

שאלון 572

פרק 25

פתרון בידאו של בחינות שנת 2022

1 קיץ מועד א
6 קיץ מועד ב

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים



- (1) נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.
 מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא: $(x - a)^2 + y^2 = r^2$,
 a הוא פרמטר חיובי.
 מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא: $(x - 15)^2 + y^2 = R^2$.
 אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9, והיחס בין אורכי הרדיוסים של המעגלים הוא: $1:2$, $r < R$.
 א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו M.
 נתון כי: $a < 15$.
 ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.
 ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.
 ד. הישר: $mx - y + n = 0$ הוא משיק משותף לשני המעגלים.
 מצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).
 נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ.
 משוואות המעגלים הן: $(x - t)^2 + y^2 = r^2$; $(x - k)^2 + y^2 = R^2$, ו- k הם פרמטרים.
 ערכי הרדיוסים r ו-R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.
 ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים גם למעגלים האלה? אם כן – מצאו את t ואת k. אם לא – נמקו.



- (2) נתונות ארבע נקודות הנמצאות באותו המישור:
- $A(4, p, -1)$, $B(7, 5, 5)$, $C(1, -1, 2)$, $D(-2, 5, -4)$, p הוא פרמטר.
- מצאו את משוואת המישור ABCD.
 - חשבו את ערך הפרמטר p .
 - הוכיחו כי המרובע ABCD הוא ריבוע.
- הנקודה S היא קודקוד של פירמידה SABCD שבסיסה ABCD. המקצוע SC מונח על הישר: $x = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$.
- נתון כי נפח הפירמידה הוא 81.
 - מצאו את שיעורי הנקודה S (שתי אפשרויות).
 - נתון מישור נוסף π המאונך למקצוע SC.
 - מצאו את הזווית שבין המישור ABCD ובין המישור π .



- (3) נתונה המשוואה: $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$, z הוא מספר מרוכב.
- z_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.
- מצאו את משוואת המעגל.
 - חוסמים במעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר z_1 .
 - חשבו את שטח הריבוע.
 - מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.
- מכפילים ב- $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב- $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 60^\circ) + i \sin(\alpha + 60^\circ))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי. הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.
- נתון: r_1 ו- r_2 חיוביים, $r_1 \neq r_2$.
- מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את התשובה.
 - נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי 1.2 משטח הריבוע בסעיף ב.
 - חשבו את $r_1 \cdot r_2$.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



4 נתונה הפונקציה: $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$ המוגדרת לכל x .

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- y (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1-e^x}{e^x-x}$, המוגדרת לכל x .

ב. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לציר ה- y .

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) הוכיחו כי: $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x-x)^2}$.

ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ומצאו כמה נקודות מקסימום וכמה נקודות מינימום יש לפונקציה $g(x)$. נמקו את התשובה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר: $x = -1$.



5 נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \ln(x^2 - 15)$

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים

(אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים

(אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.

נתונה הפונקציה: $g(x) = e^{f(x)}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.

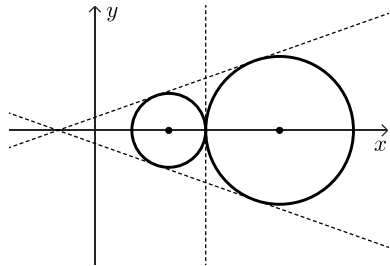
ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה: $y = f'(x) \cdot g(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים: $x = -6$ ו- $x = -5$.

תשובות סופיות:

1 א. משוואת המעגל שמרכזו N: $(x-15)^2 + y^2 = 36$, משוואת המעגל שמרכזו M:

ב. להלן סקיצה:



$$(x-6)^2 + y^2 = 9, (x-24)^2 + y^2 = 9$$

ג. $x = 9$.

ד. $m_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}, n_1 = \frac{3}{\sqrt{8}}, m_2 = -\frac{1}{\sqrt{8}}, n_2 = -\frac{3}{\sqrt{8}}$.

ה. $t = -21, k = -21$.

2 א. $2x - y - 2z + 1 = 0$ ב. $p = 11$ ג. הוכחה.

ד. $(-2, -10, -1), (4, 8, 5), 72.5^\circ$.

3 א. $x^2 + y^2 = 10$ ב. 20 ג. $(-3, -1), (-1, 3), (1, -3)$.

ד. מקבילית. ה. 2.4.

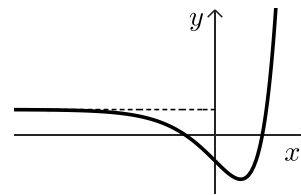
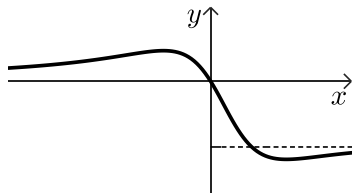
4 א. (1) $y = 1$ $x \rightarrow \infty$ א. (2) $(0, -1)$ א. (3) עלייה: $x > 1$, ירידה: $x < 1$.

א. (4) להלן סקיצה: ב. (1) $x \rightarrow -\infty: y = 0, x \rightarrow \infty: y = -1$.

ב. (2) $(0, 0)$ ב. (3) הוכחה.

ג. נק' מינימום אחת, נק' מקסימום אחת.

ד. להלן סקיצה:



ה. $\ln \frac{e+1}{e} \approx 0.31$.

א. (2) $x = \sqrt{15}, x = -\sqrt{15}$.

א. (1) $x < -\sqrt{15}, x > \sqrt{15}$ א. (3) $\max(-5, -2.7)$.

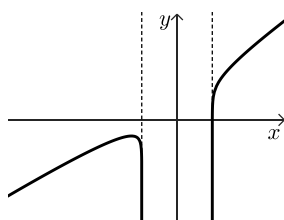
א. (4) להלן סקיצה:

ב. (1) $x < -\sqrt{15}, x > \sqrt{15}$.

ב. (2) $x = -\sqrt{15}, x = \sqrt{15}, y = 1$.

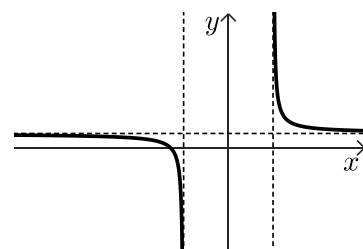
ב. (3) $(-5, 0)$.

ב. (4) להלן סקיצה:



ג. (1) $\max(-5, 0.067)$.

ב. (4) להלן סקיצה:



ג. (2) עלייה: $x > \sqrt{15}, x < -5$, ירידה: $-5 < x < -\sqrt{15}$ ד. 0.015.

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונות הנקודות $A(-5,3)$ ו- $B(0,-2)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.
 נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה- x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.
 ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו.

נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M.
 ג. מהי משוואת האליפסה?

נסמן ב-F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה- x עובר במוקד השמאלי של האליפסה. הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו-T, ואת המעגל M בנקודות K ו-L.

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF.



(2) נתונה פירמידה OABC שבסיסה משולש ABC.

נסמן: $\vec{OA} = \underline{u}$, $\vec{OB} = \underline{v}$, $\vec{OC} = \underline{w}$.

נתון: $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = 90^\circ$.

הנקודה H מקיימת: $\vec{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}$. s , t ו- k הם פרמטרים.

נתון כי \vec{OH} מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

א. הוכיחו כי: $t = s = k$.

הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

ב. הוכיחו כי: $\vec{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$, והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.



- הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC.
- ג. הביעו באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} , את הווקטור \overline{OP} שבעבורו נפח הפירמידה PABC כפול מנפח הפירמידה OABC (שתי אפשרויות).
- ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה-x, הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה-y, והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה-z. נתון: $|\underline{u}| = a$.
- ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP.
- ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC.
- ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $20\frac{5}{6}$. חשבו את a .

3) המספר: $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.



נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

א. מצאו את α .

נתון: $|2iz| + \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$

ב. מצאו את R .

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

קודקודי הבסיס B ו-C מתאימים למספרים: $\frac{\bar{z}}{z}$ ו- $\frac{z}{\bar{z}}$.

קודקוד הראש A מתאים למספר $z + k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k ?

(2) חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

א. (1) מצאו את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה- x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 1$, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ ($g'(x) = f(x)$).

ד. (1) מהו תחום העלייה של הפונקציה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב- B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקציה $g(x)$ הוא הגבוה

מבין כל נקודות הפיתול שלה. נתון כי שיעור ה- y של הנקודה B הוא $\frac{e - \sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקציה $g(x)$.



5 נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקציה מוגדרת לכל x ורציפה,

הפונקציה היא אי-זוגית, הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה, ולפונקציה יש נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם: $(-1, -a)$, a הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = \ln(f(x))$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $h(x)$

המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקציה $h(x)$ חותך

את ציר ה- x בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך

את ציר ה- x בשתי נקודות.

$$\text{נתון: } f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$$

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ וגם: $g(0) = 0$.

ג. (1) מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל: $\int_{-5}^t g(x) dx$, $t > -5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים: $\int_{-5}^t g(x) dx = 2 \cdot \int_{-5}^5 g(x) dx$? נמקו.

תשובות סופיות:

(1) א. $x - y + 3 = 0$ ב. $M(0,3), R = 5$ ג. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ד. $\frac{5}{3}$

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

ג. $\overline{OP_1} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}, \overline{OP_2} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$

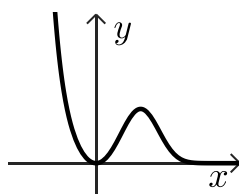
ד. $l = t(1,1,1)$ ה. $x + y + z - a = 0$ ו. $a = 5$

(3) א. $\alpha = 240^\circ$ ב. $R = 3$ ג. הוכחה.

ד. (1) $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ד. (2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(4) א. (1) $x \neq 0$ א. (2) מינימום: $x = 0$, מקסימום: $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx 0.87$

ב. $a = 1$ ג. להלן סקיצה: ד. (1) כל x ד. (2) 2 נקודות.



ה. $g(x) = \frac{e - e^{1-x^3}}{3}$

(5) א. להלן סקיצה: ב. (1) $x > 0$ ב. (2) $x = 0$ ג. (3) $a > 1$

ג. (1) $g(x) = 2\ln(1+x^2)$ ב. להלן סקיצה:

ג. (2) זוגית. ד. $t = 0$

