נתון: $|2iz| + \left|\frac{\bar{z}}{i}\right| - \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 8$.

ב. מצאו את R .

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

קודקודי הבסיס B ו-C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו- $\frac{\bar{z}}{z}$.

קודקוד הראש A מתאים למספר $z+k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k ?

(2) חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

א. (1) מצאו את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,
וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה- x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a.

הציבו $a=1$, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ $\left(g'(x)=f(x)\right)$.

ד. (1) מהו תחום העלייה של הפונקציה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב-B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקציה $g(x)$ הוא הגבוה
מבין כל נקודות הפיתול שלה. נתון כי שיעור ה- y של הנקודה B הוא $\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

5) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקציה מוגדרת לכל x ורציפה, הפונקציה היא אי-זוגית, הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה, ולפונקציה יש נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם: $(-1,-a)$, a הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x)=\ln(f(x))$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $h(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקציה $h(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

נתון: $f(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$.

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x)=f(x)$ וגם: $g(0)=0$.

ג. (1) מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל: $\int_{-5}^{t} g(x)dx$, $t>-5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים: $2\cdot\int_{-5}^{t} g(x)dx=\int_{-5}^{5} g(x)dx$? נמקו.

תשובות סופיות:

1) א. $x-y+3=0$ ב. $M(0,3)\ ,\ R=5$ ג. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ד. $\frac{5}{3}$.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

ג. $\overrightarrow{OP_2}=-\frac{1}{3}\underline{u}-\frac{1}{3}\underline{v}-\frac{1}{3}\underline{w}\ ,\ \overrightarrow{OP_1}=\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$.

ד. $\ell=t(1,1,1)$ ה. $x+y+z-a=0$ ו. $a=5$.

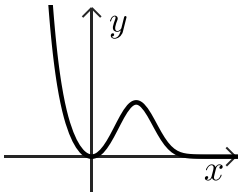
3) א. $\alpha=240°$ ב. $R=3$ ג. הוכחה.

ד. (1) $k=\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ד. (2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

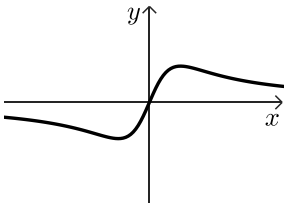
4) א. (1) $x\neq 0$ א. (2) מינימום: $x=0$, מקסימום: $x=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\approx 0.87$.

ב. $a=1$ ג. להלן סקיצה: ד. (1) כל x ד. (2) 2 נקודות.

ה. $g(x)=\frac{e-e^{1-x^3}}{3}$.

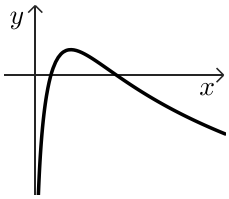


5) א. להלן סקיצה:



ב. (1) $x>0$ ב. (2) $x=0$ ב. (3) $a>1$.

ב. להלן סקיצה:



ג. (1) $g(x)=2\ln(1+x^2)$.

ג. (2) זוגית. ד. $t=0$.