שאלון 571 לתלמידי קידום

פרק 41

פתרון בוידאו של בחינות שנת 2021

קיץ מועד א 1
קיץ מועד ב 9
חורף מועד נבצרים 17

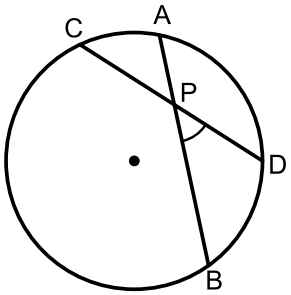
בגרות קיץ 2021 מועד א':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.



א. הראו כי במעגל, הזווית הנוצרת על ידי שני מיתרים שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

כלומר יש להראות: $\sphericalangle BPP = \frac{AC+BD}{2}$.

ב. לפניך שתי טענות אשר רק אחת מהן נכונה לכל n טבעי.
קבעו איזו מהטענות נכונה.
הוכיחו את הטענה הנכונה לכל n טבעי באינדוקציה (או בדרך אחרת).

I. $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2n+4}$

II. $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{3(n+1)}$

ג. קבעו אם הטענות הבאות נכונות. נמקו.

I. הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-3}$ זהה לפונקציה: $h(x)=\sqrt{(x+1)(x-3)}$.

II. הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{x+1}$ זהה לפונקציה: $h(x)=\sqrt{x^2(x+1)}$.

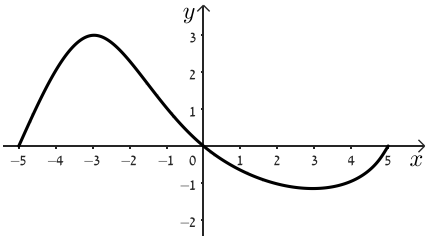
ד. נתון גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $-5\le x\le 5$

ונתונה הפונקציה עבור $a>-4$: $h(a)=\int_{-4}^{a} f(x)dx$.

(1) קבעו באיזה תחום הפונקציה $h(a)$ עולה. נמקו.

(2) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה

והקעירות כלפי מטה של הפונקציה $h(a)$. נמקו.



2) נתונה סדרה a_n שסכום n האיברים הראשונים שלה, לכל n טבעי,
הוא: $S_n = k \cdot n^2 - p \cdot n$. $p > 0$, $k > 0$ הם פרמטרים.

א. (1) הביעו את האיבר הכללי של הסדרה באמצעות k, p ו-n, בעבור $n \geq 2$.
(2) הנוסחה שמצאתם בתת-סעיף א(1) נכונה בעבור כל n טבעי, הסבירו מדוע.
(3) הוכיחו כי הסדרה היא סדרה חשבונית והביעו את d, ההפרש של הסדרה, באמצעות k.

נתונות שתי סדרות הנדסיות b_n ו-c_n. מנת הסדרה b_n שווה ל-d (הפרש הסדרה החשבונית a_n). הסדרה c_n היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה שווה ל-$\frac{2}{d}$.

נתון: $a_1 = b_1 = c_1$, $k = 1.5$, $p = 4.5$.

ב. הסבירו מדוע הסדרה c_n היא סדרה מתכנסת.

נתון כי היחס בין סכום m האיברים הראשונים של הסדרה b_n ובין סכום כל איברי הסדרה האינסופית c_n הוא $40\frac{1}{3}$.

ג. חשבו את m.

ד. האם הסדרה c_n היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת?
נמקו את תשובתכם.

3) בבית ספר תיכון גדול מאוד, מספר התלמידים גדול פי 9 ממספר המורים.
בבית הספר נערך סקר שהשתתפו בו כל המורים והתלמידים בבית הספר, והם בלבד.
המשתתפים בסקר נשאלו אם הם נבדקו לגילוי קורונה.
נמצא כי 80% מן המורים בבית הספר נבדקו לגילוי קורונה.
כמו כן נמצא כי $\frac{13}{15}$ מכלל המשתתפים בסקר (מורים ותלמידים), שנבדקו לגילוי קורונה, היו תלמידים.

א. מהי ההסתברות שמבין כלל המשתתפים בסקר ייבחר באקראי תלמיד שלא נבדק לגילוי קורונה?

בחרו באקראי בזה אחר זה 5 משתתפים מבין כלל משתתפי הסקר.

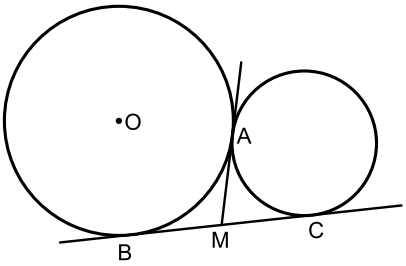
ב. מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם נבדקו לגילוי קורונה?

ג. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, לפחות משתתף אחד נבדק לגילוי קורונה.
מהי ההסתברות שלפחות 4 מן המשתתפים שנבחרו נבדקו לגילוי קורונה?

ד. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, בדיוק 2 נבדקו לגילוי קורונה.
מהי ההסתברות שהאחרון שנבחר נבדק לגילוי קורונה?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A (ראו סרטוט).
הנקודה O היא מרכז המעגל השמאלי.
מעבירים בנקודה A משיק משותף לשני המעגלים.
B ו-C הן נקודות ההשקה של ישר נוסף שמשיק לשני המעגלים.
שני המשיקים נחתכים בנקודה M.



א. הוכיחו כי הזווית $\sphericalangle BAC$ ישרה.

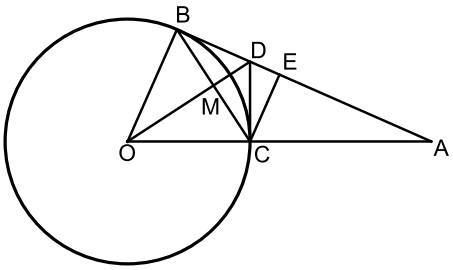
ב. הוכיחו כי: $4 \cdot AM^2 = AC^2 + AB^2$.

נתון: $AC = 6$, $AB = 8$.

ג. חשבו את רדיוס המעגל שמרכזו הוא בנקודה O.

ד. חשבו את יחס השטחים: $\frac{S_{\Delta OBM}}{S_{\Delta AMC}}$.

5) DB ו-DC משיקים למעגל שמרכזו O, כמתואר בסרטוט.
רדיוס המעגל: R.
המשך BD חותך את המשך OC בנקודה A.
הקטע OD והמיתר BC נחתכים בנקודה M.
הקטע CE מאונך ל-AB.
נסמן: $\sphericalangle ABC = \alpha$.



א. הסבירו מדוע אפשר לחסום במעגל:
(1) את המרובע OBDC.
(2) את המרובע MDEC.

נסמן: d_1 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע OBDC.
d_2 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע MDEC.
d_3 הוא קוטר המעגל החוסם את המשולש AOD.

ב. הביעו באמצעות α ו- R את d_1, את d_2 ואת d_3.

ג. מצאו את הערך של α שבעבורו מתקיים: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונות הפונקציות: $g(x)=\frac{x}{(x^2-2)^3}$, $f(x)=\frac{x}{(x^2-2)^2}$.

א. ענו על תת-סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

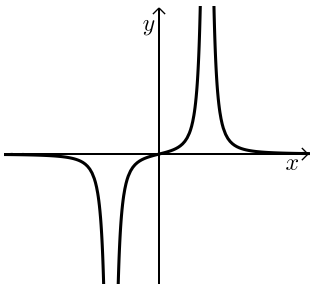
(3) הראו כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

(4) הוכיחו כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ב. (1) הגרף שלפניך מתאר את אחת הפונקציות $f(x), g(x)$.

קבעו איזו מן הפונקציות הגרף מתאר. נמקו את קביעתכם.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.



נתונה פונקציה $h(x)$ המקיימת: $h'(x)=f(x)$.

$f(x)$ ו-$h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של $h(x)$?

ד. חשבו את:

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. נמקו את תשובתכם.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישרים: $x=-1$, $x=1$.

נתונה הפונקציה: $k(x)=f(x)+b$, $b\neq 0$ הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית?

נמקו את תשובתכם.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-4a}}{x^3}$, $a>0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ה, בטאו את תשובותיכם באמצעות a לפי הצורך.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x)$ אי-זוגית.

ג. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

ה. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$, אם יש כאלה?

ידוע כי בכל אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$, יש לגרף של $f(x)$ ולגרף של $g(x)$ משיק משותף.

ו. (1) הוסיפו לסרטוט שבמחברתך סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

פרטו את שיקוליכם.

(2) מהו הערך של a? נמקו את תשובתכם.

8) במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a.

נתון: $\sphericalangle BAC=\alpha$ (α ברדיאנים).

נסמן: $\sphericalangle ABC=x$ ($0<x<\pi-\alpha$).

א. הביעו באמצעות x, a ו-α את היקף המשולש ABC.

ב. הביעו באמצעות α את ערך ה-x שבעבורו היקף המשולש ABC הוא מקסימלי.

ג. הסבירו מדוע מתקיים המשפט הזה:

מכל המשולשים בעלי צלע נתונה וזווית מולה נתונה, המשולש בעל ההיקף המקסימלי הוא משולש שווה שוקיים.

תשובות סופיות:

1) א. ראו סרטון ב. טענה I.

ג. I. הטענה אינה נכונה, II. הטענה אינה נכונה.

ד. (1) $-4 < x < 0$.

ד. (2) קעורה כלפי מעלה: $3 < x < 5$, $-4 < x < -3$, קעורה כלפי מטה: $-3 < x < 3$.

2) א. (1) $a_n = 2kn - k - p$. א. (2) הוכחה. א. (3) $d = 2k$.

ב. הסבר $\left(q = \frac{2}{3}\right)$. ג. $m = 5$. ד. עולה.

3) א. 0.38. ב. 0.33696. ג. $\frac{351}{1,031} = 0.340446$ ד. 0.4.

4) א. הוכחה . ב. הוכחה. ג. $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$. ד. $\frac{25}{18}$.

5) א. (1). הוכחה. (2). הוכחה.

ב. $d_1 = \frac{R}{\cos\alpha}$, $d_2 = R\tan\alpha$, $d_3 = \frac{R}{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}$. ג. $\alpha = 30°$.

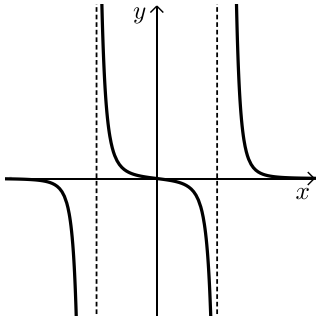
6) א. (1) $f(x)$: $x \neq \pm\sqrt{2}$, $g(x)$: $x \neq \pm\sqrt{2}$.

א. (2) $f(x)$: $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $y = 0$, $g(x)$: $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $y = 0$.

א. (3) $f(x)$: הוכחה, $g(x)$: הוכחה.

א. (4) $f(x)$: הוכחה, $g(x)$: הוכחה.

ב. (1) $f(x)$. ב. (2) להלן סרטוט:



ג. עליה: $\sqrt{2} < x$ או $0 < x < \sqrt{2}$, ירידה: $-\sqrt{2} < x < 0$ או $x < -\sqrt{2}$,

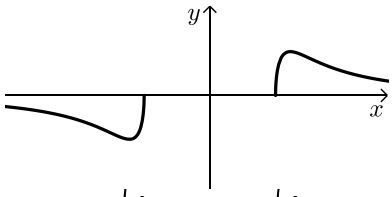
ד. (1). 0. (2). $\frac{1}{2}$. ה. לא זוגית ולא אי זוגית.

7) א. $\sqrt{\frac{4a}{3}} \le x$ או $x \le -\sqrt{\frac{4a}{3}}$. ב. הוכחה. ג. (1) $\left(\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$.

א. (2) $\left(\sqrt{2a},\frac{1}{2a}\right)$ מקסימום, $\left(-\sqrt{2a},-\frac{1}{2a}\right)$ מינימום, $\left(\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$ מינימום,

$\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$ מקסימום.

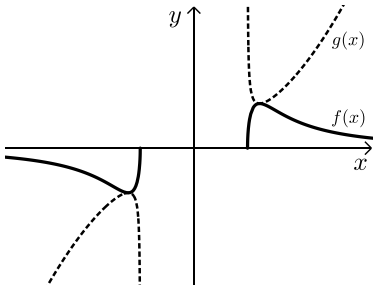
ד. סרטוט:



ה. (1) $\sqrt{\frac{4a}{3}} < x$ או $x < -\sqrt{\frac{4a}{3}}$.

ה. (2) $x = \sqrt{\frac{4a}{3}}$, $x = -\sqrt{\frac{4a}{3}}$.

ו. (1) סרטוט:



ו. (2) $a = \frac{1}{2}$.

8) א. $a + \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin x + \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin(\alpha + x)$. ב. $\frac{\pi - \alpha}{2}$. ג. הוכחה.

בגרות קיץ 2021 מועד ב':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

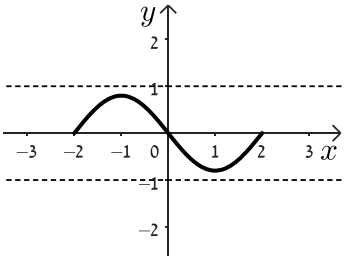
1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בסרטוט שלפניכם:

גרף של פונקציה אי-זוגית $f(x)$ בתחום: $-2 \le x \le 2$

והישרים: $y = 1$, $y = -1$.

קבעו עבור כל אחת מן הטענות הבאות אם היא נכונה או לא. נמקו.



(1) $\int_{0}^{2} f(x)dx = 0.5\int_{-2}^{2} f(x)dx$

(2) $\int_{-2}^{0} f(x)dx > \int_{0}^{2} \left(f(x)\right)^2 dx$

ב. נתונה טבלת הסתברויות ובה מידע חלקי:

	A	$\bar{A}$	סה"כ
B	$2a^2 - \frac{1}{8}$		$2a$
$\bar{B}$			
סה"כ	a		1

(1) האם המאורעות A ו- B תלויים זה בזה? נמקו.

(2) נתון: $P(A \cap B) = 5P(\bar{A} \cap \bar{B})$. חשבו את a .

ג. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2+10x-12}{2x^2-10x+12}$. a הוא פרמטר חיובי.

ציר ה- x והאסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים יוצרים מלבן ששטחו 2.

(1) מהו הערך של הפרמטר a?

(2) נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x+3)$.

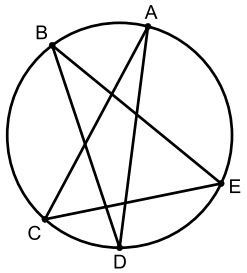
מהו השטח של המלבן שנוצר על ידי ציר ה- x והאסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים? נמקו.

ד. במעגל שמרכזו בנקודה O חסום כוכב.

הנקודות: A, B, C, D, E הן קודקודי הכוכב (ראו סרטוט).

הוכיחו שסכום 5 הזוויות של קודקודי הכוכב:

$\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle C+\sphericalangle D+\sphericalangle E$ הוא $180°$.



פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית a_n שאיבריה: $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ והמנה שלה q.

א. הביעו באמצעות a_1 ו- q את ערכי הסכומים שלפניכם.

(1) $A = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{40}$.

(2) $B = a_4 + a_8 + a_{12} + ... + a_{40}$.

נתון כי a_n היא סדרה עולה וכי: $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$.

ב. מצאו את ערכו של q.

בונים מן הסדרה a_n הנתונה סדרה הנדסית אין-סופית b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = 3a_{n+1}$.

ג. מצאו את המנה של הסדרה b_n.

בונים סדרה הנדסית אין-סופית חדשה: $-\frac{1}{b_1} , \frac{1}{b_2} , -\frac{1}{b_3} , \frac{1}{b_4} , ...$

ד. הביעו את הסכום של כל איברי הסדרה החדשה באמצעות a_1.

נתונה הסדרה: $\frac{1}{a_1} , a_1 , b_1$.

ה. (1) האם ייתכן שסדרה זו חשבונית? נמקו את תשובתכם.

(2) האם ייתכן שסדרה זו הנדסית? נמקו את תשובתכם.

3) בתחרות ספורט שנערכת בבית ספר משתתפים תלמידים רבים. כל משתתף צריך להצליח לעבור 3 מכשולים בזה אחר זה לפי הסדר. משתתף שלא מצליח לעבור מכשול מודח מייד מן התחרות. ההסתברות להצליח לעבור מכשול שונה ממכשול למכשול, אך שווה לכל המשתתפים. משתתף שמצליח לעבור את כל שלושת המכשולים עולה לשלב חצי הגמר. 28% מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים. ההסתברות שמשתתף שמצליח לעבור את שני המכשולים הראשונים יודח מן התחרות גדולה פי 3 מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר.

א. חשבו את ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר.

ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון ולא יעבור את המכשול השני היא 0.42.

ב. חשבו את ההסתברות שמשתתף בתחרות לא יצליח לעבור את המכשול הראשון.

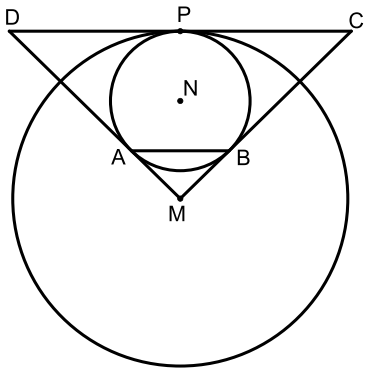
ג. בחרו באקראי שלושה משתתפים: עומר, גל וליאור.

ידוע ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.

(1) חשבו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר.

(2) חשבו את ההסתברות שמבין השלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.

4) שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה P (ראו סרטוט).
מרכזי המעגלים הם הנקודות M ו-N,
והרדיוסים שלהם הם R_1 ו- R_2 בהתאמה, $R_2 < R_1$.
מעבירים משיק משותף לשני המעגלים דרך הנקודה P.
מן הנקודה M יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל
שמרכזו N בנקודות A ו-B.
ישרים אלה חותכים את המשיק המשותף לשני המעגלים
בנקודות C ו-D כמתואר בסרטוט.



א. הוכיחו כי $AB \perp MN$.

ב. הוכיחו כי $AB \parallel DC$.

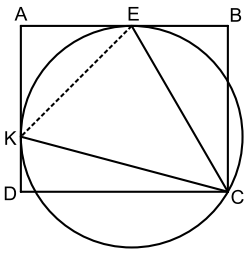
ג. הוכיחו כי $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$.

נתון: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$, $MN = 8$.

ד. (1) מצאו את R_1 ואת R_2.

(2) מצאו את DC.

5) המרובע ABCD הוא מלבן ששתיים מצלעותיו, AB ו-AD, משיקות למעגל
שרדיוסו R בנקודות E ו-K בהתאמה (ראו סרטוט). הנקודה C נמצאת על המעגל.



א. הוכיחו: $\sphericalangle KCE = 45°$.

נתון: $\sphericalangle KCD = \alpha$, $0° < \alpha < 45°$.

ב. (1) הביעו באמצעות α את הזוויות של המשולש KCE.

(2) הביעו באמצעות R ו- α את האורכים של צלעות המשולש KCE.

ג. הביעו באמצעות α את היחס $\frac{EB}{AE}$.

נתון: $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ד. חשבו את α.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a>0$ הוא פרמטר.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ וקבעו את סוגן.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}$.

תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה. הסתמכו על הסעיפים הקודמים וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

הציבו $a=2$.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=3$ ו- $x=4$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}+3$.

ענו על הסעיפים שלפניכם בתחום: $0 \le x \le 2\pi$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

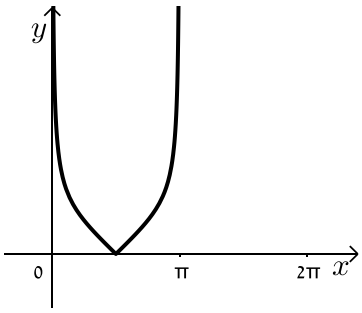
(4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

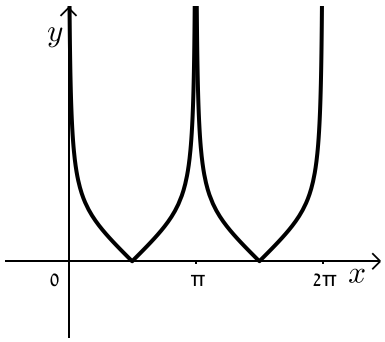
נתונות שתי פונקציות: $k(x)=f(x)-3$, $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$.

ג. אחד מן הגרפים א-ד שלפניכם מתאר את הפונקציה $k(x)$, ואחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $g(x)$. קבעו איזה מן הגרפים מתאר כל אחת מן הפונקציות ונמקו את קביעותיכם.

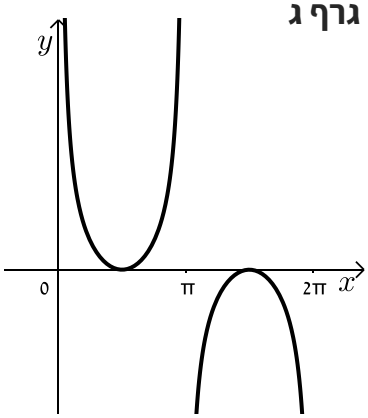
גרף א



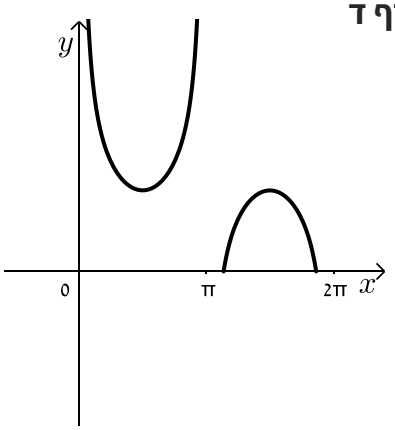
גרף ב



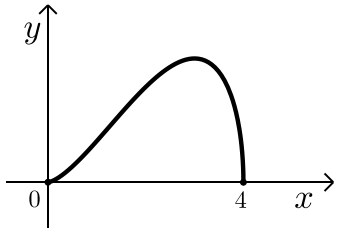
גרף ג



גרף ד



8) בסרטוט שלפניכם מוצגת הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax^4+bx^3}$.



נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $0 \le x \le 4$.

א. (1) הוכיחו כי $b=-4a$.

(2) לפניכם שתי טענות I-II. רק אחת מהן נכונה.

קבעו מהי הטענה הנכונה, ונמקו את קביעתכם.

I. $a>0\ ,\ b<0$.

II. $a<0\ ,\ b>0$.

הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ המוגדרת גם היא בתחום: $0 \le x \le 4$.

מהנקודה P מעבירים ישר המאונך לציר ה- x.

M היא נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה- x, ו-O היא ראשית הצירים.

ב. מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי?

נמקו את תשובתכם.

ג. בעבור שיעור ה- x שמצאת בסעיף ב, בטאו באמצעות a את השטח המקסימלי של המשולש PMO.

ד. אם ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ אינה יורדת, מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות:

1) א. (1) הטענה אינה נכונה א. (2) הטענה נכונה ב. (1) כן ב. (2) $a=0.375$.

ג. (1) $a=4$ ג. (2) 2 יח"ר ד. הוכחה.

2) א. (1) $\frac{a_1q\left(q^{40}-1\right)}{q^2-1}$. א. (2) $\frac{a_1q^3\left(q^{40}-1\right)}{q^4-1}$ ב. $q=3$ ג. $q=3$.

ד. $-\frac{1}{12a_1}$. ה. (1) לא. ה. (2) כן.

3) א. 0.07. ב. 0.3. ג. (1) 0.027. ג. (2) 0.009.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

ד. (1) $R_1=14$, $R_2=6$. ד. (2) $DC=12\sqrt{7}$.

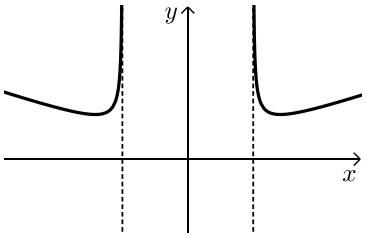
5) א. הוכחה. ב. (1) $\measuredangle CKE=45°+\alpha$, $\measuredangle CEK=90°-\alpha$, $\measuredangle KCE=45°$.

ב. (2) $CE=2R\sin\left(45°+\alpha\right)$, $CK=2R\cos\alpha$, $KE=\sqrt{2}R$.

ג. $\frac{EB}{AE}=2\sin\left(45°+\alpha\right)\cdot\sin\left(45°-\alpha\right)=\sin\left(90°+2\alpha\right)=\cos2\alpha$. ד. $22.5°$.

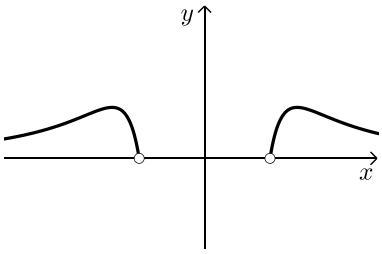
6) א. $a<x$ או $x<-a$. ב. הוכחה. ג. (1) אין. ג. (2) $x=a$, $x=-a$.

ג. (3) $\left(\sqrt{2}a,2a\right)$ מינימום, $\left(-\sqrt{2}a,2a\right)$ מינימום. ג. (4) סרטוט:



ד. $\left(\sqrt{2}a,4a^2\right)$, $\left(-\sqrt{2}a,4a^2\right)$.

ה. סרטוט: ו. $\frac{71}{1,296}$.



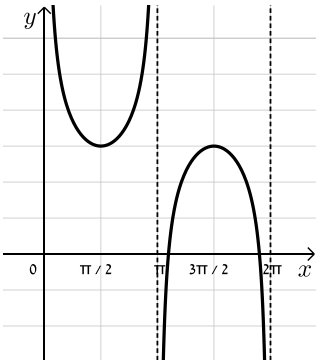
7) א. (1) $0<x<2\pi$, $x\neq0$. א. (2) $x=2\pi$, $x=\pi$, $x=0$.

א. (3) עליה: $\pi<x<1.5\pi$ או $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, יורדת: $1.5\pi<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$.

א. (4) $\left(\frac{3\pi}{2},3\right)$ מקסימום, $\left(\frac{\pi}{2},3\right)$ מינימום.

ב. ראו סרטוט בצד:

ג. $k(x)$: גרף ג', $g(x)$: גרף א'.



8) א. (1) הוכחה. א. (2) II.

ב. $x=3.2$. ג. $-41.94a$ ד. $x=3$.

בגרות חורף 2021 מועד נבצרים:

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו כי כל טרפז שחסום במעגל הוא שווה שוקיים.

ב. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת שהביטוי $n^3 - n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ אינה קבועה, מוגדרת לכל x והיא אי-זוגית.

קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא זוגית, אי-זוגית, לא זוגית ולא אי-זוגית או שלא ניתן לקבוע. נמקו.

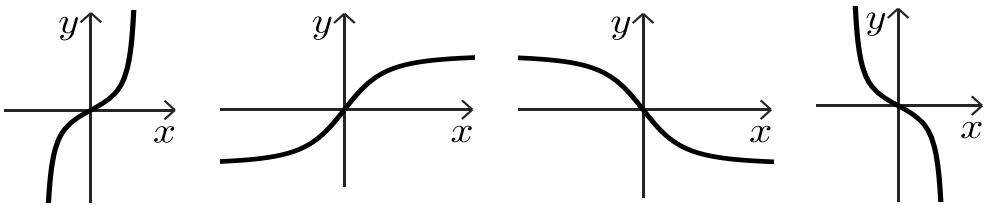
I. $h(x) = -f(x)$

II. $k(x) = (f(x))^2$

III. $g(x) = f(x) + 4$

ד. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}$, $a > 0$.

אילו מהסרטוטים הבאים הוא גרף הפונקציה? נמקו בקצרה.



ד ג ב א

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) ערכו סקר בין תלמידי בית הספר ומצאו: 80% מהבנים עוסקים בספורט.
מספר הבנות בבית הספר גדול פי 1.2 ממספר הבנים שעוסקים בספורט.

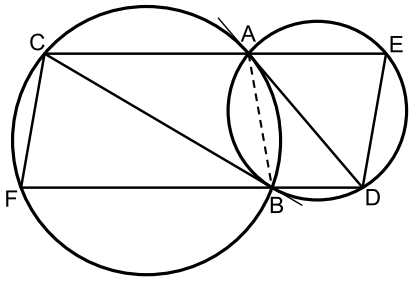
א. מהי ההסתברות לבחור בן מבין תלמידי בית הספר?

ב. מהי ההסתברות לבחור תלמיד שעוסק בספורט (בן או בת), אם ידוע שהמאורעות:
"נבחר בן" ו-"נבחר תלמיד שעוסק בספורט" הם בלתי תלויים? הסבירו.

ג. נבחר באקראי תלמיד (בן או בת). ידוע שהוא עוסק בספורט.
מה סביר יותר, שהוא בן או בת? הסבירו.

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

3) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B.
המיתר AD במעגל הימני משיק למעגל השמאלי בנקודה A.
המיתר CB במעגל השמאלי משיק למעגל הימני בנקודה B.
המשך המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה E.
המשך המיתר BD במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.



א. הוכיחו:

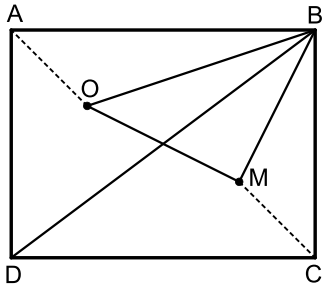
(1) $\Delta ABC \sim \Delta BDA$.

(2) $\sphericalangle CED + \sphericalangle FCE = 180°$.

(3) המרובע CEDF הוא מקבילית.

ב. נתון: $AC = 9$, $BD = 4$.
מצאו פי כמה גדול שטח משולש ABC
משטח משולש BDA. נמקו.

4) במלבן ABCD הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABD
והנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש BDC.



נסמן: $AB = a$, $BC = b$, $\sphericalangle ABD = \alpha$.

א. הביעו את AO ואת BO באמצעות a ו- α.

ב. הראו כי $\sphericalangle OBM = 45°$.

נתון: $AB = 8$, $BC = 6$.

ג. חשבו את α.

ד. חשבו את שטח המשולש OMB.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

5) נתונה סדרה הנדסית בת $2n$ איברים: $a_1 , a_2 , \dots , a_{2n}$. מנת הסדרה היא q.

א. הביעו באמצעות q את היחס בין סכום הסדרה לסכום האיברים במקומות הזוגיים.

נתון כי היחס בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא 5.

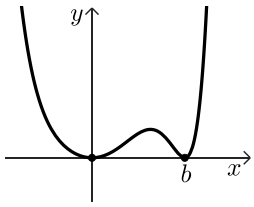
ב. מצאו את q. נמקו.

נתון: $a_2 = 5$.

נסמן: $T = a_2 - a_1 + a_4 - a_3 + a_6 - a_5 + \dots + a_{2n} - a_{2n-1}$.

ג. הביעו את T באמצעות n בלבד.

6) לפניכם גרף הפונקציה $f'(x)$ (נתון כי $f'(0)=0$ וכן $f'(b)=0$):



א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f''(x)$.

הסבירו את שיקוליכם.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ כאשר נתון: $f(b)=0$.

סמנו בגרף את נקודות הפיתול ונקודות הקיצון (אם יש כאלה).

הסבירו את שיקוליכם.

נתון כי אחת מהפונקציות $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ היא: $g(x)=\left(x^3-a\right)^2\cdot x^2$,

a הוא פרמטר.

ג. (1) התאימו את הפונקציה $g(x)$ לאחת מן הפונקציות הנ"ל ונמקו את בחירתכם.

(2) היעזרו בנתונים בשאלה, ובטאו את a באמצעות b.

נתון כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$ ובין ציר ה- x הוא $\frac{1}{9}$.

ד. חשבו את a.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$.

ענו על הסעיפים הבאים עבור התחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. מצאו את האסימפטוטות של $f(x)$ המאונכות לציר ה- x.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

לפניכם שלושה ביטויים:

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$ (2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ (3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$

ו. סדרו אותם מהקטן לגדול. פרטו את שיקוליכם.

ז. חשבו את ערכו של הביטוי הגדול מבין השלושה.

תשובות סופיות:

1) א. שאלת הוכחה ב. שאלה הוכחה.

ג. I. פונקציה זוגית, II. פונקציה זוגית, III. פונקציה לא זוגית ולא אי זוגית ד. גרף ג.

2) א. $\frac{25}{49}$ ב. 0.8 ג. בן.

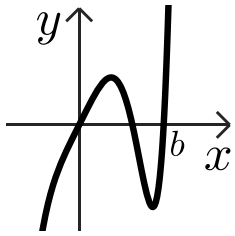
3) א. (1) שאלת הוכחה א. (2) שאלת הוכחה א. (3) שאלת הוכחה ב. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BDA}}=\frac{9}{4}$.

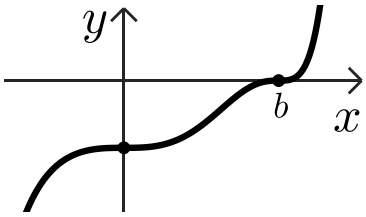
4) א. $AO=\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)}$, $BO=\frac{a\sqrt{2}}{2\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)}$ ב. ראו סרטון.

ג. $\alpha=36.87°$ ד. 10.

5) א. $\frac{q+1}{q}$ ב. $q=5$ ג. $T=\frac{5^{2n}-1}{6}$.

6) א. להלן סרטוט: ב. להלן סרטוט: ג. (1) $g(x)=f'(x)$.

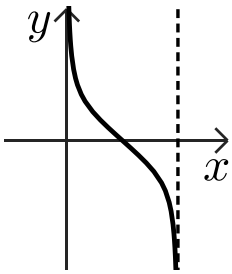




ג. (2) $a=b^3$ ד. $a=1$.

7) א. $0<x<\pi$ ב. $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ ג. ירידה: $0<x<\pi$, עליה: אף x.

ד. $x=\pi$, $x=0$ ה. להלן סרטוט: ו. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx<\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx<\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.



ז. $2-\sqrt[4]{2^3}\approx 0.3182$.