שאלון 571 לכיתות יא

פרק 40

פתרון בוידאו של בחינות שנת 2022

בגרות חורף 2022 מועד א':

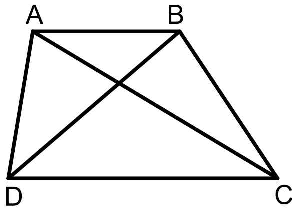
יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. לפניכם טרפז ABCD, $(AB || CD)$.



נתון: שטח המשולש ADC הוא 24 ושטח המשולש ADB הוא 12.

(1) חשבו את היחס בין אורך הבסיס הגדול ובין אורך הבסיס הקטן של הטרפז ABCD.

(2) חשבו את שטח הטרפז ABCD.

ב. (1) בעבור כל n טבעי, הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת את הטענה:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$$

(2) חשבו את המכפלה:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

ג. בעבור כל אחת מן הטענות (1)-(2) שלפניכם, קבעו אם היא נכונה לכל x. נמקו.

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

ד. לפניכם הגרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x.

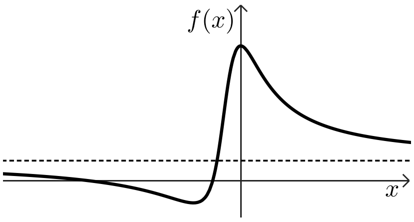
לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אופקית שמשוואתה היא: $y=1$ (ראו סרטוט),

ו-2 נקודות קיצון בדיוק:

נקודת מקסימום $(0,3)$ ונקודת מינימום $(-2,-1)$.

נגדיר את הפונקציה: $g(x)=f(-x)+1$.

גם הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x.



(1) מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$. נמקו.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

(2 נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots$ והפרשה d.

מסמנים ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A, לכל n טבעי.

מגדירים סדרה נוספת, B, שאיבריה הם: $b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3\ ,\ \dots$.

איברי הסדרה B מקיימים: $b_n = S_{n+1} - S_n$ לכל n טבעי.

א. (1) האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמקו.

(2) האם הסדרה B זהה לסדרה A? נמקו.

מסמנים ב- T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B, לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1+b_2)(b_1-b_2)+(b_3+b_4)(b_3-b_4)+\dots+(b_{n-1}+b_n)(b_{n-1}-b_n)}{-d}\ .$$

נתון: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$

$T_5 = -20$.

ג. חשבו את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי-זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי ושלם? נמקו.

(3 בקופסה יש שלוש סוכריות בטעם תות ושתי סוכריות בטעם מנטה.

ליאור מוציא באקראי סוכרייה מן הקופסה. אם הסוכריה היא בטעם מנטה – הוא מחזיר אותה לקופסה, ואם היא בטעם תות – הוא אוכל אותה מייד.

א. ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

(1) חשבו את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.

(2) חשבו את ההסתברות שליאור אכל את הסוכריה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.

ב. ליאור מוציא מן הקופסה n סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

הביעו בעזרת n את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.

ג. ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה.

ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות, באופן המתואר בתחילת השאלה.

חשבו את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה.

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

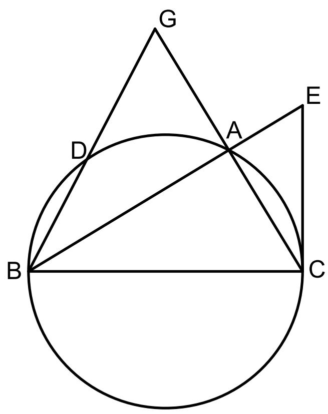
4) משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R (ראו סרטוט).

הצלע BC היא קוטר במעגל.

AG הוא המשך הצלע CA.

הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D.

נתון: $GA = AC$.



א. הוכיחו כי הישר AB חוצה את $\sphericalangle GBC$.

ב. הוכיחו כי $\Delta GBC \sim \Delta GAD$.

נתון כי: $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$.

ג. הביעו באמצעות R את אורך הצלע AC.

דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E.

ד. חשבו פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC.

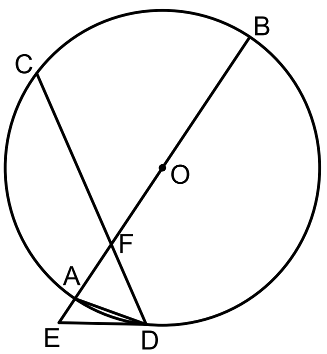
5) AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O.

המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה F.

המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך

הקוטר AB בנקודה E (ראו סרטוט).

נסמן: $\sphericalangle ADE = \alpha$.



א. הראו כי: $\sphericalangle BAD = 90° - \alpha$.

נתון כי: ED = FD.

ב. הביעו באמצעות α את גודל $\sphericalangle CDA$.

ג. הביעו באמצעות α ו- R את שטח המשולש AFD.

ד. (1) הביעו באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

(2) נתון כי: $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3}$. מצאו את α.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{\left(x^3-m\right)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו את תשובותיכם באמצעות m אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f\left(x\right)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f\left(x\right)$ המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה $f\left(x\right)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-1$.

ב. מצאו את הערך של m.

הציבו בפונקציה $f\left(x\right)$ את הערך של m שמצאתם וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f\left(x\right)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

ה. נתונה הפונקציה: $g\left(x\right)=k\cdot f\left(x\right)$, k הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g\left(x\right)$.

(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g\left(x\right)$ מעבירים אנך לציר ה- x.

נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g\left(x\right)$ ועל ידי ציר ה- x הוא 1 (השטח שמימין לאנך). מצאו את הערך של k.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x+2\cdot\sqrt{x^2-2x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את תחום ההגדרה של פונקצית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקצית הנגזרת $f'(x)$.

(4) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה- x .
בתשובתכם דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

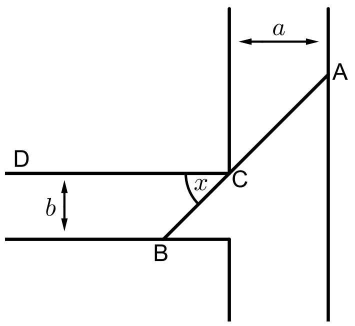
(5) סרטטו סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$, אם ידוע כי לפונקצית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם ייתכן שישר שמשוואתו $y=4x+c$ (c פרמטר) ישיק לגרף הפונקציה $f(x)$?
נמקו.

8) תעלת מים ראשית ברוחב קבוע a מחוברת בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע b .
הנקודה C היא נקודת המפגש בין דופן של התעלה הראשית ובין דופן של התעלה המשנית (ראו סרטוט).



מהנדסת מתכננת סכר ישר, שיוצא מן הנקודה A שבדופן התעלה הראשית, יעבור דרך הנקודה C ויגיע עד הנקודה B שבדופן התעלה המשנית.
הסכר ייצור זווית שגודלה x עם הדופן CD של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.

א. הביעו באמצעות a , b ו- x את אורך הסכר AB.

נתון כי: $a=2b$.

ב. מצאו את x שבעבורו אורך הסכר AB יהיה מינימלי.

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8. מצאו את b .

תשובות סופיות:

1) א. (1) 2:1   א. (2) 36   ב. (1) הוכחה   ב. (2) 50.

ג. (1) הטענה נכונה   ג. (2) הטענה אינה נכונה.

ד. (1) $y=2$ ד. (2) $\max(0,4)$, $\min(2,0)$.

2) א. (1) כן.   א. (2) לא.   ב. הוכחה.   ג. $b_1=-5$, $d=\frac{1}{2}$.

ד. 14 איברים.

3) א. (1) 0.366.   א. (2) 0.32787.   ב. $1-\left(\frac{2}{5}\right)^n$.   ג. 0.0128.

4) א. הוכחה.   ב. הוכחה.   ג. $AC=\frac{1}{2}R$.   ד. $\frac{16}{15}$.

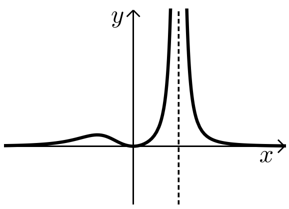
5) א. הוכחה.   ב. 3α.   ג. $\frac{R^2\sin\alpha\sin2\alpha\sin3\alpha}{\cos2\alpha}$.

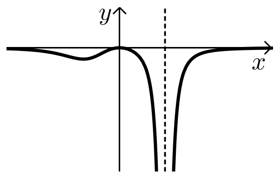
ד. (1) $\frac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}$.   ד. (2) $15°$.

6) א. (1) $x\neq\sqrt[3]{m}$.   א. (2) $x=\sqrt[3]{m}$, $y=0$.   ב. $m=2$.

ג. $\min(0,0)$, $\max\left(-1,\frac{1}{9}\right)$.   ד. להלן סרטוט:

ה. (1) להלן סרטוט: ה. (2). $k=-18$.

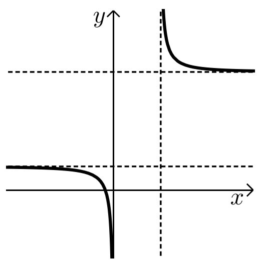




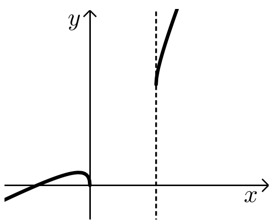
7) א. (1) $x\geq2$ או $x\leq0$.   א. (2) $x>2$ או $x<0$.

א. (3) $x=2$, $x=0$, $y=5$, $y=1$.   א. (4) $(-0.342.0)$.

א. (5) להלן סרטוט: ב. (1) $\max(-0.342,0.764)$, $\min(2,6)$, $\min(0,0)$.



ב. (2) להלן סרטוט: ג. לא.



8) א. $AB=\frac{b}{\sin x}+\frac{a}{\cos x}$.   ב. $x=38.44°$.   ג. $b=1.922$

בגרות חורף 2022 מועד ב':

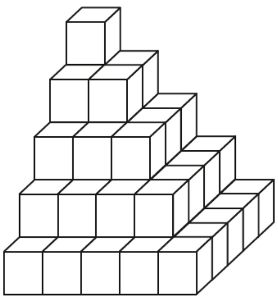
יש לענות על <u>חמש</u> מן השאלות 1–8, על שאלה <u>אחת</u> לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה <u>אחת</u> לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

(1 ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתון מרובע ABCD שבו גודלי הזוויות מהווים סדרה חשבונית עולה.
איברי הסדרה הם: a_1 , a_2 , a_3 , a_4.
הוכיחו כי אם מתקיים: $\measuredangle A = a_1$, $\measuredangle B = a_2$, $\measuredangle C = a_4$, $\measuredangle D = a_3$,
אז אפשר לחסום את המרובע ABCD במעגל.



ב. נתון מגדל קוביות ובו 5 קומות (ראו ציור).
הקומה התחתונה בנויה מ-25 קוביות המסודרות בצורת ריבוע.
הקומה שמעליה בנויה מ-16 קוביות המסודרות בצורת ריבוע.
וכך הלאה עד לקומה העליונה שבה יש קובייה אחת.

(1) כמה קוביות סך הכול דרושות כדי לבנות באותו אופן מגדל שבו 7 קומות?

(2) נתון מגדל ובו 10 קומות הבנוי באותו אופן שבו בנוי המגדל המתואר בתחילת סעיף ב.
כמה קוביות צריך להוסיף למגדל זה, כדי שיהיה בו 100 קומות הבנויות באותו אופן?
פרטו את חישוביכם.

תוכלו להיעזר בנוסחה (לכל n טבעי): $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

ג. נתונה הפונקציה: $f(x)=\left[\cos(x-\pi)+\cos(\pi-x)\right]^2+4(\sin(-x))^2-5$
המוגדרת לכל x.
האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר ה- x ? נמקו את תשובתכם.

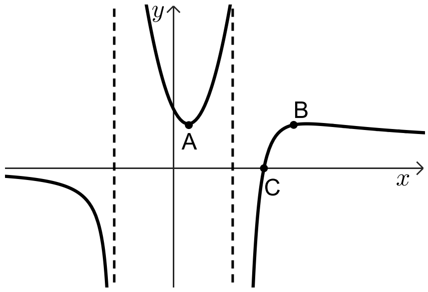
ד. הגרף שלפניכם מתאר את הפונקציה $g(x)$ שתחום ההגדרה שלה הוא: $x \neq 1$, $x \neq -1$.

הישרים: $x=-1$, $x=1$, $y=0$ הם אסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$.

הנקודה $A(0.3,1)$ היא נקודת המינימום היחידה של הפונקציה $g(x)$,

הנקודה $B(3,1)$ היא נקודת המקסימום היחידה של הפונקציה $g(x)$,

והנקודה $C(2,0)$ היא נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x.



(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה: $\frac{1}{g(x)}$.

(2) בכמה נקודות נפגשים הגרף של $g(x)$ והגרף של $\frac{1}{g(x)}$? נמקו את תשובתכם.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם: $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ ומנתה היא q.

כל איברי הסדרה A שונים מאפס.

א. האם הסדרה: $\frac{1}{a_1} , \frac{1}{a_2} , \frac{1}{a_3} , ...$ היא סדרה הנדסית? הוכיחו את תשובתכם.

ב. (1) מסמנים ב- S_n את הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה A (n טבעי).

הוכיחו כי לכל n מתקיים: $\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}$.

(2) נתון: $a_1 = 1$, $q = 3$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה A גדול פי 6561 מן

הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}$. מצאו את n.

הסדרה B מתקבלת מן הסדרה A על ידי הפיכת הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A.

איברי הסדרה B הם: $b_1 , b_2 , b_3 , ...$.

נסמן ב- T_m את הסכום של m האיברים הראשונים של הסדרה B.

נתון כי m הוא מספר טבעי אי-זוגי.

ג. נתונה נוסחה: $\frac{T_m}{b_1 \cdot b_m} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - ... + \frac{1}{a_m}$.

קבעו אם הנוסחה הנתונה נכונה. הוכיחו את תשובתכם.

3) כדי להתקבל ללימודים במכללה מסוימת יש לעבור מבחן קבלה.
כל השאלות במבחן הן מתוך מאגר שיש בו n שאלות שונות. לנבחנים יש גישה למאגר והם יכולים להתכונן למבחן באמצעותו. ביום הבחינה, כל נבחן מוציא באקראי מתוך קופסה מלאה בפתקים שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה. בכל אחד מן הפתקים כתובה שאלה אחת מתוך מאגר השאלות. מספר הפתקים שבקופסה שווה למספר השאלות שבמאגר, ובכל פתק כתובה שאלה אחרת. לאחר שהוציא הנבחן שלושה פתקים מן הקופסה וקרא את שלוש השאלות, הוא מחזיר את שלושת הפתקים לקופסה.
הנבחן יתקבל למכללה אם הוא יענה נכון על שתי שאלות לפחות מתוך שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא.
נתנאל התכונן למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון רק על 20 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.
ידוע כי ההסתברות של נתנאל לענות נכון על שאלה אחת לפחות מבין שתי השאלות שבשני הפתקים הראשונים שהוא הוציא היא $\frac{34}{69}$.

א. (1) מצאו את n.

(2) מהי ההסתברות שנתנאל יתקבל למכללה?

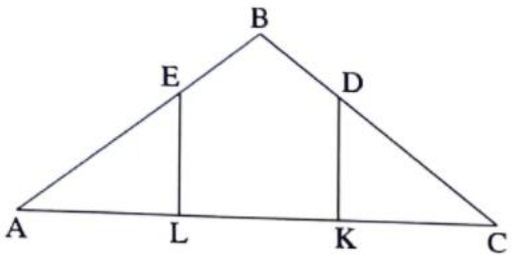
ב. אם ידוע כי נתנאל התקבל למכללה, מהי ההסתברות שהוא לא ענה נכון על השאלה שבפתק הראשון שהוא הוציא?

רמי התכונן גם הוא למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון על 40 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ג. האם ההסתברות שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי גדולה פי 2 מן ההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי? נמקו את תשובתכם.

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) בציור שלפניכם מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $BA = BC$.
מנקודה D הנמצאת על השוק BC הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה K.
מנקודה E הנמצאת על השוק BA הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה L.
נתון: $AL = LK = KC$.



א. חשבו את: $\frac{BD}{DC}$.

הקטעים DL ו-EK נפגשים בנקודה G.

ב. הוכיחו כי המרובע BDGE הוא דלתון.

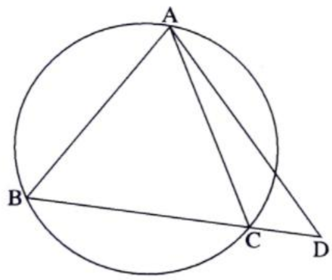
נתון: $AC = 45$.

היקף המרובע EDKL הוא 54.

ג. חשבו את אורך הקטע BG.

ד. האם קיימת נקודה F שנמצאת על הישר BG שעבורה המרובע BDFE הוא בר-חסימה במעגל? נמקו את תשובתכם.

5) בציור שלפניכם מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $AB = AC$, שחסום במעגל שרדיוסו R.
האריכו את הבסיס BC עד לנקודה D והעבירו ישר מנקודה D לנקודה A.
נתון: $\sphericalangle BAC = 2\alpha$, $\sphericalangle CAD = \alpha$.



א. הוכיחו כי רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD שווה לרדיוס המעגל החוסם את משולש ACD.

ב. הביעו את שטח משולש ACD באמצעות R ו- α.

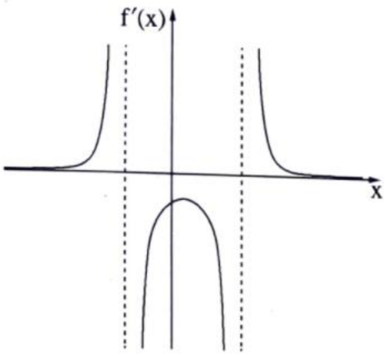
נסמן ב- m את היחס בין שטח המשולש ACD לבין שטח המשולש ABC.

ג. (1) האם ייתכן כי $m = 0.5$? נמקו את תשובתכם.
(2) נתון כי $m = 0.6$. מצאו את גודלי זוויות המשולש ABC.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה פונקציה $f\left(x\right)$ המוגדרת בתחום: $x<b$, $b<x<c$, $c<x$

וגזירה בכל תחום הגדרתה. בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'\left(x\right)$.



לפונקציית הנגזרת $f'\left(x\right)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד ושלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים: $y=0$, $x=b$, $x=c$.

שיעור ה- x של נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'\left(x\right)$ הוא a. a, b ו- c הם פרמטרים.

א. הביעו את תשובותיך באמצעות a, b ו- c, אם יש צורך.

(1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f\left(x\right)$.

(2) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\left(\cup\right)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מטה $\left(\cap\right)$ של הפונקציה $f\left(x\right)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ עובר בנקודה $\left(a,0\right)$.

ב. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

נתון גם כי: $f\left(x\right)=\dfrac{18-36x}{\left(x^2-x-6\right)^2}$.

ג. מצאו את a, b ו- c.

ד. (1) הראו כי בתחום $b<x<c$ מתקיים: $f'\left(x\right)\cdot\left(f\left(x\right)\right)^2\le 0$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה: $f'\left(x\right)\cdot\left(f\left(x\right)\right)^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=0$ ו- $x=2a$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan(x)+\frac{1}{x}$.

ענו על הסעיפים א-ב בעבור התחום: $0\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד

ששיעוריה $(2.798,0)$ בקירוב.

ב. מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x)=\frac{\cos(x)}{x}$, המוגדרת לכל $x\neq 0$.

ג. האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית?

הוכיחו את תשובתכם.

ד. (1) הראו כי בתחום: $0\le x\le\frac{3\pi}{2}$ שיעור ה- x של אחת מנקודות הקיצון

של הפונקציה $g(x)$ שווה לשיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף

הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x, וקבעו את סוגה של נקודת קיצון זו.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום: $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

8) חותכים חוט שאורכו k לשני חלקים.

מחלק אחד של החוט יוצרים משולש שווה-צלעות ומן החלק האחר יוצרים מעגל.

נסמן ב- x את אורך צלע המשולש.

א. הביעו באמצעות k את תחום ההגדרה של x.

ב. הביעו באמצעות k את אורך צלע המשולש, שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. הראו כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי, אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל במעגל שהתקבל.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה   ב. (1) 140 קוביות   ב. (2) 337,965 קוביות.
ג. אין   ד. (1) $x \neq -1 , x \neq 1 , x \neq 2$ ד. (2) 4 נקודות.

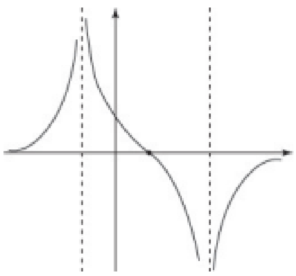
2) א. כן.   ב. (1) הוכחה.   ב. (2) $n=9$ ג. הנוסחה נכונה.

3) א. (1) $n=70$ א. (2) $\frac{6}{391}$ ב. $\frac{25}{84}$ ג. ההסתברות אינה גדולה פי 2.

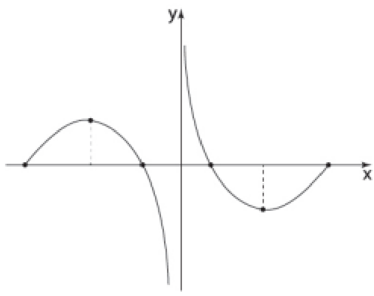
4) א. $\frac{1}{2}$ ב. הוכחה.   ג. 12   ד. כן.

5) א. הוכחה.   ב. $R^2 \cos^2 \alpha \tan 2\alpha$ ג.(1) לא יתכן.   ג. (2) 73.22° , 33.56°.

6) א. (1) עליה: $x>c$ או $x<b$, ירידה: $b<x<c$.
א. (2) $\cup$: $x<b$ או $a<x<b$, $\cap$: $a<x<c$ או $c<x$.   ב. להלן סרטוט:
ג. $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$, $c=3$ ד. (1) הוכחה.
ד. (2) $\frac{1}{12}$.



7) א. (1) $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$ א. (2) $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=0$.
ב. תחומי החיוביות של $f(x)$: $2.798<x<\frac{3\pi}{2}$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$,
תחומי השליליות של $f(x)$: $\frac{\pi}{2}<x<2.798$.
ג. $g(x)$ הינה פונקציה אי-זוגית.   ד. (1) הוכחה. סוג הקיצור: מינימום.
ד. (2) להלן סרטוט:



8) א. $0<x<\frac{k}{3}$ ב. $0.21k$ ג. הוכחה.

בגרות קיץ 2022 מועד א':

יש לענות על <u>חמש</u> מן השאלות 1–8, על שאלה <u>אחת</u> לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה <u>אחת</u> לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. (1) בעבור כל n טבעי, הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי הביטוי: $4^n - 1$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

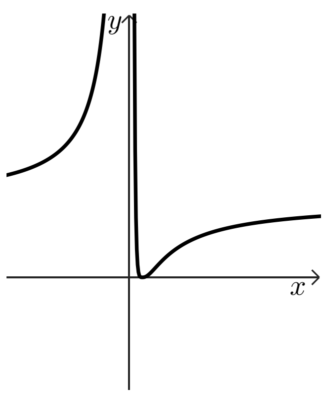
(2) נתון: p הוא מספר שלם.

כתבו דוגמה לערך של p שבעבורו הביטוי: $p + 4^{n+1}$ מתחלק ב-12 ללא שארית, לכל n טבעי.

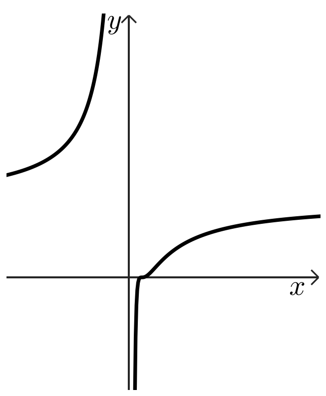
ב. נתונה הפונקציה: $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)^3$.

(1) אחד מן הגרפים א-ג מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבעו איזה מהם ונמקו בקצרה.

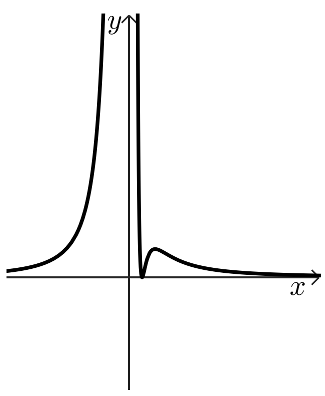
(2) קבעו כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמקו את התשובה.



א



ב



ג

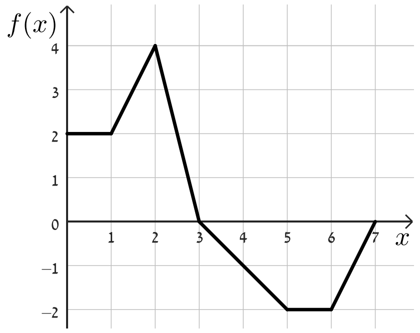
ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$

המוגדרת בתחום: $0 \le x \le 7$,

ונתונה הפונקציה: $h(t)=\int_0^t f(x)dx$ בתחום זה.

(1) חשבו את הערכים של: $h(0)$, $h(3)$, $h(5)$.

(2) קבעו באיזה תחום $h(t)$ יורדת. נמקו את התשובה.



ד. לפניכם משולש ABC שווה שוקיים $(AB=AC)$

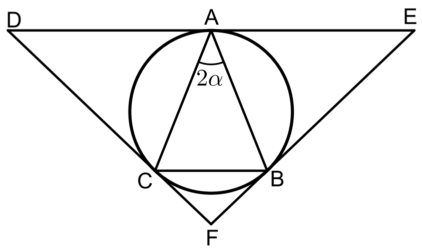
חסום במעגל (ראו סרטוט).

נסמן את זווית הראש של המשולש ב- 2α.

דרך כל אחד מקודקודי המשולש מעבירים משיק למעגל.

המשיקים נפגשים בנקודות: D, E ו-F, כמתואר בסרטוט.

הביעו באמצעות α את זוויות המשולש DEF.



פרק שני – אינדוקציה, סדרות והסתברות

2) סדרה I היא סדרה הנדסית אין-סופית שאיבריה הם: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ ומנתה היא: $9\cdot r^2$.

נתון: $0<r<\frac{1}{3}$. בין כל שני איברים בסדרה I הכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם: $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$ ומנתה היא q.

א. (1) הביעו את q באמצעות r.

(2) הסבירו מדוע שתי הסדרות I ו-II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי $\frac{4}{3}$ מסכום סדרה I.

ב. חשבו את q.

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 15.

ג. מצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב-5 $(b_5,\ b_{10},\ b_{15},\ \ldots)$.

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחריו אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

3) נטע משחקת במשחק מסוים. במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תיקו והפסד.

ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק.

נסמן ב- p את ההסתברות שנטע תפסיד במשחק $(p>0)$.

בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.

נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא $4.5p$.

א. מצאו את הערך של p.

נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.

ב. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב-3 משחקים לפחות.

ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

ד. (1) מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.

(2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות.
מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O.

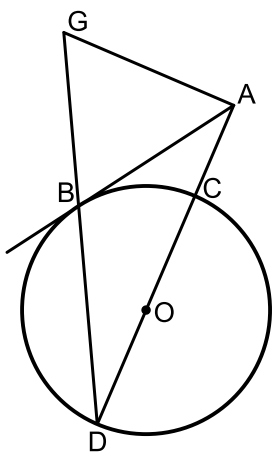
מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:

הישר AB משיק למעגל בנקודה B,

הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות C ו-D,

והישר AG מאונך לישר AD (ראו סרטוט).

הנקודות: D, B ו-G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט.



נסמן: $\sphericalangle ADB = \alpha$.

א. הביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות α.

ב. הוכיחו: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$.

נתון: $AC = \frac{1}{2}DC$, $AG = 7$.

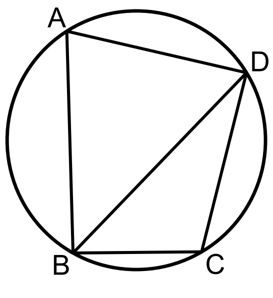
ג. חשבו את R.

נסמן ב- S את שטח המשולש BDC.

ד. (1) הוכיחו: $\Delta ADG \sim \Delta BDC$.

(2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.

5) מרובע ABCD חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O (ראו סרטוט).



נסמן: $\sphericalangle DAB = \alpha$, α היא זווית חדה.

א. הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות α ו- R.

נתון: $BC = R$, $CD = R\sqrt{2}$.

ב. חשבו את α.

נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

ג. חשבו את גודל הזווית ABD.

נסמן ב- h_1 את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD,

וב- h_2 את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD.

ד. חשבו את $\frac{h_1}{h_2}$.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x+\frac{3}{x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית?
הוכיחו את התשובה.

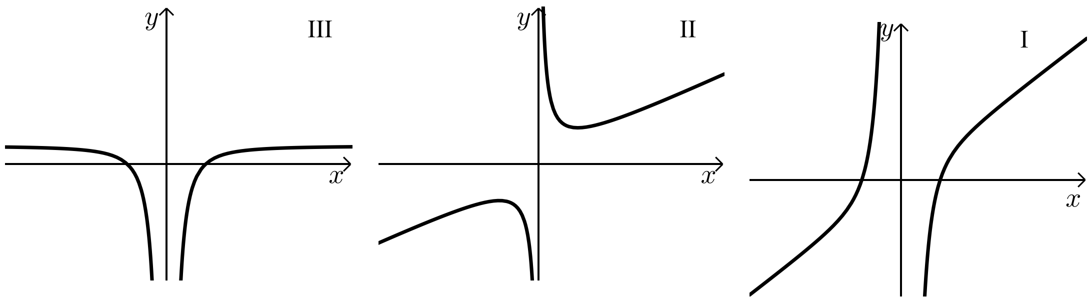
(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו- $g(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ו- $g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$.

הפונקציות $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ב. כל אחד מן הגרפים I-III שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות: $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$.
לכל אחת מן הפונקציות כתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.



ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x
ועל ידי הישרים: $x=\frac{1}{2}$ ו- $x=2$.

ה. נתון: $a>1$ הוא פרמטר. חשבו את: $\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)dx$.

נתונה הפונקציה: $h(x)=\int_{1}^{x} f'(t)dt$. נתון כי הפונקציה $h(x)$ מוגדרת בתחום $1\le x$.

ו. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגה.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2(\cos x)^2+\sin 2x}{2\cos x}$, בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הסבירו מדוע לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x.

(3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. (1) הראו כי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$

מתקיים: $f'(x)=\cos x-\sin x$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) t הוא מספר. מצאו את כל ערכי t שבעבורם יש למשוואה: $f(x)=t$

פתרון יחיד (בתחום: $0\le x\le 2\pi$).

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי שני הישרים: $x=\frac{3}{4}\pi$ ו- $x=\frac{5}{4}\pi$.

8) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ ואת תחום ההגדרה

של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם גרף הפונקציה $g(x)$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$

כך שהקטע AB מקביל לציר ה- x.

נתון כי שיעור ה- x של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה- x של נקודות החיתוך של

הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה $g(x)$. נסמן ב- p את שיעור ה- x של הנקודה A.

p הוא פרמטר.

ב. הביעו באמצעות p את אורך הקטע AB.

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB.

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא

מקסימלי? נמקו את התשובה.

תשובות סופיות:

1) א. (1) הוכחה א. (2) $p=8$ ב. (1) גרף ג ב. (2) 2 נקודות.

ג. (1) $h(0)=0$, $h(3)=7$, $h(5)=5$ ג. (2) $3<x<7$.

ד. $\measuredangle D=\measuredangle E=2\alpha$, $\measuredangle F=180^\circ-4\alpha$.

2) א. (1) $q=3r$ א. (2) הסבר. ב. $q=\frac{1}{3}$ ג. $S=\frac{60}{121}$ ד. 2 ה. הוכחה.

3) א. $p=\frac{1}{6}$ ב. 0.5. ג. 0.125. ד. (1) $\frac{3125}{7776}=0.4188$.

ד. (2) $\frac{54}{4651}=0.012$.

4) א. $\measuredangle BAG=2\alpha$, $\measuredangle ABG=90^\circ-\alpha$, $\measuredangle AGB=90^\circ-\alpha$.

ב. הוכחה. ג. $R=\frac{7}{\sqrt{3}}$ ד. (1) הוכחה. ד. (2) $S_{ADG}=3S$.

5) א. $BD=2R\sin\alpha$ ב. $\alpha=75^\circ$ ג. $\measuredangle ABD=45^\circ$ ד. $\frac{h_1}{h_2}=3+\sqrt{3}\approx4.732$.

6) א. (1) $x\neq0$ א. (2) הפונקציה היא אי-זוגית.

א. (3) עולה: $x>1$, $x<-1$, יורדת: $0<x<1$, $-1<x<0$.

ב. $g(x)\to \text{I}$, $f'(x)\to \text{III}$, $f(x)\to \text{II}$.

ג. $(1,0)$, $(-1,0)$ ד. $S=20.25$ ה. 0 ו. $\min(1,0)$.

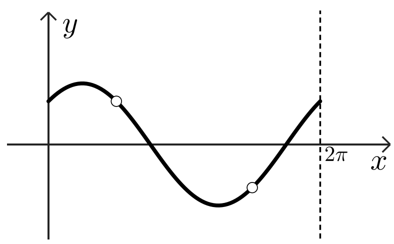
7) א. (1) $\frac{3\pi}{2}<x\le2\pi$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$, $0\le x<\frac{\pi}{2}$ א. (2) הסבר.

א. (3) $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$, $(0,1)$ ב. (1) הוכחה.

ב. (2) $\max(2\pi,1)$, $\min\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, $\min(0,1)$.

ג. (1) להלן סקיצה: ג. (2) $t=\sqrt{2}$, $t=-\sqrt{2}$, $t=-1$.

ד. $S=\sqrt{2}=1.414$.



8) א. (1) $f(x)$: כל x , $g(x)$: $x\ge0$ א. (2) $(1,1)$, $(0,0)$.

ב. $AB^2=p-p^2$ ג. $S_{max}=\frac{128}{3125}=0.04096$ ד. לא.

בגרות קיץ 2022 מועד ב':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

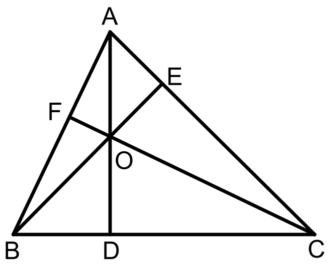
א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי בעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

ב. במשולש חד זוויות ABC, הגבהים: AD, BE, CF נפגשים בנקודה O (ראו סרטוט).
נתון כי סכום המרחקים של הנקודה O מקודקודי המשולש הוא 20.

(1) הוכיחו שאפשר לחסום במעגל כל אחד מן המרובעים: AEOF, BDOF, CDOE.

(2) מהו סכום ההיקפים של המעגלים החוסמים את המרובעים: AEOF, BDOF, CDOE?



ג. נתונה הפונקציה: $f(x)=3+\frac{x}{\sqrt{x^2-25}}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) ידוע כי האסימפטוטות של גרף הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, חותכות זו את זו.
חשבו את השטח הכלוא בין האסימפטוטות נמקו את התשובה.

ד. נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{a\cdot x}{x^2-4}$, המוגדרת עבור: $x\neq 2$ ו- $x\neq -2$,

$a\neq 0$ הוא פרמטר.

אחד מן הגרפים א-ה שלפניכם מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a>0$,

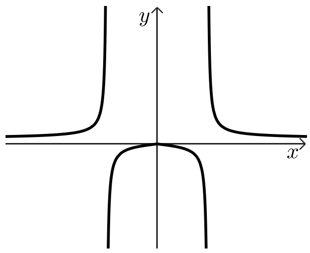
ואחד מהם מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a<0$.

(1) איזה מן הגרפים מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a>0$?

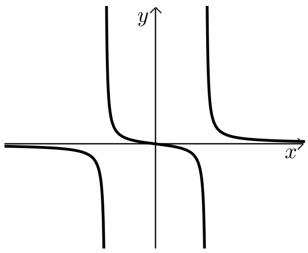
נמקו את התשובה בקצרה.

(2) איזה מן הגרפים מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a<0$?

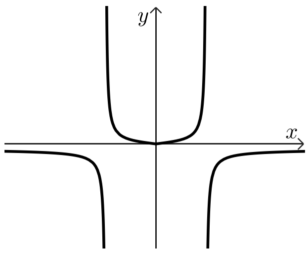
נמקו את התשובה בקצרה.



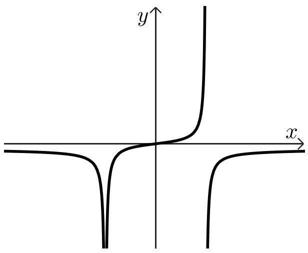
א



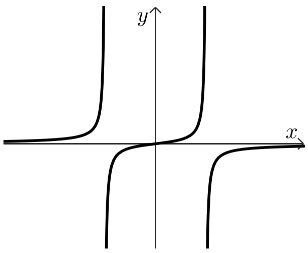
ב



ג



ד



ה

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים: $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

בעבור $2k$ האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים בסדרה שווה: $10{,}935 \cdot a_1$.

נתון: $a_{2k-2} = 1{,}215$.

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

נתון: $a_1 = 5$.

ג. (1) קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.

(2) מצאו את k.

מן הסדרה A בונים את הסדרה האין-סופית B באופן הזה: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ד. הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי-זוגיים כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם: $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ה. מצאו את סכום הסדרה C.

3) בעיר גדולה בישראל נערך סקר ובו נבדקה רמת השליטה בשפה האנגלית בקרב תושבי העיר.
בסקר השתתפו אנשים רבים – מבוגרים וצעירים.
בסקר נמצא שמספר המבוגרים ששולטים באנגלית גדול פי 3 ממספר הצעירים ששולטים בה,
ומספר המבוגרים שלא שולטים באנגלית גדול פי $2\frac{2}{3}$ ממספר המבוגרים ששולטים בה.
נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר ששולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית מבין כלל המבוגרים שהשתתפו בסקר.

ב. בוחרים באקראי שלושה מבוגרים מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר.
מצאו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם שולטים באנגלית.

ג. (1) הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר שלא שולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

(2) הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור p הוא: $0 < p < \frac{1}{12}$.

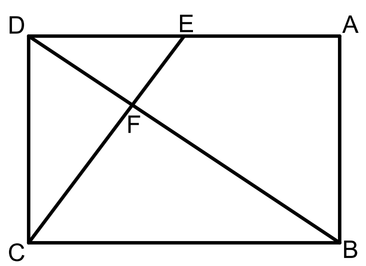
ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית שווה להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית.

ד. מצאו את הערך של p.

ה. האם המאורעות "לשלוט באנגלית" ו"להיות מבוגר" תלויים זה בזה?
נמקו את תשובתכם.

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) במלבן ABCD, הנקודה E נמצאת על הצלע AD.
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה F.
המרובע EABF הוא בר חסימה במעגל.



א. הוכיחו: $\Delta DAB \sim \Delta BFC$.

נתון: $DE = EA$.

ב. חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$.

נסמן את שטח המשולש DEF ב- S.

ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו-BFC באמצעות S.

ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC.

נסמן: $DE = a$.

ה. (1) הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a.

(2) הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a.

5) נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.

מנקודה A, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה D וישר אחר,

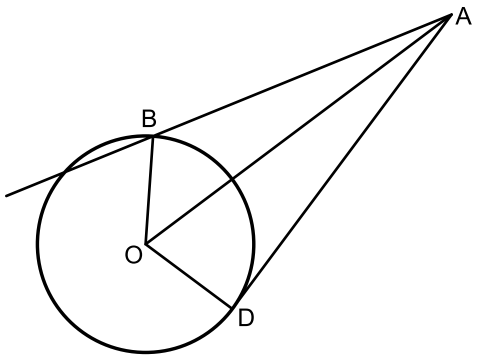
שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\sphericalangle AOD=\alpha$, $\sphericalangle AOB=\beta$.

א. הביעו באמצעות α, β ו- R, אם יש צורך, את:

(1) אורך הקטע AO.

(2) אורך הקטע AB.



נתון: $AB=\sqrt{2}R$.

ב. הוכיחו כי: $\cos\beta=\frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.

משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r.

נתון: $\frac{R}{r}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$.

ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו- β.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-9}{\sqrt{x+a}}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב. (1) מצאו את a.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $g(x)=-f(x+2)$, $h(x)=|f(x)|$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) האם שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ גדול משיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $h(x)$, קטן ממנו או שווה לו?

נמקו את התשובה.

נתון כי: $\int_{-3}^{k} g(x)dx = \int_{-1}^{3} h(x)dx$, $k > -3$.

ד. מצאו את k. הסבירו את התשובה.

7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x) - 1$, המוגדרת לכל x.

א. האם הפונקציה $f(x)$ זוגית? נמקו.

ב. הוכיחו כי לכל x מתקיים: $-2 \le f(x) \le 0$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים
בתחום: $-\pi \le x \le \pi$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $-\pi \le x \le \pi$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = f(2x)$, המוגדרת לכל x.

ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$,
וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי: $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \left(g'(x) - f'(x)\right)dx = S$.

הביעו באמצעות S את: $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \left(g'(x) - f'(x)\right)dx$. הסבירו את התשובה.

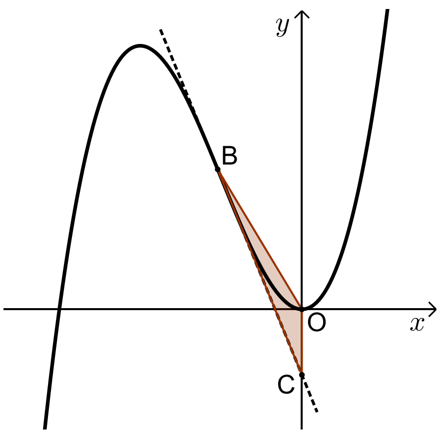
8) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + 4x^2$, המוגדרת לכל x.

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע השני (ראו סרטוט).

מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C.

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה B.



א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק
לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B.

ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה- x.

ב. מהו תחום הערכים של t?

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה ב. (1) הוכחה ב. (2) 20π ג. (1) $x>5$, $x<-5$.
ג. (2) 20 ד. (1) גרף ב ד. (2) גרף ה.

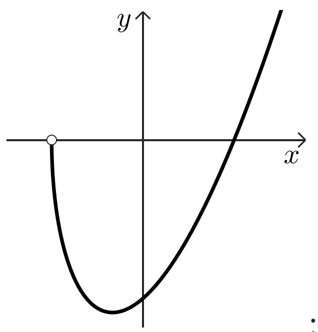
2) א. הוכחה. ב. $q=-3$, $q=3$ ג. (1) עולה ג. (2) $k=4$.
ד. הוכחה. ה. $S_C=-\frac{3}{20}$.

3) א. $\frac{3}{11}$ ב. $\frac{216}{1331}$ ג. (1) $1-12p$ ג. (2) הוכחה.
ד. $p=\frac{1}{20}$ ה. תלויים.

4) א. הוכחה. ב. 0.5. ג. $S_{DFC}=2S$, $S_{BFC}=4S$
ד. $\sqrt{1.5}$ ה. (1) $\sqrt{6}\cdot a$ ה. (2) $\sqrt{3}\cdot a$.

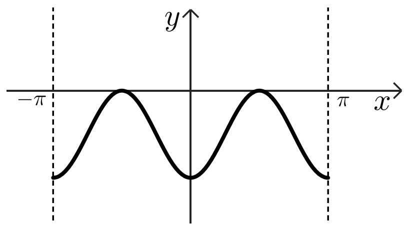
5) א. (1) $AO=\frac{R}{\cos\alpha}$ א. (2) $AB=R\sqrt{1+\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}}$
ב. הוכחה. ג. $\beta=47.13°$, $\alpha=58.05°$.

6) א. $x>-a$ ב. (1) $a=3$ ב. (2) $(3,0)$, $(0,-3\sqrt{3})$
ב. (3) $\min\left(-1,-4\sqrt{2}\right)$ ב. (4) להלן סקיצה:



ג. (1) $h(x): x>-3$, $g(x): x>-5$
ג. (2) שווה לו. ד. $k=1$.

7) א. זוגית. ב. הוכחה.
ג. $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,-2)$. ד. להלן סקיצה:



ה. $\min\left(\frac{\pi}{2},-2\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, $\min(0,-2)$, $\max\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{2},-2\right)$
ו. $-S$.

8) א. $y=\left(3t^2+8t\right)x-2t^3-4t^2$ ב. $-2<t<0$ ג. $S_{OBC}=\frac{27}{16}$.