

שאלון 572



תוכן העניינים:

1	פרק 1 - נקודה וישר
1	פרק 2 - המעגל
1	פרק 3 - האליפסה
1	פרק 4 - ההיפרבולה
1	פרק 5 - הפרבולה
1	פרק 6 - מקומות גיאומטרים והוכחות
1	פרק 7 - התיבה והקובייה
1	פרק 8 - המנסרה
1	פרק 9 - הפירמידה
1	פרק 10 - וקטורים גיאומטריים
1	פרק 11 - וקטורים אלגבריים
1	פרק 12 - מספרים מרוכבים
1	פרק 13 - חוקי החזקות והשורשים
1	פרק 14 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
1	פרק 15 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים
1	פרק 16 - בעיות גדילה ודעיכה
1	פרק 17 - פונקציות מעריכיות
1	פרק 18 - פונקציות לוגריתמיות
1	פרק 19 - פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי
1	פרק 20 - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה
1	פרק 21 - פתרון בידאו של בחינות שנת 2026
6	פרק 22 - פתרון בידאו של בחינות שנת 2025
21	פרק 23 - פתרון בידאו של בחינות שנת 2024
35	פרק 24 - פתרון בידאו של בחינות שנת 2023
55	פרק 25 - פתרון בידאו של בחינות שנת 2022
65	פרק 26 - פתרון בידאו של בחינות 2024
69	פרק 27 - פתרון בידאו של בחינות 2023

89	פרק 28 - פתרון בוידאו של בחינות 2022
107	פרק 29 - פתרון בוידאו של בחינות 2021
132	פרק 30 - פתרון בוידאו של בחינות 2020
144	פרק 31 - פתרון בוידאו של בחינות 2019
158	פרק 32 - פתרון בוידאו של בחינות 2018
170	פרק 33 - פתרון בוידאו של בחינות 2017
183	פרק 34 - פתרון בוידאו של בחינות 2016
194	פרק 35 - פתרון בוידאו של בחינות 2015
203	פרק 36 - פתרון בוידאו של בחינות 2014
215	פרק 37 - פתרון בוידאו של בחינות 2013

שאלון 572

פרק 21

פתרון בידאו של בחינות שנת 2026

מועד חורף 1

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונה אליפסה שמשוואתה קנונית. הנקודה $A(2,6)$ נמצאת על האליפסה.

שיעורי המוקד הימני של האליפסה הם $(\sqrt{25.6}, 0)$.

א. מצאו את משוואת האליפסה.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- x .

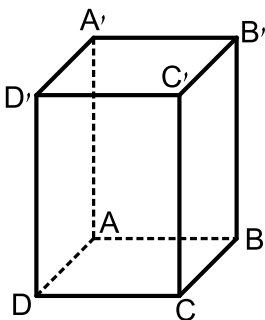
דרך הנקודה A העבירו ישר העובר דרך ראשית הצירים, הנקודה O .

הנקודה C היא נקודה כלשהי על הישר AO . הנקודה P היא אמצע הקטע BC .

ב. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P .

ג. מצאו את משוואת המעגל המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם,

ומשיק לישר AO בנקודה O .



(2) בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCD A'B'C'D'$.

נתון כי משוואת המישור $A'B'C'D'$ היא $x + 4y - 8z - 126 = 0$,

וכי $B(0,7,8)$.

א. מצאו את אורך המקצוע BB' .

נתון כי הצגה פרמטרית של הישר AB היא $\underline{x} = (0,7,8) + t(0,2,1)$.

אורך המקצוע AB הוא $5\sqrt{5}$, ושיעור ה- y של הקודקוד A הוא שלילי.

ב. מצאו את שיעורי הקודקוד A .

ג. מצאו את משוואת המישור $ABB'A'$.

נתונה נקודה $M(k,1,5)$, k הוא פרמטר חיובי.

נתון כי גודל הזווית שבין הישר AB ובין הישר AM הוא 60° .

ד. מצאו את הערך של k (תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).

נתון כי הנקודה M נמצאת על המישור $DCC'D'$.

ה. מצאו את נפח התיבה.





ענו על הסעיפים הבאים: (3)

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות

$$|z - 3i| = \frac{z - \bar{z}}{2i} + 3$$

הוא פרבולה, ומצאו את משוואתה.

נתון מספר מרוכב $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r > 0$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

נתון מצולע קמור I, שקודקדיו מיוצגים על ידי פתרונות המשוואה

$$z, z^4 = \frac{1}{r^4} \cdot (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta))$$

הוא משתנה מרוכב.

ב. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I.

נתון מצולע II, שקודקדיו מיוצגים על ידי המספרים $w, -w, \frac{1}{w}, -\frac{1}{w}$.

ג. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע II.

נתון כי מצולע II הוא מעוין.

ד. מצאו את הערך של θ .

נתון כי הנקודה המייצגת את w נמצאת על המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

ה. מצאו את היחס בין שטח מצולע II ובין שטח מצולע I.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) $f'(x)$ הוא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות בתחום $x \neq 0$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $x > 0$ ובתחום $x < 0$,

וכי $f'(x) \neq 0$ בכל תחום הגדרתה.

א. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

נמקו את תשובתכם.

נתון כי $f(x) = \frac{1}{x}$.

ב. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ-1.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים

$$x = \frac{1}{\ln(5a)} \text{ ו- } x = \frac{1}{\ln a}.$$

ד. מצאו את הערך של a .



5 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} \left(a + \frac{1}{(\ln x)^2} \right)$ הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד בנקודה שבה $x = \frac{1}{e}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 1$ בפונקציה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג-ו.

ג. היא פונקציה שהנגזרת שלה מקיימת $g'(x) = f(x)$.

תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ידוע שלפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול שנמצאת על ציר ה- x .

ג. מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.

בעבור הפונקציה $g(x)$ שמצאתם ענו על הסעיפים ד-ו.

ד. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$

(אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

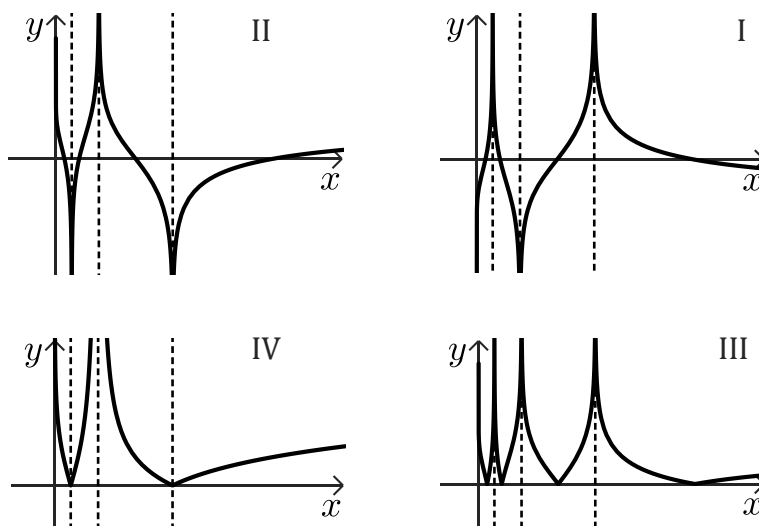
ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x) = \ln|g(x)|$

ו. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) אחד מן הגרפים IV-I שלפניכם מתאר את הפונקציה $h(x)$. קבעו איזה מהם,

ונמקו את קביעתכם.



תשובות סופיות:

א. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{38.4} = 1$ ב. $y = 3x - 12$ ג. $(x - 1.8)^2 + (y + 0.6)^2 = 3.6$ (1)

א. $BB' = 18$ ב. $A(0, -3.3)$ ג. $20x - y + 2z - 9 = 0$ (2)

א. $K = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$ ב. $V = 1,589.04$ ה. (3)

א. $y = \frac{1}{12}x^2$ (או $x^2 = 12y$) (3)

ב. $z_1 = \frac{1}{r}, z_2 = \frac{1}{r} \text{cis}(\theta + 90^\circ), z_3 = \frac{1}{r} \text{cis}(\theta + 180^\circ), z_4 = \frac{1}{r} \text{cis}(\theta + 270^\circ)$

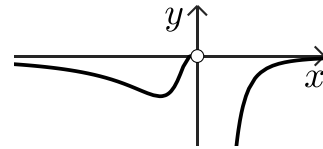
ג. $w = r \text{cis} \theta, -w = r \text{cis}(\theta + 180^\circ), \frac{1}{w} = \frac{1}{r} \text{cis}(-\theta), -\frac{1}{w} = \frac{1}{r} \text{cis}(180^\circ - \theta)$

ד. $\theta = 45^\circ$ ה. $\frac{S_{II}}{S_I} = 288$

(4) א. תחומי שליליות: $x > 0, x < 0$, תחומי חיוביות: x .

ב. (1) אסימפטוטה אופקית: $y = 0$, אסימפטוטה אנכית: $x = 0$ ב. (2) $\min\left(-0.5, -\frac{4}{e^2}\right)$

ג. להלן סרטוט: ד. $a = 3$

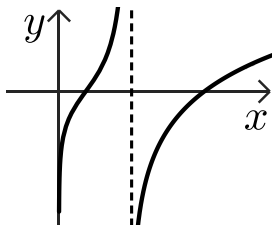


ד. (1) $x = 0, x = 1$

א. $0 < x \neq 1$ ב. $a = 1$ ג. $g(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$ (5)

ה. להלן סרטוט:

ד. (2) $(e, 0), \left(\frac{1}{e}, 0\right)$ (3) תחומי עלייה: $0 < x < 1, x > 1$



ו. (1) $x > 0, x \neq \frac{1}{e}, 1, e$ ג. (2) II.

שאלון 572

פרק 22

פתרון בידאו של בחינות שנת 2025

6	מועד חורף
11	קיץ מועד א
16	קיץ מועד ב

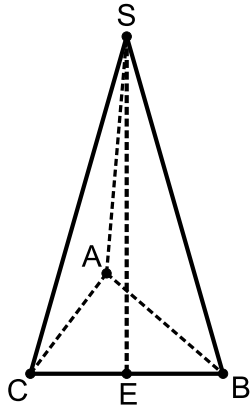
יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

- (1) נתונות הנקודות $A(-9a, 0)$ ו- $B(41a, 0)$. a הוא פרמטר חיובי.
 הנקודה P מקיימת $\sphericalangle APB = 90^\circ$.
 א. הראו כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה נמצא על מעגל, ומצאו את משוואתו. הביעו את תשובתכם באמצעות a .
 נתון כי השטח הגדול ביותר של המשולש APB הוא 156.25.
 ב. מצאו את הערך של a .
 הציבו $a = \frac{1}{2}$ וענו על הסעיפים ג-ד.
 אמצע הקטע AB הוא מוקד של פרבולה שמשוואתה קנונית.
 הפרבולה והמעגל שמצאתם נחתכים ברביע הראשון בנקודה C .
 ג. מצאו את שיעורי הנקודה C .
 הישר ℓ משיק לפרבולה בנקודה C .
 מעבירים משיק למעגל שמצאתם.
 נתון כי משיק זה מקביל לישר ℓ .
 ד. מצאו את המרחק בין הישר ℓ לבין המשיק למעגל (מצאו את שתי האפשרויות).





(2) בסרטוט שלפניכם פירמידה משולשת SABC.

הנקודה E היא אמצה המקצוע BC.

$$\vec{EC} = \underline{v}, \vec{AE} = \underline{u}$$

$$\text{נתון: } |\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$$

א. הוכיחו כי \vec{AE} מאונך ל- \vec{BC} .

נתון: הקטע SE הוא גובה בפירמידה והאורך שלו הוא 20.

$$B(6, 8, 0), A(0, 0, 0)$$

הקודקוד C נמצא על החלק החיובי של ציר ה-x, ושיעור ה-z של הקודקוד S הוא חיובי.

ב. מצאו את שיעורי הקודקודים S ו-C.

$$\text{הנקודה F נמצאת על המקצוע SC כך ש- } \vec{SF} = \frac{1}{4} \vec{SC}$$

דרך הנקודה F מעבירים ישר המקביל לישר AC, וחותר את המישור ABS בנקודה M.

ג. (1) מצאו הצגה פרמטרית של הישר FM.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה M.

ד. מצאו פי כמה גדול נפח הפירמידה MABC מנפח הפירמידה FAEC. נמקו את תשובתכם.



(3) נתון המספר המרוכב $w = r(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$, $r > 0$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

$$\text{א. הביעו באמצעות } r \text{ ו- } \theta \text{ הצגה קוטבית של המספר } \frac{1}{w}$$

הנקודה A במישור גאוס מייצגת את המספר w , והנקודה B מייצגת את המספר $\frac{1}{w}$.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

נתון כי שטח המשולש AOB הוא $\frac{\sqrt{2}}{4}$ והזווית AOB היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של θ .

$$\text{נתונות שתי משוואות: I. } z^8 = w^8 \quad \text{II. } z^8 = (w \cdot \bar{w})^4$$

z הוא מספר מרוכב.

נתון מצולע קמור שקודקודיו הם כל הנקודות המייצגות את הפתרונות של משוואה I

וכל הנקודות המייצגות את הפתרונות של משוואה II.

ג. (1) מצאו כמה קודקודים יש למצולע.

(2) האם כל קודקודי המצולע נמצאים על מעגל אחד שמרכזו בראשית הצירים?

נמקו את תשובתכם.

נתון כי שטח המצולע הוא 49.

ד. מצאו את הערך של r.



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^x - \frac{1}{1-e^x}$. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$.

א. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם הצירים? נמקו את תשובתכם.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = -x + \ln(e^x - 1)$

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הראו כי $g'(x) = f(x) - e^x$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

בנקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x .

ד. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך

ועל ידי הישר $x = \ln(b)$. $b > 2$ הוא פרמטר. הביעו את תשובתכם באמצעות b .

נתון כי השטח שמצאתם בסעיף ד שווה ל- $b - 2 + \ln(1.8)$.

ה. מצאו את הערך של b .



5 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a + \ln(x)}{x}$, המוגדרת בתחום $x > 0$, a הוא פרמטר.

- א. בתת סעיפים (1)-(3) הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.
 (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 (3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.
 ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, המוגדרת בתחום $x \neq 0$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף הפונקציה $g(x)$ נחתכים בנקודה שבה $x = e^2$.
 ג. מצאו את הערך של a .

הציבו את הערך של a שמצאתם וענו על סעיפים ד-ה.

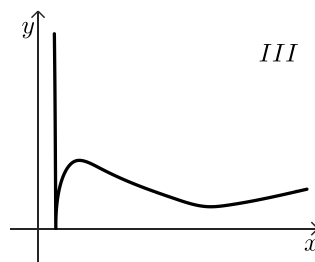
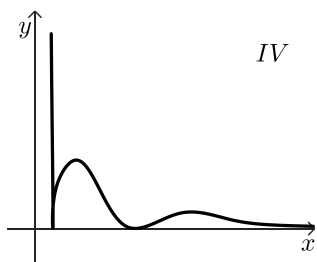
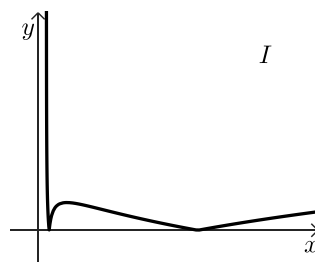
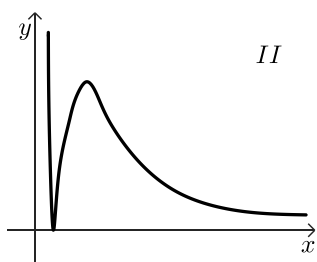
נתונה הפונקציה $h(x)$, המוגדרת בתחום $x > 0$.

גרף הפונקציה $h(x)$ עובר בנקודה $(e^3, -1.5)$.

נגזרת הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h'(x) = f(x) - g(x)$.

ד. מצאו את הפונקציה $h(x)$.

ה. קבעו איזה גרף מבין הגרפים I-IV מייצג את הפונקציה $|h(x)|$. נמקו את תשובתכם.



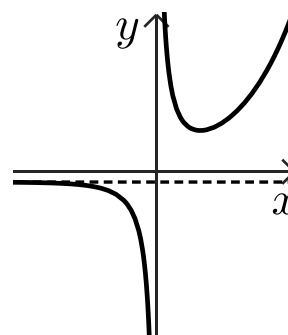
תשובות סופיות:

- (1) א. ראו סרטון ב. $a = 0.5$ ג. $C(4.5, 12)$ ד. 2.5 או 22.5
 (2) א. הוכחה ב. $S(8, 4, 20)$, $C(10, 0, 0)$ ג. (1) $\bar{x} = (8.5, 3, 15) + t(1, 0, 0)$ ד. פי 2
 ג. (2) $M(6, 3, 15)$

- (3) א. $\frac{1}{w} = \frac{1}{r} \cdot \text{cis}(-\theta)$ ב. $\theta = 157.5^\circ$ ג. (1) 16 פתרונות ג. (2) כן.
 ד. $r \approx 4$

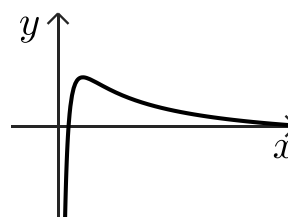
- (4) א. (1) $x = 0$, $y = -1(x \rightarrow -\infty)$ א. (2) אין א. (3) $\min(\ln 2, 3)$
 ב. להלן סרטוט: ג. (1) $x > 0$ ג. (2) ראו סרטון ד. $\ln \frac{2(b-1)}{b} + b - 2$

ה. $b = 10$



- (5) א. (1) $y = 0(x \rightarrow +\infty)$, $x = 0$ א. (2) $(\frac{1}{e^a}, 0)$ א. (3) $\max(e^{1-a}, e^{a-1})$

- ב. להלן סרטוט: ג. $a = -1$ ד. $h(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} - 2 \ln x$ ה. גרף I.



יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים



(1) נתון מעגל I שמשוואתו היא $x^2 - 6x + y^2 + t = 0$. הוא פרמטר קטן מ-9.

א. הביעו באמצעות t את רדיוס המעגל.

הישר $y = x$ משיק למעגל.

ב. מצאו את הערך של t .

הזיזו את מעגל I שמאלה כך שהתקבל מעגל II שמרכזו בראשית הצירים 0.

A היא נקודה כלשהיא על מעגל II כך ש- $-1.5 \leq y_A \leq 1.5$.

דרך הנקודה A מעבירים מיתר AB המאונך לציר ה- y .

נקודה P נמצאת על המיתר AB כך שמתקיים $AB = 2 \cdot PO$.

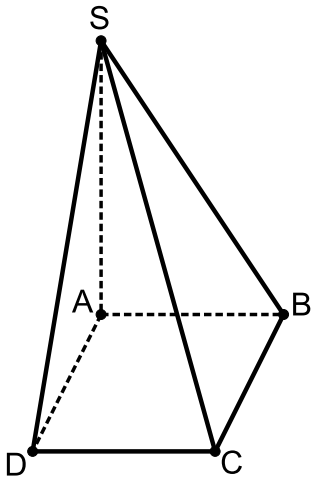
ג. הראו כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה נמצא על אליפסה, ומצאו את משוואתה.

הנקודה K היא המוקד הימני, והנקודה F היא המוקד השמאלה של האליפסה שמצאתם בסעיף ג.

C היא נקודה כלשהיא על האליפסה כך שמתקבל משולש CKF.

ד. חשבו את היקף המשולש CKF.

ה. האם קיימת נקודה C שבעבורה שטח המשולש CKF הוא 3? נמקו את תשובתכם.



(2) נתונה פירמידה SABCD שבסיסה ABCD הוא מקבילית. SA הוא גובה הפירמידה.

הנקודה M היא אמצע האלכסון BD.

נסמן: $\vec{AS} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

א. הביעו באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את הווקטור \vec{SM} .

נתון כי \vec{SM} מאונך ל- \vec{DB} .

ב. הוכיחו כי $|\underline{u}| = |\underline{v}|$.

נתון: $S(0,0,6)$, $B(0,5,0)$, $A(0,0,0)$

$p > 0$, $D(3,p,0)$

ג. מצאו את שיעורי הנקודות D ו- C.

דרך האלכסון AC מעבירים מישור המקביל למקצוע SD.

המישור חותך את המקצוע SB בנקודה K.

ד. מצאו את משוואת המישור.

ה. לפניכם שתי טענות I-II. קבעו בעבור כל אחת מן הטענות אם היא נכונה או לא נכונה.

נמקו את קביעותיכם.

I הישר KM מקביל לישר SD.

II כל ישר שמאונך למישור ACK, מאונך לישר SD.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הביעו באמצעות x ו- y את משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$

במישור גאוס המקיימות $|\underline{z}| = |z - (2 + 2i)|$.

z הוא משתנה מרוכב.

נתונה המשוואה $z^2 - z(2 + 2i) + 4i = 0$.

A ו- B הן נקודות המיוצגות על ידי שני פתרונות המשוואה.

ב. הראו כי הנקודות A ו- B נמצאות על המקום הגיאומטרי שמצאתם בסעיף א.

הנקודות C ו- D נמצאות על הצירים כך ש- ABCD הוא ריבוע.

סובבו את הריבוע ABCD סביב ראשית הצירים נגד כיוון השעון בזווית α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$).

כל שמונה הנקודות (הנקודות A, B, C, D וארבע הנקודות שהתקבלו אחרי הסיבוב) מיוצגות

על ידי פתרונות של המשוואה $z^n = b$ שבה n הוא מספר טבעי ו- b הוא מספר ממשי.

ג. (1) מצאו את הערך של b ואת הערך של α בעבור $n = 8$.

(2) מצאו ערך אפשרי של n בעבור $\alpha = 15^\circ$, ומצאו את הערך של b המתאים לו.



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



4 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{a - e^x}$, הוא פרמטר שונה מ-0.

א. ענו על התת סעיפים (1)-(3) בעבור $a > 0$ ובעבור $a < 0$.
הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.
(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- y של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקציה $f(x)$ בעבור $a = 3$

ואיזה מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$ בעבור $a = -3$. נמקו את קביעותיכם.

הציבו $a = 3$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג-ה.

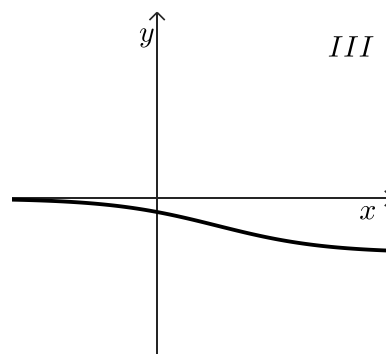
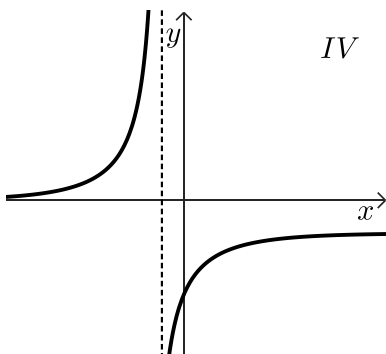
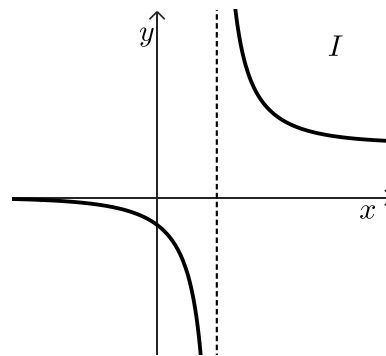
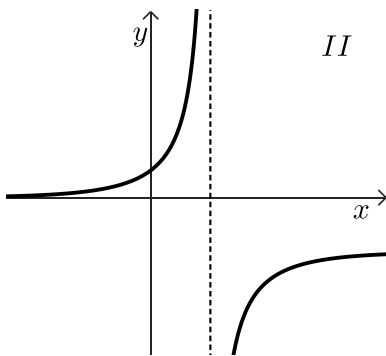
נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x) + 2}$

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. לפניכם טענה: $\int_{-4}^{-2} g(x) dx > \int_2^3 g(x) dx$. האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.



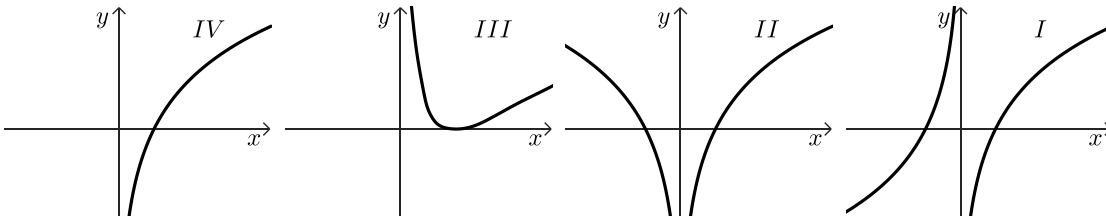


5 נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x^n)$, n הוא מספר טבעי זוגי.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) לפיכם ארבעה גרפים, IV-I. קבעו איזה מהם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.



הציבו $n = 2$ בפונקציה $f(x)$, וענו על סעיפים ב-ד.

נתונה הפונקציה: $g(x) = (f(x))^2 - 4$ המוגדרת לכל $x \neq 0$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה $k(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ בתחום $x > 0$.

ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $k(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $k(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי

הישרים $x = e^2$ ו- $x = e^3$.

תשובות סופיות:

(1) א. $r = \sqrt{9-t}$ ב. $t = 4.5$ ג. $\frac{x^2}{4.5} + \frac{y^2}{2.25} = 1$ ד. $3 + 3\sqrt{2} \approx 7.243$ ה. ל.א.

(2) א. $\overline{SM} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}$ ב. הוכחה ג. $C(3,9,0), D(3,4,0)$

ד. $18x - 6y + 5z = 0$ ה. I. הטענה נכונה, II. הטענה נכונה.

(3) א. $y = -x + 2$ ב. ראו סרטון ג. $\alpha = 45^\circ, b = 256$ (1)

ג. $b = 2^{24t}, n = 24t$ או $b = 2^{24}, n = 24$ (2)

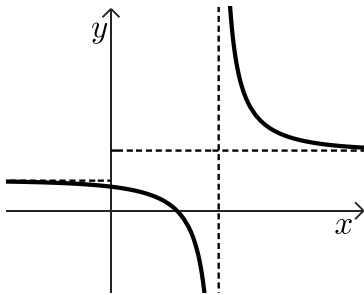
(4) א. עבור $a > 0: a \neq \ln a, x \neq \ln a$, עבור $a < 0$: כל x .

א. (2) $y = 0 (x \rightarrow -\infty), y = -1 (x \rightarrow +\infty)$

א. (3) עבור $a > 0$: עליה: $x > \ln a, x < \ln a$, עבור $a < 0$: ירידה לכל x .

ב. עבור $a = 3$: גרף II, עבור $a = -3$: גרף III ג. $\ln 6, \ln 3, x \neq \ln 3$

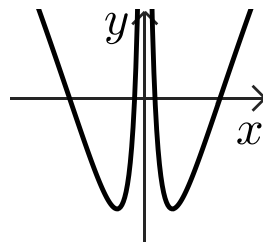
ג. (2) $x = \ln 6, y = \frac{1}{2} (x \rightarrow -\infty), y = 1 (x \rightarrow +\infty)$ ד. להלן סרטוט:



ה. הטענה לא נכונה.

(5) א. (1) $x \neq 0$ א. (2) גרף II ב. $(-e, 0), (-\frac{1}{e}, 0), (\frac{1}{e}, 0), (e, 0)$ (1)

ב. (2) $\min(-1, -4), (1, -4)$ ג. להלן סרטוט: ד. $x > 0, x \neq \frac{1}{e}, x \neq e$



ד. $\ln\left(2\frac{2}{3}\right)$ (2)

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונה אליפסה שמשוואתה היא $\frac{x^2}{25k^2} + \frac{y^2}{16k^2} = 1$. k הוא פרמטר חיובי.



הנקודה F היא המוקד הימני של האליפסה.

נתון מעגל שמרכזו בנקודה F והוא עובר בנקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- x .

א. הביעו באמצעות k את משוואת המעגל.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- y .

הנקודה D היא נקודת החיתוך של הקטע BF עם המעגל.

ב. (1) מצאו את היחס בין הקטע BD ובין הקטע DF.

(2) הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה D.

ג. הביעו באמצעות k את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

בונים ריבוע שאורך הצלע שלו הוא 15.

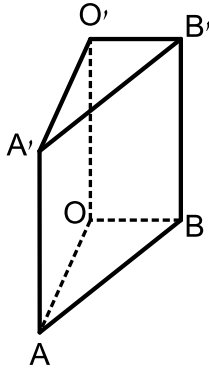
אחת מצלעות הריבוע נמצאת על המשיק שאת משוואתו מצאתם בסעיף ג.

הנקודה B נמצאת בתוך הריבוע.

ד. הביעו באמצעות k את משוואת הישר שעליו נמצאת צלע הריבוע המקבילה למשיק.

נתון כי הנקודה B היא נקודת המפגש של אלכסוני הריבוע.

ה. מצאו את הערך של k .



(2)

בסרטוט שלפניכם מנסרה ישרה $A'O'BA$.
שבסיסה AOB הוא משולש ישר זווית $\angle AOB = 90^\circ$.
הנקודה K היא אמצע המקצוע AB .

הנקודה E נמצאת על הקטע $O'B$ כך ש- $\overline{O'E} = \frac{1}{3} \cdot \overline{O'B}$.

הנקודה N נמצאת על הקטע AE כך ש- $\overline{AN} = \frac{3}{4} \cdot \overline{AE}$.

נסמן: $\overline{OO'} = \underline{w}$, $\overline{OB} = \underline{v}$, $\overline{OA} = \underline{u}$.

א. (1) הביעו באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} את $\overline{O'N}$.

(2) הוכיחו כי הנקודות O' , N , K נמצאות על ישר אחד, ומצאו את היחס בין $O'K$ ובין $O'N$.

נתון: $E(0,1,6)$, $A(4,0,0)$, $O(0,0,0)$.

הקודקוד B נמצא על החלק החיובי של ציר ה- y , והקודקוד O' נמצא על החלק החיובי של ציר ה- z .

ב. מצאו את שיעורי הנקודות N ו- B .

ג. מצאו את משוואת המישור $A'KB'$.

ד. (1) מצאו את המרחק בין הנקודה N ובין המישור $A'KB'$.

(2) מצאו את נפח הפירמידה $NA'KB'$.

(3)

נתונים שני מספרים מרוכבים z_1 ו- z_2 שמכפלתם היא $-19 + 4i$.

$$z_1 = 2 + 3i$$

א. מצאו את המספר z_2 .

נתונה המשוואה $w^3 = z_1 + z_2$, w הוא משתנה מרוכב.

ב. מצאו את פתרונות המשוואה.

נתון מספר מרוכב $z = 2(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$, $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

נתון כי המספרים z ו- z^3 נמצאים על ישר אחד שעובר בראשית הצירים.

ג. מצאו את ארבע האפשרויות של המספר z .

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב וארבעת המספרים שמצאתם בסעיף ג,

מייצגים את כל הקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ד. (1) סרטטו את המצולע במערכת צירים.

(2) חשבו את השטח של המצולע.

נתון מספר מרוכב: $3(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$.

מכפילים כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע במספר מרוכב זה,

כך שנוצר מצולע חדש.

ה. מצאו פי כמה גדול שטח המצולע החדש משטח המצולע שמצאתם בסעיף ד.





4 נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} + b$, המוגדרת לכל x .

b הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים (1)-(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y .

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 1.5$.

ב. מצאו את הערך של b (מצאו את שתי האפשרויות).

הציבו בפונקצייה $f(x)$ את הערך של b הקטן ביותר שמצאתם, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y היא אחת משתי נקודות הפיתול

של הפונקצייה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת לכל x .

ד. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים

(אם יש כאלה).

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. לפניכם טענה: $\int_0^1 (f(x) - 1.5) dx > \frac{1}{e-1}$.

האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.



5 נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{1 + \ln(x)}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x של הפונקצייה $f(x)$.
 (3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה: $g(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)}$.

- ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.
 נתון הביטוי $\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx$, k הוא פרמטר גדול מ-1.
 ה. (1) קבעו איזה מן הביטויים I-II שווה לערך של הביטוי הנתון. נמקו את קביעתכם.
 I. $k + \ln(k)$ II. $k + \ln 2$
 (2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ על ידי ציר ה- x
 ועל ידי הישרים $x = e^3$ ו- $x = e^6$.

תשובות סופיות:

1. א. $(x-3k)^2 + y^2 = 4k^2$ ב. (1) $BD:DF = 3:2$ ג. (2) $D(1.8k, 1.6k)$

ג. $-3x + 4y - k = 0$ ד. $-3x + 4y - k - 75 = 0$ ה. $k = 2.5$

2. א. (1) $\overline{O'N} = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v - \frac{1}{2}w$ ב. (2) הוכחה ב. $N(1, 0.75, 4.5)$, $B(0, 3, 0)$

ג. $3x + 4y - 12 = 0$ ד. (1) 1.2 ד. (2) 0.9

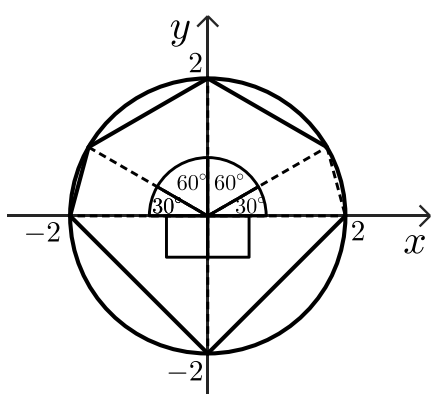
3. א. $z_2 = -2 + 5i$

ב. $w_0 = 2cis30^\circ = \sqrt{3} + i$, $w_1 = 2cis150^\circ = -\sqrt{3} + i$, $w_2 = 2cis270^\circ = -2i$

ג. $z = -2i, 2i, -2, 2$ ד. (1) להלן סרטוט:

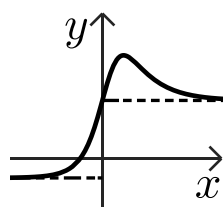
ד. $6 + 2\sqrt{3}$ (2)

ה. פי 9.



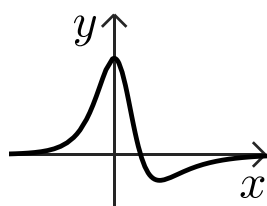
4. א. (1) $y = 1 + b(x \rightarrow +\infty)$, $y = -1 + b(x \rightarrow -\infty)$ ב. (2) $(0, 1+b)$

ג. להלן סרטוט: $b = 0.5, 2.5$ א. (3) $\max\left(1, \frac{e+1}{e-1} + b\right)$



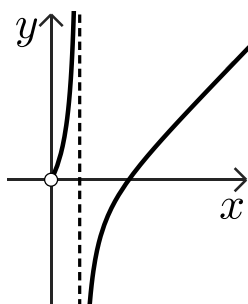
ד. (1) $y = 0 (x \rightarrow \pm\infty)$ ד. (2) להלן סרטוט:

ה. הטענה נכונה.



5. א. (1) $x > 0, x \neq \frac{1}{e}$ א. (2) $x = \frac{1}{e}$ א. (3) $(1, 0)$

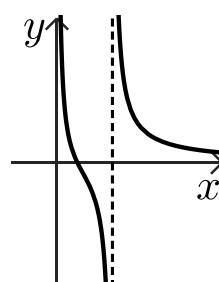
ב. עלייה: $x > \frac{1}{e}$, $0 < x < \frac{1}{e}$ ירידה: אף x ג. להלן סרטוט:



ד. (1) $x > 0, x \neq 1$ ד. (2) $x = 0, x = 1, y = 0$

ה. (1) ביטוי II: ד. (3) להלן סרטוט:

ה. (2) $\ln 2 + 3$



שאלון 572

פרק 23

פתרון בידאו של בחינות שנת 2024

21	מועד חורף
25	קיץ מועד א
30	קיץ מועד ב

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle BAC = 90^\circ$), שיעורי הקודקוד A הם: $(a, 0)$,

a הוא פרמטר שונה מאפס. שיעור ה- x של הקודקוד B הוא $-a$.
 הצלע BC מקבילה לציר ה- x . הנקודה M היא אמצע הצלע BC .

א. הביעו באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל הנקודות M .

ב. סרטטו את העקום המתואר על ידי המשוואה שמצאתם בסעיף א.

סרטטו את שתי האפשרויות במערכת צירים אחת.

באחת מן הנקודות M , שנמצאת ברביע הראשון, העבירו ישר ℓ המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

ג. הוכיחו כי הישר ℓ מקביל לישר AC .

נתון גם כי: $AM = 10$ (הנקודה M נמצאת ברביע הראשון), והקודקוד B נמצא על הישר: $x = -2$.

ד. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו- C .

דרך הקודקוד A העבירו מעגל המשיק לישרים ℓ ו- AC .

ה. מצאו את שיעורי מרכז המעגל.



(2) נתונים הישר ℓ והמישור π .

ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ היא: $\underline{x} = (-1, 5, -11) + t \cdot (m - 1, 5 - m, -2)$

משוואת המישור π היא: $3x + my + (m + 6)z + 4 = 0$. הוא פרמטר.

א. הראו כי לכל ערך של m הישר ℓ אינו מקביל למישור π .

נתון כי הישר ℓ ניצב למישור π וחותר אותו בנקודה A .

ב. מצאו את הערך של הפרמטר m .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A .

ד. לפניכם טענה: קיים מישור אחד בלבד המכיל את הישר ℓ ועובר דרך

הנקודה $(5, -5, -9)$. קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.





- (3) $z = x + yi$ הוא מספר מרוכב (x ו- y הם מספרים ממשיים).
 א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x, y) במישור גאוס המקיימות: $|9 + 12i| = |10i| - |6 - \bar{z} - 8i|^2$ הוא מעגל.
 הנקודה M היא מרכז המעגל המתואר בסעיף א.
 המספרים המרוכבים z_A ו- z_M מייצגים את הנקודות A ו- M , בהתאמה.
 נתון: למספרים z_A ו- z_M יש אותו ארגומנט (זווית), $2|z_A| = |z_M|$.
 ב. מצאו את שיעורי הנקודה A .
 נתונה סדרה הנדסית: z_1, z_2, z_3, \dots .
 האיבר הראשון בסדרה מייצג את הנקודה A , והאיבר החמישי בסדרה מייצג את הנקודה M .
 ג. מצאו את מנת הסדרה (כל האפשרויות).
 ד. חשבו את הסכום: $z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + \dots + z_{10} \cdot \bar{z}_{10}$.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

- (4) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a - x^2}{e^x}$, $g(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$ המוגדרות לכל x .
 a הוא פרמטר.



- א. מצאו את הערך של a שבעבורו: $f(x) = g'(x)$ לכל ערך של x .
 הציבו את הערך של a שמצאתם, וענו על הסעיפים ב-ה שלפניכם.
 ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.
 (3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, וקבעו את סוגן.
 ג. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצות של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הפונקציה $g(x)$.
 ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .
 ה. חשבו את הערך של הביטוי: $\int_1^2 \left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^4} \right) \cdot \left(\frac{x^2-1}{e^x} \right) dx$



5 בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של הפונקציה: $f(x) = \ln(x)$

המוגדרת בתחום: $x > 0$, ומתוארים הישרים: $y = x$ ו- $y = -x$.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם אחד מן הישרים.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- a .

היעזרו בסרטוט, וענו על הסעיפים א-ה שלפניכם.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{\ln(x) - x}{\ln(x) + x}$

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x

(אם יש כאלה).

(3) מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x של הפונקציה $g(x)$.

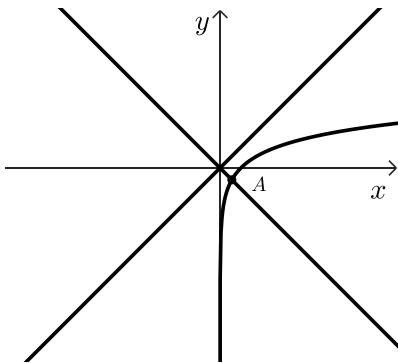
ב. הסבירו מדוע מתקיים: $0 < a < 1$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה: $h(x) = e^{g(x)}$



תשובות סופיות:

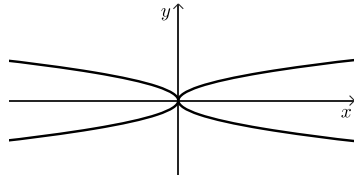
ג. הוכחה.

ב. להלן סרטוט:

א. $y^2 = 4ax$ (1)

ד. $B(-2,8)$, $C(18,8)$

ה. $(1,2)$



א. הוכחה. (2) ב. $m = -5$ ג. $A(2,0,-10)$ ד. לא נכונה.

א. הוכחה. (3) ב. $Z_A = 3 + 4i$

ג. $q_0 = \sqrt[4]{2}$, $q_1 = \sqrt[4]{2}i$, $q_2 = -\sqrt[4]{2}$, $q_3 = -\sqrt[4]{2}i$ ד. $S_{10} = 1871.02$

א. $a = 1$ (4) ב. (1) ציר y : $(0,1)$, ציר x : $(-1,0)$, $(1,0)$

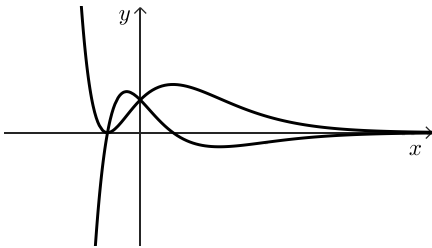
ב. (2) ציר y : $(0,1)$, ציר x : $(-1,0)$

ב. (3) $g(x)$: $\max\left(1, \frac{4}{e}\right)$, $\min(-1,0)$

ג. להלן סרטוט:

$f(x)$: $\min(1 + \sqrt{2}, -0.431)$, $\max(1 - \sqrt{2}, 1.253)$

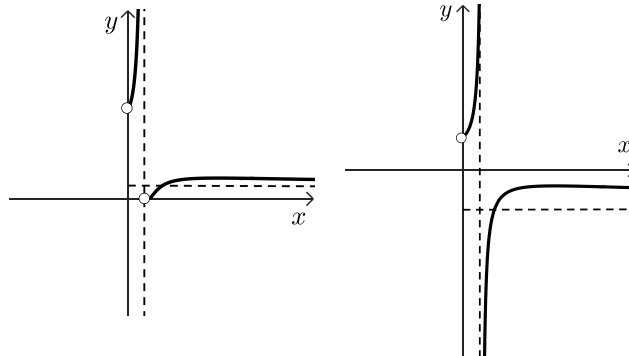
ה. $\frac{4}{e}$ ד. 0.14



א. (1) $\alpha \neq x > 0$ א. (2) אין חיתוך א. (3) $y = -1$ עבור: $x \rightarrow \infty$ ב. הסבר. (5)

ג. (1) $\max\left(e, \frac{1-e}{1+e}\right)$ א. (2) תחומי עלייה: $a < x < e$, $0 < x < a$, תחומי ירידה: $x > e$

ד. להלן סרטוט: ה. להלן סרטוט:



יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

1) נתון מעגל I שמשוואתו: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$, ומרכזו בנקודה K.

נתון מעגל II שמשוואתו: $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 1$, ומרכזו בנקודה L.

הנקודה A נמצאת על מעגל I, והנקודה B נמצאת על מעגל II.

מעבירים משיק למעגל I דרך הנקודה A ומשיק למעגל II דרך הנקודה B.

שני המשיקים נחתכים בנקודה M.

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M המקיימות $MA = MB$ הוא קו ישר, ומצאו את משוואתו.

ב. (1) הראו כי הישר שאת משוואתו מצאתם בסעיף א והישר KL מאונכים זה לזה.

(2) האם קיימת נקודה M שמתקיים בעבורה $ML = MK$? נמקו את תשובתכם.

נתון כי בעבור אחת מן הנקודות M, הנמצאת מעל הישר KL,

שטח המשולש KLM הוא 9.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה M.

הנקודה M שמצאתם בסעיף ג נמצאת על הפרבולה: $y^2 = 2px$, p הוא פרמטר.

ד. מצאו את משוואת המשיק לפרבולה בנקודה M.





(2) נתונים שני ישרים l_1 ו- l_2 . לפניכם הצגה פרמטרית של כל אחד מן הישרים:

$$l_1: \underline{x} = t(-1, 3, 0), \quad l_2: \underline{x} = (1, -3, 0) + m(0, k, 1)$$

k הוא פרמטר. הנקודה A היא נקודת החיתוך של הישרים l_1 ו- l_2 .

א. מצאו את שיעורי הנקודה A. נסמן ב- α את הזווית בין הישרים l_1 ו- l_2 .

ב. מצאו את הערך של k שבעבורו מתקיים: $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

הציבו: $k = 2$, וענו על הסעיפים ג-ה.

המישור π מכיל את הישרים l_1 ו- l_2 .

ג. מצאו את משוואת המישור π .

הנקודה B נמצאת על הישר l_2 , והנקודה O היא ראשית הצירים.

המשולש AOB הוא שווה שוקיים, $AO = AB$.

ד. הסבירו מדוע המשולש AOB נמצא במישור π .

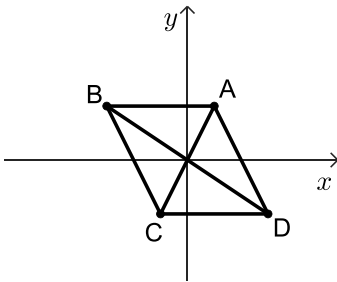
מן הנקודה A מעלים אנך למישור π ומסמנים עליו את הנקודה S.

נתון: נפח הפירמידה SAOB הוא: $\frac{14\sqrt{2}}{3}$.

ה. מצאו את שיעורי הנקודה S (את שתי האפשרויות).



(3) במעוין ABCD הקודקוד A נמצא ברביע הראשון, והקודקוד B נמצא ברביע השני במישור גאוס.



אלכסוני המעוין נפגשים בראשית הצירים.

המספר המרוכב z מייצג את הקודקוד A. נתון: $BD = 2AC$.

א. הביעו באמצעות z את המספרים שמייצגים את

הקודקודים B, C ו-D. נסמן: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

ב. ענו על התת-סעיפים (1) ו-(2).

הביעו את תשובותיכם באמצעות r ו- θ אם יש צורך.

(1) כתבו הצגה קוטבית של ארבעת המספרים ההופכיים $\left(\frac{1}{z}, \dots\right)$

למספרים המייצגים את קודקודי המעוין.

(2) ארבעת המספרים שמצאתם בתת-סעיף ב(1) מייצגים קודקודים של מרובע.

מצאו את שטח המרובע שנוצר על ידי קודקודים אלה.

ג. נתונה המשוואה: $w^{11} = \bar{w}$, w הוא מספר מרוכב השונה מ-0.

מצאו את סכום 12 הפתרונות של המשוואה.

פתרונות המשוואה שבסעיף ג מייצגים קודקודים של מצולע ששטחו שווה לשטח המרובע

שמצאתם בתת-סעיף ב(2).

ד. מצאו את הערך של r .

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - b}{(e^x - 4)^2}$, b הוא פרמטר חיובי, $b \neq 4$.



א. ענו על התת-סעיפים (1)-(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b אם יש צורך.
(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה: $x = \ln(12)$.

ב. מצאו את הערך של b , ואת סוג נקודת הקיצון.

הציבו בפונקציה $f(x)$ את הערך של b שמצאתם, וענו על הסעיפים ג-ו.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים.

ד. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה

של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. מהו שיעור ה- y של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף

הפונקציה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

ו. קבעו האם הערך של: $\int_{-2}^{-1} (f(x) - g(x)) dx$ קטן או גדול מ- $1\frac{1}{2}$. נמקו את קביעתכם.



5 נתונה הפונקציה: $f(x) = x((\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 2)$, המוגדרת בתחום: $x > 0$.

א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונות הפונקציות: $g(x) = (\ln(x))^2 - 4$, $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, המוגדרות בתחום: $x > 0$.

ה. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

דרך נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x העבירו אנכים לציר ה- x .

ו. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי גרף הפונקציה $h(x)$

ועל ידי האנכים.

תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה, $y = -4x - 3$ ב. (1) הוכחה. ב. (2) לא.

ג. $M(-2, 5)$ ד. $5x + 4y - 10 = 0$

(2) א. $A(1, -3, 0)$ ב. $k = \pm 2$ ג. $3x + y - 2z = 0$

ד. הוכחה. ה. $S(-5, -5, 4)$ או $S(7, -1, -4)$

(3) א. $D = -2iz$, $C = -z$, $B = 2iz$

ב. (1) $\frac{1}{r} \text{cis}(-\theta)$, $\frac{1}{2r} \text{cis}(-\theta - 90^\circ)$, $\frac{1}{r} \text{cis}(-\theta - 180^\circ)$, $\frac{1}{2r} \text{cis}(-\theta - 270^\circ)$

ב. (2) $S = \frac{1}{r^2}$ ג. הוכחה. ד. $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$

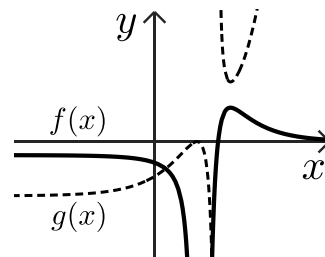
(4) א. (1) $x \neq \ln 4$

א. (2) אנכית: $x = \ln 4$, אופקית: $y = 0$ עבור: $x \rightarrow \infty$, $y = -\frac{b}{16}$ עבור: $x \rightarrow -\infty$

א. (3) ציר y : $\left(0, \frac{1-b}{9}\right)$, ציר x : $(\ln b, 0)$ ב. $b = 8$

ג. (2) אנכית: $x = \ln 8$, אופקית: $y = -2$ עבור: $x \rightarrow -\infty$

ד. להלן סרטוט: ה. $y = -1$ וקטן.

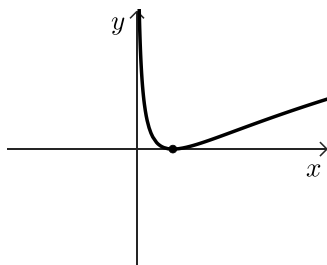
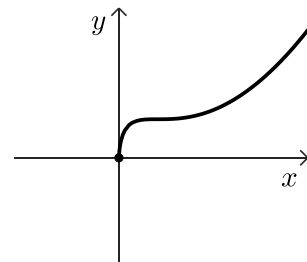


(5) א. תחומי עלייה: $x > 0$, תחומי ירידה: אף x ב. (1, 2)

ג. חיוביות: $x > 0$, שליליות: אף x ד. (2) להלן סקיצה:

ה. $S = 15.59$

ו. $S = 28.923$

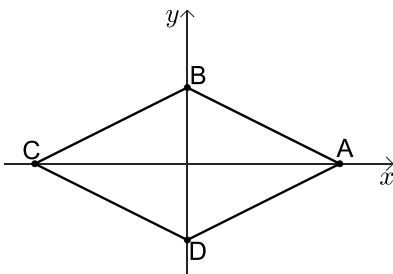


יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים



(1) נתון מעוין ABCD. אלכסוני המעוין מונחים על הצירים,

כמתואר בסרטוט שלפניכם.

נתון: אורך האלכסון AC הוא 10.

המרחק של כל אחת מצלעות המעוין מראשית הצירים

הוא $\sqrt{5}$.

א. מצאו את משוואת הצלע AB.

בתוך המעוין חסום מעגל.

ב. מצאו את משוואת המעגל.

הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל והמעוין ברביע הראשון.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה M.

מן הנקודה M מורידים אנך לציר ה-x החותך אותו בנקודה $K(a,0)$.

על הישר: $x = -a$ מסמנים נקודה E ומעבירים דרכה ישר המקביל לציר ה-x.

הישר המקביל חותך את האנך האמצעי לקטע EK בנקודה G.

ד. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות G המתקבלות באופן זה

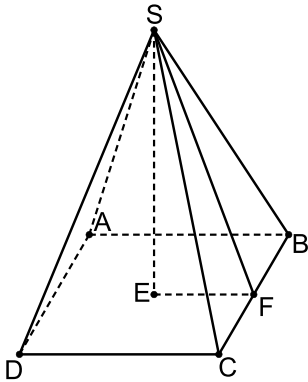
נמצא על פרבולה, ומצאו את משוואתה.

הנקודה N נמצאת ברביע הראשון על הפרבולה שאת משוואתה מצאתם.

שיעור ה-x של הנקודה N הוא 16.

ה. מצאו את משוואות שני המעגלים שמרכזם בנקודה N והם משיקים

למעגל החסום במעוין.



(2) בסרטוט שלפניכם פירמידה SABCD שבסיסה ABCD הוא ריבוע.

הנקודה E היא מפגש אלכסוני הבסיס, והנקודה F היא אמצע המקצוע BC.

נסמן: $\vec{SE} = \underline{u}$, $\vec{SF} = \underline{v}$, $\vec{SB} = \underline{w}$.

א. הביעו באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את הווקטורים \vec{BC} ו- \vec{DC} .
הקטע SE הוא גובה הפירמידה.

נתון: $|\underline{u}| = 8$.

ב. מצאו את הערך של $\underline{u} \cdot \underline{w}$.

נתון: $\vec{BA} = (-3, 4, 5)$.

ג. מצאו את גודל הזווית שבין SB ובין הבסיס של הפירמידה.

נתון: $E(0, 4, 5)$, מישור הבסיס ABCD מקביל לציר z.

ד. מצאו את משוואת המישור שעליו מונח הבסיס של הפירמידה.

נתון: שיעור ה-x של הקודקוד B הוא 3.

ה. מצאו את שיעורי הקודקוד B.



(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. (1) מצאו את פתרונות המשוואה: $z^6 + 729i = 0$ (z הוא מספר מרוכב).

(2) מצאו את ארבעת הפתרונות של המשוואה: $\frac{z^6 + 729i}{z^2 - 9i} = 0$

(z הוא מספר מרוכב).

הפתרונות שמצאתם בתת-סעיף א(2) מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ב. מצאו את שטח המרובע.

מסובבים את המרובע (סביב הראשית) בזווית α נגד כיוון השעון, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

ג. מהו הערך של מכפלת כל המספרים המייצגים את קודקודי המרובע בעבור: $\alpha = 45^\circ$?

נמקו את תשובתכם.

ד. (1) מצאו את שני הערכים של α כך שמכפלת כל המספרים המייצגים

את קודקודי המרובע לאחר הסיבוב תהיה מספר מדומה טהור.

(2) מהו הערך של המכפלה בעבור כל אחד מן הערכים של α שמצאתם?



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



4 נתונה הפונקציה: $k(x) = xe^x$, ונתונה הפונקציה: $m(x) = 2e^x - 1$, המוגדרות לכל x .

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y בעבור כל אחת

מן הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מן הפונקציות $k(x)$

ו- $m(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של כל אחד מן הגרפים של

הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ עם ציר ה- y .

הגרפים של הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ נחתכים בשתי נקודות בדיוק, נקודה

אחת שבה: $x = c$ ונקודה נוספת שבה: $x = d$, $d > c$.

ב. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $k(x)$ ושל גרף

הפונקציה $m(x)$.

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}$, המוגדרת לכל $x \neq 1$.

ג. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ד. הסבירו מדוע למשוואה: $f'(x) = 0$ יש בדיוק שני פתרונות.

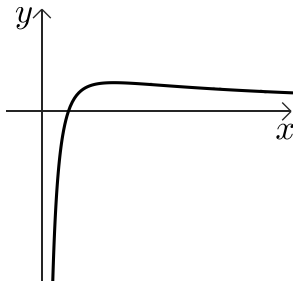
ה. (1) הסבירו מדוע $d < 1$.

(2) הביעו באמצעות c ו- d את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



5 בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x}$



המוגדרת בתחום: $x > 0$.

א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף

הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

נתונה הפונקציה $g(x)$ המוגדרת בתחום: $x > 0$

ומקיימת: $g'(x) = f(x)$.

שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הוא $-\frac{1}{4}$.

ב. (1) מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x)$ המוגדרת כך: $h(x) = 1 + \frac{a}{g(x)}$, a הוא פרמטר גדול מ- $\frac{1}{4}$.

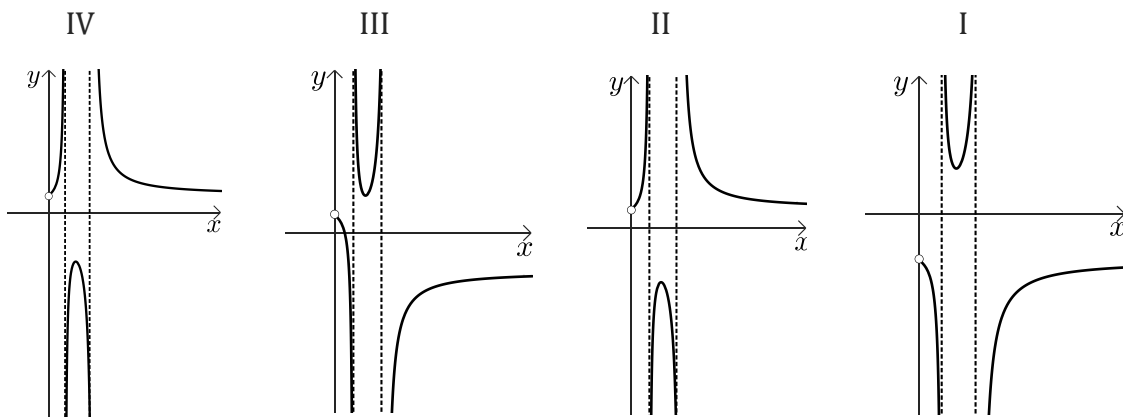
ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) קבעו אם גרף הפונקציה $h(x)$ חותך את ציר ה- x . נמקו את קביעתכם.

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגה.

הביעו את תשובתכם באמצעות a , אם יש צורך.

ה. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $h(x)$.



תשובות סופיות:

1) א. $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ ב. $x^2 + y^2 = 5$ ג. $M(1,2)$ ד. $y^2 = 4x$

ה. $(x-16)^2 + (y-8)^2 = 245$, $(x-16)^2 + (y-8)^2 = 405$

2) א. $\overline{DC} = 2\underline{v} - 2\underline{u}$, $\overline{BC} = 2\underline{v} - 2\underline{w}$ ב. 64 ג. 57.99°

ד. $4x + 3y - 12 = 0$ ה. $(3,0,5)$

3) א. (1) $3cis345^\circ$, $3cis285^\circ$, $3cis225^\circ$, $3cis165^\circ$, $3cis105^\circ$, $3cis45^\circ$

א. (2) $3cis345^\circ$, $3cis285^\circ$, $3cis165^\circ$, $3cis105^\circ$ ב. $9\sqrt{3}$

ג. 81 ד. (1) $\alpha = 67.5^\circ$ או $\alpha = 22.5^\circ$

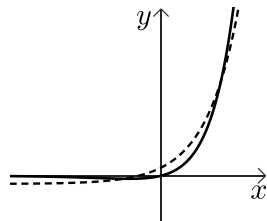
ד. (2) עבור $\alpha = 22.5^\circ$ המכפלה היא $-8li$, עבור $\alpha = 67.5^\circ$ המכפלה היא $8li$

4) א. (1) $k(x)$: כאשר $x \rightarrow -\infty$ אז $y = 0$, כאשר $x \rightarrow -\infty$ אז $y = -1$

א. (2) $k(x)$: תחום עלייה - $x > -1$, תחום ירידה - $x < -1$

$m(x)$: תחום עלייה - כל x , תחום ירידה - אין.

ב. להלן סרטוט:



א. (3) $(0,1)$: $m(x)$, $(0,0)$: $k(x)$

ג. (1) $x = 1$, כאשר $x \rightarrow -\infty$ אז $y = 0$

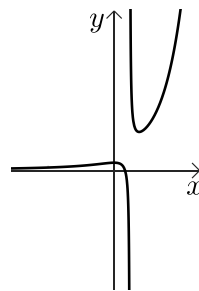
ג. (2) $(0,0)$ ד. הסבר.

ה. (1) הסבר.

ה. (2) תחום עלייה: $x > d$ או $x < c$

תחום ירידה: $1 < x < d$ או $c < x < 1$

ו. להלן סרטוט:

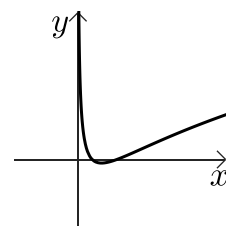


5) א. $(\sqrt{e}, 0)$ ב. (1) $g(x) = \ln^2 x - \ln x$ ב. (2) $(1,0)$, $(e,0)$

ב. (3) להלן סרטוט: ג. (1) $0 < x < 1$, $1 < x < e$, $x > e$ ג. (2) לא חותך.

ה. גרף II.

ד. $\max(\sqrt{e}, 1-4a)$



שאלון 572

פרק 24

פתרון בידאו של בחינות שנת 2023

35	קיץ מועד א
40	קיץ מועד ב
45	קיץ מועד מיוחד
50	מועד חורף

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונה אליפסה שמשוואתה: $\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{196 - 4k^2} = 1$, $0 < k < 7$.

הנקודה F_1 היא המוקד הימני של האליפסה, והנקודה F_2 היא המוקד השמאלי שלה.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודות F_1 ו- F_2 .

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על פרבולה שמשוואתה קנונית והמוקד שלה

נמצא בנקודה F_1 ,

כך שמתקיים: $AF_1 = 10k$.

ב. (1) הביעו באמצעות k את משוואת מדריך הפרבולה.

(2) הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A.

AF_1 הוא קוטר במעגל הישר שמשוואתו: $5x + 12y = 138$ משיק למעגל זה.

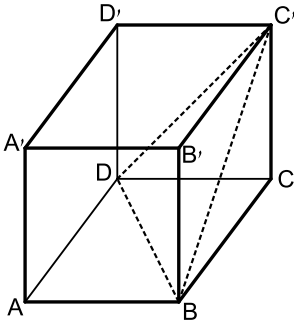
ג. מצאו את הערך של k .

D היא נקודה על האליפסה.

ד. קבעו אם היקף המשולש F_1AF_2 גדול מהיקף המשולש F_1DF_2 , קטן ממנו

או שווה לו. נמקו את קביעתכם.





(2) בסרטוט שלפניכם מתוארת הקובייה ABCD A'B'C'D'.

נסמן: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$.

א. הוכיחו כי האלכסון CA' מאונך למישור BC'D.

נקודה E היא מפגש התיכונים במשולש BC'D.

ב. (1) הביעו את הווקטור \overline{CE} באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} .

(2) הוכיחו כי הנקודות C, E ו-A' נמצאות על ישר אחד.

נתון: $D(0,0,0)$, $C(6,8,0)$, $A(8,n,p)$, n ו- p הם פרמטרים.

שיעור ה- z של הנקודה C' הוא חיובי.

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודה A, והוכיחו כי ABCD נמצא במישור $z = 0$.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה C'.

ל הוא ישר החיתוך בין המישור BC'D ובין המישור BCC'B'.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של הישר l .

ה. מצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל את הישר l ואינו חותך את ציר ה- x .



(3) נתונה המשוואה: $z^3 = \frac{1}{z^3}$, z הוא מספר מרוכב.

נתון גם כי המספר z_0 הוא אחד מפתרונות המשוואה וכי הוא מיוצג על ידי

נקודה ברביע הרביעי במישור גאוס.

א. מצאו את המספר המרוכב z_0 .

הנקודות A, B ו-C' מיוצגות במישור גאוס על ידי המספרים המרוכבים:

$$d \cdot z_0, d \cdot z_0^2, d \cdot (z_0)^4 \text{ בהתאמה. } d > 0 \text{ הוא פרמטר.}$$

נתון כי שטח המשולש ABC הוא: $5d + 6$.

ב. מצאו את הערך של d .

$$\text{נגדיר: } w = \left((z_0)^2 - \frac{1}{(z_0)^2} \right) (1+i)$$

ג. מצאו את $|w|$ ואת הארגומנט (הזווית) של w .

נתון כי המספר w^n (הוא מספר טבעי) הוא מספר מדומה טהור, ונמצא

מחוץ למעגל החוסם את המשולש ABC.

ד. מצאו את הערך המינימלי האפשרי של n .



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) נתונה הפונקציה $f(x) = (e^x - 1)^n - 4$, המוגדרת לכל x . n הוא מספר טבעי

גדול או שווה ל-2.

ענו על סעיף א עבור n זוגי ועבור n אי זוגי.

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן

(אם יש כאלה).

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענו על הסעיפים ב-ג עבור $n = 2$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = 6e^x - 10$, המוגדרת לכל x .

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך שבין גרף הפונקציה $f(x)$

ובין גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$

ועל ידי גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = |f(x)|$, המוגדרת לכל x .

ג. (1) כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $h(x)$? מצאו את שיעורי הנקודות

הללו, וקבעו את סוגן.

(2) מצאו את תחום הערכים של k שעבורו הישר $y = k$ חותך את גרף

הפונקציה $h(x)$ ב-3 נקודות.



5 נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגה.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = (x+1)(1-\ln(x))$, המוגדרת באותו התחום שבו

מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$

(אם יש כאלה).

(3) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה \cup ואת תחום הקעירות כלפי

מטה \cap של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = \frac{1}{x} \cdot g'(x)$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $g(x)$.

ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים $x = e$ ו- $x = 1$.

תשובות סופיות:

(1) א. $F_2(-2k,0)$, $F_1(2k,0)$ ב. $x = -2k$ (1) ב. $A(8k,8k)$ (2)

ג. $k = 1$ ד. היקף המשולש F_1AF_2 קטן מהיקף המשולש F_1DF_2 .

(2) א. הוכחה. ב. $\overline{CE} = \frac{1}{3}(-\underline{u} - \underline{v} + \underline{w})$ (1) ב. (2) הוכחה, $\overline{CE} = \frac{1}{3}\overline{CA}$.

ג. $A(3,-4,0)$ (1) ג. $C'(4,3,5)$ (2) ד. $\underline{x} = (7,-1,0) + t(-3,4,5)$.

ה. $\underline{x} = (7,-1,0) + t(-3,4,5) + s(1,0,0)$.

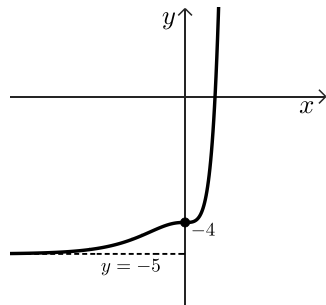
(3) א. $z_0 = 1cis(-60) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ב. $d = 6$ ג. $|w| = \sqrt{6}$, $\arg(w) = -45^\circ$ ד. $n = 6$.

(4) א. (1) עבור n זוגי: כאשר $x \rightarrow \infty$: אין אופקית, כאשר $x \rightarrow -\infty$: $y = -3$.

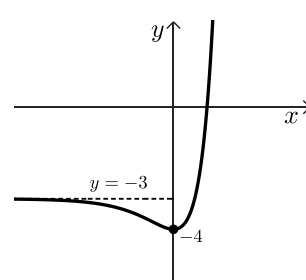
עבור n אי-זוגי: כאשר $x \rightarrow \infty$: אין אופקית, כאשר $x \rightarrow -\infty$: $y = -5$.

א. (2) עבור n זוגי: $\min(0,-4)$, עבור n אי-זוגי: אין.

עבור n אי-זוגי:



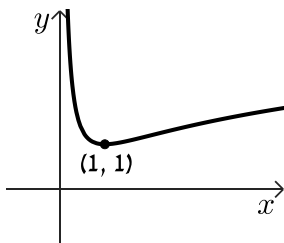
א. (3) עבור n זוגי:



ב. (1) $(0,-4)$, $(\ln 7, 32)$ ב. (2) 10.378 יח"ר $\approx 24 - 7\ln 7$.

ג. (1) יש 2 נקודות קיצון: $\min(\ln 3, 0)$, $\max(0, 4)$ ג. $3 < k < 4$ (2)

א. (1) $x > 0$ א. (2) $\min(1,1)$ א. (3) סרטוט:



ב. (1) $(e, 0)$.

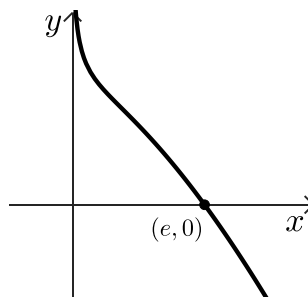
ב. (2) תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x > 0$.

ב. (3) תחומי קעירות כלפי מעלה: $0 < x < 1$,

תחומי קעירות כלפי מטה: $x > 1$.

ג. 1.132 יח"ר $\approx \frac{3}{2} - \frac{1}{e}$.

ב. (4) סרטוט:

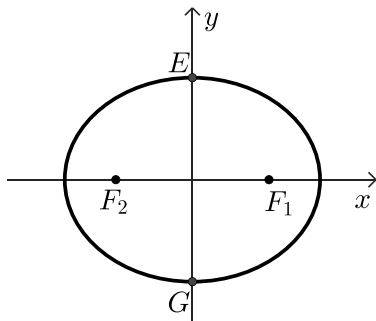


יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים



1 נתונות הנקודות: $A(0,28)$, $B(16,0)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי שעליו

נמצאות הנקודות C המקיימות:

$$AC^2 + BC^2 = 1,320$$

את המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א מזיזים 8 יחידות שמאלה ו-14 יחידות למטה כך שמתקבל מקום גאומטרי חדש.

המקום הגאומטרי החדש חותך את ציר ה- y בנקודות E ו-G (מעל E).

הנקודות F_1 ו- F_2 הן מוקדי אליפסה קנונית שעוברת דרך הנקודות E ו-G, כמתואר בסרטוט.

נתון: המרחק בין הישרים EF_1 ו- GF_2 הוא 24.

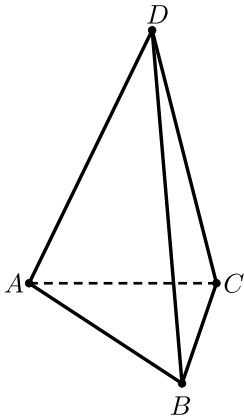
ב. (1) מצאו את שיעורי הנקודה F_1 .

(2) מצאו את משוואת האליפסה.

העבירו מעגלים המשיקים לישר EF_1 , לציר ה- x ולציר ה- y .

ג. מצאו משוואות של שני מעגלים כאלה הנמצאים ברביעים שונים.





(2) בפירמידה ABCD, המקצוע DC מאונך למישור ABC. הנקודה E היא אמצע המקצוע AD.

הנקודה F מקיימת: $\vec{DF} = \frac{k}{2} \cdot \vec{DB} + k \cdot \vec{DC}$, הוא פרמטר.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{CD} = \underline{w}$.

א. הביעו באמצעות: \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- k את \vec{EF} .

נתון: \vec{EF} מקביל למישור ABC.

ב. מצאו את הערך של k .

נתון: $A(0,0,0)$, $B(p,6,0)$, $C(0,n,0)$, n ו- p

הם פרמטרים חיוביים.

$$\vec{BD} = (-8, -2, 9), \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 24$$

ג. מצאו את שיעורי הנקודות B, C ו-D.

ד. מצאו את נפח הפירמידה ABCD.

ה. מהו המצב ההדדי בין הישר EF לבין הישר AB? נמקו את קביעתכם.



(3) נתונה סדרה הנדסית: z, z_1, z_2, z_3, \dots שאיבריה הם מספרים מרוכבים ומנתה היא q .

z_1 נמצא ברביע הראשון.

$$\text{נתון: } (z_1)^3 = z_3, \quad -2z_1 = \bar{z}_3$$

א. הוכיחו כי: $q = -z_1$ או $q = z_1$.

ב. מצאו את z_1 .

ענו על הסעיפים ג-ד עבור: $q = z_1$.

z_{4n-2} ו- z_{4n} הם שני איברים בסדרה ההנדסית הנתונה (n הוא מספר טבעי).

ג. קבעו בעבור כל אחד מן האיברים אם הוא מדומה או ממשי. נמקו את קביעותיכם.

$$\text{ד. מצאו את ערך הסכום: } \frac{z_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_3}{(\sqrt{2})^3} + \dots + \frac{z_{64}}{(\sqrt{2})^{64}}$$



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln(x) + \ln(a)}{\ln(x) - \ln(a)}$, a הוא פרמטר גדול מ-1.



בסעיפים א-ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של

הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצאו את תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

לפניכם טענה: למשוואה $f(x) = f'(x)$ קיים בדיוק פתרון אחד בתחום $x > a$.

ב. קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה: $g(x)$, המקיימת: $g(x) = \ln(f(x))$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים: $x = 3$ ו- $x = 5$.

נתון: $1 < a < 3$.

ד. הביעו באמצעות S את ערך האינטגרל: $\int_3^5 \ln(4 \cdot f(x)) dx$.



5 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 6}$

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
- (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
- הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.
- (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).
- (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- (3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית שלה ועל ידי הישרים: $x = \ln 7$ ו- $x = \ln 10$.
- ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה $g(x)$.
- נתונה הפונקציה: $s(x) = \int_x^{\ln 5} (f(t) - g(t)) dt$, המוגדרת בתחום: $x < \ln 5$.
- ד. מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $s(x)$ וקבעו את סוגה.

תשובות סופיות:

(1) א. $(x-8)^2 + (y-14)^2 = 400$ ב. $F_1(15,0)$ ג. $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{400} = 1$ (2) ב.

ג. $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$, $(x+15)^2 + (y-15)^2 = 225$

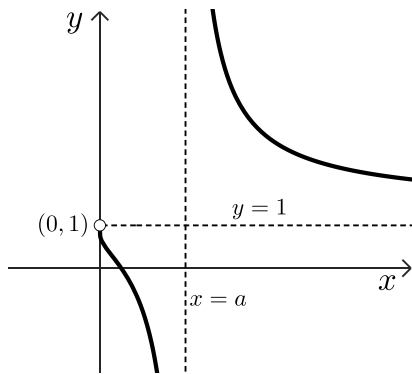
(2) א. $\vec{EF} = \frac{k}{2}\vec{u} + \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right)\vec{v} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3k}{2}\right)\vec{w}$ ב. $k = \frac{1}{3}$

ג. $B(8,6,0), C(0,4,0), D(0,4,9)$ ד. 48 ה. מצטלבים.

(3) א. הוכחה. ב. $z_1 = \sqrt{2}\text{cis}(45^\circ)$

ג. $z_{4n} - z_{4n-2}$ ממשי, z_{4n-2} מדומה. ד. 0.

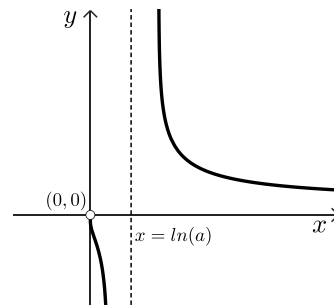
(4) א. (1) $0 < x < a$ או $x < a$ א. (2) $x = a, y = 1$ א. (3) $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$



א. (4) $0 < x < a$ או $x < a$ א. (5) סרטוט:

ב. לא נכון ג. $0 < x < \frac{1}{a}$ או $x < a$ (1)

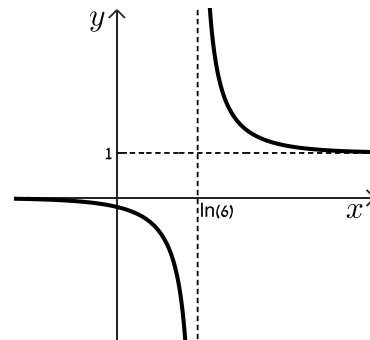
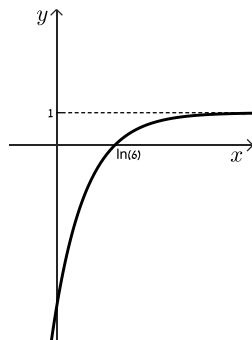
ג. (2) סרטוט: ד. $2\ln 4 + 5$



א. (1) $x \neq \ln 6$ א. (2) $x = \ln 6, y = 1, y = 0$

א. (3) תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x < \ln 6$ או $\ln 6 < x$

א. (4) סרטוט: ב. $y = 1$ (1) ב. (2) סרטוט:



א. (3) $S = \frac{9}{35}$ ב. $(\ln 3, -1)$ ג. ד. $x = \ln 3$ מינימום.

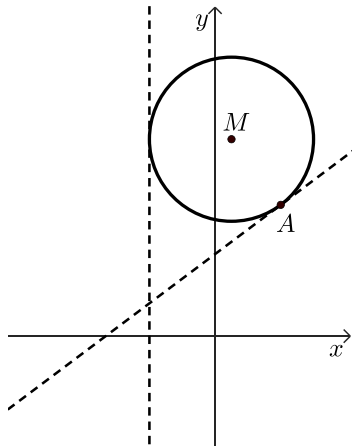
בגרות קיץ 2023 מועד מיוחד:

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים



(1) נתונים הישרים שמשוואותיהם:

$$l_1: 4y - 3x - 20 = 0$$

$$l_2: x = -4$$

א. מצאו את המשוואות המתארות את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים

שווים מן הישרים l_1 ו- l_2 .

מעגל שמרכזו M משיק לישרים l_1 ו- l_2 .

המעגל משיק לישר l_1 בנקודה A שבה $x = 4$.

המרכז M נמצא ברביע הראשון (ראו סרטוט)

ב. מצאו את שיעורי הנקודה M.

הישר l_2 הוא מדריך של פרבולה קנונית.

ג. האם הישר l_1 משיק בנקודה A לפרבולה זו? נמקו את תשובתכם.

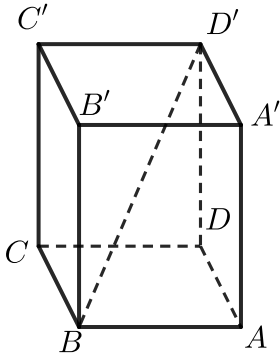
ד. מצאו את משוואת המעגל המשיק לפרבולה זו בשתי נקודות

שאחת מהן היא הנקודה A.





- (2) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שהבסיס שלה $ABCD$, הוא מלבן (ראו סרטוט). הנקודה E נמצאת על המקצוע DD' כך ש- $DE : ED' = 3 : 2$, הנקודה F נמצאת על האלכסון BD' ומתקיים: $\overrightarrow{BF} = t \cdot \overrightarrow{BD'}$, $0 < t < 1$ הוא פרמטר. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.
- א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{BD'}$ ו- \overrightarrow{FE} באמצעות: \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- t , אם יש צורך. נתון כי FE מקביל למישור הבסיס $ABCD$.



- ב. מצאו את t . הנקודה C היא ראשית הצירים. הנקודה B נמצאת על ציר ה- x בכיוון החיובי שלו, והנקודה D נמצאת על ציר ה- y בכיוון החיובי שלו. נתון: $F(4, 12, 18)$.
- ג. מצאו את $|\underline{u}|$, $|\underline{v}|$, $|\underline{w}|$. מן הנקודה F העבירו ישר המאונך למישור $EFBD$. ישר זה חותך את הפאה $CDD'C'$ בנקודה P .
- ד. מצאו את שיעורי הנקודה P .



- (3) $z = x + iy$ הוא מספר מרוכב (x ו- y הם מספרים ממשיים).
- א. (1) הראו כי משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס המקיימות: $|z^2 - 3j| = |z^2 + 5i|$ היא: $y = -\frac{1}{2x}$.
- (2) תנו דוגמה למספר מרוכב הנמצא על המקום הגאומטרי הזה.
- ב. פתרו את המשוואה: $z^6 = 1$.
- פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב מייצגים את קודקודיו של מצולע I. המקום הגאומטרי שמצוין בתת סעיף א(1) חותך ברביע הרביעי את המעגל החוסם את מצולע I בנקודה A.
- ג. מצאו את שיעורי הנקודה A. הנקודה A היא קודקוד של מצולע משוכלל אחר החסום באותו מעגל, מצולע II. נתון: מספר הקודקודים של מצולע II שווה למספר הקודקודים של מצולע I.
- ד. מצאו את המספרים המרוכבים המייצגים את כל הקודקודים של מצולע II. נסמן: $w = r \cdot \text{cis } \alpha$, $0 < \alpha < 60^\circ$.
- כופלים את כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I במספר w , כך שקודקודי מצולע I מתלכדים עם קודקודי מצולע II.
- ה. מצאו את w .

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x , ו- $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת שלה, המוגדרת גם היא לכל x .

נתון: $f'(x) = -2x \cdot e^{-\frac{x^2}{a}}$, a הוא פרמטר.

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול בנקודה שבה: $x = \sqrt{2}$.

א. מצאו את a .

נתון: $f(0) = a$.

ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

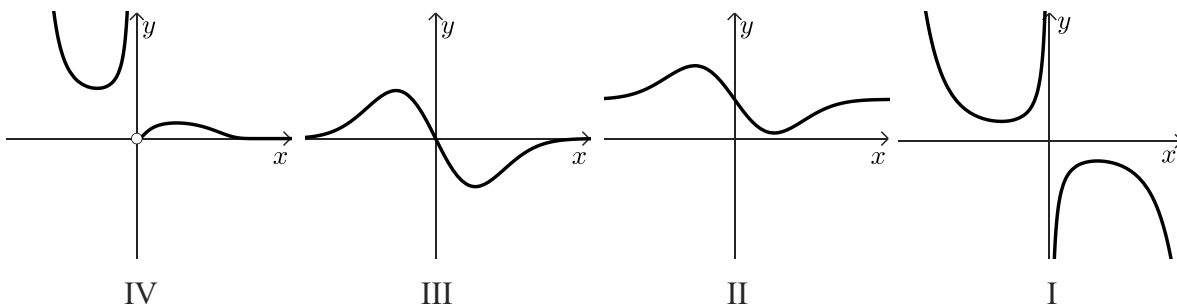
נתונות הפונקציות: $m(x) = e^{h(x)}$, $h(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

שלושה מבין הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתארים את הפונקציות: $m(x)$, $h(x)$, $f'(x)$.

ד. התאימו לכל פונקציה את הגרף המתאר אותה.

ה. (1) מצאו את תחומי הירידה של הפונקציה $m(x)$.

(2) קבעו את הביטוי: $\int_1^2 h(x) \cdot m(x) dx$ חיובי או שלילי. נמקו את קביעתכם.





5 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1-\ln x}{\ln x}$

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(-f(x))$

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

(3) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נסמן ב- a את שיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מבין הביטויים I-II-III קבעו איזה ביטוי הוא הגדול ביותר ואיזה ביטוי

הוא הקטן ביותר (אין צורך למצוא את הערך של a).

נמקו את תשובתכם.

I. $\int_{a+1}^{a+2} (g(x) - f(x)) dx$.II $\int_{a+3}^{a+4} (g(x) - f(x)) dx$.III המספר 1.

תשובות סופיות:

(1) א. $y = -\frac{1}{2}x, y = 2x + 10$ ב. $M(1,12)$ ג. l_1 אינו משיק לפרבולה.

ד. $(x-12)^2 + y^2 = 128$.

(2) א. $\vec{BD} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{EF} = (t-1)\vec{u} + (1-t)\vec{v} + \left(\frac{3}{5}-t\right)\vec{w}$ ב. $t = \frac{3}{5}$.

ג. $|\vec{u}| = 20, |\vec{v}| = 10, |\vec{w}| = 30$ ד. $P(0,10,18)$.

(3) א. (1) הוכחה, $y = -\frac{1}{2x}$ א. (2) למשל, $z = 1 - \frac{1}{2}i$.

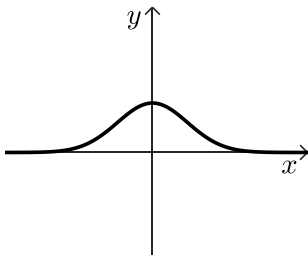
ב. $\text{cis}0^\circ, \text{cis}60^\circ, \text{cis}120^\circ, \text{cis}180^\circ, \text{cis}240^\circ, \text{cis}300^\circ$ ג. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

ד. $\text{cis}15^\circ, \text{cis}75^\circ, \text{cis}135^\circ, \text{cis}195^\circ, \text{cis}255^\circ, \text{cis}315^\circ = \text{cis}(-45^\circ)$.

ה. $w = \text{cis}15^\circ$.

(4) א. $a = 4$ ב. $f(x) = 4e^{-\frac{x^2}{4}}$ ג. (1) זוגית.

ג. (2) $y = 0$ ג. (3) $(0,4)$ מקסימום. ג. (4) סרטוט:



ד. גרף I: $h(x)$, גרף III: $f'(x)$, גרף IV: $m(x)$.

ה. (1) ירידה: $\sqrt{2} < x$ או $x < -\sqrt{2}$.

ה. (2) שלילי.

(5) א. (1) $0 < x \neq 1$ א. (2) $x = 1, y = -1$.

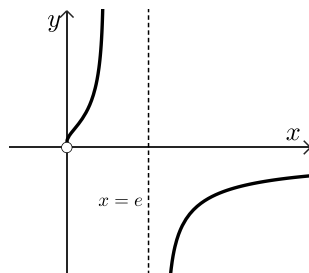
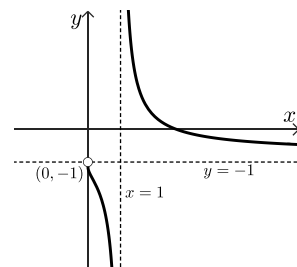
א. (3) ירידה: $0 < x < 1$ או $x > 1$. עלייה: אין.

א. (4) סרטוט: ב. (1). $0 < x < 1$ או $e < x$.

ב. (2) $x = 1, x = e, y = 0$.

ב. (3) חיובית: $0 < x < 1$, שלילית: $e < x$.

ב. (4) סרטוט:



ג. הביטוי הגדול ביותר - I, הביטוי הקטן ביותר - III.

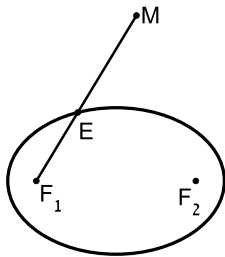
יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונה אליפסה שמשוואתה $1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2}$, b הוא פרמטר חיובי.

ידוע כי המוקדים של האליפסה נמצאים על ציר ה- x .
נסמן את נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y ב- D_1 ו- D_2 ,
את המוקד השמאלי של האליפסה נסמן ב- F_1 ואת המוקד הימני שלה ב- F_2 .
נתון כי המרובע $F_1D_1F_2D_2$ הוא ריבוע.



א. מצאו את הערך של b .

(2) חשבו את שטח הריבוע $F_1D_1F_2D_2$.

הציבו במשוואת האליפסה $b^2 = 4.5$ וענו על סעיפים ב-ד.
נקודה E היא נקודה כלשהי על האליפסה.

מחברים באמצעות קו ישר את המוקד השמאלי F_1 עם הנקודה E

וממשיכים את הקו הישר עד לנקודה M (ראו סרטוט), כך שמתקיים $EM = EF_2$.

ב. הוכיחו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M הוא מעגל, ורשמו את משוואתו.

מזיזים את המעגל שמצאתם בסעיף ב ימינה ב- $\frac{3}{\sqrt{2}}$ יחידות, ומתקבל מעגל אחר.

מכפילים ב- $\frac{2}{3}$ את שיעור ה- y של כל אחת מן הנקודות שעל המעגל האחר,

ומתקבל עקום חדש.

ג. זהו את צורת העקום החדש, ומצאו את משוואתו.

נתון משולש ששניים מקודקודיו הם נקודות החיתוך של העקום החדש

עם ציר ה- x , והקודקוד הנוסף נמצא גם הוא על העקום החדש.

ד. מצאו את השטח הגדול ביותר האפשרי של המשולש. נמקו את תשובתכם.



(2) נתונים שני מישורים, π_1 ו- π_2 :

$$\pi_1: (k+2)x + y + (k+1)z + 11 = 0$$

$$\pi_2: (k+1)x + y + z - 5 = 0$$

k הוא פרמטר.

א. הסבירו מדוע בהכרח שני המישורים נחתכים זה עם זה.

ידוע כי ישר החיתוך בין שני המישורים, l_1 , מקביל לישר $l_2: \underline{x} = (1, 2, -1) + m(-1, k, k)$.

ב. (1) מצאו את הערך של k .

(2) מצאו הצגה פרמטרית של הישר l_1 .

(3) מצאו את הזווית בין המישורים π_1 ו- π_2 .

הנקודה P נמצאת על הישר l_1 ועל מישור $[yz]$.

הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של ציר ה- y עם המישורים π_1 ו- π_2 בהתאמה.

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודות A, P, ו-B.

(2) מצאו את שטח המשולש APB.



(3) נתונה משוואה I: $w^6 = -27$, כאשר w הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את משוואה I.

נתונה משוואה II: $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = -27$, כאשר z הוא מספר מרוכב.

ב. (1) היעזרו בפתרונות של משוואה I ורשמו בהצגה אלגברית

את הפתרונות של משוואה II.

(2) הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס, המייצגות את הפתרונות של

משוואה II, נמצאות על מעגל – ומצאו את משוואתו.

(3) הוכיחו כי כל הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של

משושה משוכלל במישור גאוס.

נתון: שני הפתרונות המדומים ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II

מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג. (1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע.



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 5e^x + 4}$.



א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

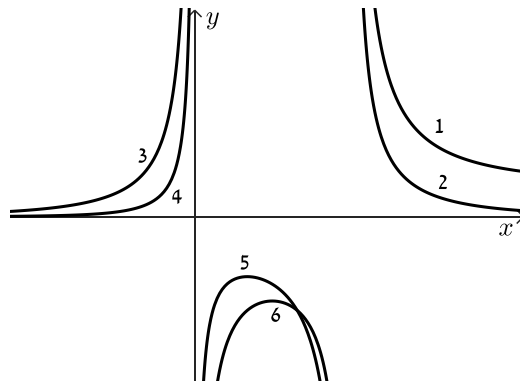
(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{5e^x}{e^{2x} - 5e^x + 4}$, המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין גרף הפונקציה $g(x)$.

לפניכם סרטוט הגרפים של שתי הפונקציות, $f(x)$ ו- $g(x)$.

כל אחד מהחלקים של הגרפים מסומן בסרטוט בספרה אחרת.



ג. רשמו לאיזו פונקציה שייך כל אחד מהחלקים המסומנים בסרטוט. נמקו את תשובתכם.

ד. לפניכם שני ביטויים, I-II. קבעו, בנוגע לכל אחד מהביטויים, אם הוא שלילי או חיובי.

נמקו ללא חישוב.

I. $\int_{-4}^{-1} (f(x) - g(x)) dx$ II. $\int_{\ln \frac{8}{5}}^{\ln 2} (f(x) - g(x)) dx$

ה. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$

ובין הישרים $x = \ln 9$ ו- $x = \ln 16$.



5 נתונה הפונקציה $f(x) = 4x(\ln(x^2) - 1)$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 (3) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.
- ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 (2) האם יש לפונקציה $f(x)$ נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

- ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$, המאונכות לצירים.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 (4) בכמה נקודות הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים זה עם זה? נמקו את תשובתכם.
- ד. כתבו דוגמה לפונקציה קדומה של $g(x)$.

תשובות סופיות:

1) א. (1) $b = \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{4.5}$ א. (2) 9. ב. מתקבל: $(x + \sqrt{4.5})^2 + y^2 = 36$

ג. אליפסה: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ ד. 24.

2) א. הסבר. ב. (1) $k = 1$ ב. (2) למשל: $(0, 21, -16) + t(-1, 1, 1)$

ב. (3) 10.89° ג. (1) $P(0, 21, -16)$, $A(0, -11, 0)$, $B(0, 5, 0)$

ג. (2) 128.

3) א. $w_1 = \sqrt{3} \text{cis}(30^\circ)$, $w_2 = \sqrt{3} \text{cis}(90^\circ)$, $w_3 = \sqrt{3} \text{cis}(150^\circ)$

$w_4 = \sqrt{3} \text{cis}(210^\circ)$, $w_5 = \sqrt{3} \text{cis}(270^\circ)$, $w_6 = \sqrt{3} \text{cis}(330^\circ)$

ב. (1) $z_1 = \frac{3}{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = -\frac{3}{2}$, $z_4 = -\frac{3}{2} - \sqrt{3}i$, $z_5 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_6 = \frac{3}{2} - \sqrt{3}i$

ב. (2) להסביר. ב. (3) הוכחה. ג. (1) דלתון. ג. (2) 1.5.

4) א. (1) $x \neq 0$, $x \neq \ln 4$ א. (2) $x \rightarrow \infty: y = 2$, $x \rightarrow -\infty: y = 0$

א. (3) עלייה: $0 < x < \ln \frac{8}{5}$, ירידה: $x > \ln 4$, $x < 0$

ב. $(\ln \frac{5}{2}, -\frac{50}{9})$ ג. הפונקציה $f(x)$ ב-1, 4, 5. הפונקציה $g(x)$ ב-2, 3, 6.

ד. ביטוי I: שלילי, ביטוי II: חיובי. ה. $\ln(4.5) \approx 1.5$

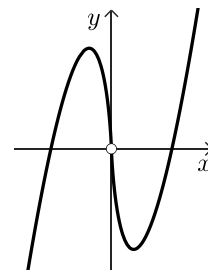
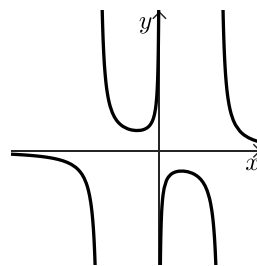
5) א. (1) $x \neq 0$ א. (2) $(\sqrt{e}, 0)$, $(-\sqrt{e}, 0)$ א. (3) הוכחה.

ב. (1) $\max\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{8}{\sqrt{e}}\right)$, $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{8}{\sqrt{e}}\right)$ ב. (2) אין פיתול.

ב. (3) להלן סקיצה: ג. (1) $x \neq \pm\sqrt{e}$, $x \neq 0$ ג. (2) $x = \pm\sqrt{e}$, $x = 0$

ג. (3) להלן סקיצה: ג. (4) 6 נקודות.

ד. למשל: $G(x) = \frac{\ln|\ln(x^2) - 1|}{8}$



שאלון 572

פרק 25

פתרון בידאו של בחינות שנת 2022

55 קיץ מועד א
60 קיץ מועד ב

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים



- (1) נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.
 מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא: $(x - a)^2 + y^2 = r^2$,
 a הוא פרמטר חיובי.
 מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא: $(x - 15)^2 + y^2 = R^2$.
 אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9, והיחס בין אורכי הרדיוסים של המעגלים הוא: $1:2$, $r < R$.
 א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו M.
 נתון כי: $a < 15$.
 ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.
 ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.
 ד. הישר: $mx - y + n = 0$ הוא משיק משותף לשני המעגלים.
 מצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).
 נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ.
 משוואות המעגלים הן: $(x - t)^2 + y^2 = r^2$; $(x - k)^2 + y^2 = R^2$, ו- k הם פרמטרים.
 ערכי הרדיוסים r ו-R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.
 ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים גם למעגלים האלה? אם כן – מצאו את t ואת k. אם לא – נמקו.



- (2) נתונות ארבע נקודות הנמצאות באותו המישור:
- $A(4, p, -1)$, $B(7, 5, 5)$, $C(1, -1, 2)$, $D(-2, 5, -4)$ הוא פרמטר p .
- מצאו את משוואת המישור ABCD.
 - חשבו את ערך הפרמטר p .
 - הוכיחו כי המרובע ABCD הוא ריבוע.
- הנקודה S היא קודקוד של פירמידה SABCD שבסיסה ABCD. המקצוע SC מונח על הישר: $x = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$.
- נתון כי נפח הפירמידה הוא 81.
 - מצאו את שיעורי הנקודה S (שתי אפשרויות).
 - נתון מישור נוסף π המאונך למקצוע SC.
 - מצאו את הזווית שבין המישור ABCD ובין המישור π .



- (3) נתונה המשוואה: $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$, z הוא מספר מרוכב.
- z_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.
- מצאו את משוואת המעגל.
 - חוסמים במעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר z_1 .
 - חשבו את שטח הריבוע.
 - מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.
- מכפילים ב- $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב- $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 60^\circ) + i \sin(\alpha + 60^\circ))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי. הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.
- נתון: r_1 ו- r_2 חיוביים, $r_1 \neq r_2$.
- מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את התשובה.
 - נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי 1.2 משטח הריבוע בסעיף ב.
 - חשבו את $r_1 \cdot r_2$.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



- (4) נתונה הפונקציה: $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$ המוגדרת לכל x .
- א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- y (אם יש כאלה).
- (2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .
- (3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1-e^x}{e^x-x}$, המוגדרת לכל x .
- ב. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לציר ה- y .
- (2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).
- (3) הוכיחו כי: $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x-x)^2}$.
- ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ומצאו כמה נקודות מקסימום וכמה נקודות מינימום יש לפונקציה $g(x)$. נמקו את התשובה.
- ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר: $x = -1$.



5 נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \ln(x^2 - 15)$

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים

(אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים

(אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.

נתונה הפונקציה: $g(x) = e^{f(x)}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.

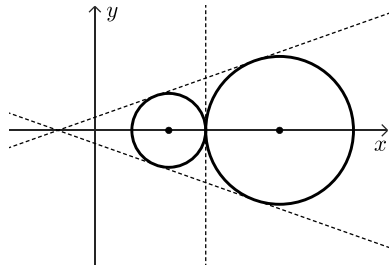
ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה: $y = f'(x) \cdot g(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים: $x = -6$ ו- $x = -5$.

תשובות סופיות:

1 א. משוואת המעגל שמרכזו N: $(x-15)^2 + y^2 = 36$, משוואת המעגל שמרכזו M:

ב. להלן סקיצה:



$$(x-6)^2 + y^2 = 9, (x-24)^2 + y^2 = 9$$

ג. $x = 9$.

ד. $m_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}, n_1 = \frac{3}{\sqrt{8}}, m_2 = -\frac{1}{\sqrt{8}}, n_2 = -\frac{3}{\sqrt{8}}$.

ה. $t = -21, k = -21$.

2 א. $2x - y - 2z + 1 = 0$ ב. $p = 11$ ג. הוכחה.

ד. $(-2, -10, -1), (4, 8, 5), 72.5^\circ$.

3 א. $x^2 + y^2 = 10$ ב. 20 ג. $(-3, -1), (-1, 3), (1, -3)$.

ד. מקבילית. ה. 2.4.

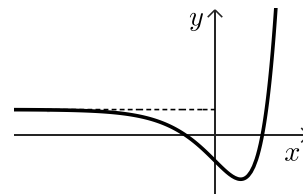
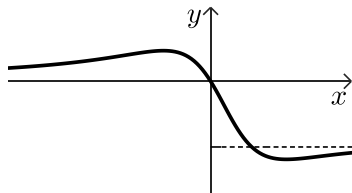
4 א. (1) $y = 1$ כ. $x \rightarrow \infty$ א. (2) $(0, -1)$ ג. עלייה: $x > 1$, ירידה: $x < 1$.

א. (4) להלן סקיצה: ב. (1) $x \rightarrow -\infty: y = 0, x \rightarrow \infty: y = -1$.

ב. (2) $(0, 0)$ ב. (3) הוכחה.

ג. נק' מינימום אחת, נק' מקסימום אחת.

ד. להלן סקיצה:



ה. $\ln \frac{e+1}{e} \approx 0.31$.

א. (2) $x = \sqrt{15}, x = -\sqrt{15}$.

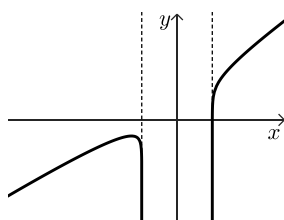
א. (1) $x < -\sqrt{15}, x > \sqrt{15}$ ב. (3) $\max(-5, -2.7)$.

א. (4) להלן סקיצה:

ב. (1) $x < -\sqrt{15}, x > \sqrt{15}$.

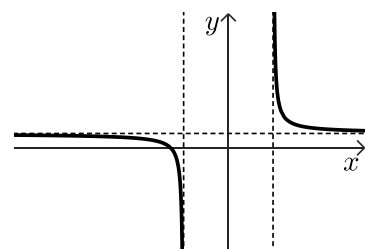
ב. (2) $x = \sqrt{15}, x = -\sqrt{15}, y = 1$.

ב. (3) $(-5, 0)$.



ג. (1) $\max(-5, 0.067)$.

ב. (4) להלן סקיצה:



ג. (2) עלייה: $x > \sqrt{15}, x < -5$, ירידה: $-5 < x < -\sqrt{15}$ ד. 0.015.

יש לענות על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונות הנקודות $A(-5,3)$ ו- $B(0,-2)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.
 נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה- x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו.
 נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M.

ג. מהי משוואת האליפסה?
 נסמן ב-F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה- x עובר במוקד השמאלי של האליפסה. הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו-T, ואת המעגל M בנקודות K ו-L.

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF.



(2) נתונה פירמידה OABC שבסיסה משולש ABC.

נסמן: $\vec{OA} = \underline{u}$, $\vec{OB} = \underline{v}$, $\vec{OC} = \underline{w}$.

נתון: $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = 90^\circ$.

הנקודה H מקיימת: $\vec{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}$. s , t ו- k הם פרמטרים.

נתון כי \vec{OH} מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

א. הוכיחו כי: $t = s = k$.

הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

ב. הוכיחו כי: $\vec{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$, והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.



- הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC.
- ג. הביעו באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} , את הווקטור \overline{OP} שבעבורו נפח הפירמידה PABC כפול מנפח הפירמידה OABC (שתי אפשרויות).
- ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה-x, הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה-y, והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה-z. נתון: $|\underline{u}| = a$.
- ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP.
- ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC.
- ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $20\frac{5}{6}$. חשבו את a .

3) המספר: $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.



נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

א. מצאו את α .

נתון: $|2iz| + \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$

ב. מצאו את R .

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

קודקודי הבסיס B ו-C מתאימים למספרים: $\frac{\bar{z}}{z}$ ו- $\frac{z}{\bar{z}}$.

קודקוד הראש A מתאים למספר $z + k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k ?

(2) חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות



(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

א. (1) מצאו את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה- x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 1$, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ ($g'(x) = f(x)$).

ד. (1) מהו תחום העלייה של הפונקציה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב-B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקציה $g(x)$ הוא הגבוה

מבין כל נקודות הפיתול שלה. נתון כי שיעור ה- y של הנקודה B הוא $\frac{e - \sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקציה $g(x)$.



5 נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקציה מוגדרת לכל x ורציפה,

הפונקציה היא אי-זוגית, הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה, ולפונקציה יש נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם: $(-1, -a)$, a הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = \ln(f(x))$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $h(x)$

המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקציה $h(x)$ חותך

את ציר ה- x בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך

את ציר ה- x בשתי נקודות.

$$\text{נתון: } f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$$

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ וגם: $g(0) = 0$.

ג. (1) מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל: $\int_{-5}^t g(x) dx, t > -5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים: $\int_{-5}^t g(x) dx = 2 \cdot \int_{-5}^5 g(x) dx$? נמקו.

תשובות סופיות:

(1) א. $x - y + 3 = 0$ ב. $M(0,3), R = 5$ ג. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ד. $\frac{5}{3}$

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

ג. $\overline{OP_1} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}, \overline{OP_2} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$

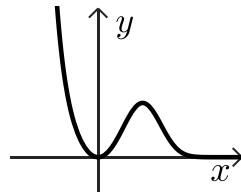
ד. $l = t(1,1,1)$ ה. $x + y + z - a = 0$ ו. $a = 5$

(3) א. $\alpha = 240^\circ$ ב. $R = 3$ ג. הוכחה.

ד. (1) $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ד. (2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(4) א. (1) $x \neq 0$ א. (2) מינימום: $x = 0$, מקסימום: $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx 0.87$

ב. $a = 1$ ג. להלן סקיצה: ד. (1) כל x ד. (2) 2 נקודות.

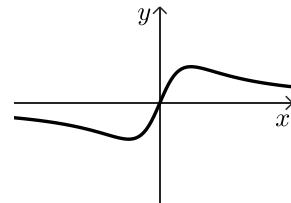
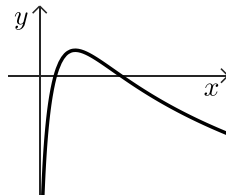


ה. $g(x) = \frac{e - e^{1-x^3}}{3}$

(5) א. להלן סקיצה: ב. (1) $x > 0$ ב. (2) $x = 0$ ג. (3) $a > 1$

ג. (1) $g(x) = 2\ln(1+x^2)$ ב. להלן סקיצה:

ג. (2) זוגית. ד. $t = 0$



שאלון 572

פרק 26

פתרון בידאו של בחינות 2024

מועד חורף 65

בגרות חורף 2024:

ענו על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

- (1) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle BAC = 90^\circ$), שיעורי הקודקוד A הם: $(a, 0)$, a הוא פרמטר שונה מאפס. שיעור ה- x של הקודקוד B הוא $-a$. הצלע BC מקבילה לציר ה- x . הנקודה M היא אמצע הצלע BC .
- א. הביעו באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל הנקודות M .
- ב. סרטטו את העקום המתואר על ידי המשוואה שמצאתם בסעיף א. סרטטו את שתי האפשרויות במערכת צירים אחת. באחת מן הנקודות M , שנמצאת ברביע הראשון, העבירו ישר ℓ המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.
- ג. הוכיחו כי הישר ℓ מקביל לישר AC .
- נתון גם כי: $AM = 10$ (הנקודה M נמצאת ברביע הראשון), והקודקוד B נמצא על הישר: $x = -2$.
- ד. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו- C .
דרך הקודקוד A העבירו מעגל המשיק לישרים ℓ ו- AC .
- ה. מצאו את שיעורי מרכז המעגל.

- (2) נתונים הישר ℓ והמישור π .
- ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ היא: $\underline{x} = (-1, 5, -11) + t \cdot (m-1, 5-m, -2)$.
- משוואת המישור π היא: $3x + my + (m+6)z + 4 = 0$. הוא פרמטר.
- א. הראו כי לכל ערך של m הישר ℓ אינו מקביל למישור π .
נתון כי הישר ℓ ניצב למישור π וחותך אותו בנקודה A .
- ב. מצאו את הערך של הפרמטר m .
- ג. מצאו את שיעורי הנקודה A .
- ד. לפניכם טענה: קיים מישור אחד בלבד המכיל את הישר ℓ ועובר דרך הנקודה $(5, -5, -9)$.
קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

3) $z = x + yi$ הוא מספר מרוכב (x ו- y הם מספרים ממשיים).

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x, y) במישור גאוס

$$\text{המקיימות: } |9 + 12i| - |10i| = |6 - \bar{z} - 8i|^2 \text{ הוא מעגל.}$$

הנקודה M היא מרכז המעגל המתואר בסעיף א.

המספרים המרוכבים z_A ו- z_M מייצגים את הנקודות A ו- M , בהתאמה.

נתון: למספרים z_A ו- z_M יש אותו ארגומנט (זווית), $2|z_A| = |z_M|$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A .

נתונה סדרה הנדסית: z_1, z_2, z_3, \dots .

האיבר הראשון בסדרה מייצג את הנקודה A , והאיבר החמישי בסדרה מייצג את הנקודה M .

ג. מצאו את מנת הסדרה (כל האפשרויות).

ד. חשבו את הסכום: $z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + \dots + z_{10} \cdot \bar{z}_{10}$.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a-x^2}{e^x}$, $g(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$ המוגדרות לכל x .

a הוא פרמטר.

א. מצאו את הערך של a שבעבורו: $f(x) = g'(x)$ לכל ערך של x .

הציבו את הערך של a שמצאתם, וענו על הסעיפים ב-ה שלפניכם.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$

ו- $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצות של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף

הפונקציה $g(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

ה. חשבו את הערך של הביטוי: $\int_1^2 \left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^4} \right) \cdot \left(\frac{x^2-1}{e^x} \right) dx$

5) בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של הפונקציה: $f(x) = \ln(x)$

המוגדרת בתחום: $x > 0$, ומתוארים הישרים: $y = x$ ו- $y = -x - 1$.

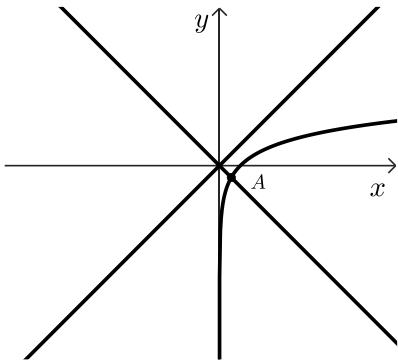
הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם אחד מן הישרים.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- a .

היעזרו בסרטוט, וענו על הסעיפים א-ה שלפניכם.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{\ln(x) - x}{\ln(x) + x}$



א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$

עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x של

הפונקציה $g(x)$.

ב. הסבירו מדוע מתקיים: $0 < a < 1$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$,

וקבעו את סוגה.

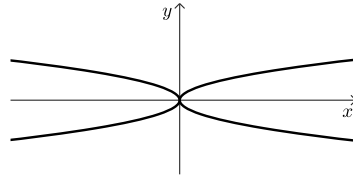
(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה: $h(x) = e^{g(x)}$.

תשובות סופיות:

א. $y^2 = 4ax$ (1) ב. להלן סרטוט: ג. הוכחה.



ד. $B(-2,8)$, $C(18,8)$

ה. $(1,2)$

א. הוכחה. (2) ב. $m = -5$ ג. $A(2,0,-10)$ ד. לא נכונה.

א. הוכחה. (3) ב. $Z_A = 3 + 4i$

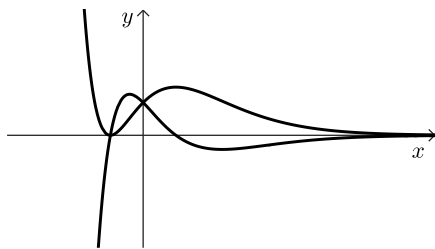
ג. $q_0 = \sqrt[4]{2}$, $q_1 = \sqrt[4]{2}i$, $q_2 = -\sqrt[4]{2}$, $q_3 = -\sqrt[4]{2}i$ ד. $S_{10} = 1871.02$

א. $a = 1$ (4) ב. (1). ציר y : $(0,1)$, ציר x : $(-1,0)$, $(1,0)$

(2). ציר y : $(0,1)$, ציר x : $(-1,0)$

(3). $g(x)$: $\max\left(1, \frac{4}{e}\right)$, $\min(-1,0)$

ג. להלן סרטוט: $f(x)$: $\max(1-\sqrt{2}, 1.253)$, $\min(1+\sqrt{2}, -0.431)$



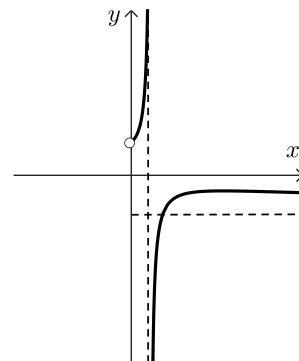
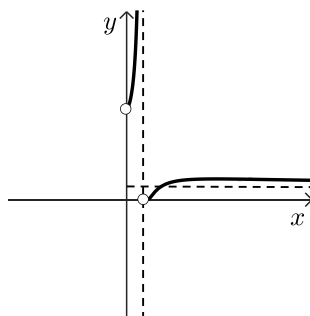
ה. 0.14 ד. $\frac{4}{e}$

א. $a \neq x > 0$ (5) (2). אין חיתוך. (3). $y = -1$ עבור: $x \rightarrow \infty$

ב. הסבר. ג. (1). $\max\left(e, \frac{1-e}{1+e}\right)$

(2). תחומי עלייה: $a < x < e$, $0 < x < a$, תחומי ירידה: $x > e$.

ד. להלן סרטוט: ה. להלן סרטוט:



שאלון 572

פרק 27

פתרון בידאו של בחינות 2023

69	חורף
74	קיץ מועד א
79	קיץ מועד מיוחד
84	קיץ מועד ב

בגרות 2023 מועד חורף:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונה אליפסה שמשוואתה $1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2}$, b הוא פרמטר חיובי.

ידוע כי המוקדים של האליפסה נמצאים על ציר ה- x .

נסמן את נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y ב- D_1 ו- D_2 ,

את המוקד השמאלי של האליפסה נסמן ב- F_1 ואת המוקד הימני שלה ב- F_2 .

נתון כי המרובע $F_1D_1F_2D_2$ הוא ריבוע.

א. (1) מצאו את הערך של b .

(2) חשבו את שטח הריבוע $F_1D_1F_2D_2$.

הציבו במשוואת האליפסה $b^2 = 4.5$ וענו על סעיפים ב-ד.

נקודה E היא נקודה כלשהי על האליפסה.

מחברים באמצעות קו ישר את המוקד השמאלי F_1 עם הנקודה E

וממשיכים את הקו הישר עד לנקודה M (ראו סרטוט), כך שמתקיים $EM = EF_2$.

ב. הוכיחו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M הוא מעגל, ורשמו את משוואתו.

מזיזים את המעגל שמצאתם בסעיף ב ימינה ב- $\frac{3}{\sqrt{2}}$ יחידות, ומתקבל מעגל אחר.

מכפילים ב- $\frac{2}{3}$ את שיעור ה- y של כל אחת מן הנקודות שעל המעגל האחר,

ומתקבל עקום חדש.

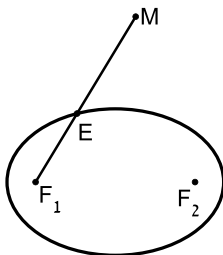
ג. זהו את צורת העקום החדש, ומצאו את משוואתו.

נתון משולש ששניים מקודקודיו הם נקודות החיתוך של העקום החדש

עם ציר ה- x , והקודקוד הנוסף נמצא גם הוא על העקום החדש.

ד. מצאו את השטח הגדול ביותר האפשרי של המשולש.

נמקו את תשובתכם.



(2) נתונים שני מישורים, π_1 ו- π_2 :

$$\pi_1: (k+2)x + y + (k+1)z + 11 = 0$$

$$\pi_2: (k+1)x + y + z - 5 = 0$$

k הוא פרמטר.

א. הסבירו מדוע בהכרח שני המישורים נחתכים זה עם זה.

ידוע כי ישר החיתוך בין שני המישורים, ℓ_1 , מקביל לישר $\ell_2: \underline{x} = (1, 2, -1) + m(-1, k, k)$.

ב. (1) מצאו את הערך של k .

(2) מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ_1 .

(3) מצאו את הזווית בין המישורים π_1 ו- π_2 .

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ_1 ועל מישור $[yz]$.

הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של ציר ה- y עם המישורים π_1 ו- π_2 בהתאמה.

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודות A, P, ו-B.

(2) מצאו את שטח המשולש APB.

(3) נתונה משוואה I: $w^6 = -27$, כאשר w הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את משוואה I.

נתונה משוואה II: $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = -27$, כאשר z הוא מספר מרוכב.

ב. (1) היעזרו בפתרונות של משוואה I ורשמו בהצגה אלגברית

את הפתרונות של משוואה II.

(2) הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס, המייצגות את הפתרונות של

משוואה II, נמצאות על מעגל – ומצאו את משוואתו.

(3) הוכיחו כי כל הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של

משושה משוכלל במישור גאוס.

נתון: שני הפתרונות המדומים ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II

מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג. (1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 5e^x + 4}$

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

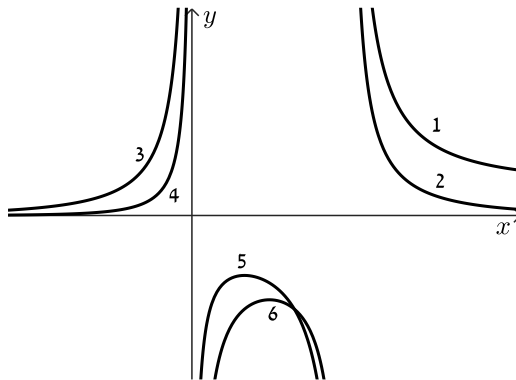
(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{5e^x}{e^{2x} - 5e^x + 4}$, המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין גרף הפונקציה $g(x)$.

לפניכם סרטוט הגרפים של שתי הפונקציות, $f(x)$ ו- $g(x)$. כל אחד מהחלקים של הגרפים מסומן בסרטוט בספרה אחרת.



ג. רשמו לאיזו פונקציה שייך כל אחד מהחלקים המסומנים בסרטוט. נמקו את תשובתכם.

ד. לפניכם שני ביטויים, I-II. קבעו, בנוגע לכל אחד מהביטויים, אם הוא שלילי או חיובי. נמקו ללא חישוב.

$$\text{I. } \int_{-4}^{-1} (f(x) - g(x)) dx \qquad \text{II. } \int_{\ln \frac{8}{5}}^{\ln 2} (f(x) - g(x)) dx$$

ה. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ובין הישרים $x = \ln 9$ ו- $x = \ln 16$.

5 נתונה הפונקציה $f(x) = 4x(\ln(x^2) - 1)$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 (3) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.
- ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 (2) האם יש לפונקציה $f(x)$ נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

- ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$, המאונכות לצירים.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 (4) בכמה נקודות הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים זה עם זה? נמקו את תשובתכם.
- ד. כתבו דוגמה לפונקציה קדומה של $g(x)$.

תשובות סופיות:

(1) א. $b = \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{4.5}$.א (2) .9 ב. מתקבל: $(x + \sqrt{4.5})^2 + y^2 = 36$

ג. אליפסה: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.ד 24.

(2) א. הסבר. ב. $k = 1$ (1) ב. (2) למשל: $(0, 21, -16) + t(-1, 1, 1)$

ב. 10.89° (3) ג. (1) $P(0, 21, -16)$, $A(0, -11, 0)$, $B(0, 5, 0)$

ג. (2) 128.

(3) א. $w_1 = \sqrt{3} \text{cis}(30^\circ)$, $w_2 = \sqrt{3} \text{cis}(90^\circ)$, $w_3 = \sqrt{3} \text{cis}(150^\circ)$

$w_4 = \sqrt{3} \text{cis}(210^\circ)$, $w_5 = \sqrt{3} \text{cis}(270^\circ)$, $w_6 = \sqrt{3} \text{cis}(330^\circ)$

ב. (1) $z_1 = \frac{3}{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = -\frac{3}{2}$, $z_4 = -\frac{3}{2} - \sqrt{3}i$, $z_5 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_6 = \frac{3}{2} - \sqrt{3}i$

ב. (2) להסביר. ב. (3) הוכחה. ג. (1) דלתון. ג. (2) 1.5

(4) א. (1) $x \neq 0, x \neq \ln 4$.א (2) $x = 0, x = \ln 4, x \rightarrow \infty: y = 2, x \rightarrow -\infty: y = 0$

א. (3) עלייה: $0 < x < \ln \frac{8}{5}$, ירידה: $x > \ln 4$, $x < 0$

ב. $\left(\ln \frac{5}{2}, -\frac{50}{9}\right)$ ג. הפונקציה $f(x)$ ב-1, 4, 5. הפונקציה $g(x)$ ב-2, 3, 6.

ד. ביטוי I: שלילי, ביטוי II: חיובי. ה. $\ln(4.5) \approx 1.5$

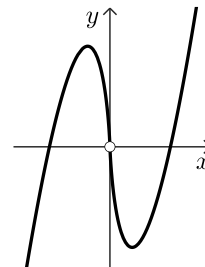
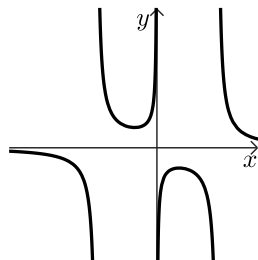
(5) א. (1) $x \neq 0$.א (2) $(\sqrt{e}, 0)$, $(-\sqrt{e}, 0)$.א (3) הוכחה.

ב. (1) $\max\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{8}{\sqrt{e}}\right)$, $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{8}{\sqrt{e}}\right)$.ב (2) אין פיתול.

ב. (3) להלן סקיצה: ג. (1) $x \neq \pm\sqrt{e}, x \neq 0$ ג. (2) $x = \pm\sqrt{e}, x = 0$

ג. (3) להלן סקיצה: ג. (4) 6 נקודות.

ד. למשל: $G(x) = \frac{\ln|\ln(x^2) - 1|}{8}$



בגרות 2023 מועד קיץ א:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

(1) נתונה אליפסה שמשוואתה: $\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{196-4k^2} = 1$, $0 < k < 7$.

הנקודה F_1 היא המוקד הימני של האליפסה, והנקודה F_2 היא המוקד השמאלי שלה.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודות F_1 ו- F_2 .

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על פרבולה שמשוואתה קנונית והמוקד שלה נמצא בנקודה F_1 ,

כך שמתקיים: $AF_1 = 10k$.

ב. (1) הביעו באמצעות k את משוואת מדריך הפרבולה.

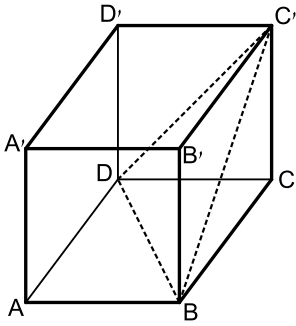
(2) הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A.

AF_1 הוא קוטר במעגל. הישר שמשוואתו: $5x + 12y = 138$ משיק למעגל זה.

ג. מצאו את הערך של k .

D היא נקודה על האליפסה.

ד. קבעו אם היקף המשולש F_1AF_2 גדול מהיקף המשולש F_1DF_2 , קטן ממנו או שווה לו. נמקו את קביעתכם.



2) בסרטוט שלפניכם מתוארת הקובייה ABCDA'B'C'D'.

נסמן: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$.

א. הוכיחו כי האלכסון CA' מאונך למישור BC'D.
נקודה E היא מפגש התיכונים במשולש BC'D.

ב. (1) הביעו את הווקטור \overline{CE} באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} .

(2) הוכיחו כי הנקודות C, E ו-A' נמצאות על ישר אחד.

נתון: $D(0,0,0)$, $C(6,8,0)$, $A(8,n,p)$, n ו- p הם פרמטרים.

שיעור ה- z של הנקודה C' הוא חיובי.

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודה A, והוכיחו כי ABCD נמצא במישור $z = 0$.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה C'.

ל הוא ישר החיתוך בין המישור BC'D ובין המישור BCC'B'.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של הישר l .

ה. מצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל את הישר l ואינו חותך את ציר ה- x .

3) נתונה המשוואה: $z^3 = \frac{1}{z^3}$, z הוא מספר מרוכב.

נתון גם כי המספר z_0 הוא אחד מפתרונות המשוואה וכי הוא מיוצג על ידי נקודה ברביע הרביעי במישור גאוס.

א. מצאו את המספר המרוכב z_0 .

הנקודות A, B ו-C' מיוצגות במישור גאוס על ידי המספרים המרוכבים:

$$d \cdot z_0, d \cdot (z_0)^4 \text{ ו- } di \cdot z_0, \text{ בהתאמה. } d > 0 \text{ הוא פרמטר.}$$

נתון כי שטח המשולש ABC הוא: $5d + 6$.

ב. מצאו את הערך של d .

$$\text{נגדיר: } w = \left((z_0)^2 - \frac{1}{(z_0)^2} \right) (1+i).$$

ג. מצאו את $|w|$ ואת הארגומנט (הזווית) של w .

נתון כי המספר w^n (n הוא מספר טבעי) הוא מספר מדומה טהור, ונמצא מחוץ למעגל החוסם את המשולש ABC.

ד. מצאו את הערך המינימלי האפשרי של n .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה $f(x) = (e^x - 1)^n - 4$, המוגדרת לכל x . n הוא מספר טבעי גדול או שווה ל-2.

ענו על סעיף א עבור n זוגי ועבור n אי זוגי.

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את

סוגן (אם יש כאלה).

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענו על הסעיפים ב-ג עבור $n = 2$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = 6e^x - 10$, המוגדרת לכל x .

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך שבין גרף הפונקציה $f(x)$

ובין גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$

ועל ידי גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = |f(x)|$, המוגדרת לכל x .

ג. (1) כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $h(x)$? מצאו את שיעורי הנקודות

הללו, וקבעו את סוגן.

(2) מצאו את תחום הערכים של k שעבורו הישר $y = k$ חותך את גרף

הפונקציה $h(x)$ ב-3 נקודות.

5) נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגה.
- (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה: $g(x) = (x+1)(1-\ln(x))$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.
- ב. (1) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .
- (2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).
- (3) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה \cup ואת תחום הקעירות כלפי מטה \cap של הפונקציה $g(x)$.
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- נתונה הפונקציה: $h(x) = \frac{1}{x} \cdot g'(x)$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $g(x)$.
- ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=e$ ו- $x=1$.

תשובות סופיות:

(1) א. $F_2(-2k, 0)$, $F_1(2k, 0)$ ב. (1) $x = -2k$ (2) $A(8k, 8k)$ ג. $k = 1$
 ד. היקף המשולש F_1AF_2 קטן מהיקף המשולש F_1DF_2 .

(2) א. הוכחה. ב. (1) $\overline{CE} = \frac{1}{3}(-u - v + w)$ ב. (2) הוכחה, $\overline{CE} = \frac{1}{3}\overline{CA}$.

ג. (1) $A(3, -4, 0)$ (2) $C'(4, 3, 5)$ ד. $\underline{x} = (7, -1, 0) + t(-3, 4, 5)$
 ה. $\underline{x} = (7, -1, 0) + t(-3, 4, 5) + s(1, 0, 0)$

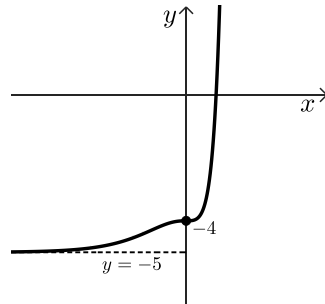
(3) א. $z_0 = 1cis(-60) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ב. $d = 6$

ג. $\arg(w) = -45^\circ$, $|w| = \sqrt{6}$ ד. $n = 6$

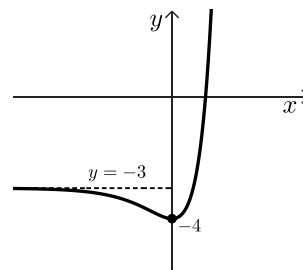
(4) א. (1) עבור n זוגי: כאשר $x \rightarrow \infty$: אין אופקית, כאשר $x \rightarrow -\infty$: $y = -3$.
 עבור n אי-זוגי: כאשר $x \rightarrow \infty$: אין אופקית, כאשר $x \rightarrow -\infty$: $y = -5$.

(2) עבור n זוגי: $\min(0, -4)$, עבור n אי-זוגי: אין.

עבור n אי-זוגי:



(3) עבור n זוגי:



ב. (1) $(0, -4)$, $(\ln 7, 32)$ (2) 10.378 יח"ר $\approx 24 - 7 \ln 7$

ג. (1) יש 2 נקודות קיצון: $\min(\ln 3, 0)$, $\max(0, 4)$ ג. (2) $3 < k < 4$

(5) א. (1) $x > 0$ א. (2) $\min(1, 1)$

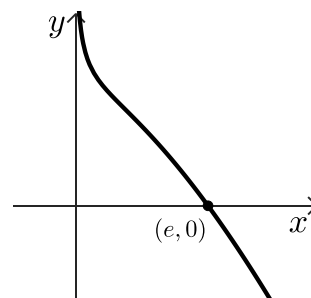
ב. (1) $(e, 0)$

ב. (2) תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x > 0$.

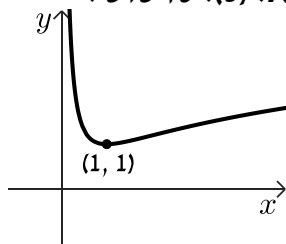
ב. (3) תחומי קעירות כלפי מעלה: $0 < x < 1$,

תחומי קעירות כלפי מטה: $x > 1$.

ב. (4) סרטוט:



א. (3) סרטוט:



ג. 1.132 יח"ר $\approx \frac{3}{2} - \frac{1}{e}$

בגרות 2023 מועד מיוחד:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

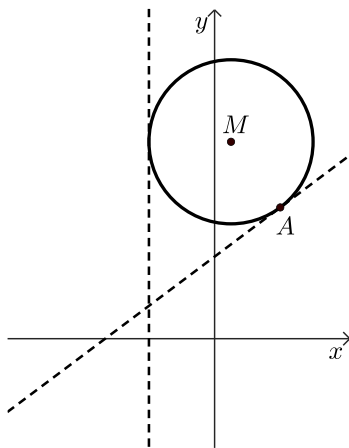
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

1) נתונים הישרים שמשוואותיהם:

$$l_1: 4y - 3x - 20 = 0$$

$$l_2: x = -4$$



א. מצאו את המשוואות המתארות את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים

שווים מן הישרים l_1 ו- l_2 .

מעגל שמרכזו M משיק לישרים l_1 ו- l_2 .

המעגל משיק לישר l_1 בנקודה A שבה $x = 4$.

המרכז M נמצא ברביע הראשון (ראו סרטוט)

ב. מצאו את שיעורי הנקודה M.

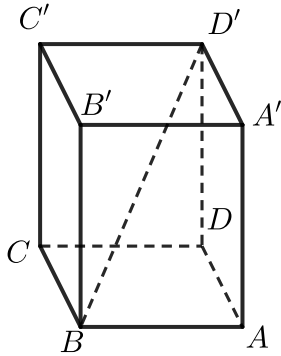
הישר l_2 הוא מדריך של פרבולה קנונית.

ג. האם הישר l_1 משיק בנקודה A לפרבולה זו? נמקו את תשובתכם.

ד. מצאו את משוואת המעגל המשיק לפרבולה זו בשתי נקודות

שאחת מהן היא הנקודה A.

- (2) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שהבסיס שלה, $ABCD$, הוא מלבן (ראו סרטוט). הנקודה E נמצאת על המקצוע DD' כך ש- $DE:ED'=3:2$, הנקודה F נמצאת על האלכסון BD' ומתקיים: $\overrightarrow{BF} = t \cdot \overrightarrow{BD'}$, $0 < t < 1$ הוא פרמטר.



נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

א. הביעו את הווקטורים \overrightarrow{FE} ו- $\overrightarrow{BD'}$ באמצעות: \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- t , אם יש צורך.

נתון כי FE מקביל למישור הבסיס $ABCD$.

ב. מצאו את t .

הנקודה C היא ראשית הצירים.

הנקודה B נמצאת על ציר ה- x בכיוון החיובי שלו, והנקודה D נמצאת על ציר ה- y בכיוון החיובי שלו.

נתון: $F(4,12,18)$.

ג. מצאו את $|\underline{u}|$, $|\underline{v}|$, $|\underline{w}|$.

מן הנקודה F העבירו ישר המאונך למישור $EFBD$.

ישר זה חותך את הפאה $CDD'C'$ בנקודה P .

ד. מצאו את שיעורי הנקודה P .

- (3) $z = x + iy$ הוא מספר מרוכב (x ו- y הם מספרים ממשיים).

א. (1) הראו כי משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס

$$\text{המקיימות: } |z^2 - 3i| = |z^2 + 5i| \text{ היא: } y = -\frac{1}{2x}.$$

(2) תנו דוגמה למספר מרוכב הנמצא על המקום הגאומטרי הזה.

ב. פתרו את המשוואה: $z^6 = 1$.

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב מייצגים את קודקודיו של מצולע I. המקום הגאומטרי שמצוין בתת סעיף א(1) חותך ברביע הרביעי את המעגל

החוסם את מצולע I בנקודה A.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A.

הנקודה A היא קודקוד של מצולע משוכלל אחר החסום באותו מעגל, מצולע II.

נתון: מספר הקודקודים של מצולע II שווה למספר הקודקודים של מצולע I.

ד. מצאו את המספרים המרוכבים המייצגים את כל הקודקודים של

מצולע II.

נסמן: $w = r \cdot \text{cis } \alpha$, $0 < \alpha < 60^\circ$.

כופלים את כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I במספר w ,

כך שקודקודי מצולע I מתלכדים עם קודקודי מצולע II.

ה. מצאו את w .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x , ו- $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת שלה, המוגדרת גם היא לכל x .

נתון: $f'(x) = -2x \cdot e^{-\frac{x^2}{a}}$, a הוא פרמטר.

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול בנקודה שבה: $x = \sqrt{2}$.

א. מצאו את a .

נתון: $f(0) = a$.

ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של

הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $m(x) = e^{h(x)}$, $h(x) = \frac{1}{f'(x)}$

שלושה מבין הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתארים את הפונקציות:

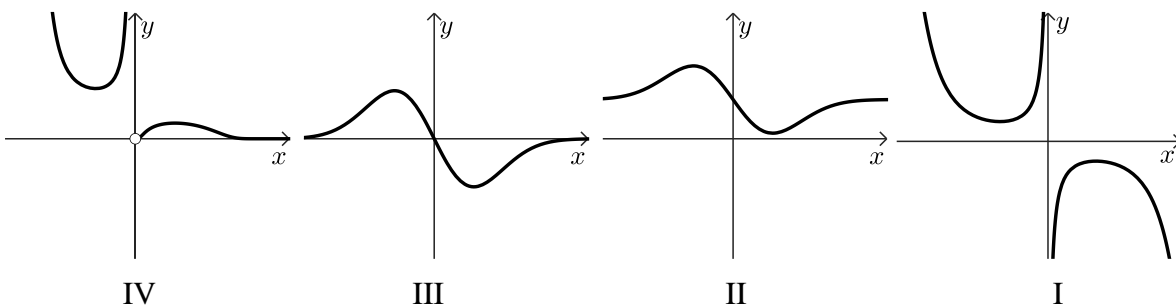
$m(x)$, $h(x)$, $f'(x)$

ד. התאימו לכל פונקציה את הגרף המתאר אותה.

ה. (1) מצאו את תחומי הירידה של הפונקציה $m(x)$.

(2) קבעו את הביטוי: $\int_1^2 h(x) \cdot m(x) dx$ חיובי או שלילי.

נמקו את קביעתכם.



(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1 - \ln x}{\ln x}$

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
 (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(-f(x))$

- ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.
 (3) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.
 (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נסמן ב- a את שיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף הפונקציה $g(x)$.

- ג. מבין הביטויים III-I קבעו איזה ביטוי הוא הגדול ביותר ואיזה ביטוי הוא הקטן ביותר (אין צורך למצוא את הערך של a).
 נמקו את תשובתכם.

I. $\int_{a+1}^{a+2} (g(x) - f(x)) dx$ II. $\int_{a+3}^{a+4} (g(x) - f(x)) dx$ III. המספר 1.

תשובות סופיות:

1) א. $y = -\frac{1}{2}x$, $y = 2x + 10$ ב. $M(1,12)$ ג. l_1 אינו משיק לפרבולה.

ד. $(x-12)^2 + y^2 = 128$

2) א. $\overline{BD} = -\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$, $\overline{EF} = (t-1)\underline{u} + (1-t)\underline{v} + \left(\frac{3}{5}-t\right)\underline{w}$ ב. $t = \frac{3}{5}$

ג. $|\underline{u}| = 20$, $|\underline{v}| = 10$, $|\underline{w}| = 30$ ד. $P(0,10,18)$

3) א. (1). הוכחה, $y = -\frac{1}{2x}$ (2). למשל, $z = 1 - \frac{1}{2}i$

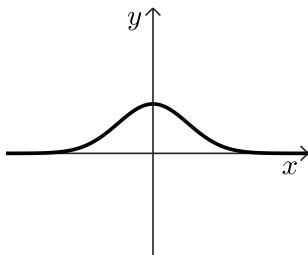
ב. $cis0^\circ, cis60^\circ, cis120^\circ, cis180^\circ, cis240^\circ, cis300^\circ$ ג. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ד. $cis15^\circ, cis75^\circ, cis135^\circ, cis195^\circ, cis255^\circ, cis315^\circ = cis(-45^\circ)$

ה. $w = cis15^\circ$

4) א. $a = 4$ ב. $f(x) = 4e^{-\frac{x^2}{4}}$ ג. (1). זוגית.

(2). $y = 0$ (3). (0,4) מקסימום. (4). סרטוט:



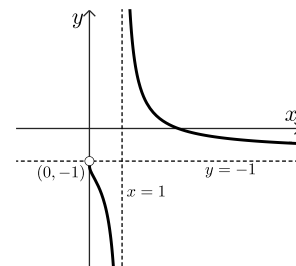
ד. גרף I: $h(x)$, גרף III: $f'(x)$, גרף IV: $m(x)$

ה. (1). ירידה: $\sqrt{2} < x$ או $x < -\sqrt{2}$ (2). שלילי.

5) א. (1) $0 < x \neq 1$ (2) $y = -1, x = 1$

(3). ירידה: $0 < x < 1$ או $x > 1$. עלייה: אין.

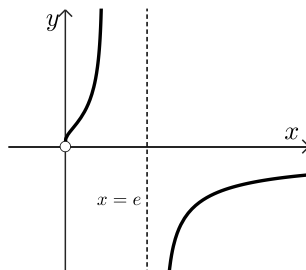
(4). סרטוט: ב. (1). $0 < x < 1$ או $e < x$



(2). $y = 0, x = e, x = 1$

(3). חיובית: $0 < x < 1$, שלילית: $e < x$

(4). סרטוט:



ג. הביטוי הגדול ביותר – I, הביטוי הקטן ביותר – III.

בגרות 2023 מועד קיץ ב:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונות הנקודות: $A(0,28)$, $B(16,0)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי שעליו

נמצאות הנקודות C המקיימות:

$$AC^2 + BC^2 = 1,320$$

את המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א מזיזים 8 יחידות שמאלה ו-14 יחידות למטה כך שמתקבל מקום גאומטרי חדש.

המקום הגאומטרי החדש חותך את ציר ה- y בנקודות E ו-G (מעל E).
הנקודות F_1 ו- F_2 הן מוקדי אליפסה קנונית שעוברת דרך הנקודות E ו-G, כמתואר בסרטוט.

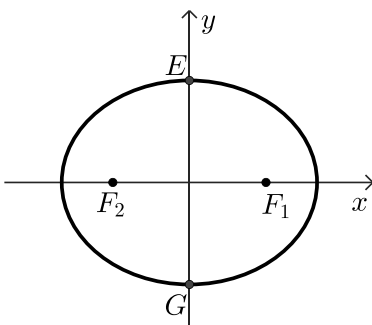
נתון: המרחק בין הישרים EF_1 ו- GF_2 הוא 24.

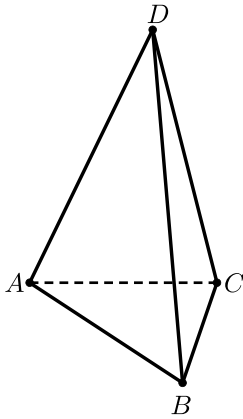
ב. (1) מצאו את שיעורי הנקודה F_1 .

(2) מצאו את משוואת האליפסה.

העבירו מעגלים המשיקים לישר EF_1 , לציר ה- x ולציר ה- y .

ג. מצאו משוואות של שני מעגלים כאלה הנמצאים ברביעים שונים.





2) בפירמידה ABCD, המקצוע DC מאונך למישור ABC.

הנקודה E היא אמצע המקצוע AD.

הנקודה F מקיימת: $\overrightarrow{DF} = \frac{k}{2} \cdot \overrightarrow{DB} + k \cdot \overrightarrow{DC}$, הוא פרמטר k .

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{w}$.

א. הביעו באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- k את \overrightarrow{EF} .

נתון: \overrightarrow{EF} מקביל למישור ABC.

ב. מצאו את הערך של k .

נתון: $A(0,0,0)$, $B(p,6,0)$, $C(0,n,0)$, $n \neq p$.

הם פרמטרים חיוביים.

$\overrightarrow{BD} = (-8, -2, 9)$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 24$

ג. מצאו את שיעורי הנקודות B, C ו-D.

ד. מצאו את נפח הפירמידה ABCD.

ה. מהו המצב ההדדי בין הישר EF לבין הישר AB? נמקו את קביעתכם.

3) נתונה סדרה הנדסית: z, z_1, z_2, z_3, \dots שאיבריה הם מספרים מרוכבים

ומנתה היא q .

נמצא ברביע הראשון.

נתון: $(z_1)^3 = z_3$, $-2z_1 = \overline{z_3}$.

א. הוכיחו כי: $q = -z_1$ או $q = z_1$.

ב. מצאו את z_1 .

ענו על הסעיפים ג-ד עבור: $q = z_1$.

ג. קבעו בעבור כל אחד מן האיברים בסדרה ההנדסית הנתונה (n הוא מספר טבעי).

קבעו בעבור כל אחד מן האיברים אם הוא מדומה או ממשי. נמקו את

קביעותיכם.

ד. מצאו את ערך הסכום: $\frac{z_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_3}{(\sqrt{2})^3} + \dots + \frac{z_{64}}{(\sqrt{2})^{64}}$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln(x) + \ln(a)}{\ln(x) - \ln(a)}$, a הוא פרמטר גדול מ-1.

בסעיפים א–ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של

הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצאו את תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

לפניכם טענה: למשוואה $f(x) = f'(x)$ קיים בדיוק פתרון אחד בתחום $x > a$.

ב. קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה: $g(x)$, המקיימת: $g(x) = \ln(f(x))$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים: $x=3$ ו- $x=5$.

נתון: $1 < a < 3$.

ד. הביעו באמצעות S את ערך האינטגרל: $\int_3^5 \ln(4 \cdot f(x)) dx$.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 6}$

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
 (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
 הפונקציות $g(x)$ ו- $f(x)$ מוגדרות באותו התחום.
 (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).
 (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 (3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית שלה ועל ידי הישרים: $x = \ln 7$ ו- $x = \ln 10$.
- ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה $g(x)$.
- נתונה הפונקציה: $s(x) = \int_x^{\ln 5} (f(t) - g(t)) dt$, המוגדרת בתחום: $x < \ln 5$.
 ד. מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $s(x)$ וקבעו את סוגה.

תשובות סופיות:

א. (1) $(x-8)^2 + (y-14)^2 = 400$ ב. (1) $F_1(15,0)$ (2) $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{400} = 1$

ג. $(x+15)^2 + (y-15)^2 = 225$, $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

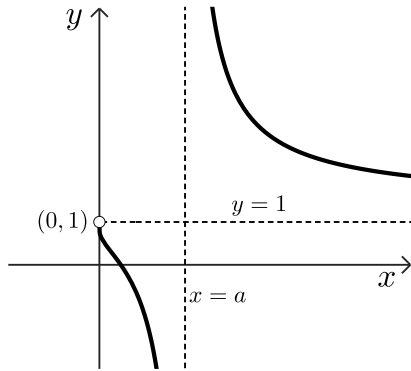
א. (2) $\vec{EF} = \frac{k}{2}\vec{u} + \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right)\vec{v} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3k}{2}\right)\vec{w}$ ב. $k = \frac{1}{3}$

ג. $B(8,6,0)$, $C(0,4,0)$, $D(0,4,9)$ ד. 48 ה. מצטלבים.

א. הוכחה. ב. $z_1 = \sqrt{2}\text{cis}(45^\circ)$ (3)

ג. z_{4n-2} - ממשי, z_{4n} - מדומה. ד. 0

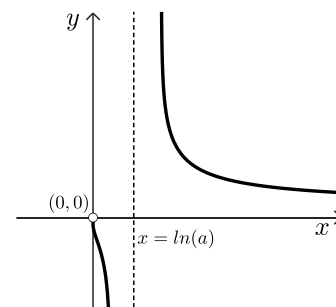
א. (1) $0 < x < a$ או $a < x$ א. (2) $x = a$, $y = 1$ א. (3) $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$



א. (4) $0 < x < a$ או $a < x$ א. (5) סרטוט: ב. לא נכון.

ג. (1) $0 < x < \frac{1}{a}$ או $a < x$

ג. (2) סרטוט:

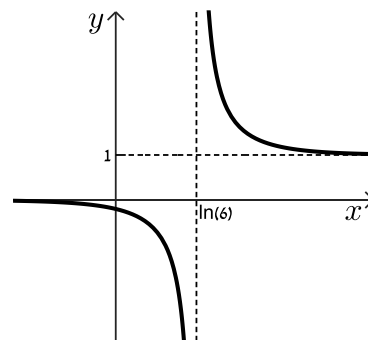
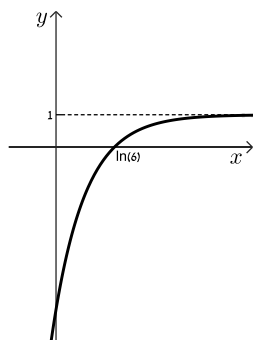


ד. $2\ln 4 + S$

א. (1) $x \neq \ln 6$ א. (2) $x = \ln 6$, $y = 1$, $y = 0$ (5)

א. (3) תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $\ln 6 < x$ או $x < \ln 6$

א. (4) סרטוט: ב. (1) $y = 1$ ב. (2) סרטוט:



ד. $x = \ln 3$ מינימום.

ג. $(\ln 3, -1)$

ב. (3) $S = \frac{9}{35}$

שאלון 572

פרק 28

פתרון בידאו של בחינות 2022

89	חורף
93	מועד נבצרים
97	קיץ מועד א
102	קיץ מועד ב

בגרות 2022 מועד חורף:

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

- (1) הנקודה $(t, 0)$ היא מוקד של פרבולה קנונית ומוקד של אליפסה קנונית.
 t הוא פרמטר חיובי.
 אורך הציר הראשי של האליפסה הוא $4t$.
 בסעיפים שלפניך הבע את תשובותיך באמצעות t , אם יש צורך.
 א. מצא את משוואת הפרבולה ואת משוואת האליפסה.
 המדריך של הפרבולה חותך את האליפסה בשתי נקודות, A ו-B.
 הנקודה A נמצאת מעל לנקודה B.
 ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
 ישר המאונך לציר ה- x עובר במוקד הפרבולה וחותך את הפרבולה בשתי נקודות C ו-D. הנקודה C נמצאת מעל לנקודה D.
 ג. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
 ד. (1) הסבר מדוע ארבע הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על מעגל אחד.
 (2) מצא את שיעורי מרכז המעגל הזה.
- (2) נתונים שני מישורים: $\pi_1: z-3=0$, $\pi_2: ay+z-8=0$, a הוא פרמטר שונה מ-0. הזווית בין המישורים היא 45° .
 א. מצא את הערכים האפשריים עבור הפרמטר a .
 הנקודה $A(2, -2, 6)$ נמצאת על אחד המישורים הנתונים.
 מן הנקודה A הורידו אנך למישור האחר.
 האנך חותך את המישור האחר בנקודה B.
 ב. מצא את אורך הקטע AB.
 l הוא ישר החיתוך בין שני המישורים π_1 ו- π_2 .
 ג. מצא את ההצגה הפרמטרית של l .
 מן הנקודה B העבירו אנך לישר l . האנך חותך את הישר l בנקודה C.
 ד. מצא את שטח המשולש ABC (תוכל לסרטט את המשולש במערכת צירים לשם כך).

(3) נתונים שני מספרים מרוכבים : $z_1 = (2a^2 + 5a + 4) + (2a^2 + 3a + 2)i$

$z_2 = (a^2 + 8a + 8) + (2 - a^2 + 2a)i$

a הוא פרמטר ממשי.

א. מצא את הערך של a שבעבורו המספרים z_1 ו- z_2 צמודים זה לזה.
הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ב-ג.

נתונים המספרים : $w_1 = \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$, $w_2 = \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$. n הוא מספר טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי :

(1) המספר w_1 הוא מספר ממשי.

(2) המספר w_2 הוא מספר מדומה טהור.

ג. נתונה המשוואה : $|z - p| = m$. p ו- m הם פרמטרים ממשיים, z הוא מספר מרוכב. מה הם הערכים של p ו- m שבעבורם המשוואה הנתונה מתארת מעגל במישור גאוס שעליו נמצאים המספרים w_1 ו- w_2 לכל n טבעי? נמק.

ענה על אחת מן השאלות 4-5 ($33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + m}{4}$. m הוא פרמטר.

ידוע כי הישר $y = -1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את m .

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן

(אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה : $g(x) = \frac{1}{f(x)} + 1$

ג. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

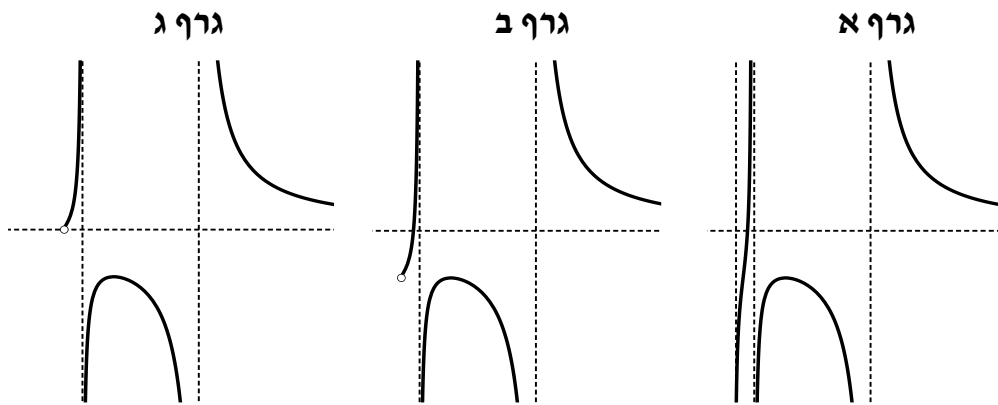
(2) מצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
נתון פרמטר t בתחום $0 < t < \ln 4$.

ה. מצא את הערך של t שבעבורו ערך הביטוי $\int_0^t g(x) dx$ הוא מקסימלי.
נמק את תשובתך.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{(\ln(x))^2 - 1}$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. לפניך שלושה גרפים שבהם לא מסומנים הצירים x ו- y . הקווים המרוסקים מייצגים את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, והעיגול הריק מייצג נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת. קבע איזה מן הגרפים מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$, העתק אותו למחברתך, והוסף בו את מערכת הצירים. פרט של שיקולידך.



- ג. (1) האם יש פתרון למשוואה $f(x) = 1$? נמק את תשובתך.
 (2) מהו הערך של k שבעבורו יש למשוואה $f(x) = k$ פתרון יחיד?
 נמק את תשובתך.

נתונות הפונקציות: $h(x) = (\ln(x))^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$

- נסמן מלבן ABCD. הנקודות A ו-B הן שתי נקודות על ציר ה- x שבהן הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת. הנקודות C ו-D נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$.
 ד. מהו שטח המלבן ABCD? נמק את תשובתך.

תשובות סופיות:

1 א. משוואת האליפסה: $\frac{x^2}{4t^2} + \frac{y^2}{3t^2} = 1$, משוואת הפרבולה: $y^2 = 4tx$

ב. $A\left(-t, \frac{3t}{2}\right), B\left(-t, -\frac{3t}{2}\right)$ ג. $C(t, 2t), D(t, -2t)$

ד. (1) טרפז שווה שוקיים. (2) $\left(\frac{7t}{16}, 0\right)$

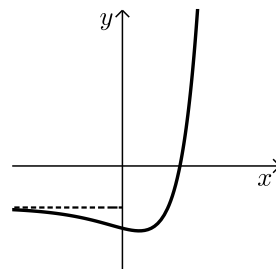
2 א. $a = \pm 1$ ב. 3 ג. $x = (0, -5, 3) + t(1, 0, 0)$

ד. 4.5

3 א. $a = -1$ ב. (1) הוכחה. (2) הוכחה.

ג. $m = 1, p = 0$

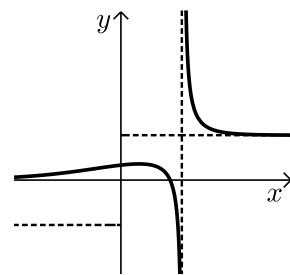
4 א. (1) כל x (2) $m = -4$ (3) $(\ln 4, 0), (0, -1.5)$



(4) $\min\left(\ln \frac{3}{2}, \frac{-25}{16}\right)$ ב.

ג. (1) $x \neq \ln 4$ (2) $y = 0, y = 1, x = \ln 4$

ה. $t = \ln 3$



5 א. (1) $x \neq \frac{1}{e}, e, x > 0$ (2) $y = 1, x = \frac{1}{e}, x = e$

(3) תחומי עלייה: $0 < x < \frac{1}{e}$ או $\frac{1}{e} < x < 1$

תחומי ירידה: $e < x$ או $1 < x < e$ ב. גרף ג'

ג. (1) לא. (2) $k = 0$ ד. $S = \frac{2e^2 - 2}{e} = 2\left(e - \frac{1}{e}\right)$

בגרות 2022 מועד חורף נבצרים:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

- (1) מעגל שמרכזו בנקודה M חסום במשולש ABC. הצלע AB נמצאת על הישר: $2x + y - 13 = 0$ והצלע AC נמצאת על הישר: $-x + 2y + 4 = 0$. מרכז המעגל M נמצא על הישר: $y = x - 1$. ראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש ABC.
- א. מצא את משוואת המעגל החסום במשולש ABC. נתון כי הישר BM מאונך לציר ה-x.
- ב. מצא את משוואת הצלע BC.
- ג. מצא את המרחק בין מרכז המעגל החסום במשולש ABC ובין מרכז המעגל החוסם את המשולש הזה.

- (2) נתונה מנסרה ישרה ABCD A'B'C'D', שבסיסה הוא מעוין ABCD (ראה סרטוט).

נקודה F נמצאת על המישור ACD' כך ש: $\overrightarrow{D'F} = t\overrightarrow{D'A} + \frac{1}{4}\overrightarrow{D'C}$, t הוא פרמטר.

נתון: DF מאונך למישור ACD', $\angle ADC = 120^\circ$, $|\overrightarrow{DC}| = 4$.

נסמן: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$.

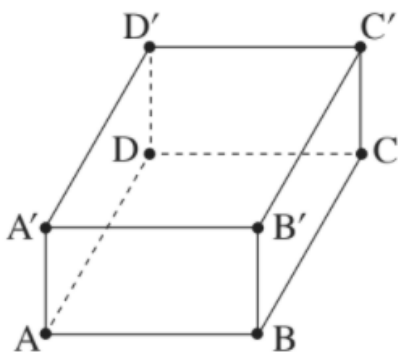
א. בטא את \overrightarrow{DF} באמצעות: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.

ב. מצא את t.

ג. חשב את נפח המנסרה.

נתון: הנקודה D היא ראשית הצירים, הקודקוד A נמצא על החלק החיובי של ציר ה-x, הקודקוד D' נמצא על החלק החיובי של ציר ה-z, $C = (-2, \sqrt{12}, 0)$.

ד. מצא את שיעורי הנקודה F.



3) ענה :

א. פתור את המשוואה: $(z+i)^2 - 2 - 2\sqrt{3}i = 0$, z הוא מספר מרוכב.
נסמן את החלקים הממשיים של פתרונות המשוואה ב- a_1 וב- a_2 כך ש- $a_1 < a_2$.
נתונים שני מקומות גאומטריים:

$$I. |z - ia_1| = \sqrt{3}$$

$$II. |z - ia_2| = \sqrt{3}$$

ב. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.
הישר $y = x$ נמצא במישור גאוס. ישר זה חותך את המקומות הגאומטריים
שסרטטת בסעיף ב בראשית הצירים ובשתי נקודות אחרות שמיוצגות על ידי
שני המספרים המרוכבים w_1 ו- w_2 .

ג. פתור את המשוואה: $z^3 = w_1 \cdot \overline{w_1} \cdot w_2 \cdot \overline{w_2}$, z הוא מספר מרוכב.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax}{\ln(x) - a}$, $a > 0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ב, בטא את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האנך לציר ה- x
העובר בנקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר $x = e^{a+2}$ ועל ידי ציר
ה- x , הוא 3.

ג. מצא את a .

5 נתונה הפונקציה: $f(x) = 9^{-x} - 6 \cdot 3^{-x} + m$, m הוא פרמטר.

א. בתת-סעיפים (1)-(3) בטא את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x .

ב. מצא את הערך של הפרמטר m .

ג. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) היעזר בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $\ln(f(x))$.

ד. הסבר מדוע: $\int_0^1 [\ln(f(x)) - \ln(4)] dx < \ln\left(\frac{9}{4}\right)$.

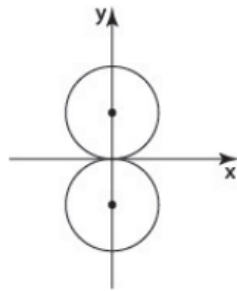
תשובות סופיות:

א. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$ ב. $y = 2x + 1$ ג. 2.5

א. $\overline{DF} = t\mathbf{u} + \frac{1}{4}\mathbf{v} + \left(\frac{3}{4} - t\right)\mathbf{w}$ ב. $t = \frac{1}{4}$ ג. $V = 16\sqrt{3}$

ד. $F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{12}}{4}, 1\right)$

א. $Z_1 = -\sqrt{3} - 2i, Z_2 = \sqrt{3}$ ב. להלן סרטוט: ג. $\sqrt[3]{36}cis240^\circ, \sqrt[3]{36}cis120^\circ, \sqrt[3]{36}$

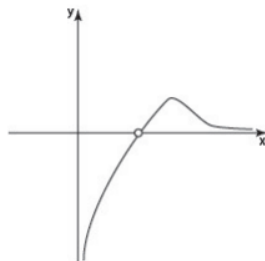
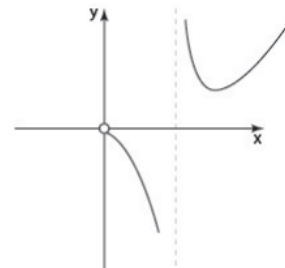


(2). מינימום. (e^{a+1}, ae^{a+1})

א. (1). $0 < x \neq e^a$ ג. (3). להלן סרטוט:

א. (1). $0 < x \neq e^a$ ב. (2). מקסימום. $\left(e^{a+1}, \frac{1}{ae^{a+1}}\right)$

ג. $a = \frac{1}{2}$ ג. (3). להלן סרטוט:

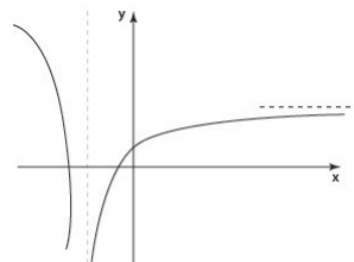
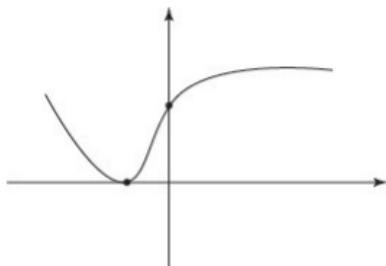


א. (1). כל x . ב. $y = m$ ג. (3). מינימום. $(-1, m-9)$

א. (1). כל x . ב. $m = 9$ ג. (2). להלן סרטוט:

ג. (1). להלן סרטוט:

א. (2). להלן סרטוט:



ד. הוכחה.

בגרות 2022 מועד קיץ א':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

- 1) נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.
 מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא: $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, הוא פרמטר חיובי.
 מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא: $(x-15)^2 + y^2 = R^2$.
 אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9, והיחס בין אורכי הרדיוסים של המעגלים הוא: $1:2$, $r < R$.
 א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו M.
 נתון כי: $a < 15$.
 ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.
 ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.
 ד. הישר: $mx - y + n = 0$ הוא משיק משותף לשני המעגלים.
 מצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).
 נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ.
 משוואות המעגלים הן: $(x-t)^2 + y^2 = r^2$; $(x-k)^2 + y^2 = R^2$, t ו-k הם פרמטרים. ערכי הרדיוסים r ו-R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.
 ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים גם למעגלים האלה? אם כן – מצאו את t ואת k. אם לא – נמקו.

(2)

נתונות ארבע נקודות הנמצאות באותו המישור :
 $A(4, p, -1)$, $B(7, 5, 5)$, $C(1, -1, 2)$, $D(-2, 5, -4)$, p הוא פרמטר.

א. מצאו את משוואת המישור ABCD.

ב. חשבו את ערך הפרמטר p .

ג. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא ריבוע.

הנקודה S היא קודקוד של פירמידה SABCD שבסיסה ABCD.

המקצוע SC מונח על הישר : $x = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$.

נתון כי נפח הפירמידה הוא 81.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה S (שתי אפשרויות).

נתון מישור נוסף π המאונך למקצוע SC.

ה. מצאו את הזווית שבין המישור ABCD ובין המישור π .

(3)

נתונה המשוואה : $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$, z הוא מספר מרוכב.

z_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

א. מצאו את משוואת המעגל.

חוסמים במעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר z_1 .

ב. חשבו את שטח הריבוע.

ג. מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.

מכפילים ב- $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי

הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים

ב- $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 60^\circ) + i \sin(\alpha + 60^\circ))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי

הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי. הנקודות במישור גאוס המייצגות את

התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.

נתון : r_1 ו- r_2 חיוביים, $r_1 \neq r_2$.

ד. מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את התשובה.

נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי 1.2 משטח הריבוע בסעיף ב.

ה. חשבו את $r_1 \cdot r_2$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$ המוגדרת לכל x .

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- y (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1-e^x}{e^x-x}$, המוגדרת לכל x .

ב. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לציר ה- y .

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) הוכיחו כי: $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x-x)^2}$.

ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ומצאו כמה נקודות מקסימום וכמה נקודות מינימום יש לפונקציה $g(x)$. נמקו את התשובה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר: $x = -1$.

5 נתונה הפונקציה : $f(x) = x + \ln(x^2 - 15)$

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.

נתונה הפונקציה : $g(x) = e^{f(x)}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

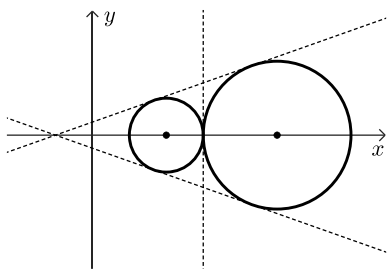
(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה : $y = f'(x) \cdot g(x)$, על ידי

ציר ה- x ועל ידי הישרים : $x = -6$ ו- $x = -5$.

תשובות סופיות:

1 א. משוואת המעגל שמרכזו N: $(x-15)^2 + y^2 = 36$, משוואת המעגל שמרכזו M:



ב. להלן סקיצה: $(x-6)^2 + y^2 = 9$, $(x-24)^2 + y^2 = 9$

ג. $x=9$. $m_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$, $n_1 = \frac{3}{\sqrt{8}}$, $m_2 = -\frac{1}{\sqrt{8}}$, $n_2 = -\frac{3}{\sqrt{8}}$. ד.

ה. $t = -21$, $k = -21$.

2 א. $2x - y - 2z + 1 = 0$. ב. $p = 11$. ג. הוכחה.

ד. $(-2, -10, -1)$, $(4, 8, 5)$, 72.5° .

3 א. $x^2 + y^2 = 10$. ב. 20. ג. $(-3, -1)$, $(-1, 3)$, $(1, -3)$.

ד. מקבילית. ה. 2.4.

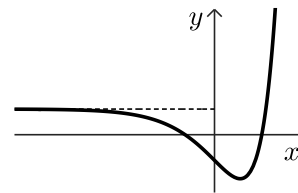
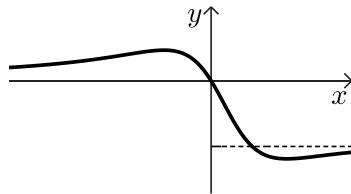
4 א. (1) $y = 1$ $x \rightarrow \infty$. א. (2) $(0, -1)$. א. (3) עלייה: $x > 1$, ירידה: $x < 1$.

א. (4) להלן סקיצה: ב. (1) $x \rightarrow \infty: y = -1$, $x \rightarrow -\infty: y = 0$.

ב. (2) $(0, 0)$. ב. (3) הוכחה.

ג. נקי מינימום אחת, נקי מקסימום אחת.

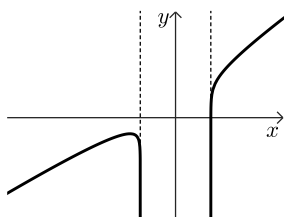
ד. להלן סקיצה:



ה. $\ln \frac{e+1}{e} \approx 0.31$.

א. (2) $x = -\sqrt{15}$, $x = \sqrt{15}$.

א. (4) להלן סקיצה:



5 א. (1) $x < -\sqrt{15}$, $x > \sqrt{15}$.

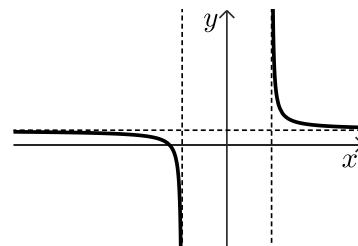
א. (3) $\max(-5, -2.7)$.

ב. (1) $x < -\sqrt{15}$, $x > \sqrt{15}$.

ב. (2) $x = -\sqrt{15}$, $x = \sqrt{15}$, $y = 1$.

ב. (3) $(-5, 0)$.

ב. (4) להלן סקיצה:



ג. (1) $\max(-5, 0.067)$.

ג. (2) עלייה: $x < -5$, $x > \sqrt{15}$; ירידה: $-5 < x < -\sqrt{15}$. ד. 0.015.

בגרות 2022 מועד קיץ ב'

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונות הנקודות $A(-5,3)$ ו- $B(0,-2)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם. נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה-x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו.

נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M.

ג. מהי משוואת האליפסה?

נסמן ב-F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה-x עובר במוקד השמאלי של האליפסה. הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו-T, ואת המעגל M בנקודות K ו-L.

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF.

(2) נתונה פירמידה OABC שבסיסה משולש ABC.

נסמן: $\vec{OA} = \underline{u}$, $\vec{OB} = \underline{v}$, $\vec{OC} = \underline{w}$.

נתון: $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$.

הנקודה H מקיימת: $\vec{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}$. s, t, k הם פרמטרים.

נתון כי \vec{OH} מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

א. הוכיחו כי: $t = s = k$.

הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

ב. הוכיחו כי: $\vec{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$, והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC.

ג. הביעו באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} את הווקטור \vec{OP} שבעבורו נפח הפירמידה PABC כפול מנפח הפירמידה OABC (שתי אפשרויות).

ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה-x, הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה-y, והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה-z. נתון: $|u| = a$.

ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP.

ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC.

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $20\frac{5}{6}$. חשבו את a .

3) המספר: $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

$$\text{נתון: } \frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

א. מצאו את α .

$$\text{נתון: } |2iz| + \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$$

ב. מצאו את R .

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

קודקודי הבסיס B ו-C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו- $\frac{\bar{z}}{z}$.

קודקוד הראש A מתאים למספר $z+k$, k הוא מספר מדומה טהור.
(1) מהו הערך של k ?

(2) חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

א. (1) מצאו את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה- x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ ($g'(x) = f(x)$).

ד. (1) מהו תחום העלייה של הפונקציה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב- B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקציה $g(x)$ הוא הגבוה

מבין כל נקודות הפיתול שלה. נתון כי שיעור ה- y של הנקודה B הוא $\frac{e - \sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(5) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקציה מוגדרת לכל x ורציפה,

הפונקציה היא אי-זוגית, הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה, ולפונקציה יש

נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם: $(-1, -a)$, a הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = \ln(f(x))$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $h(x)$

המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקציה $h(x)$ חותך

את ציר ה- x בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך

את ציר ה- x בשתי נקודות.

נתון: $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ וגם: $g(0) = 0$.

ג. (1) מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל: $\int_{-5}^t g(x) dx, t > -5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים: $\int_{-5}^5 g(x) dx = 2 \cdot \int_{-5}^t g(x) dx$? נמקו.

תשובות סופיות:

(1) א. $x - y + 3 = 0$ ב. $M(0,3), R=5$ ג. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ד. $\frac{5}{3}$

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

ג. $\overrightarrow{OP_1} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}, \overrightarrow{OP_2} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$

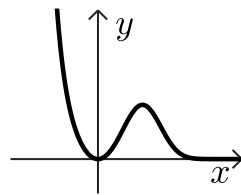
ד. $\ell = t(1,1,1)$ ה. $x + y + z - a = 0$ ו. $a = 5$

(3) א. $\alpha = 240^\circ$ ב. $R = 3$ ג. הוכחה.

ד. (1) $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ד. (2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(4) א. (1) $x \neq 0$ א. (2) מינימום: $x = 0$, מקסימום: $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx 0.87$

ב. $a = 1$ ג. להלן סקיצה: ד. (1) כל x ד. (2) 2 נקודות.

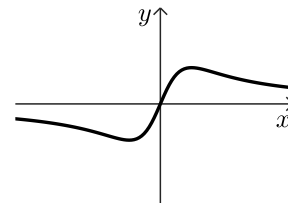
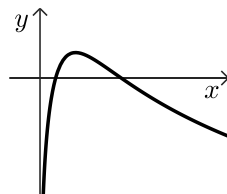


ה. $g(x) = \frac{e - e^{1-x^3}}{3}$

(5) א. להלן סקיצה: ב. (1) $x > 0$ ב. (2) $x = 0$ ג. (3) $a > 1$

ג. (1) $g(x) = 2\ln(1+x^2)$ ב. להלן סקיצה:

ג. (2) זוגית. ד. $t = 0$



שאלון 572

פרק 29

פתרון בידאו של בחינות 2021

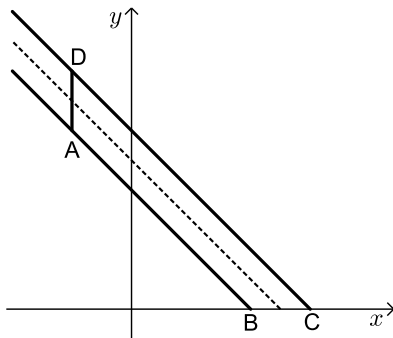
107	חורף מועד א
112	מועד נבצרים
116	חורף מועד ב
120	קיץ מועד א
124	קיץ מועד מיוחד
128	קיץ מועד ב

בגרות 2021 מועד חורף א':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5.
שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, תיבדקנה רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

(1) ABCD הוא טרפז ($AB \parallel DC$).



נתון: המרחק בין בסיסי הטרפז, AB ו-DC, הוא $\sqrt{2}$,
 קטע האמצעים של הטרפז ABCD נמצא על
 הישר $x + y - 4 = 0$.

א. מצא את משוואות הישרים שבסיסי הטרפז
 נמצאים עליהם.

נתון: השוק BC נמצאת על ציר ה- x .

מעבירים פרבולה קונונית: $y^2 = 2px$ ($p > 0$)

כך שהקודקודים A ו-D של הטרפז נמצאים על מדריך הפרבולה,
 ומוקד הפרבולה נמצא על הקודקוד B או על הקודקוד C.

ב. (1) מהי משוואת הפרבולה שעבורה הטרפז ABCD הוא הגדול מבין
 שני הטרפזים האפשריים? נמק.

(2) מהי משוואת הפרבולה שעבורה ABCD הוא הקטן מבין שני
 הטרפזים האפשריים?

ג. מעבירים ישר המקביל לציר ה- x וחותך את שתי הפרבולות שמצאת
 בסעיף ב בשתי נקודות, E ו-F. מצא את משוואת המקום הגאומטרי
 שעליו מונחים אמצעי הקטעים EF הנוצרים באופן זה.

(2) ABC הוא משולש.

$$\vec{AC} = \underline{v}, \vec{AB} = \underline{u} \text{ נסמן:}$$

נתון: $A(0, 2, -1)$, $B(-3, 2, 2)$, הנקודה $D(-2, 3, 1)$ נמצאת על הקטע BC

$$\vec{AD} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} \text{ כך ש-}$$

א. (1) מצא את שיעורי הנקודה C והוכח כי המשולש ABC הוא ישר זוית.

(2) מצא את משוואת המישור ABC.

הנקודה E נמצאת במישור ABC כך ש-ABEC הוא מלבן. הנקודה M היא מפגש

האלכסונים במלבן זה. S היא נקודה כך ש-MS מאונך למישור ABEC.

ב. (1) מצא הצגה פרמטרית לישר MS, והסבר מדוע לכל נקודה S כזו SABEC

היא פירמידה ישרה.

(2) תן דוגמה לשיעורים של נקודה S כמתואר בתת-סעיף ב (1).

בעבור הנקודה S שמצאת, חשב את הזווית SAB.

(3) בעבור הנקודה S שמצאת, האם קיימת נקודה נוספת, P, כך ש-PABEC

היא פירמידה ישרה שבעבורה מתקיים: $\angle SAB = \angle PAB$?

אם כן, מצא את שיעוריה. אם לא, נמק.

(3) נתונה המשוואה: $i \cdot z^6 = \frac{1}{64}$ (z הוא מספר מרוכב).

א. מצא את כל פתרונות המשוואה הנתונה.

פתרונות המשוואה הנתונה מתאימים לקודקודים של מצולע קמור במישור

גאוס.

ב. הראה שלכל אחד מקודקודי המצולע קיים קודקוד אחד בדיוק כך

שהישר שמחבר ביניהם עובר דרך ראשית הצירים.

כופלים כל אחד מפתרונות המשוואה הנתונה במספר מרוכב קבוע, w .

ג. הסבר מדוע סכום המספרים שהתקבלו הוא אפס.

$$\text{נתון: } w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ד. כתוב משוואה שפתרונותיה הם 12 המספרים: פתרונות המשוואה

הנתונה בתחילת השאלה והמספרים שהתקבלו לאחר ההכפלה ב- w .

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{-4}{e^{2x} - 4e^x + 3}$

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הסבר מדוע לכל $b < 0$ מתקיים: $\int_{b-3}^b f(x) dx < -4$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{k}{f(x)}$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של

הפונקציה: $f(x)$. k הוא פרמטר. נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום.

ג. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור k ? נמק.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{(\ln(x))^3 - 1} + 1$

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הישר $y = k$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ (k הוא פרמטר).

מצא את k . נמק.

ג. נגדיר: $T(x) = \int_{e^{-1}}^x f(x) dx$, $e^{-1} \leq x < e$.

(1) לפינך שלושה ערכי x , (III-I). בעבור איזה מהם הערך של $T(x)$

הוא הכי גדול? נמק.

(I) $x = \frac{1}{2}$ (II) $x = 1$ (III) $x = 2$.

(2) הסבר מדוע בעבור כל: $e^{-1} \leq x < e$ מתקיים: $T(x) < 1$.

תשובות סופיות:

א. $x+y-5=0$: CD , $x+y-3=0$: AB . (1) ב. $y^2 = 20x$.

ב. (2) $y^2 = 12x$. ג. $y^2 = 15x$.

א. (1) $c(0,5,-1)$, הוכחה $(AB \perp AC)$. (2) א. $x+z+1=0$.

ב. (1) $(-1.5, 3.5, 0.5) + t(1, 0, 1)$.

ב. (2) $S(-1, 3.5, 1)$, $\sphericalangle SAB = 38.016^\circ$. ב. (3) $P(-2, 3.5, 0)$.

א. (3) $\frac{1}{2} \text{cis} 345^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 285^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 225^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 165^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 105^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 45^\circ$.

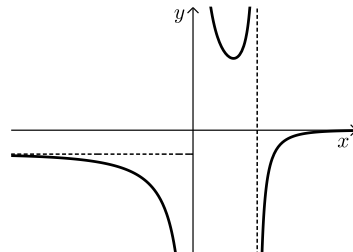
ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. $z^{12} + \frac{1}{4096} = 0$.

א. (1) $x \neq 0$, $x \neq \ln 3$. א. (2) $x = \ln 3$, $x = 0$, $y = 0$, $y = -\frac{4}{3}$.

א. (3) $(\ln 2, 4)$ מינימום.

א. (4) עלייה: $\ln 3 < x$ או $\ln 2 < x < \ln 3$. ירידה: $0 < x < \ln 2$ או $x < 0$.

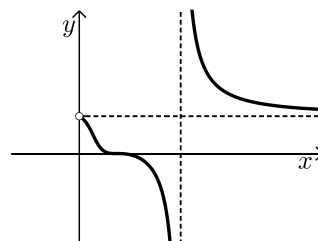
א. (5) להלן סרטוט: ב. הוכחה. ג. $k < 0$.



א. (1) $x \neq e$, $x > 0$. א. (2) $y = 1$, $x = e$. א. (3) עלייה: אין.

ירידה: $0 < x < e$ או $x > e$. א. (4) $(1, 0)$.

א. (5) להלן סרטוט: ב. $k = 1$. ג. (1) II . ג. (2) הסבר.



בגרות 2021 מועד חורף נבצרים:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5.

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, תיבדקנה רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הן שתי נקודות שונות הנמצאות על הפרבולה: $y^2 = 36x$ ברביע הראשון.

א. (1) הראה כי שיפוע המיתר AB הוא: $m = \frac{36}{y_2 + y_1}$.

(2) הנקודה $(x, 7\frac{1}{2})$ היא אמצע המיתר AB. מצא את m .

ב. נתון: המרחק של כל נקודה על הפרבולה הנתונה מן הישר $x = a$

שווה למרחק של נקודה זו מן הנקודה $(9, 0)$. מרחק הנקודה A מן

הישר $x = 0.75a$ הוא 7.

(1) מהו הערך של a ? נמק.

(2) מצא את משוואת הישר AB.

(2) נתון טרפז שווה שוקיים ABCD ($AB \parallel DC$) (ראה סרטוט).

נתון: $\angle DAB = 120^\circ$.

נסמן: $\overline{AB} = t\mathbf{u}$, $\overline{AD} = \mathbf{v}$, $\overline{DC} = \mathbf{u}$. (הוא סקלר).

א. (1) הבע את t באמצעות $|\mathbf{v}|$ ו- $|\mathbf{u}|$.

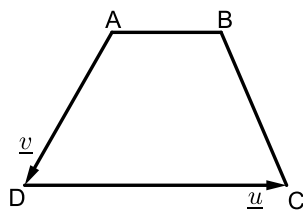
(2) הבע את הווקטור \overline{BC} באמצעות \mathbf{v} , \mathbf{u} ו- $|\mathbf{v}|$ ו- $|\mathbf{u}|$.

נתון: $\mathbf{v} = (-1, y, 0)$, $\mathbf{u} = (8, 6, -10)$.

ב. (1) מצא את שיעור ה- y של הווקטור \mathbf{v} (מצא את שני הערכים).

(2) עבור איזה ערך משני הערכים של y שמצאת בתת-סעיף ב (1),

הבסיס DC הוא קוטר במעגל שהטרפז חסום בו? נמק.



3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. נתון מספר מרוכב : $z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$.

הסבר מדוע מתקיים : $r(\cos(180^\circ + \theta) + i \sin(180^\circ + \theta)) = -z$.

z_1, z_2 ו- z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים. הנקודות המייצגות אותם

במישור גאוס נמצאות על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

הנקודות המייצגות את z_1 ו- z_2 נמצאות ברביע הראשון, והנקודה שמייצגת

את z_3 נמצאת ברביע השלישי. נסמן : $z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

ב. הוכח כי המנה : $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3}$ היא מספר ממשי.

נתון גם כי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_1 ו- z_3 נמצאות

על מעגל היחידה, ו- $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3} = \frac{5}{4}$.

ג. חשב את הערך המוחלט של z_2 .

ד. z_4 הוא הצמוד של z_3 .

הבע באמצעות α את שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות במישור

גאוס המייצגות את המספרים z_2, z_3, z_4 .

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה : $f(x) = 4e^{\sqrt{x}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות : $h(x) = f(x^2)$, $g(x) = 2 \cdot f'(x)$ בתחום $x > 0$.

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, קבע את

סוגה, והראה כי הנקודה הזאת נמצאת על גרף הפונקציה $h(x)$.

נתון : הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ נפגשים בנקודה אחת בלבד

(הנקודה שמצאת בסעיף ב).

ג. סרטט את הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ באותה מערכת צירים.

ד. נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, גרף הפונקציה $h(x)$

ועל ידי הישר $x=a$, $a > 1$, שווה ל- $e^4 + 4e - 2 \cdot f(a)$.

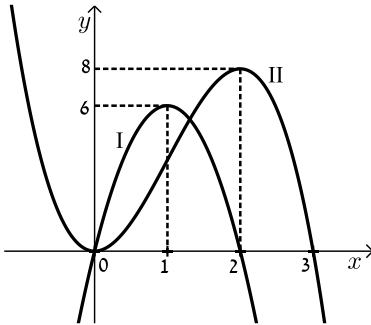
מצא את הערך של a . תוכל להשאיר \ln בתשובתך.

5) הגרפים I, II שבסרטוט שלפניך מתארים שתי פונקציות המוגדרות בתחום $-1 \leq x \leq 4$. אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$, והאחר הוא של פונקציית הנגזרת שלה, $f'(x)$.

א. קבע מי מבין הגרפים I ו-II הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$. נמק.

הסתמך על הסרטוט וענה על סעיף ב.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(f(x))$.



(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מה הן האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$

המאונכות לציר ה- x ?

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון

הפנימיות של הפונקציה $g(x)$

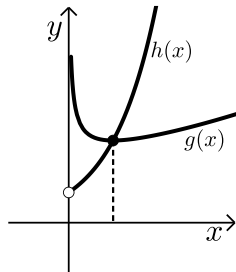
(אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

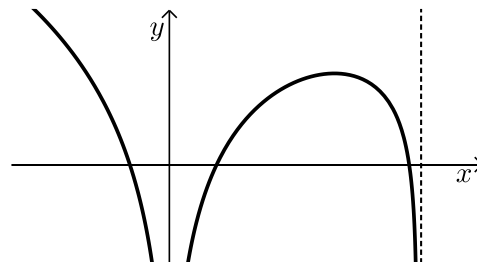
(5) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. (1) הוכחה. א. (2) $m = 2.4$. ב. (1) $a = -9$.
 ב. (2) $y = 2.4x + 2.4$.
- (2) א. (1) $t = 1 - \frac{|y|}{|u|}$. א. (2) $\vec{BC} = \frac{|y|}{|u|} \underline{u} + \underline{v}$. ב. (1) $y = -7$, $y = \frac{1}{7}$.
 ב. (2) $y = -7$.
- (3) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $|z_2| = 3.5$.
 ד. $2.25 \sin 2\alpha$.
- (4) א. $0 \leq x$. ב. $(1, 4e)$. ג. להלן סרטוט:
 ד. $a = 4 - \ln 4$.



- (5) א. גרף I - $f'(x)$, גרף II - $f(x)$. ב. (1) $-1 \leq x < 0$, $0 < x < 3$.
 ב. (2) $x = 0$, $x = 3$. ב. (3) $(2, \ln 8)$ מקסימום.
 ב. (4) עלייה: $0 < x < 2$. ירידה: $2 < x < 3$.
 ב. (5) להלן סרטוט:



בגרות 2021 מועד חורף ב':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5.
שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, תיבדקנה רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

(1) נתון: נקודה K נמצאת על הפרבולה: $y^2 = 4px$, $(p > 0)$. שיעור ה- y של

נקודה K הוא 12. המרחק בין נקודה K ובין מוקד הפרבולה הוא 20.

א. מצא את p (מצא שתי אפשרויות).

נסמן את הערכים של p שמצאת בסעיף א ב- p_1 ו- p_2 ו- $p_1 < p_2$.

ישר מן הצורה $y = mx$ ($m \neq 0$) חותך את הפרבולה $y^2 = 4p_1x$ בראשית

הצירים ונקודה נוספת, A, ואת הפרבולה: $y^2 = 4p_2x$ בראשית הצירים

ובנקודה נוספת, B. הצב את הערכים p_1 ו- p_2 שמצאת, וענה על סעיפים ב-ג.

ב. הבע את שיעורי נקודה A, ואת שיעורי נקודה B באמצעות m .

בעבור כל ישר $y = mx$ ($m \neq 0$) נסמן ב-M את אמצע הקטע AB הנוצר באופן המתואר.

ג. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות M האלה (ללא m).

(2) נתונה התיבה ABCDA'B'C'D'. הנקודה K נמצאת על המקצוע CC'.

הנקודה E היא אמצע המקצוע A'D' (ראה סרטוט).

נסמן: $\overline{AA'} = \underline{w}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{CK} = t \cdot \overline{CC'}$ ($t > 0$ הוא סקלר).

נתון: $\angle EKB = 90^\circ$, $|\underline{u}| = 3\sqrt{2}$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{w}| = 6\sqrt{2}$.

א. מצא את t .

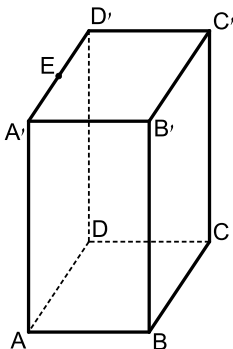
נסמן ב- π את המישור CDA'B'.

ב. (1) הוכח כי הישר BK מאונך למישור π .

(2) הסבר מדוע הישר EK מקביל למישור π .

נתון: $B(-1, 0, 1)$, $K(4, 5, -1)$, $\underline{w} = (2, 2, -8)$.

ג. מצא את משוואת המישור π .



3 ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה: $z^2 - (1+i)z + 2i + 2 = 0$.

אחד הפתרונות של המשוואה שפתרת נמצא ברביע הרביעי והוא מיוצג על ידי הנקודה A במישור גאוס. הפתרון השני מיוצג על ידי הנקודה B במישור גאוס. דרך הנקודה B עובר מעגל שמרכזו בראשית הצירים - O. הישר AO חותך את המעגל בנקודות C ו-D. במעגל חסום מצולע משוכלל בעל n צלעות. נתון כי הנקודות B, C, D הן קודקודים של המצולע.

ב. מהו ה-n האפשרי הקטן ביותר? נמק את תשובתך.

ג. בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב :

(1) רשום את המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

(2) כתוב משוואה שפתרונותיה הם כל המספרים המרוכבים

המתאימים לקודקודי המצולע.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4 הפונקציה $g(x)$ מוגדרת וגזירה לכל x . הגרף שלה חותך את ציר ה-x

בראשית הצירים בלבד. נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הן (1,1)

ו-(-1,-1) בלבד. הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ מתאפסת בעבור $x=1$ ו- $x=-1$

בלבד. ציר ה-x הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $g(x)$ בעבור x שואף

לאינסוף ובעבור x שואף למינוס אינסוף.

א. (1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) רשום את תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$.

(פונקציית הנגזרת של $g(x)$).

נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{g(x)} - g(x)$.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

5 נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = ax - \ln\left(\frac{x}{a}\right)$, $a \neq 0$ הוא פרמטר.

ענה על סעיפים א-ג בעבור $a > 0$ ובעבור $a < 0$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x בשתי נקודות שונות.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = f'(x)$ (נגזרת של הפונקציה $f(x)$) המוגדרת

באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$. נתון: $a > 0$.

ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, הישר $x = \frac{2}{a}$

וציר ה- x , והוכח כי השטח אינו תלוי ב- a .

תשובות סופיות:

(1) א. $p = 18, p = 2$. ב. $A\left(\frac{8}{m^2}, \frac{8}{m}\right), B\left(\frac{72}{m^2}, \frac{72}{m}\right)$. ג. $y^2 = 40x$.

(2) א. $t = \frac{1}{2}$. ב. (1). הוכחה. ב. (2). הוכחה.

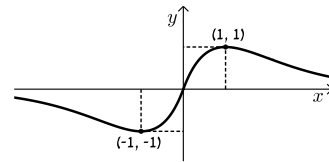
ג. $5x + 5y - 2z - 29 = 0$.

(3) א. $z_1 = 1 - i, z_2 = 2i$. ב. $n = 8$.

ג. (1). $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (2, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (0, 2), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-2, 0), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (0, -2)$.

ג. (2). $z^8 = 256$.

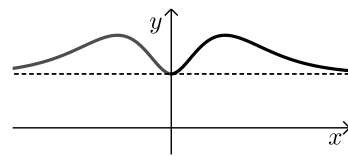
(4) א. (1). סרטוט: א. (2). חיובית: $-1 < x < 1$, שלילית: $x < -1, 1 < x$.



ב. (1). כל x . ב. (2). $y = 1$.

ב. (3). $(1, e-1)$ מקסימום, $(0, 1)$ מינימום, $\left(-1, \frac{1}{e} + 1\right)$ מקסימום.

ב. (4). סרטוט:

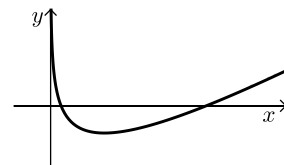
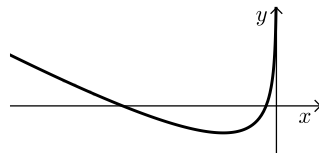


(5) א. עבור $x > 0: a > 0$, ועבור $x < 0: a < 0$. ב. $\left(\frac{1}{a}, 1 + \ln a^2\right)$.

ד. $1 - \ln 2$.

ג. סרטוט עבור: $a < 0$:

ג. סרטוט עבור: $a > 0$:



בגרות 2021 מועד קיץ א':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתון פרמטר: $a > 0$.

א. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן

מן הנקודה $(a, 0)$ שווה למרחק שלהן מן הישר: $x = a - 1$.

ב. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן

מן הנקודה $(0, a)$ שווה למרחק שלהן מן הישר: $y = a - 1$.

נתון כי שני המקומות הגאומטריים שמצאת בסעיפים א'-ב' נחתכים בשתי

נקודות. אחת הנקודות היא $(2, 2)$.

ג. (1) מצא את a .

(2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך האחרת.

מחברים את שתי נקודות החיתוך של שני המקומות הגאומטריים עם

הנקודות $(3a, 0)$ ו- $(0, 3a)$ כך שמתקבל מרובע.

ד. (1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמק.

(2) חשב את שטח המרובע.

(2) נתונה פירמידה מרובעת SABCD שבסיסה ABCD הוא מעוין.

נתון: \overline{SA} מאונך לבסיס הפירמידה, $\angle BAD = 60^\circ$, $SA = BA$, $\overline{SE} = t \cdot \overline{SC}$.

$0 < t < 1$ הוא פרמטר. נסמן: $\overline{AS} = \underline{w}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AB} = \underline{u}$.

א. הבע את הווקטורים \overline{EB} ו- \overline{ED} באמצעות: \underline{t} , \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} .

ב. נתון: $t = \frac{1}{2}$.

(1) הוכח כי \overline{EB} מאונך ל- \overline{ED} .

(2) הוכח כי האנך מן הנקודה E לבסיס עובר דרך נקודת מפגש האלכסונים של המעוין.

נתון: $A(0, 0, 0)$, $B(6\sqrt{3}, 6, 0)$ קודקוד D נמצא על ציר ה- y בכיוון החיובי,

שיעור ה- z של הנקודה S גדול מאפס.

ג. חשב את שיעורי הקודקודים S ו-D.

ד. מצא את משוואת המישור SAB.

3) נתונה המשוואה: $z^4 = -16$ (z הוא מספר מרוכב).

א. פתור את המשוואה.

נתון: פתרונות המשוואה מייצגים קודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. סרטט במערכת הצירים את המצולע שהתקבל.

כופלים ב- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודים המצולע.

ג. מצא את שיעורי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים שהתקבלו בהכפלה.

n הוא מספר טבעי, $11 < n < 17$ ו- c הוא מספר ממשי. כל אחד מן המספרים

המרוכבים שמצאת בסעיפים הקודמים מקיים את המשוואה: $z^n = c$.

ד. מצא את n ואת c .

הנקודות במישור גאוס, המיוצגות על ידי כל הפתרונות של המשוואה: $z^n = c$

שמצאת בסעיף ד', יוצרות מצולע בעל n צלעות.

ה. מצא את שטח המצולע.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 1 + ae^{-2x}$ המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר, $a > 1$.

בטא את תשובותיך באמצעות a לפי הצורך.

א. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש).

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש).

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש).

ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק את תשובותך.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים

(אם יש כאלה).

(3) ידוע כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת, המתקבלת

כאשר: $x = \frac{\ln(a)}{2}$. מצא את שיעור ה- y של נקודת הפיתול, וסרטט

סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g'(x)$.

(2) סרטט את גרף הפונקציה $g'(x)$. פרט את שיקוליך.

ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g'(x)$ ועל ידי

הישרים: $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$.

5) ענה :

א. נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)}\right)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה) .

(4) סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה : $g(x) = \ln(f(x))$.

היעזר בתשובותיך על השאלות בסעיף א' וענה על התת-סעיפים (1)-(3) שלפניך .

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה) .

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרט את שיקוליך .

ג. בעבור כל x המקיים : $0 < f(x) < 1$, קבע אם המכפלה $f(x) \cdot g(x)$

חיובית. נמק את קביעתך .

תשובות סופיות:

(1) א. $y^2 = 2x - 2a + 1$. ב. $x^2 = 2y - 2a + 1$. ג. (1) $a = \frac{1}{2}$. (2) $(0,0)$.

ד. (1) דלתון. (2) 3.

(2) א. $\overline{ED} = (1-t)\underline{v} - t\underline{u} + (t-1)\underline{w}$, $\overline{EB} = (1-t)\underline{u} - t\underline{v} + (t-1)\underline{w}$.

ב. (1) הוכחה. (2) הוכחה. ג. $S(0,0,12)$, $D(0,12,0)$.

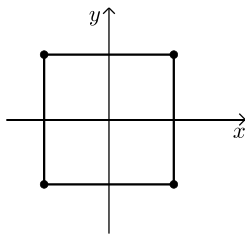
ד. $x - \sqrt{3y} = 0$.

(3) א. $2\text{cis}315^\circ$, $2\text{cis}225^\circ$, $2\text{cis}135^\circ$, $2\text{cis}45^\circ$. ב. סרטוט:

ג. $(0,-2)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, $(2,0)$.

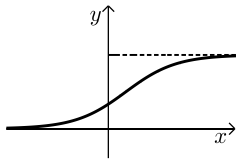
ד. $c = 65536$, $n = 16$.

ה. $S = 12.25$.

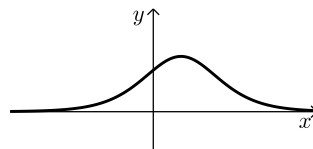


(4) א. (1) $y = 1$. (2) עליה: אין, ירידה: כל x . (3) $(0,1+a)$.

ב. (1) כל x . (2) $y = 1$, $y = 0$. (3) $y = \frac{1}{2}$ פיתול: סרטוט:



ג. (1) $(\frac{\ln a}{2}, \frac{1}{2})$. (2) סרטוט:



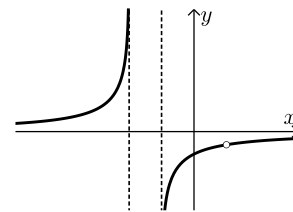
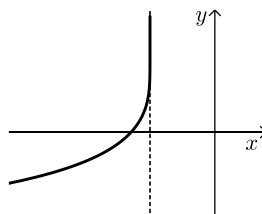
ד. $S = \frac{\ln a}{4} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2}$.

(5) א. (1) $1 < x$ או $-1 < x < 1$ או $x < -2$. (2) $y = 0$, $x = -2$, $x = -1$.

(3) עליה: $1 < x$ או $-1 < x < 1$ או $x < -2$, ירידה: אין.

(4) סרטוט: ב. (1) $x < -2$. (2) עליה: $x < -2$, ירידה: אין.

(3) סרטוט: ג. לא.



בגרות 2021 קיץ מועד מיוחד:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתון פרמטר a שונה מאפס.

א. הראה כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(a, -1)$ שווה למרחק שלהן מן הנקודה $(-a, 1)$ הוא קו ישר. הבע את משוואת הישר באמצעות a .
נתון הישר: $y = -ax$.

ב. מצא לאלו ערכים של a , הישר הנתון והישר שמצאת בסעיף א' ניצבים זה לזה.
הישר שמצאת בסעיף א' והישר הנתון ניצבים זה לזה ומשיקים לשני מעגלים, M ו-N. מרכזי שני המעגלים מונחים של ציר ה- x , המעגל M נמצא מימין לציר ה- y , והמעגל N נמצא משמאל לציר ה- y . נתון כי המרחק בין מרכזי המעגלים הוא 6, והרדיוס של המעגל M גדול פי 2 מן הרדיוס של המעגל N.
ג. מצא את המשוואות של המעגלים M ו-N.
נתון הישר: $-x + \sqrt{17}y - 8 = 0$. הישר משיק לשני המעגלים M ו-N.
ד. מצא משוואה של ישר המשיק לשני המעגלים, נוסף על הישרים המשיקים המתוארים בשאלה. נמק את תשובתך.

(2) בסרטוט שלפניך מתוארת מנסרה ישרה $ABC A'B'C'$, שהבסיס שלה הוא המשולש ABC . נתון המספר k שבעבורו: $\overline{AB} = (k-1, k, 3)$, $\overline{AC} = (k+1, 0, k-3)$, $\overline{AA'} = (k-1, k-7, k+1)$.



א. מצא את ערכו של k .

המקצועות AC ו-BC מונחים על הישרים l_{AC} ו- l_{BC} בהתאמה:

$$l_{AC}: \underline{x} = (8, -1, -1) + t(k+1, 0, k-3)$$

$$l_{BC}: \underline{x} = (4, 0, 2) + m(k, -k, -4)$$

ב. מצא את משוואת המישור $A'B'C'$.

ג. חשב את גודל הזווית $C'AB'$.

ד. מצא את מרכז המעגל החוסם את המשולש $A'B'C'$. נמק.

3) נתונה משוואה I: $w^2 - 4iw - 4 + 2i = 0$. הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I.

נתונה משוואה: $z^3 = a + bi$. הוא מספר מרוכב, a ו- b הם מספרים ממשיים. ידוע כי אחד מפתרונות משוואה זו מתאים לנקודה הנמצאת במישור גאוס על הציר המדומה, בחלקו השלילי.

ב. אחת מן הטענות 1-3 שלפניך נכונה. קבע איזו ונמק את קביעתך.

1. $a = 0, b > 0$.

2. $a < 0, b = 0$.

3. $a \neq 0, b \neq 0$.

נתונה משוואה II: $z^3 = 2(w_1 + w_2)$, w_1 ו- w_2 הם פתרונות של משוואה I.

ג. פתור את משוואה II.

פתרונות משוואה II מייצגים קודקודים של משולש במישור גאוס.

ד. סרטט את המשולש שהתקבל במישור גאוס.

נתון מספר מדומה: $u = di$, d הוא פרמטר ממשי.

מוסיפים את u לכל אחד מן הפתרונות של משוואה II כך שהמספרים שמתקבלים מייצגים משולש חדש.

ה. מצא את הערך של d שבעבורו המעגל החוסם את המשולש החדש

עובר דרך ראשית הצירים. מצא שתי אפשרויות.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$

המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון הישר: $g(x) = a \cdot x$, a הוא פרמטר.

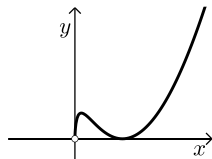
ידוע כי: $g(1) = f(1)$.

ג. (1) מצא את a .

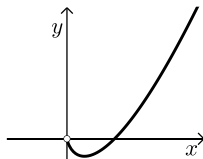
(2) חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הישר $g(x)$.

5 נתונה משפחת הפונקציות : $f(x) = x \cdot (\ln(x))^n$, $n \geq 1$ הוא מספר טבעי.

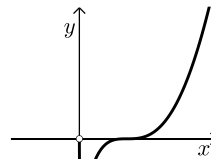
- א. ענה על הסעיפים שלפניך בעבור n זוגי ובעבור n אי-זוגי.
 אם יש צורך, בטא את תשובותיך באמצעות n .
 (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 ב. כל אחד מן הגרפים א-ג שלפניך מתאר פונקציה במשפחה.
 קבע איזה גרף יכול להתאים ל- $n=1$, איזה גרף יכול להתאים ל- $n=2$
 ואיזה גרף יכול להתאים ל- $n=3$. נמק את קביעותיך.



גרף ג



גרף ב



גרף א

נתונה הפונקציה : $g(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2}$.

- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים : $x = \frac{1}{e}$ ו- $x = \frac{1}{e^2}$.

תשובות סופיות:

(1) א. $y = ax$. ב. $a = \pm 1$. ג. $(x+2)^2 + y^2 = 2$, $(x-4)^2 + y^2 = 8$.

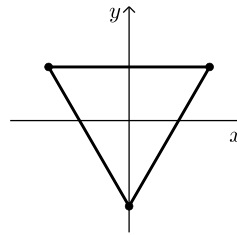
ד. $x + \sqrt{17}y + 8 = 0$.

(2) א. $k = 2$. ב. $x - 5y + 3z - 45 = 0$. ג. 90° . ד. $(5, -5, 5)$.

(3) א. $1+i, -1+3i$. ב. טענה I .

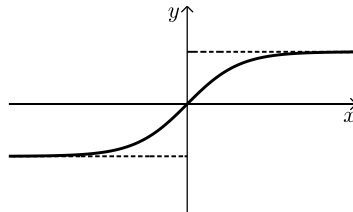
ג. $2\text{cis}30^\circ, 2\text{cis}150^\circ, 2\text{cis}270^\circ$ או $\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i, -2i$.

ד. סרטוט: . ה. $d = -2, d = 2$.



(4) א. (1) כל x . (2) $y = 1: x \rightarrow \infty, y = -1: x \rightarrow -\infty$. (3) עליה: כל x , ירידה: אין .

(4) הוכחה: . ב. סרטוט: . ג. (1) 0.761 . (2) 0.106 .



(5) א. (1) $x > 0: f(x), x > 0: g(x)$.

(2) n אי זוגי: עליה: $x > \frac{1}{e^n}$, ירידה: $0 < x < \frac{1}{e^n}$.

n זוגי: עליה: $0 < x < \frac{1}{e^n}$ או $x > 1$, ירידה: $\frac{1}{e^n} < x < 1$.

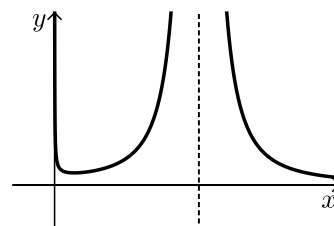
(3) n אי זוגי: $\left(\frac{1}{e^n}, \frac{(-n)^n}{e^n}\right)$ מקסימום .

n זוגי: $(1, 0)$ מינימום, $\left(\frac{1}{e^n}, \frac{(-n)^n}{e^n}\right)$ מקסימום .

ב. גרף א': $n = 3$, גרף ב': $n = 1$, גרף ג': $n = 2$.

ד. $\frac{1}{2}$.

ג. סרטוט:



בגרות 2021 מועד קיץ ב':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) לפניך משוואת הפרבולה: $y^2 = 2ax$ ומשוואת המעגל: $x^2 + y^2 - 2ax - 2x = 0$.
 a הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל.
 הבע באמצעות a , אם יש צורך.

דרך שתיים מנקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל עובר ישר ששיפועו חיובי.
 ב. מצא את משוואת הישר. הבע באמצעות a , אם יש צורך.

ממרכז המעגל מעבירים אנך לישר. אורך האנך הוא $2\sqrt{5}$.

ג. (1) הבע באמצעות a את מרכז המעגל ואת הרדיוס שלו.
 (2) מצא את a .

מגדירים מעגל חדש שמרכזו זהה למרכז המעגל הנתון והרדיוס שלו קטן ב-2 מרדיוס המעגל הנתון.

ד. מצא את משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל החדש שווה למרחק שלהן מן הישר: $x = -4$.

(2) נתון משולש ABC (ראה סרטוט).

הנקודה D היא אמצע הצלע AB.

הנקודה E מחלקת את הצלע AC ביחס של: $AE : EC = 2 : 1$.

הנקודה F היא מפגש הקטעים BE ו-CD.

נסמן: $\overline{CA} = \underline{u}$, $\overline{CB} = \underline{v}$.

$\overline{CF} = k \cdot \overline{CD}$, $\overline{BF} = t \cdot \overline{BE}$: הם מספרים כך ש:

א. מצא את t ואת k .

המשולש ABC נמצא במישור: $4x + 2y + z - 12 = 0$.

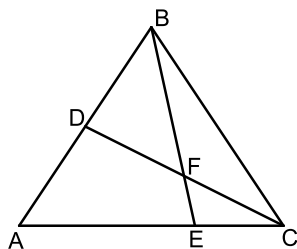
מישור זה חותך את ציר ה- x בנקודה A, את ציר ה- y בנקודה C ואת ציר ה- z בנקודה B.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את משוואת המישור AOE.

ד. מצא את נפח הפירמידה FAOE.



3) נתונה משוואה I: $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. z הוא מספר מורכב.

א. פתור את משוואה I.

פתרונות המשוואה מיוצגים על ידי כל הקודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. מצא את שטח המצולע.

נתונה משוואה II: $(a \cdot z^2 + b)(z+1) = 0$. z הוא מספר מורכב, a ו- b הם מספרים ממשיים השונים מאפס. ידוע כי שניים מבין הפתרונות של המשוואה הם מספרים מדומים.

ג. הוכח כי: $a \cdot b > 0$.

ד. מצא את פתרונות משוואה II. הבע באמצעות a ו- b , אם יש צורך. ידוע כי הפתרונות המדומים של משוואה II מיוצגים על ידי נקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית הצירים והרדיוס שלו גדול פי שניים מן הערך המוחלט של פתרונות משוואה I.

ה. מצא את היחס: $\frac{b}{a}$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{(bx^2 - 2bx)} - 1$. המוגדרת לכל x . $b < 0$ הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות b , אם יש צורך.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נגדיר את הפונקציה: $g(x) = f(x+a)$, a הוא פרמטר.

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון על ציר ה- y .

ב. (1) מצא את a , ובטא את הפונקציה $g(x)$ באמצעות x ו- b .

(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מצא את שיעור ה- x של כל אחת מנקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $g'(x)$, וקבע את סוגן.

ד. הצב $b = -0.5$, וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים העוברים דרך נקודות הקיצון של $g'(x)$ ומאונכים לציר ה- x .

- 5) נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cdot x^2 - x^3$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.
 ענה על סעיפים א'-ג' עבור $0 < a$. הבע את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.
- א. (1) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.
 (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(f(x))$.
- ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים
 (אם יש כאלה).
 (3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.
- ג. נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- x .
 (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 (2) מצא את טווח הערכים האפשריים של a שעבורם גרף הפונקציה $g(x)$
 חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד.
 ענה על סעיף ד' עבור $a = 0$.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. ציין בגרף את הערכים
 המספריים של שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

תשובות סופיות:

(1) א. $(2, -2\sqrt{a})$, $(2, 2\sqrt{a})$, $(0, 0)$. ב. $y = \sqrt{a} \cdot x$.

ג. (1). מרכז המעגל: $(a+1, 0)$, רדיוס: $(a+1)$. (2). $a = 4$.

ד. $y^2 = 18x$.

(2) א. $t = \frac{3}{4}$, $k = \frac{1}{2}$. ב. $E(1, 4, 0)$, $F\left(\frac{3}{4}, 3, 3\right)$. ג. $z = 0$.

ד. $V = 6$.

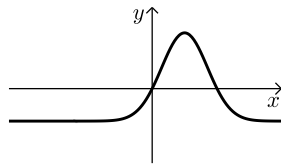
(3) א. $z = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

ב. $S = 2\sqrt{3}$. ג. הוכחה. ד. $z = -\sqrt{\frac{b}{a}}i$, $z = \sqrt{\frac{b}{a}}i$, $z = -1$.

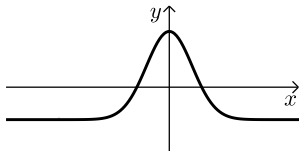
ה. $\frac{b}{a} = 8$.

(4) א. (1). $(0, 0)$, $(2, 0)$. (2). אנכית: אין, אופקית: $y = -1$.

ב. (1). $a = 1$. (3). $(1, e^{-b} - 1)$ מקסימום. (4). סרטוט:



(3). סרטוט:

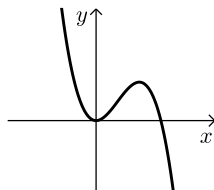


(2). $g(x) = e^{b(x^2-1)} - 1$, הפונקציה זוגית.

ג. מינימום, $x = \sqrt{-\frac{1}{2b}}$, מקסימום, $x = -\sqrt{-\frac{1}{2b}}$.

ד. $2(\sqrt{e} - 1) = 1.297$.

(2). סרטוט:

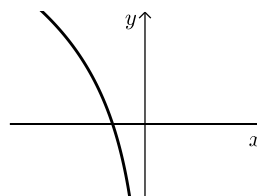
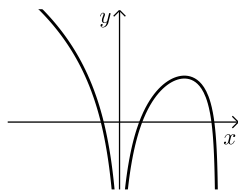


(5) א. (1). חיובית: $0 < x < a$ או $x < 0$, שלילית: $a < x$.

ב. (1). $x \neq 0$, $x < a$. (2). $x = 0$, $x = a$.

ג. (1). סרטוט: (3). $\left(\frac{2a}{3}, \ln\left(\frac{4}{27}a^3\right)\right)$ מקסימום.

ד. סרטוט: (2). $0 < a < 1.889$.



שאלון 572

פרק 30

פתרון בידאו של בחינות 2020

132	מועד חורף
136	קיץ מועד א
140	קיץ מועד ב

בגרות חורף 2020:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) הנקודה A נמצאת על האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ברביע הראשון.

a ו-b הם פרמטרים חיוביים.

נתון: $a > b$, אורך הציר הגדול של האליפסה הוא F_1F_2 . F_1 ו- F_2 הם מוקדי האליפסה.

היקף המשולש F_1AF_2 הוא 25 ושטחו 12.

א. מצא את משוואת האליפסה.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

דרך הנקודה A עוברת פרבולה שמשוואתה היא $y^2 = 2px$ ($p > 0$ אינו שלם).

דרך הנקודה A העבירו משיק לפרבולה. המשיק חותך את ציר ה-x בנקודה L.

ג. מצא את שיעור ה-x של הנקודה L.

הפרבולה והאליפסה נחתכות בנקודה נוספת, B.

הנקודה D נמצאת על הישר AB.

ד. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל נקודות מפגשי

התיכונים במשולשים ALD.

(2) הישר ℓ עובר דרך ראשית הצירים, O, ומאונך למישור π .

הנקודה $P(-1, -1, 2)$ היא נקודת החיתוך של הישר ℓ והמישור π .

א. מצא את משוואת המישור π .

OABCD היא פירמידה ישרה שבסיסה, ABCD, הוא מלבן הנמצא על המישור π

(הנקודה O היא ראשית הצירים). הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של

המישור π עם ציר ה-x ועם ציר ה-y בהתאמה.

ב. (1) מצא את שיעורי הקודקודים A ו-B.

(2) מצא את שיעורי הקודקודים C ו-D.

ג. חשב את גודל הזווית בין הפאה הצדדית AOB בפירמידה OABCD ובין

בסיס הפירמידה.

הנקודות $F(-4, -2, 0)$ ו- $G(-2, -4, 0)$ נמצאות על הקטע AB .

ד. (1) הראה כי $|FG| = \frac{1}{3}|AB|$.

(2) מצא שיעורים של שתי נקודות, H ו- I , כך שנפח הפירמידה $OFGHI$

הוא $\frac{1}{3}$ מנפח הפירמידה $OABCD$. נמק את תשובתך.

(3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה $z^3 = -1$ (z הוא מספר מרוכב). פרט את חישוביך.

a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא $2i$.

ב. הראה כי לכל n טבעי $a_{n+4} = 16a_n$.

הנקודות A, B, C ו- D במישור גאוס מייצגות את איברי הסדרה a_1, a_2, a_3

ו- a_4 בהתאמה. a_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה $z^3 = -1$.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

ג. (1) סרטט סקיצה של המרובע $ABCD$.

(2) מצא את שטח המרובע $ABCD$.

ד. הנקודות A', B', C' ו- D' מייצגות את איברי הסדרה a_5, a_6, a_7 ו- a_8

בהתאמה. מצא את היחס בין שטח המרובע $A'B'C'D'$ ובין שטח

המרובע $ABCD$ $\left(\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} \right)$. נמק.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות $\left(\frac{1}{3} \right)^{33}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{\frac{a}{x-1}} + c$

a ו- c הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון: משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$ היא $y = 1$,

הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודות $(0, e^{-4})$.

- ב. מצא את הערך של c ואת הערך של a .
- ג. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (2) מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)?
 לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול יחידה בנקודה שבה $x = -1$.
- ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 (2) לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.
- ה. העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה.
 המשיק עובר בראשית הצירים. הסבר מדוע השטח הנמצא ברביע השני ומוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y קטן מ- $\frac{1}{2}e^{-2}$.

(5) נתונה פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x) : f'(x) = \frac{\ln(-x)+2}{x}$.

- לפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ יש אותו תחום הגדרה.
- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 (3) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה \cup והקעירות כלפי מטה \cap של הפונקציה $f(x)$.
- ב. (1) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$?
- (2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.
- נתון: $f(-e^{-2}) = 0$.
- ג. (1) מצא ביטוי אלגברי לפונקציה $f(x)$.
 (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות סופיות:

(1) א. $\frac{x^2}{42.25} + \frac{y^2}{6.25} = 1$ (אפשר גם: $\frac{4x^2}{169} + \frac{4y^2}{25} = 1$)

ב. $A(3.9, 2)$ ג. $x_L = -3.9$ ד. $x = 1.3$

(2) א. $x + y - 2z + 6 = 0$ ב. $A(-6, 0, 0), B(0, -6, 0)$

ב. (2) $C(4, -2, 4), D(-2, 4, 4)$ ג. 35.26°

ד. (1) הוכחה ד. (2) למשל: $H(2, 0, 4), I(0, 2, 4)$

(3) א. $\text{cis}60^\circ, \text{cis}180^\circ, \text{cis}300^\circ$ (אפשר גם: $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$)

ב. הוכחה ג. (1) להלן סקיצה:

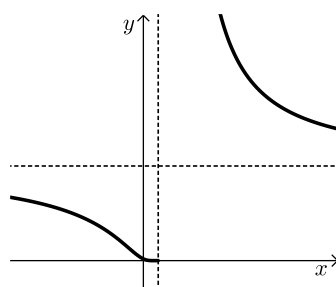
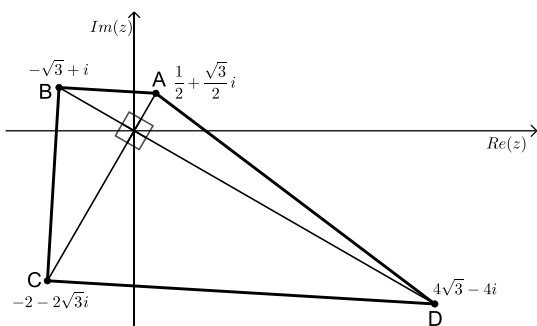
ג. (2) 25 ד. היחס הוא 256

(4) א. $x \neq 1$ ב. $a = 4, c = 0$

ג. (1) עלייה: אין, ירידה: $x < 1, x > 1$

ג. (2) הפונקציה חיובית בכל ת.ה.

ד. (1) להלן סקיצה:



ד. (2) $0 < k < 1, k > 1$

ה. הוכחה

(5) א. (1) $x < 0$ א. (2) עלייה: $-\frac{1}{e^2} < x < 0$, ירידה: $x < -\frac{1}{e^2}$

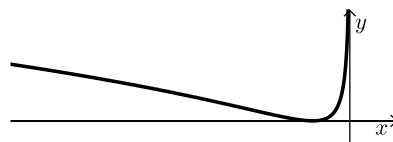
א. (3) הקעירות כלפי מעלה: $-\frac{1}{e^2} < x < 0$, קעירות כלפי מטה: $x < -\frac{1}{e^2}$



ב. (1) $x = 0, y = 0$ ב. (2) להלן סקיצה:

ג. (1) $F(x) = \frac{\ln^2(-x)}{2} + 2\ln(-x) + 2$

ג. (2) להלן סקיצה:



בגרות קיץ 2020 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) OMG הוא משולש. הנקודה O היא ראשית הצירים.

מן הנקודה $M(2,6)$ הורידו גובה לצלע OG .

נתון כי אורך הגובה שהורידו הוא 6.

א. הראה כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות G המתקבלות באופן הזה נמצא על שני ישרים, ומצא את משוואותיהם של הישרים.

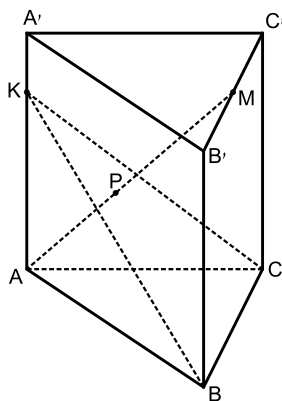
מעגל שמרכזו בנקודה M משיק לשני הישרים שמצאת בסעיף א בנקודות P ו- Q .

ב. (1) רשום את משוואת המעגל.

(2) מצא את שיעורי הנקודות P ו- Q .

ג. האם המרובע $OPMQ$ הוא בר חסימה במעגל? נמק.

אם כן, מצא את משוואת המעגל החוסם אותו.



2) נתונה מנסרה ישרה משולשת $ABC A' B' C'$.

נתון: הנקודה M היא אמצע הקטע $B'C'$.

הנקודה K נמצאת על הקטע AA' ומקיימת $AK = 2KA'$.

נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{KC} = \underline{v}$, $\vec{KB} = \underline{u}$.

א. הבע את \vec{AM} באמצעות \underline{w} , \underline{v} ו- \underline{u} .

ב. P היא נקודה על AM המקיימת: $\vec{KP} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v}$ (הם סקלרים).

ג. מצא את α ואת β .

נתון: $\underline{v} = (10, -5, 0)$, $\underline{u} = (5, 5, -5)$, $P(0, 4, 6)$.

1) הסבר מדוע הנקודה P נמצאת על המישור KBC .

2) מצא את משוואת המישור KBC .

3) מצא את שיעורי הנקודה K .

(3) z_1 ו- z_2 הם שני מספרים מרוכבים שונים.

נתון: $z_2 = \cos \frac{7\alpha}{3} + i \sin \frac{7\alpha}{3}$, $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$

הוא מספר ממשי. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{z_1}{z_2}$

א. (1) מצא את α ואת $\frac{z_1}{z_2}$.

(2) הראה כי $z_1 \cdot z_2$ הוא מספר מדומה.

נתון: $w = \frac{z_1}{z_2} + z_1 \cdot z_2$.

ב. מצא את כל פתרונות המשוואה $z^3 = w^6$.

ג. (1) האם הפתרונות שמצאת בסעיף ב יכולים להתאים לקודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס?

אם כן, מצא את שיעוריהם של שאר קודקודי המשושה.

(2) תן דוגמה למספר טבעי $n > 6$ שבעבורו הפתרונות שמצאת בסעיף ב מהווים קודקודים של מצולע משוכלל בעל n קודקודים.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln((e^x - b)^2 + 1)$, b הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות b .

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) נמק מדוע $f(x) \geq 0$ בכל תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את המשוואה של האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(4) קבע בעבור אילו ערכים של b יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון,

ואם יש כזאת, מצא את שיעוריה, והראה שהיא נקודת מינימום.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $b = 2$.

- ב. מצא את כל הערכים של b שבעבורם הישר $y = \ln 5$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$. נמק.
- ג. נתון כי בעבור אחד מן הערכים של b שמצאת בסעיף ב, אין לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון.
בעבור הערך הזה של b , קבע אם הפונקציה $f(x)$ עולה או יורדת. נמק.
- 5 נתונה הפונקציה $f(x) = e^x(x-5)$, המוגדרת לכל x .
- א. הראה כי: $f'(x) = e^x(x-4)$ וכי $f''(x) = e^x(x-3)$.
- $f^{(n)}(x)$ היא נגזרת מסדר n של $f(x)$ (למשל $f^{(3)}(x) = f'''(x)$).
נתונה החוקיות: $f^{(n)}(x) = e^x(x-5+n)$ בעבור כל n טבעי.
- ב. מצא את $f'''(x)$ והראה כי החוקיות הנתונה מתקיימת בעבורה.
ענה על סעיף ג. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות n .
- ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f^{(n)}(x)$ עם הצירים.
(2) מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f^{(n)}(x)$.
(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f^{(n)}(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
- (4) הראה כי הגרפים של הפונקציה $f^{(m)}(x)$ ו- $f^{(k)}(x)$ אינם נחתכים בעבור שני מספרים טבעיים שונים m ו- k .
- (5) סרטט על מערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ וכתוב איזה מן הגרפים מתאים לכל אחת מן הפונקציות.
- ד. הסתמך על החוקיות הנתונה ומצא לפונקציה $f(x)$ פונקציה קדומה, $F(x)$, אם נתון כי הגרף של הפונקציה $F(x)$ עובר בראשית הצירים.
אמת את תשובתך על ידי גזירה.

תשובות סופיות:

א. $y = -\frac{3}{4}x, y = 0$ (1) ב. $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 36$ (1)

א. $(-1.6, 1.2), (2, 0)$ (2) ג. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$ (1)

א. $\overline{AM} = \frac{5}{3}w + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$ (2) ב. $\alpha = \frac{1}{5}, \beta = \frac{1}{5}$ (1)

א. $x + 2y + 3z - 26 = 0$ (2) ג. (1) ראה הסבר בפתרון הוידאו.

ג. $K(-3, 4, 7)$ (3)

א. $\alpha = \frac{3\pi}{4}, \frac{z_1}{z_2} = \text{cis}(-\pi) = -1$ (1) (3) א. $z_1 \cdot z_2 = i$ (2)

א. $2\text{cis}\frac{1}{6}\pi, 2\text{cis}\frac{5}{6}\pi, 2\text{cis}\frac{3}{2}\pi$ (1) ג. (1) $(0, 2), (-\sqrt{3}, -1), (\sqrt{3}, -1)$

ג. $n = 9$ (2)

א. x כל (1) א. (2) הוכחה א. $y = \ln(b^2 + 1)$ (3)

א. $b > 0, \min(\ln b, 0)$ (4)

ב. $b = 2, b = -2$

ג. עבור $b = -2$ אין נקודות קיצון

והפונקציה $f(x)$ בכל תחום הגדרתה.

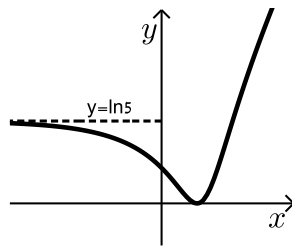
א. הוכחה. (5)

ב. $f'''(x) = e^x(x-2)$

ג. (1) $(0, n-5), (5-n, 0)$

ג. (3) $\min(4-n, -e^{4-n})$

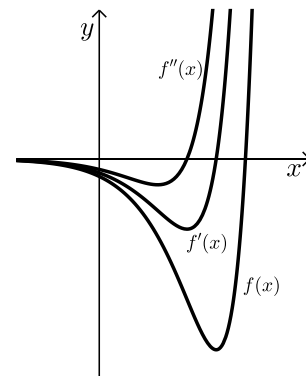
ג. (5) להלן סקיצה:



ג. $y = 0$ (2)

ג. (4) הוכחה.

ד. $F(x) = e^x(x-6) + 6$



בגרות קיץ 2020 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) הישר $4x - 3y = 0$ משיק למעגל שמרכזו $(5a, 0)$. a הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את משוואת המעגל באמצעות a .

מנקודה G , הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר, המשיק למעגל בנקודה K .

ב. הבע באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות G

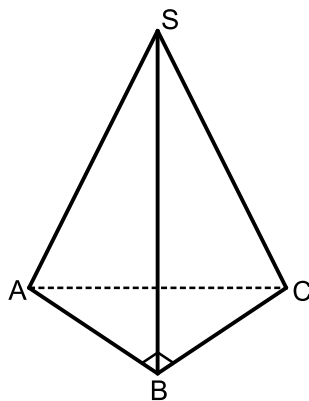
שבעבורן המרחק GK שווה למרחק שלהן מן הישר $x = -3a$ וצייר

סקיצה שלו.

נתון: אורך הקטע GK הקצר ביותר האפשרי הוא 7.5.

ג. (1) מה הם שיעורי הנקודה G שבעבורה אורך הקטע GK הוא 7.5? נמק.

(2) מצא תא ערכו של הפרמטר a . נמק.



2) נתונים שני ישרים:

$$l_1: \underline{x} = (6, 10, -7) + k(3, 5, -4)$$

$$l_2: \underline{x} = (15, 0, 6) + t(9, 0, 13)$$

ונתון הווקטור: $\underline{u} = (6, 0, -8)$.

הנקודה A נמצאת על הישר l_1 והנקודה C

נמצאת על הישר l_2 כך ש- $\overline{AC} = \underline{u}$.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו- C .

$SABC$ היא פירמידה ישרה שבסיסה ABC , הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$).

הנקודה S נמצאת על הישר l_2 והנקודה B נמצאת על הישר l_1 .

ב. מצא את שיעורי הנקודה B .

ג. מצא את משוואת המישור ABC .

מן הנקודה C העלו אנך למישור ABC .

ד. חשב את הזווית שבין האנך ובין הישר l_2 .

3) z הוא מספר מרוכב.

א. פתור את המשוואה $z^5 = 2^5$.

הנקודות A_1, A_2, \dots, A_n במישור גאוס מתאימות לפתרונות המשוואה $z^n = 2^n$ ($n \geq 3$ הוא מספר טבעי).

חיברו את הנקודות A_1, A_2, \dots, A_n ויצרו מצולע משוכלל קמור. נתון כי שטח המצולע שהתקבל שווה ל- n .

ב. מצא את n .

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב.

$w = a + bi$ הוא פתרון של המשוואה $z^n = 2^n$ כך ש- $a \cdot b > 0$ (כלומר: $[\operatorname{Re}(w) \cdot \operatorname{Im}(w)] > 0$).

ג. באילו רביעים נמצאים פתרונות w כאלה?

ארבע הנקודות הנמצאות ברביעים שמצאת בסעיף ג הן קודקודיו של מלבן. אם מכפילים כל אחד מן המספרים המתאימים לארבע הנקודות הללו במספר $z_0 = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$), מתקבל מלבן חדש, שצלעותיו מקבילות לצירים.

ד. מצא את הזווית θ . נמק.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - ae^x + 3}$, a הוא פרמטר.

הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת בעבור $x = 0$.

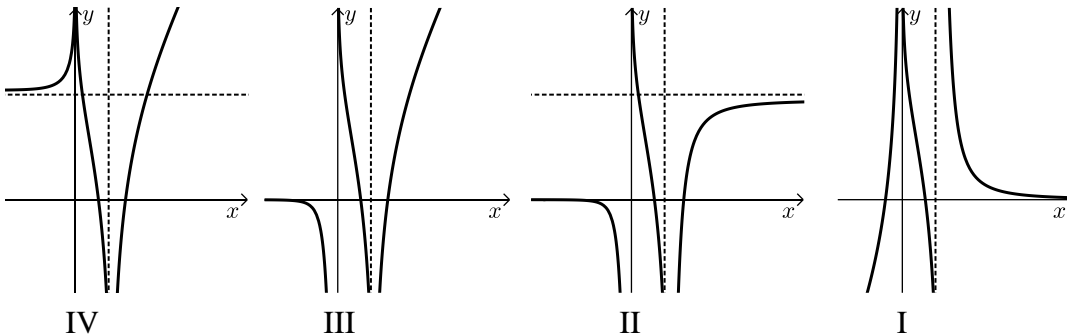
א. (1) מצא את a ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

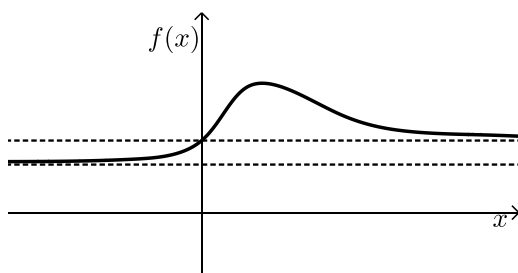
- ג. אחד מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, המוגדרת בתחום ההגדרה של $f(x)$. איזה מהם מתאר אותה? נמק.
- ד. נתונה הפונקציה: $h(x) = f(x+k)$. עבור איזה ערך של $k \neq 0$ יש לפונקציה $h(x)$ אסימפטוטה שמשוואתה היא $x=0$? נמק.



5 הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x) = \ln(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x .

- א. הראה כי לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $\ln(f(x))$ יש נקודות קיצון באותם שיעורי x ושנקודות הקיצון הללו הן מאותו הסוג (מינימום/מקסימום).

בציור שלפניך מתואר גרף של פונקציה $f(x)$, כך ש- $f(x)$ ו- $g(x) = \ln(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון יחידה ששיעוריה הם $(1, 2)$, ושתי אסימפטוטות:



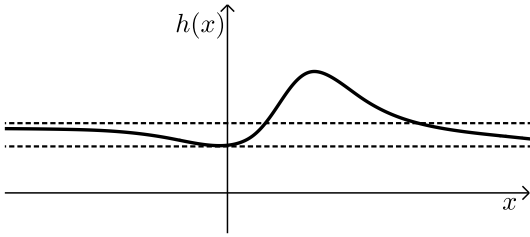
אסימפטוטה שמשוואתה היא $y=1$,

ואסימפטוטה נוספת שמשוואתה היא $y = \frac{2}{3}$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y כאשר $y=1$.

ענה על סעיף ב בהסתמך על הגרף המתואר בציור.

- ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק.
 (2) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?
 (3) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות צירים?
 (4) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$. נמק.
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.



נגדיר: $h(x) = f(x) - g(x)$.

לפניך סרטוט של גרף הפונקציה $h(x)$.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון

של הפונקציה $h(x)$.

קבע את סוגן בעזרת הגרף.

(2) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על

גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מאונך לציר ה- x .

מהו שיעור ה- x שבעבורו אורך הקטע AB הוא 1? נמק.

תשובות סופיות:

1) א. $(x-5a)^2 + y^2 = 16a^2$ ב. $y^2 = 16ax$ ג. (1) $G(0,0)$ ד. $a = 2.5$

2) א. $A(0,0,1), C(6,0,-7)$ ב. $B(3,5,-3)$ ג. $4x+3z-3=0$ ד. 18.43°

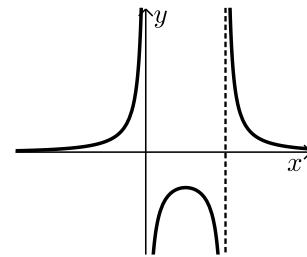
3) א. $2, 2\text{cis}72^\circ, 2\text{cis}144^\circ, 2\text{cis}216^\circ, 2\text{cis}288^\circ$ ב. $n=12$
ג. רביעים I, III ד. $\theta = 45^\circ$

4) א. (1) $a=4$, תחום הגדרה: $x \neq 0, x \neq \ln 3$

א. (2) $x=0, y=2, x=\ln 3, y=0$

א. (3) עולה: $0 < x < \ln 1.5$, יורדת: $x < 0, x > \ln 3$

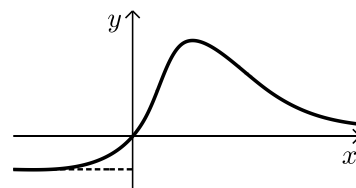
ב. להלן סקיצה: ג. גרף IV ד. $k = \ln 3$



5) א. הוכחה. ב. (1) כל x ב. (2) $\max(1, \ln 2)$

ב. (3) $y=0, y=\ln \frac{2}{3}$ ב. (4) חיובית: $x > 0$, שלילית: $x < 0$

ב. (5) להלן סקיצה: ג. (1) $\max(1, 1.306)$, $\min(0, 1)$ ג. (2) $x=0$



שאלון 572

פרק 31

פתרון בידאו של בחינות 2019

144	מועד חורף
148	קיץ מועד א
153	קיץ מועד ב

בגרות חורף 2019:

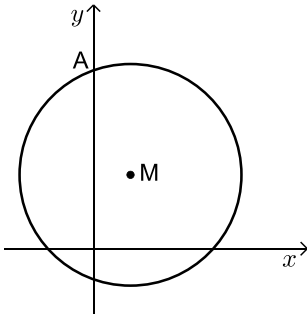
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) מעגל שמרכזו M חותך את החלק החיובי של ציר ה-y בנקודה A, כמתואר בציור שלפניך. ממרכז המעגל העבירו אנך לציר ה-y, החותך את הציר



בנקודה E. נתון כי: $AE = 6$.

נתון גם כי מרחק הנקודה M מראשית הצירים הוא מחצית מן האורך של רדיוס המעגל.

א. הוכח כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M המקיימות את נתוני השאלה נמצא על אליפסה, ומצא את משוואתה.

נסמן ב- F_1 וב- F_2 את מוקדי האליפסה שאת משוואתה

מצאת בסעיף א. הנקודות D_1 ו- D_2 הן נקודות על האליפסה.

שיעור ה-y של D_1 חיובי ושיעור ה-y של D_2 שלילי.

ב. (1) מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי עבור המרובע $F_1D_1F_2D_2$.

(2) האם קיים מרובע $F_1D_1F_2D_2$ בעל היקף גדול יותר? נמק.

2) נתונה פירמידה OBCDE שבסיסה OBCD הוא ריבוע.

המקצוע OE מאונך למישור הבסיס.

נתון: $OE = 12$, $OD = 4$.

מיקמו את הפירמידה במערכת צירים כך שהנקודה O

היא ראשית הצירים והנקודות E, B, D נמצאות

על הצירים x, y, z בהתאמה (כמתואר בציור).

א. מצא את ההצגה הפרמטרית של הישר EC.

הנקודה N נמצאת על המקצוע EC. מן הנקודה N מורידים

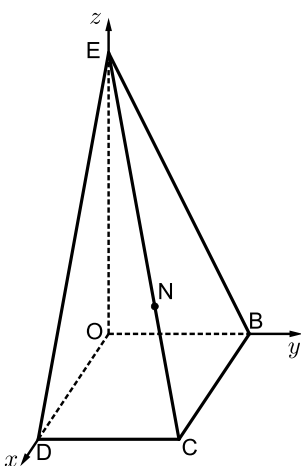
אנך לבסיס הפירמידה החותך אותו בנקודה F.

מרחק הנקודה F מציר ה-y הוא 3.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N.

ג. מצא את גודל הזווית שבין המישור BCN ובין בסיס הפירמידה OBCD.

K היא נקודה על המקצוע EC כך ש-KOBCD היא פירמידה ישרה (OBCD בסיס הפירמידה).



- ד. מצא את ההצגה הפרמטרית של הישר שעליו מונח הגובה לבסיס מן הנקודה K.
- 3) ענה על הסעיפים הבאים :
- א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה: $z^3 = \bar{z}$, $z \neq 0$, הוא מספר מרוכב.
- ב. (1) מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס המקיימות: $z^2 \cdot (\bar{z})^2 = 1$.
- (2) הראה כי כל הפתרונות של המשוואה בסעיף א נמצאים על המקום הגאומטרי שמצאת בתת-סעיף ב(1).
- ג. (1) את הנקודות שמתאימות לפתרונות המשוואה שמצאת בסעיף א מסובבים בזווית 45° (נגד כיוון השעון). נתון שכל אחת מן הנקודות המתקבלות לאחר הסיבוב מתאימה למספר המקיים את המשוואה: $z^4 = a$. מצא את a .
- (2) את הנקודות שמתאימות לפתרונות המשוואה שמצאת בסעיף א מסובבים בזווית α (נגד כיוון השעון). הוכח שסכום המספרים המתאימים לנקודות המתקבלות לאחר הסיבוב שווה ל-0.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{ax} - e^x}{e^{ax} - 3e^x + 2}$, הוא פרמטר.

לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית $x = \ln 2$.

א. מצא את a .

הצב את הערך של a שמצאת, וענה על הסעיפים ב-ה.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ והראה כי עבור כל $x \neq 0$

בתחום מתקיים: $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$.

ג. (1) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$

(אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$$h(x) = \left| \frac{e^x}{e^x - 2} - \frac{1}{2} \right|$$

ד. (1) רשום את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $h(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

(3) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$, על ידי ציר

ה- x ועל ידי הישר $x = \ln 8$ והישר $x = \ln 16$.

נתון: הפונקציה $h(x)$ סימטרית ביחס לישר $x = \ln 2$.

הנקודות A ו-B נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$, והן סימטריות ביחס לישר $x = \ln 2$.

שיעור ה- x של הנקודה A הוא $\ln 8$.

ה. מצא את שיעורי הנקודה B.

(5) $f(x)$ היא פונקציה גזירה לכל x בתחום ההגדרה שלה.

א. הראה שלפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $e^{f(x)}$ יש נקודות קיצון באותם שיעורי x ,

ונקודות הקיצון האלה הן מאותו סוג (מינימום או מקסימום).

נתון כי: $f(x) = x \ln(x^n)$, הוא פרמטר טבעי.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

התייחס לערכים שונים של n .

ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

התייחס לערכים שונים של n .

נתון: גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

ד. (1) הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן

(אם צריך - הבע באמצעות n).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $n = 2$.

ה. היעזר בתשובתך על סעיף א, מצא את שיעורי נקודות הקיצון

של הפונקציה $e^{x \ln(x^n)}$ (n טבעי), וקבע את סוגן אם צריך - הבע באמצעות n).

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ ב. $S_{F_1, F_2, D_2} = 6\sqrt{3}$ (1) לא. היקף המרובע קבוע והוא $8\sqrt{3}$.

2) א. $EC: \underline{x} = (0, 0, 12) + t(1, 1, -3)$ ב. $N(3, 3, 3)$

ג. 71.565° ד. $\underline{x} = (2, 2, 0) + s(0, 0, 1)$

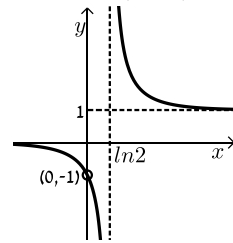
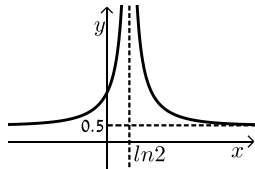
3) א. $1, i, -1, -i$ ב. $x^2 + y^2 = 1$ (1) הוכחה. (2)

ג. $a = -1$ (1) הוכחה. (2)

4) א. $a = 2$ ב. $x \neq \ln 2, x \neq 0$ ג. $y = 0, y = 1, x = \ln 2$ (1)

(2) עולה: איו, יורדת: $x < 0, 0 < x < \ln 2, x > \ln 2$

(3) להלן סקיצה: ד. $y = \frac{1}{2}, x = \ln 2$ (1) (2) להלן סקיצה:



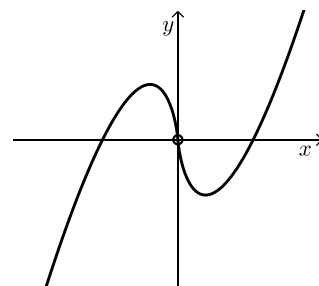
ה. $B\left(-\ln 2, \frac{5}{6}\right)$ (3) 0.500724

5) א. הוכחה. ב. עבור n אי-זוגי: $x > 0$, עבור n זוגי: $x \neq 0$.

ג. עבור n אי-זוגי: $(1, 0)$, עבור n זוגי: $(-1, 0), (1, 0)$.

ד. (1) הוכחה. (2) $\max\left(-\frac{1}{e}, \frac{n}{e}\right), \min\left(\frac{1}{e}, -\frac{n}{e}\right)$

(3) להלן סקיצה:



ה. $\max\left(-\frac{1}{e}, e^{\frac{n}{e}}\right), \min\left(\frac{1}{e}, e^{-\frac{n}{e}}\right)$

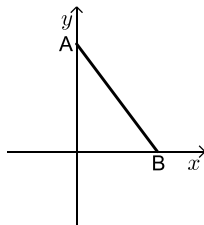
בגרות קיץ 2019 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



(1) אורך הקטע AB הוא 4.

נתון: הנקודה A נמצאת על ציר ה-y והנקודה B נמצאת על ציר ה-x (ראה ציור).

הנקודה M היא אמצע הקטע AB.

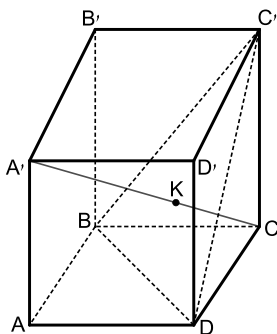
א. מצא את המשוואה של המקום הגאומטרי של כל הנקודות M שנבנו כך, וזהה את המקום הגאומטרי הזה.

נתון: הנקודה L נמצאת על הקטע AB כך ש- $\frac{AL}{LB} = t$ ש- $t > 0$. הוא פרמטר.

ב. הבע באמצעות t את המשוואה של המקום הגאומטרי של כל הנקודות L שנבנו כך, וזהה את המקום הגאומטרי הזה.

ג. בעבור איזה ערך של t המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף ב מתלכד עם המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א? נמק.

ד. האם קיים $t > 0$ שבעבורו המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף ב חותך את ציר ה-x בנקודה $(5,0)$? נמק.



(2) ABCDA'B'C'D' היא קובייה שאורך צלעה הוא 6 (ראה ציור). הנקודה B נמצאת על ראשית הצירים.

א. חשב את גודל הזווית שבין הקטע A'C' ובין הקטע BC'.

ב. הוכח שהישר A'C' מאונך למישור BC'D.

הנקודה K היא נקודת החיתוך של הישר A'C' עם המישור BC'D.

ג. מצא את היחס $\frac{AK}{AC}$.

הנקודה O היא נקודת החיתוך של אלכסון הבסיס AC עם אלכסון הבסיס BD.

ד. הוכח שהנקודה K נמצאת על הקטע C'O.

- 3) א. ענה על הסעיפים הבאים:
- הוכח כי לכל מספר מרוכב z מתקיים $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
 - הוכח כי אם המספר המרוכב z נמצא על מעגל היחידה, אז גם המספר $\frac{1}{z}$ נמצא על מעגל היחידה.
- ב. ענה על הסעיפים הבאים:
- הראה כי בעבור כל מספר מרוכב z הנמצא על מעגל היחידה, הסכום $z + \frac{1}{z}$ הוא מספר ממשי.
 - z_1 ו- z_2 הם מספרים מרוכבים הנמצאים על מעגל היחידה. נתון כי הרכיבים המדומים של z_1 ו- z_2 הם חיוביים. הוכח כי אם: $z_1 + \frac{1}{z_1} + z_2 + \frac{1}{z_2} > 2$ אז z_1 ו- z_2 נמצאים ברביע הראשון.
- $w = 1 \cdot \text{cis}(\alpha)$ הוא מספר מרוכב. נתון: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
- נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא $\frac{1}{w}$ והאיבר השני הוא w . נתון כי סכום 5 איברים הראשונים בסדרה ההנדסית שווה ל-0.
- ג. ענה על הסעיפים הבאים:
- הבע באמצעות α את מנת הסדרה, והסבר מדוע כל איברי הסדרה נמצאים על מעגל היחידה.
 - מצא את α (מצא את שתי האפשרויות).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)$ המוגדרת לכל x .

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ii. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

iii. מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר ה- x .

iv. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הוכח כי $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

ii. הסבר מדוע גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא כולו מתחת לישר $y = x$.

ד. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$ המוגדרת לכל x .

i. מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה)?

ii. $a > 1$ הוא פרמטר.

היעזר בנגזרת הפונקציה $f(x)$ והראה כי נפח גוף הסיבוב של

השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי הצירים ועל ידי

הישר $x = \ln a$ שווה ל- $\pi \ln\left(\frac{2a}{a+1}\right)$.

פרט את חישוביך.

5 נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = \frac{e^{-mx}}{1+x^2}$. m הוא פרמטר.

ענה על הסעיפים א-ב בעבור $m \geq 0$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציות $f(x)$?

ii. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות $f(x)$

(אם יש כאלה). נמק.

iii. נתון כי כל הפונקציות $f(x)$ מן המשפחה חותכות זו את זו בנקודה אחת.

מצא את שיעוריה.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. בעבור $m \geq 0$, מצא את הערכים של m שבעבורם הנגזרת $f'(x)$:

1. אינה מתאפסת בשום נקודה.

2. מתאפסת בנקודה אחת בדיוק.

3. מתאפסת בשתי נקודות בדיוק.

ii. בסוף השאלה נתונים שלושה גרפים (I-III) של פונקציות מן המשפחה $f(x)$

בעבור $m \geq 0$. ידוע כי $m \neq 1$ וכי כל אחד מן הגרפים מתאים לערך

או לטווח ערכים אחר של m .

התאם לכל גרף מבין השלושה את הערך או את טווח הערכים של m

המתאים לו. נמק.

ענה על סעיף ג. תוכל להיעזר בגרף המתאים מבין הגרפים I-III.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(-x)$ בעבור $0 < m < 1$.

תשובות סופיות:

1 א. $x^2 + y^2 = 4$, מעגל קנוני ורדיוסו 2.

ב. $\frac{(t+1)^2 x^2}{t^2} + (t+1)^2 y^2 = 16$ או $\frac{x^2}{\left(\frac{4t}{t+1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{4}{t+1}\right)^2} = 1$, אליפסה.

ג. $t = 1$ ד. לא.

2 א. $\sphericalangle(A'C, BC') = 90^\circ$ ב. הוכחה. ג. $\frac{A'K}{A'C} = \frac{2}{3}$ ד. הוכחה.

3 א. (i) הוכחה. א. (ii) הוכחה. ב. עבור $z = \text{rcis } \theta$

ב. (i) $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ ב. (ii) הוכחה. ג. (i) $q = \text{cis } 2\alpha$

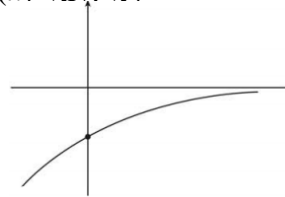
ג. (ii) $\alpha = \frac{\pi}{5}$ או $\alpha = \frac{2\pi}{5}$

4 א. (i) אין חיתוך עם ציר x . חיתוך עם ציר y : $(0, -\ln 2)$

א. (ii) $f(x)$ שלילית לכל x , חיובית לאף x .

א. (iii) $v = 0$ א. (iv) $f(x)$ עולה לכל x , יורדת לאף x .

ב. סקיצה: ג. (i) הוכחה.



ד. (i) $g(x)$ חיובית לכל x , שלילית לאף x . ג. (ii) הוכחה.

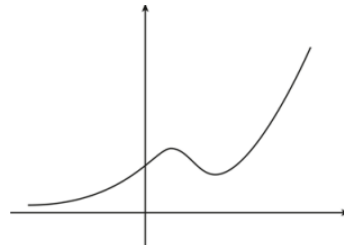
ד. (ii) הוכחה.

5 א. (i) כל x . א. (ii) $f(x)$ חיובית לכל x , שלילית עבור אף x .

א. (iii) $(0, 1)$ ב. (i) (1). (ii) $m > 1$. (iii) $m = 0$. (iv) $0 < m < 1$.

ב. (ii) גרף I: $0 < m < 1$. גרף II: $m > 1$. גרף III: $m = 0$.

ג. סקיצה:



בגרות קיץ 2019 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

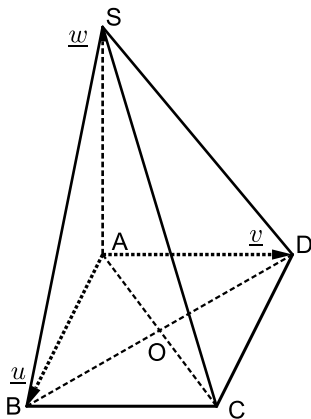
ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) נתון מעגל שמשוואתו היא $x^2 + y^2 = a^2$, הוא פרמטר חיובי. הזיזו את המעגל ימינה (הזזה אופקית) כך שישק לציר ה- y .

- א. הבע באמצעות a את משוואת המעגל שהתקבל.
- ב. בונים מעגל המשיק מבחוץ למעגל שהתקבל בסעיף א ומשיק גם לציר ה- y . שיעור ה- x של מרכז המעגל שבונים הוא חיובי. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאים מרכזי המעגלים הנבנים כך (אם יש צורך, השתמש ב- a).
- הישר $y = x + 3$ משיק בנקודה M למקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף ב.
 - ג. מצא את a .
 - ד. רשום את שיעורי נקודת ההשקה של שני המעגלים האלה:
 - i. המעגל שהתקבל בסעיף א.
 - ii. המעגל שנבנה כמתואר בסעיף ב ומרכזו הוא בנקודה M.

(2) נתונה פירמידה SABCD, שבסיסה, ABCD, הוא ריבוע (ראה ציור). הנקודה O היא נקודת חיתוך אלכסוני הבסיס. הנקודה P היא נקודה על הקטע SD, והיא מקיימת: $\overrightarrow{SP} = t \cdot \overrightarrow{SD}$, $t > 0$. נסמן: $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.



- א. הבע את הווקטור \overrightarrow{OP} באמצעות \underline{w} , \underline{v} , \underline{u} ו- t .
- ב. מצא בעבור איזה ערך של t , OP מקביל למישור הפאה SAB.
- נתון: אורך צלע הריבוע ABCD הוא 4, AS מאונך לבסיס הפירמידה, $AS = 4\sqrt{2}$. הנקודה A היא ראשית הצירים. הנקודות B, D ו-S נמצאות על החלק החיובי של הצירים x , y ו- z בהתאמה.
- ג. מצא בעבור אילו ערכים של t , הישר OP יוצר זווית של 45° עם מישור הפאה SAD.
- ד. הנקודה T נמצאת על הקטע SC כך ש-TABCD היא פירמידה ישרה. מצא את נפח הפירמידה TABCD.

3 נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא 1 והאיבר השני שלה הוא iz (z מספר מרוכב). נתון כי הסדרה איננה קבועה.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. רשום את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה (אם יש צורך, הבע באמצעות z).

ii. הוכח כי סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה שווה ל- $\frac{z^5 + i}{z + i}$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^5 = -i$ (z הוא מספר מרוכב).

ii. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$

(z הוא הנקודה A נמצאת ברביע השלישי במישור גאוס, והיא

מתאימה לאחד מפתרונות המשוואה שפתרת בתת-סעיף ב (ii).

ABO הוא משולש שווה צלעות במישור גאוס (O – ראשית הצירים).

ג. מצא את המספר המרוכב המתאים לנקודה B (מצא את שתי האפשרויות).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

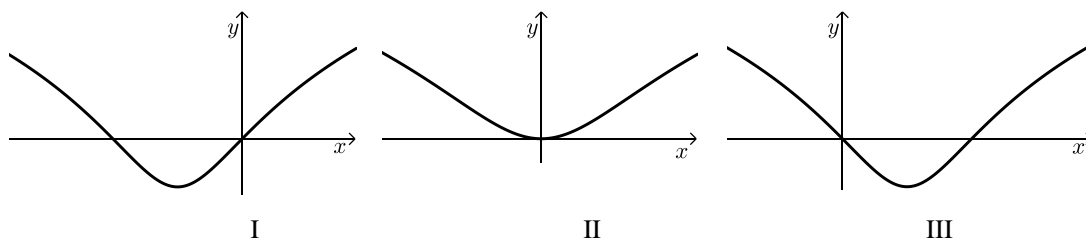
ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

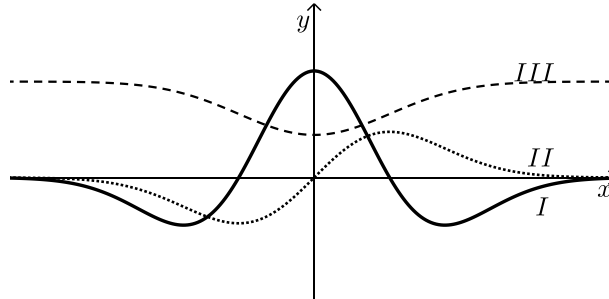
4 נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln(x^2 + ax + 1)$

a הוא פרמטר, $-2 < a < 2$.

- א. הראה שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .
- ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש צורך, הבע באמצעות a).
- ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה (אם יש צורך, הבע באמצעות a).
- ד. בסוף השאלה מוצגים שלושה גרפים (I-III) המתארים את גרף הפונקציה $f(x)$ כתלות בפרמטר a . כל אחד מן הגרפים מתאים לאחד מן התחומים (1)-(3) של a :
- (1) $0 < a < 2$
- (2) $-2 < a < 0$
- (3) $a = 0$
- כתוב איזה מתחומי הערכים (1)-(3) מתאים לכל אחד מן הגרפים. ענה על סעיף ה בעבור a המקיים $-2 < a < 0$.
- נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .
- ה. הבע באמצעות a ו- S את האינטגרל: $\int_0^{-a} \ln(4x^2 + 4ax + 4) dx$.



- 5) לפיך סרטוט המתאר את הגרפים של הפונקציות f , f' , f'' המוגדרות לכל x .
הגרף III נמצא כולו מעל לגרף II.



- א. התאם כל אחד מן הגרפים I, II, III לפונקציות f , f' , f'' . נמק את קביעתך.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f'(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
נתון כי: $f'(x) = x \cdot e^{-x^2}$.
ב. מצא בעבור איזה ערך של x אורך הקטע AB יהיה מינימלי, ובעבור איזה ערך של x אורך הקטע AB יהיה מקסימלי.
נתון כי האורך המקסימלי של הקטע AB שווה ל- $1 + \frac{1}{2e}$.
ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

תשובות סופיות:

(1) א. $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ב. $x \neq 0, y^2 = 4ax$ ג. $a = 3$ ד. $(3,3)$

(2) א. $\vec{OP} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\vec{v} + (1-t)\vec{w}$ ב. $t = \frac{1}{2}$

ג. $t = 1, t = \frac{2}{3}$ ד. $V = \frac{32\sqrt{2}}{3}$

(3) א. (i). $1, iz, -z^2, -iz^3, z^4$ א. (ii). הוכחה.

ב. (i). $\text{cis } 54^\circ, \text{cis } 126^\circ, \text{cis } 198^\circ, \text{cis } 270^\circ, \text{cis } 342^\circ$

ג. $\text{cis } 138^\circ, \text{cis } 258^\circ$

ב. (ii). $\text{cis } 54^\circ, \text{cis } 126^\circ, \text{cis } 198^\circ, \text{cis } 342^\circ$

(4) א. הוכחה. ב. $(-a,0), (0,0)$

ג. $\min\left(-\frac{a}{2}, \ln\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\right)$ ד. I (1) ד. III (2) ד. II (3)

ה. $-a \ln 4 - S$

(5) א. I: f'' II: f' III: f

ב. $x = -1$ אורך מקסימלי. $x = \frac{1}{2}$ אורך מינימלי.

שאלון 572

פרק 32

פתרון בידאו של בחינות 2018

158	מועד חורף
162	קיץ מועד א
166	קיץ מועד ב

בגרות חורף 2018:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1 נתונות הנקודות $A(0,0)$, $B(19,0)$ ו- $D(9,0)$.

- מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות C , שעבורן CD הוא חוצה זווית במשולש ABC .
- מהו השטח הגדול ביותר של משולש ABC שנבנה באופן המתואר בסעיף א?
- מצא את שיעורי שתי הנקודות C שעבורן הצלע BC במשולש ABC משיקה למקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף א. תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

2 $ABCA'B'C'$ היא מנסרה משולשת ישרה שכל מקצועותיה שווים זה לזה.

נסמן את אורך המקצוע ב- a .

$ABCK$ היא פירמידה ישרה, DK הוא גובה בפירמידה $ABCK$, כמתואר בציור. נתון: $DK = t \cdot AA'$, נפח המנסרה $ABCA'B'C'$ גדול פי 4.5 מנפח הפירמידה $ABCK$.

א. חשב את t .

ב. מצא את הזווית בין המישור ABK למישור ABC .

נתון: נפח הפירמידה $ABCK$ הוא $12\sqrt{3}$.

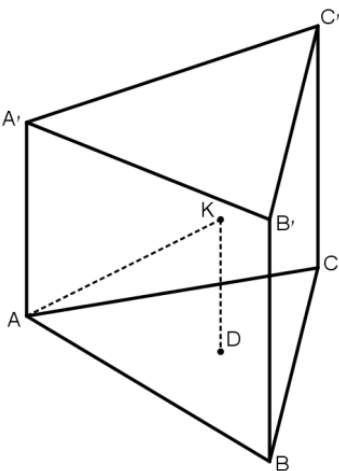
ג. מצא את a .

נתון: הקדקוד A נמצא בראשית הצירים, הקדקוד A' נמצא על החלק החיובי של ציר ה- z , והקדקוד C נמצא על החלק החיובי של ציר ה- y . שיעורי הקדקוד B הם חיוביים.

ד. (1) מצא את שיעורי הקדקוד B' .

(2) מצא את משוואת המישור $AB'K$.

תוכל להשאיר שורש בתשובתיך.



- 3 א. פתור את המשוואה: $z^2 + (-5+2i)z + 7+i = 0$.
 נסמן ב- w את פתרון המשוואה מסעיף א, המייצג את הנקודה שקרובה יותר לראשית הצירים.
 a_n היא סדרה חשבונית. w הוא איבר בסדרה וגם 1 הוא איבר בסדרה.
 ב. (1) הסבר מדוע כל איברי הסדרה הם מן הצורה: $a_n = 1+b \cdot i$.
 b הוא מספר ממשי.
 (2) הסבר מדוע כל הנקודות במישור גאוס המייצגות את איברי הסדרה a_n , חוץ מן הנקודה $(1,0)$, נמצאות מחוץ למעגל היחידה.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.
 שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (3) מצא את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הסבר מדוע עבור כל מספר ממשי a מתקיים: $\int_a^{a+1} f(x) dx < 1$.

תוכל להיעזר בסרטוט.

ג. (1) $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $f(x) = g(x) + \frac{1}{2}$.

הוכח שהפונקציה $g(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

(2) הסבר מדוע לכל שני מספרים b ו- c המקיימים $0 < b < c$

מתקיים: $\int_{-c}^{-b} f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = c - b$

בתשובתך תוכל להיעזר בסרטוט מתאים ובשיקולי סימטריה.

5 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(\ln x)^n}{\sqrt{x}}$, n הוא מספר טבעי.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם הצירים (אם יש כאלה).

סובבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי

הישרים $x=1$ ו- $x=e^2$ סביב ציר ה- x . נפח גוף הסיבוב שהתקבל שווה ל- $\frac{32\pi}{2n+1}$.

ב. מצא את n .

הצב בפונקציה $f(x)$ את n שמצאת בסעיף ב וענה על סעיפים ג-ה.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(2) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה- x .

לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה שמשוואתה היא $y=0$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = f(x) + m$, $m \neq 0$ הוא פרמטר.

נתון כי קיימת נקודה שבה גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x .

(1) מצא את m .

(2) עבור אילו ערכים של k יש למשוואה $g(x) = k$ פתרון יחיד?

תשובות סופיות:

(1) א. $(x+81)^2 + y^2 = 8100$. ב. יח"ר $S_{\triangle ABC} = 855$.

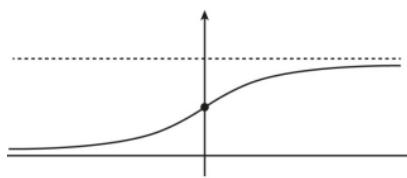
ג. $C(0, -\sqrt{1539}), C(0, \sqrt{1539})$.

(2) א. $t = \frac{2}{3}$. ב. 66.59° . ג. $a = 6$.

ד. (1). $B'(3\sqrt{3}, 3, 6)$. (2) $x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}z = 0$.

(3) א. $z_2 = 4 - 3i, z_1 = 1 + i$. ב. (1) הסבר . (2) הסבר

(4) א. (1) כל x . (2) עלייה: כל x , ירידה: אין (3) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.



(4) $y = 0, y = 1$ (5) סקיצה:

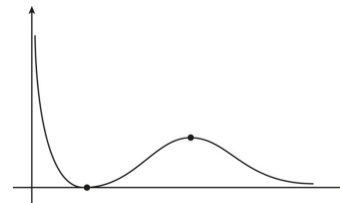
ב. הסבר

ג. (1) הוכחה . (2) הסבר .

(5) א. (1) $0 < x$. (2) $(1, 0)$. ב. $n = 2$.

ג. (1) מינימום: $(1, 0)$, מקסימום: $\left(e^4, \frac{16}{e^2}\right)$. (2) $x = 0$.

ד. סקיצה: ה. (1). $m = -\frac{16}{e^2}$. (2) $k = -\frac{16}{e^2}$ או $0 < k$.



בגרות קיץ 2018 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1 נתונות הנקודות $A(-3a, 0)$ ו- $B(3, 0)$. $a > 0$ הוא פרמטר.

א. הבע באמצעות a את המקום הגאומטרי של כל הנקודות P המקיימות: $\frac{PA}{PB} = 1$.

ב. הראה שהמקום הגאומטרי של כל הנקודות Q המקיימות $\frac{QA}{QB} = 2$ הוא מעגל,

והבע באמצעות a את שיעורי מרכז המעגל הזה ואת הרדיוס שלו.

ג. נתבונן באוסף כל המעגלים אשר משיקים למקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א

ועוברים דרך מרכז המעגל שמצאת בסעיף ב.

נתון כי מרכזי המעגלים האלה מהווים מקום גאומטרי העובר דרך ראשית הצירים.

i. זהה את המקום הגאומטרי הזה.

ii. מצא את a וכתוב את משוואתו של המקום הגאומטרי הזה.

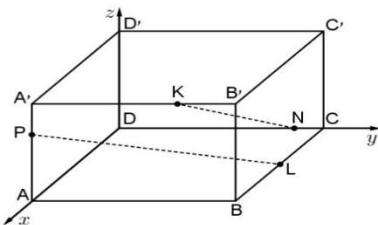
2 בציור שלפניך נתונה התיבה $ABCD A'B'C'D'$. המקצועות DA ו- DD'

מונחים על הצירים x , y ו- z , בהתאמה, כמתואר בציור.

נתון: $DA = 4$, $AA' = 3$, נסמן: $AB = a$. $a > 0$ הוא פרמטר.

הנקודות P , N , L ו- K נמצאות על מקצועות התיבה AA' , DC , BC ו- $A'B'$,

בהתאמה, כך שמתקיים: $AP = 2PA'$, $N(0, 5, 0)$.



L היא אמצע המקצוע BC , $\vec{A'K} = \frac{4}{5}\vec{DN}$.

א. מצא את משוואת המישור PNK .

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא הצגה פרמטרית של הישר NK ושל הישר PL . אם צריך, הבע באמצעות a .

ii. הסבר מדוע הישרים NK ו- PL הם ישרים מצטלבים.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. עבור איזה ערך של a , $\angle PC'C = 82.1^\circ$?

השאר בתשובה שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

- ii. האם קיים a שעבורו $\angle PC'C = 90^\circ$? נמק.
- (3) z_1 ו- z_2 הם שני מספרים מרוכבים המקיימים: $|z_1| = |z_2| = r$, $\arg z_1 + \arg z_2 = 90^\circ$.
- א. הוכח כי תוצאת המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא מספר מדומה טהור, והבע אותו באמצעות r .
- הנקודות A, B ו-C, במישור גאוס מייצגות בהתאמה את המספרים המרוכבים z_1 , z_2 ו- z_3 . נתון: הנקודות A, B ו-C אינן נמצאות על ישר אחד, והנקודה C נמצאת על הישר $y = x$.
- ב. הסבר מדוע המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.
- הנקודה D במישור גאוס מתאימה למספר המרוכב $(z_1 \cdot z_2)^2 \cdot z_3$.
- נתון: $z_1 + z_2 = 7 + 7i$, $z_1 - z_2 = 1 - i$, $(z_3)^2 = 2i$.
- ג. ענה על הסעיפים הבאים:
- i. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D (מצאו את שתי האפשרויות).
- ii. חשב את שטח המרובע BDAC עבור הנקודה C הנמצאת ברביע הראשון.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = e^{2mx} - e^{mx}$. $m > 0$ הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע באמצעות m .

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ii. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

iii. מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

iv. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט במערכת צירים אחת, גרפים של הפונקציות $f(x)$ עבור $m = 1$

ועבור $m = 2$ (ידוע ששני הגרפים חותכים זה את זה בשתי נקודות בדיוק). התאם בין הגרפים המסורטטים ובין ערכי m הנתונים.

ג. הישר $y = k$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

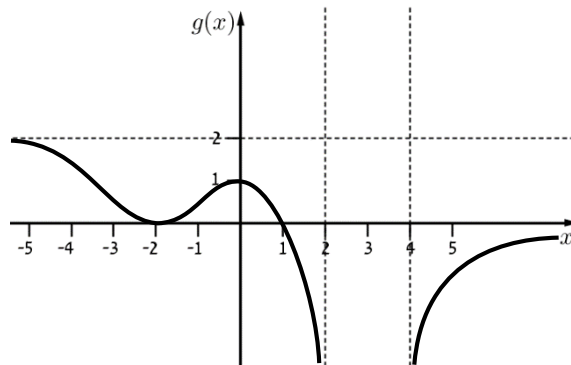
i. הבע באמצעות m את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$

על ידי ציר ה- y ועל ידי הישר $y = k$.

עבור כל m , נסמן את השטח המתואר בתת-סעיף (i) ב- S_m (S_1 הוא השטח עבור $m = 1$).

ii. הראה שלכל m מתקיים $S_m = \frac{S_1}{m}$.

- 5 נתון: $f(x)$ היא פונקציה רציפה וגזירה לכל x . נסמן $g(x) = \ln(f(x))$.
 הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל $x > 4$ ולכל $x < 2$, ורק שם.
 בתחום $2 \leq x \leq 4$, $f'(x) = 0$ רק עבור $x = 3$.
 בציור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $g(x)$.
 הפונקציה $g(x)$ מתאפסת רק בנקודות שבהן $x = 1$ ו- $x = -2$.



- א. מצא את $f(-2)$, $f(0)$ ו- $f(1)$.
 ב. מה הם תחומי החיוביות ותחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$? נמק.
 ג. מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם כל אחד מן הצירים? נמק.
 ד. לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות אופקיות. כתוב את משוואותיהן.
 ה. מה הם תחומי העלייה ותחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$? נמק.
 ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ז. הסבר מדוע $\int_{-2}^1 f(x) dx > 3$.

תשובות סופיות:

א. $x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}a$ (1)

ב. $R = 2a + 2$, $M(4 + a, 0) \leftarrow (x - (4 + a))^2 + y^2 = (2a + 2)^2$

ג. (i) פרבולה קנונית. ג. (ii) $y^2 = 60x$, $a = 11$

א. $13x + 4y - 16z - 20 = 0$ (2) ב. (i) $\underline{x} = (0, 5, 0) + t(4, -1, 3)$, $\underline{x} = (4, 0, 2) + r(2, -a, 2)$

ב. (ii) אינם נחתכים ואינם מקבילים.

ג. (i) $a \approx 5.99$ (ii) לא.

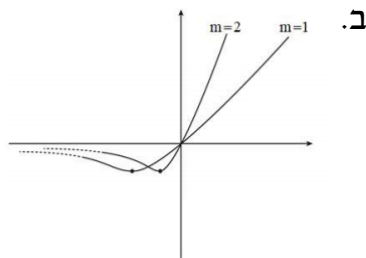
א. $z_1 \cdot z_2 = r^2 i$ (3) ב. על פי חישוב (המרחק AC שווה למרחק BC).

ג. (i) $D(625, 625)$, $C(-1, -1)$ או $D(-625, -625)$, $C(1, 1)$

ג. (ii) $S_{BDAC} = 626$ יח"א

א. (i) כל x (4) א. (ii) $(0, 0)$ א. (iii) $y = 0$

ג. (i) $S_m = \frac{\ln 2}{4m} - \frac{1}{8m}$



א. (iv) $\left(\frac{\ln 0.5}{m}, -\frac{1}{4}\right)$

ג. (ii) הוכחה.

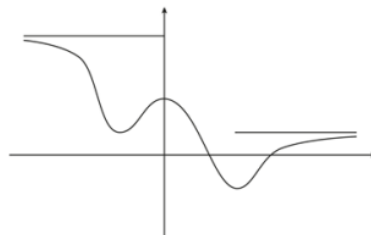
א. $f(1) = 1$, $f(0) = e$, $f(-2) = 1$ (5)

ב. תחום חיוביות: $x > 4$, $x < 2$, תחום שליליות: $2 < x < 4$

ג. $(4, 0)$, $(2, 0)$, $(0, e)$ ד. $y = 1$, $y = e^2$

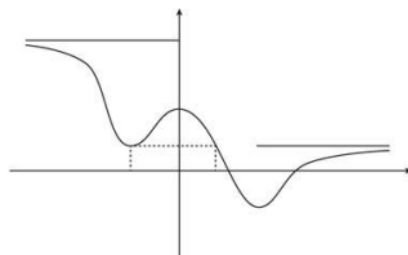
ה. תחום ירידה: $0 < x < 3$, $x < -2$, תחום עליה: $-2 < x < 0$, $x > 3$

ו. להלן סרטוט:



ז. שטח זה גדול משטחו של מלבן שצלעותיו הן באורך 3 ו-1.

(המלבן המקווקו בשרטוט).



בגרות קיץ 2018 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נתונה הפרבולה הקנונית $y^2 = 2px$, $p > 0$, הוא פרמטר.

הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ נמצאות על הפרבולה.

נתון: שיפוע הישר AB הוא $\frac{4}{3}$, שיעור ה- y של אמצע הקטע AB הוא 9.

א. מצא את משוואת הפרבולה.

נתון: המשיקים לפרבולה דרך הנקודות A ו-B מאונכים זה לזה.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B (הנקודה A נמצאת ברביע הראשון).

ג. מצא עוד זוג נקודות על הפרבולה שהמשיקים דרכן לפרבולה מאונכים זה לזה.

2) בתיבה ABCDA'B'C'D' הנקודה L היא אמצע המקצוע BB', והנקודה G היא מפגש

האלכסונים של הפאה A'B'C'D'. הנקודה K היא אמצע הקטע LG (ראה ציור).

נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AB} = \underline{v}$, $\vec{AD} = \underline{u}$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את \vec{DK} .

ב. הוכח שהנקודה K נמצאת על האלכסון DB'.

ומצא את היחס $\frac{DK}{DB'}$.

ההמשך של הקטע AK חותך את המישור BCC'B' בנקודה F.

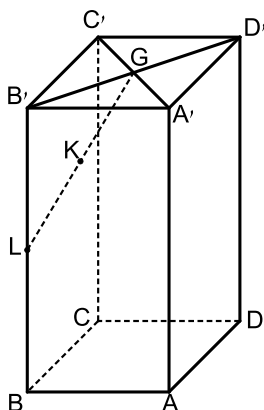
נתון: $\vec{AF} = s \cdot \underline{u} + \underline{v} + t \cdot \underline{w}$.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את s ואת t , והראה כי הנקודה F נמצאת

על המקצוע B'C'.

ii. מצא את היחס $\frac{B'F}{B'C'}$.



- (3) z_C, z_B, z_A הם שלושה מספרים מרוכבים שונים זה מזה המייצגים את הנקודות A, B ו-C במישור גאוס, בהתאמה.
נתון: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = \sqrt{65}$, הנקודה A נמצאת ברביע הראשון, z_C ו- z_A מקיימים את המשוואה: $(8-i)z = (8+i)\bar{z}$.
א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את z_A ואת z_C .
ii. הסבר מדוע $\angle ABC = 90^\circ$.
נתון: $AB = BC$.
ב. מצא את z_B (מצא את שתי האפשרויות).
נתון: הנקודה B נמצאת ברביע השני.
ג. a_n היא סדרה הנדסית שבה: $a_1 = z_A$ ו- $a_2 = z_B$.
נתון: m הוא מספר טבעי כך שסכום m האיברים הראשונים של הסדרה a_n הוא 0. הסבר מדוע m מתחלק ב-4 ללא שארית.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($\frac{1}{3}$ נקודות)

- ענה על אחת מהשאלות 4-5.
שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- (4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. נסמן $g(x) = e^x - x$.
א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
ii. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, והסבר מדוע לכל x מתקיים: $e^x - x \geq 1$.
ב. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$? נמק.
ii. מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש).
iii. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
iv. הראה כי: $f'(x) = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$.

ידוע כי הביטוי $2e^x - xe^x - 1$ מוגדר לכל x וחיובי בתחום $-1 \leq x \leq 1$.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את $f(-1)$ ואת $f(1)$, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-1 \leq x \leq 1$.

ii. הסתמך על הסעיפים הקודמים והסבר מדוע לפונקציה $f(x)$ יש לפחות שתי נקודות קיצון בתחום ההגדרה שלה כולו.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- x , על ידי הישר $x = -1$ ועל ידי גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-1 \leq x \leq 0$.

5 נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln(e^{2x} + b)$, $b > 0$ הוא פרמטר.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(e^x + be^{-x})$.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הוכח: $f(x) - g(x) = x$.

ii. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(אם צריך, הבע באמצעות b).

נתון כי נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$ נמצאת על האסימפטוטה של

הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את ערך הפרמטר b .

ה. הצב $b = 4$ וסרטט במערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של

הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

תשובות סופיות:

א. $y^2 = 24x$ ב. $B(1.5, -6), A(24, 24)$ (1)

ג. יש אינסוף זוגות נקודות כאלה, שמכפלת שיעורי ה- y שלהם היא -144 .
למשל: $(24, -24), (1.5, 6), (6, 12), (6, -12)$.

א. $\vec{DK} = \frac{3}{4}w - \frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v$ ב. $\frac{DK}{DB'} = \frac{3}{4}$ ג. $S = \frac{1}{3}, t = 1$ (2)

ג. $\frac{BF}{B'C'} = \frac{1}{3}$ (ii)

א. (i) $z_C = -8 - i = \sqrt{65} \text{cis} 187.125^\circ, z_A = 8 + i\sqrt{65} = \text{cis} 7.125^\circ$ (3)

א. (ii) מתקבל מעגל קנוני שבו AC קוטר ונקודה B נמצאת על היקף המעגל, כך ש- $\sphericalangle CAB$ הינה זווית היקפית הנשענת על הקוטר.

ב. $z_B = 1 - 8i = \sqrt{65} \text{cis}(-82.875)^\circ$ או $z_B = -1 + 8i\sqrt{65} = \text{cis} 97.125^\circ$

ג. נתון כי $S_m = 0$, ולכן מתבקש $q^m - 1 = 0 \Leftrightarrow q = \text{cis} 90^\circ$

ולכן $\text{cis} 90^\circ m = 1, [\text{cis} 90^\circ]^m - 1 = 0$, כלומר: $90m = 360k \Leftrightarrow m = 4k$.

א. (i) כל x א. (ii) $\min(0, 1)$ לפונקציה יש נקודת מינימום (4)

מוחלט $(0, 1)$, לכן $g(x) \geq 1$ לכל x , כלומר $e^x - x \geq 1$ לכל x .

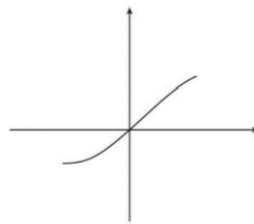
ב. (i) כל x ב. (ii) $x < 0: y = 0, x > 0: y = 1$

ב. (iii) $(0, 0)$ ב. (iv) הוכחה. ג. (i) $f(1) = 1, f(-1) = \frac{1-e}{1+e} = -0.46$

ג. (ii) $f'(0) = 1, f'(-5) = -0.038$

כיוון ש- $f'(x) = 0$ רציפה, קיימת בין $x = 0$ ל- $x = -5$ לפחות נקודה אחת

שבה $f'(x) = 0$, והיא נקודת המינימום של הפונקציה.

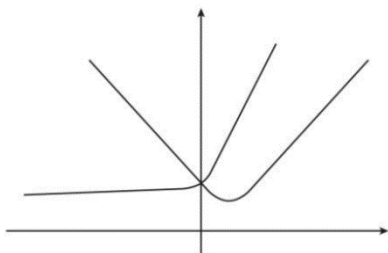


ד. $S = \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)$ יח"ש

א. (i) כל x א. (ii) עולה בכל תחום הגדרתה. (5)

ב. כל x ג. (i) הוכחה. ג. (ii) $(0, \ln(1+b))$

ד. $b = 4$ ה. להלן סרטוט:



שאלון 572

פרק 33

פתרון בידאו של בחינות 2017

170	מועד חורף
174	קיץ מועד א
179	קיץ מועד ב

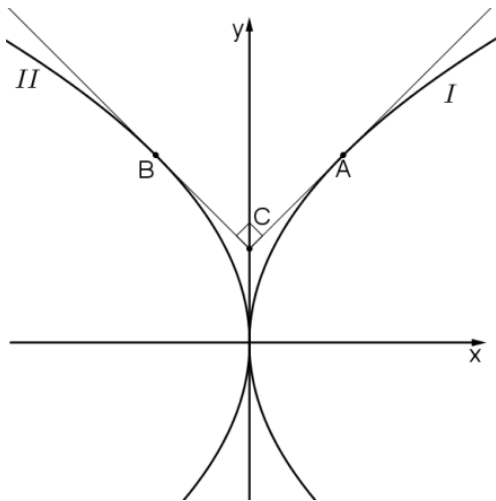
בגרות חורף 2017:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



(1) נתונות שתי פרבולות:

$$I. y^2 = 4x$$

$$II. y^2 = -4x$$

A היא נקודה על פרבולה I.

B היא נקודה על פרבולה II.

הנקודות A ו-B נמצאות על ציר ה-x.

העבירו לפרבולות I ו-II משיקים דרך

הנקודות A ו-B, בהתאמה, כמתואר בציור.

נתון ששני המשיקים מאונכים זה לזה

ונחתכים בנקודה C, הנמצאת על ציר ה-y.

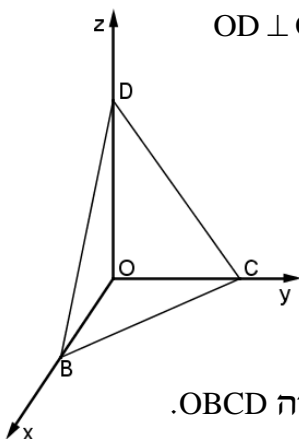
א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. נתון: A, B, C, הם שלושה מקדקודיו של ריבוע ACBM.

(1) מצא את שיעורי הקדקוד M.

(2) נתון מעגל שמערכו M. המעגל משיק לישרים AC ו-BC.

מצא את משוואת המעגל, והסבר מדוע A ו-B הן נקודות ההשקה.



(2) נתונה פירמידה משולש OBCD שבה $OD \perp OC$, $OC \perp OB$, $OB \perp OD$

כמתואר בציור. נתון: $OD = 6$, $OC = 4$, $OB = 3$.

הנקודות K ו-P נמצאות על המקצועות OB

ו-OD בהתאמה, כך שמתקיים:

$$OP : PD = 1 : 1, \quad OK : KB = 2 : 1$$

דרך הנקודות K ו-P עובר מישור המקביל למקצוע CD

וחותך את OC בנקודה Q.

א. מצא את היחס בין OQ ל-QC. נמק את תשובתך.

ב. מצא את היחס בין נפח הפירמידה OKPQ לנפח הפירמידה OBCD.

ג. מצא את הזווית בין הישר CB למישור KPQ.

3) z הוא מספר מרוכב. נתונים שני מקומות גיאומטריים:

$$I. \quad z\bar{z} + i(z - \bar{z}) + z + \bar{z} = 0 \quad II. \quad |z|^2 + i(\bar{z} - z) = 0$$

א. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.

המקומות הגאומטריים הנתונים נחתכים בשתי נקודות $A(x_1, y_1)$

ו- $B(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$).

ב. מצא את השיעורים של הנקודות A ו-B.

ג. נתונה הנקודה $P(x_0, y_0)$. הנקודה P נמצאת במרחק שווה מכל הנקודות

שעל המקום הגאומטרי I. נתון: $z_0 = x_0 + y_0 \cdot i$.

הוכח שהמספר הצמוד ל- z_0 נמצא על המקום הגאומטרי II.

ד. נתון: $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$ הם שיעורי הנקודה A שמצאת בסעיף ב).

נתונה סדרה חשבונית שבה האיבר הראשון הוא $5z_1$ וההפרש הוא z_0 .

מצא את כל ערכי n שעבורם S_n (סכום n האיברים הראשונים בסדרה)

הוא מספר ממשי (אם יש כאלה).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{ax^2+bx+2}$, a ו- b הם פרמטרים.

נתון כי הפונקציה היא זוגית.

א. מצא את b .

לפונקציה יש בדיוק שתי נקודות פיתול.

ב. הוכח כי $a < 0$.

ג. הפונקציה הנתונה קעורה כלפי מטה \cap בתחום: $-0.5 < x < 0.5$ וקעורה

כלפי מעלה \cup בתחומים: $x > 0.5$ ו- $x < -0.5$.

ד. מצא את a .

ה. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

ז. נתונה הפונקציה $h(x) = f'(x) \cdot f''(x)$. מהו התחום שבו הפונקציה $h(x)$ חיובית?

5 נתונות שתי פונקציות:

$$f(x) = \ln(ae^x - be^{2x}), g(x) = \ln(2 - e^x)$$

הם פרמטרים. נתון: $b > 0, a > 0$.

ידוע שלשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה. הוכח: $a = 2b$.
ידוע שלשתי הפונקציות יש נקודה משותפת אחת בלבד.

נקודה זו היא נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$.

א. חשב את a , את b ואת שיעורי נקודת הקיצון של $f(x)$.

ב. הוכח כי $g(x)$ יורדת וקעורה כלפי מטה \cap בכל תחום הגדרתה.

ג. הוכח שההפרש בין הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ הוא פונקציה קווית.

ד. (1) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ (אם יש כאלה).

(2) סרטט על מערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של שתי הפונקציות.

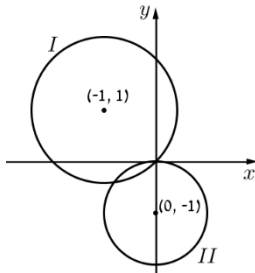
בסרטוט הדגש את גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות סופיות:

(1) א. $A(1,2), B(-1,2)$ ב. i. $M(0,3)$ ב. ii. $x^2 + (y-3)^2 = 2$

(2) א. 1 ב. $\frac{1}{6}$ ג. 7.35°

(3) א. סקיצה בצד. ב. $A(-0.8, -0.4), B(0,0)$

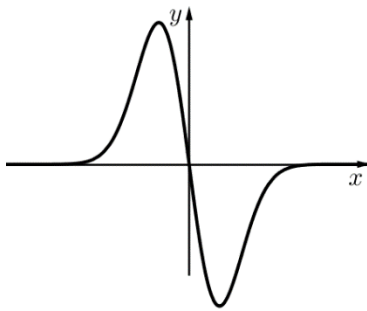


ג. הוכחה

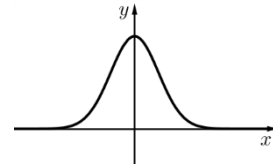
ד. $n = 5$

(4) א. $b = 0$ ב. הוכחה ג. $a = -2$ ד. i. $y = 0$

ה. להלן סקיצה:



ד. ii. להלן סקיצה:



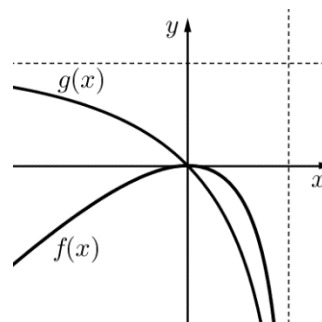
ו. $0 < x < \frac{1}{2}, x < -\frac{1}{2}$

(5) א. הוכחה

ב. $a = 2, b = 1, \max(0,0)$

ה. i. $f(x): x = \ln 2, g(x): y = \ln 2, x = \ln 2$

ה. ii. להלן סקיצה:



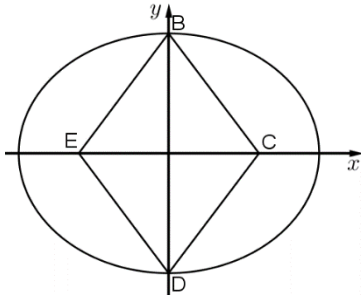
בגרות קיץ 2017 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



1) נתון מעוין BCDE.

הקדקודים B ו-D נמצאים על ציר ה- y .

הקדקודים C ו-E נמצאים על ציר ה- x .

נתון: אורך צלע המעוין הוא 5,

אורך גובהו הוא 4.8 ואורך האלכסון BD

גדול מאורך האלכסון CE.

דרך הקדקודים B ו-D עוברת אליפסה קנונית

(ראה ציור), שמוקדה הם הנקודות C ו-E.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את השיעורים של קדקודי המעוין.

ii. מצא את משוואת האליפסה.

פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ חותכת את האליפסה ברביע הראשון בנקודה M.

נתון: שיעור ה- y של M הוא $\sqrt{15}$.

ב. הוכח שמוקד הפרבולה נמצא בנקודה C.

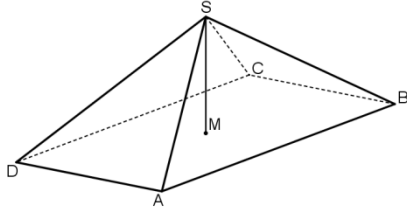
ג. דרך הנקודה E מעבירים ישר המקביל לציר ה- y .

P היא נקודה על הפרבולה שמרחקה מהישר הזה הוא k .

מצא את היחס $\frac{PC}{k}$. הסבר.

2) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ABCD הוא ריבוע.

$$\vec{SM} = \frac{1}{2}\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{SC}$$



א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הוכח: $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

ii. הוכח ש- \vec{SM} מאונך ל- \vec{AC} .

iii. נמק מדוע SM הוא גובה בפירמידה.

נתון: $A(\sqrt{3}, 1, 0)$, $C(-\sqrt{3}, -1, 0)$, הנקודות B ו-D נמצאות במישור $z = 0$

ונפח הפירמידה SABCD הוא 16.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את שיעורי הנקודה M.

ii. מצא את שיעורי הקדקוד S (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הנקודות שמצאת בתת-סעיף ב (ii) ב- S_1 וב- S_2 .

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת המישור AS_1S_2 .

ii. האם הנקודה C נמצאת על המישור AS_1S_2 ? נמק.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את המספרים המרוכבים z המקיימים $z^3 = -1$.

נסמן את פתרונות המשוואה מסעיף א ב- z_1, z_2, z_3 .

נתון כי z_2 הוא ממשי.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה ש- z_1, z_2, z_3 הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.

ii. z_1, z_2, z_3 הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית z_n .

מצא את z_5 , האיבר החמישי בסדרה.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. z_{13}, z_{14}, z_{15} (האיברים ה-13, ה-14 וה-15 בסדרה z_n שמצאת בסעיף ב)

מיוצגים על ידי הנקודה A, B ו-C במישור גאוס, בהתאמה.

חשב את שטח המשולש ABC.

ii. L, K ו-M הן שלוש נקודות במישור גאוס המייצגות שלושה איברים עוקבים

בסדרה z_n . הסבר מדוע המשולש KLM חופף למשולש שאת שטחו מצאת

בתת סעיף ג (i).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{x^2} - 2x}{e^{x^2}}$

א. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ii. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
- iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- iv. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
- v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

היעזר בתשובותיך על סעיף א וענה על סעיף ב.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. הסבר מדוע הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x .
- ii. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומה סוגן? נמק את תשובתך.
- iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
- iv. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה). נמק את תשובתך.
- v. הוסף לסרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$ סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(5) נתונה הפונקציה: $h(x) = \frac{x+3}{x}$

א. מצא את תחום ההגדרה של $h(x)$.

ב. מצא את התחום שבו $h(x) > 0$.

בתחום שבו $h(x) > 0$ נתונה הפונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$.

נתון שגרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך הנקודה $(3, \ln 2)$, וידוע שלפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת.

ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות סופיות:

(1) א. (i) $B(0,4), C(3,0), D(0,-4), E(-3,0)$ א. (ii) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

ב. מוקד הפרבולה $C(3,0)$ ג. $\frac{PC}{k} = 1$

(2) א. (i) הוכחה א. (ii) הוכחה.

א. (iii) שמחברים את קדקוד הפירמידה הישרה עם מרכז המעגל החוסם את

הבסיס מקבלים את גובה הפירמידה. ב. (i) $M(0,0,0)$

ב. (ii) $S(0,0,6)$ או $S(0,0,-6)$

ג. (i) $x - \sqrt{3}y = 0$ ג. (ii) C נמצאת על המישור.

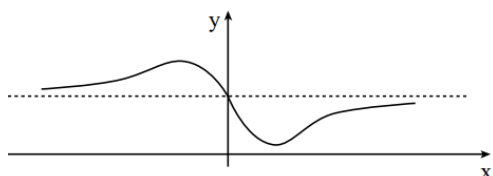
(3) א. $z_1 = \text{cis}60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \text{cis}180^\circ = -1$, $z_3 = \text{cis}300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ב. (i) הוכחה. ב. (ii) $z_5 = \text{cis}180^\circ = -1$ ג. (i) $S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

(4) א. (i) לכל x . א. (ii) $\min\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0.142\right), \max\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1.858\right)$.

א. (iii) עלייה: $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, ירידה: $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

א. (iv) $y = 1$. א. (v) להלן סקיצה:

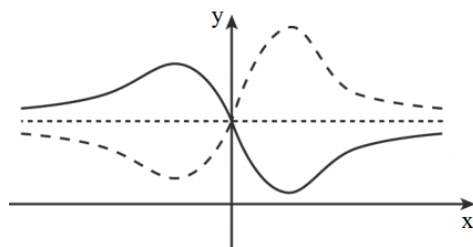


ב. (i) $f(x)$ שונה לכל x , $\frac{1}{f(x)}$ שונה לכל x .

ב. (ii) $\min\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0.538\right), \max\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 7.031\right)$.

ב. (iii) עלייה: $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, ירידה: $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$. ב. (iv) $y = 1$.

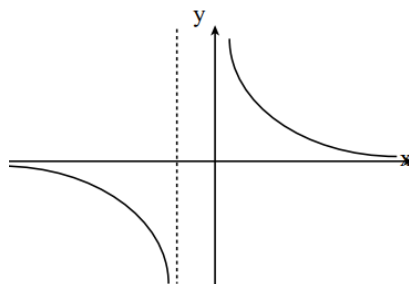
ב. (v) להלן סקיצה:



(5) א. $x \neq 0$. ב. $x < -3, x > 0$. ג. $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x}\right)$.

ד. $y = 0, x = -3, x = 0$. ה. ירידה: $x < -3, x > 0$, עלייה: אף x .

ו. להלן סקיצה:



בגרות קיץ 2017 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1 נתונה הנקודה $A(20,0)$.

B היא נקודה שנמצאת על ציר ה-y ואינה ראשית הצירים.

דרך הנקודה B מעבירים ישר l_1 , המקביל לציר ה-x.

דרך ראשית הצירים O, מעבירים ישר l_2 , שמאונך לישר AB.

הישרים l_1 ו- l_2 נחתכים בנקודה C.

א. הוכח שהמקום הגאומטרי של הנקודות C הנבנות כמתואר נמצא על פרבולה, ומצא את משוואתה.

ב. D היא נקודה כלשהי הנמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת בסעיף א.

הנקודה F היא מוקד הפרבולה. נתון הישר $x=k$, $k < 0$ הוא פרמטר.

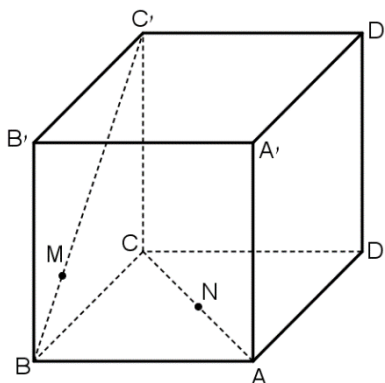
דרך הנקודה D העבירו ישר המקביל לציר ה-x וחותך את הישר $x=k$ בנקודה N.

קיים ערך של k שעבורו כל משולש NDF שנבנה כמתואר הוא שווה שוקיים.

i. מצא את הערך של k. נמק.

ii. נתון: הנקודה D נמצאת ברביע הראשון.

מצא את שיעורי הנקודה D שעבורה המשולש NDF הוא שווה צלעות.



2 נתונה קובייה ABCDA'B'C'D'

נסמן: $\vec{CC'} = \vec{w}$, $\vec{CD} = \vec{v}$, $\vec{CB} = \vec{u}$

נתון: $\vec{BM} = t \cdot \vec{BC'}$, $\vec{AN} = s \cdot \vec{AC}$

א. מצא את היחס $\frac{s}{t}$ שעבורו MN

מקביל למישור AA'B'B ($t \neq 0$).

נתון: $t = \frac{1}{4}$, $s = \frac{1}{2}$

ב. חשב את הזווית שבין MN ובין המישור ABCD.

ג. מהו המצב ההדדי של הישרים AB ו-MN? נמק.

- (3) במעגל שמרכזו בראשית הצירים במישור גאוס חסום משולש שווה צלעות ABC. הקדקוד A מתאים למספר המרוכב: $z_1 = a - \sqrt{3} \cdot a \cdot i$ ($a > 0$ הוא פרמטר ממשי). נתון: הקדקוד B נמצא ברביע הראשון.
- א. הבע באמצעות a את המספרים המרוכבים z_2 ו- z_3 המתאימים לקדקודים B ו-C בהתאמה.
- נתון: $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$.
- ב. מצא את a .
- ג. המספר z_1^{6n+5} מתאים לנקודה P במישור גאוס. n הוא מספר שלם. הנקודה O היא ראשית הצירים. הראה שהנקודה B נמצאת על הקרן OP.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- (4) נתונה הפונקציה $g(x) = 2x^2 + c$. c הוא פרמטר. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת כך: $f(x) = e^{g(x)}$. הגרפים של פונקציות הנגזרת, $f'(x)$ ו- $g'(x)$, נחתכים בנקודה ששיעור ה- x שלה הוא 2.
- א. מצא את c .
- ב. ענה על הסעיפים הבאים:
- i. הוכח ש- $f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.
- ii. מצא את שיעורי כל הנקודות בהן הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $g'(x)$ חותכים זה את זה.
- iii. עבור אילו ערכי x $f'(x) > g'(x)$?
- iv. סרטט סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $g'(x)$ באותה מערכת צירים.
- ג. נתון: $M(2,8)$, $N(-2,-8)$.
- MN הוא אלכסון של מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. הראה שגרף הפונקציה $f'(x)$ מחלק את המלבן לשני חלקים שווים בשטחם.

5 נתונה הפונקציה: $f(x) = x + m \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. הוא פרמטר m .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום הערכים של m .

ii. הבע את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ באמצעות m ,
וקבע את סוגה.

ג. הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ושיעוריה אינם תלויים ב- m .

i. מצא את שיעורי הנקודה P.

ii. מצא את הערך של m שעבורו הנקודה P היא נקודת המינימום
של הפונקציה $f(x)$.

הצב את m שמצאת בתת-סעיף ג (ii) וענה על הסעיפים ד-ה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{f(x) - x}{x}$. חשב את $\int_1^e g(x) dx$.

תשובות סופיות:

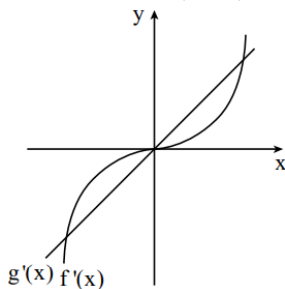
1 א. $y^2 = 20x$ ב. (i) $k = -5$ ב. (ii) $D(15, 10\sqrt{3})$ ג. מצטלבים.

2 א. $\frac{s}{t} = 1$ ב. 24.09° ג. מצטלבים.

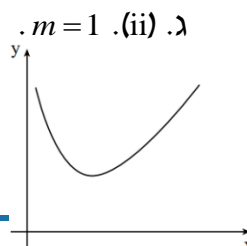
3 א. $z_1 = a - \sqrt{3}ai = 2a \cdot \text{cis}300^\circ$, $z_2 = a + \sqrt{3}ai = 2a \cdot \text{cis}60^\circ$, $z_3 = -2ai = 2a \cdot \text{cis}180^\circ$ ב. $a = 1$ ג. הוכחה.

4 א. $c = -8$ ב. (i) הוכחה ב. (ii) $(0, 0)$, $(2, 8)$, $(-2, -8)$ ג. הוכחה.
ב. (iii) $-2 < x < 0$, $x > 2$ ג. הוכחה.

ב. (iv) להלן סקיצה:



5 א. $x > 0$ ב. (i) $m > 0$ ג. (ii) $\min(m, m(1 - \ln m))$ ג. (i) $P(1, 1)$ ד. להלן סקיצה: ה. $-\frac{1}{2}$



שאלון 572

פרק 34

פתרון בידאו של בחינות 2016

183	מועד חורף
186	קיץ מועד א
190	קיץ מועד ב

בגרות חורף 2016:

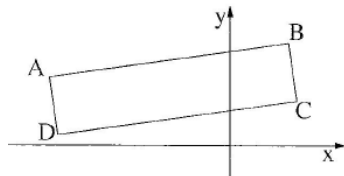
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) מעגל שמרכזו על ציר ה- x עובר דרך הנקודות $(1,4)$ ו- $(-6,3)$



(שאינן קדקודי המלבן שבציור).

הצלע AB של המלבן ABCD מונחת

על ישר העובר דרך הנקודות האלה.

קדקודי המלבן ABCD נמצאים ברביע

הראשון וברביע השני.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x .

ב. המשכי הצלעות BC ו-AD עוברים דרך נקודות החיתוך

של המעגל עם ציר ה- x .

ג. נתון כי המרחק של הצלע DC מראשית הצירים הוא $\sqrt{2}$.

מצא את שטח המלבן ABCD.

2) נתונה פירמידה AOBC.

המקצוע AO מונח על החלק החיובי של ציר ה- x ,

המקצוע CO מונח על החלק החיובי של ציר ה- z ,

והמקצוע AB נמצא במישור $[xy]$, כך ששיעור ה- x

ושיעור ה- y של הקדקוד B חיוביים (ראה ציור).

נתון: $AO=3$, $CO=12$, $BO=5$, $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0$.

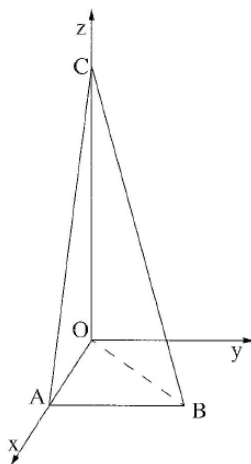
א. מהו המצב ההדדי בין הישר AB ובין ציר ה- y ? נמק.

ב. מצא את הזווית בין המישור CAB ובין המישור $[zy]$.

ג. נקודה D נמצאת במישור CAB ובמישור $[xy]$

כך ש- $CB = CD$.

מצא את הזווית בין הישר CD למישור $[zy]$.



- 3) המספר המרוכב z_1 נמצא במישור גאוס ברביע הראשון על מעגל שרדיוסו 2 ומרכזו ראשית הצירים O. המספר המרוכב z_2 נמצא במישור גאוס ברביע השני על מעגל שרדיוסו 4 ומרכזו ראשית הצירים O. נתון כי הזווית בין הקטע Oz_2 ובין הקטע Oz_1 היא 60° . המספרים z_1 ו- z_2 הם האיבר הראשון והאיבר השני בסדרה הנדסית בהתאמה. z_4 הוא האיבר הרביעי בסדרה זו.
- א. הראה כי z_1 ו- z_4 נמצאים על קו ישר אחד העובר דרך ראשית הצירים.
- ב. נתון גם: $z_1 \cdot z_4 = -32i$. מצא את הארגומנט (הזווית) של z_4 .
- מצא את שטח המשולש $z_1 z_2 z_4$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln(ax-2)}{ax-2}$, a הוא פרמטר שונה מ-0.

ענה על הסעיפים א ו-ב עבור $a > 0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) את האסימפטוטה של הפונקציה המאונכת לציר ה- x .

(3) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה),

וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

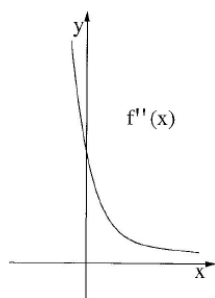
ענה על הסעיפים ג ו-ד עבור $a < 0$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתון כי האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים נפגשות בנקודה $(-2, 0)$.

מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף הפונקציה, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישר $x = \frac{e+2}{a}$ (ערך מספרי).



5 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{e^x}$, a הוא פרמטר גדול מ-4.

בציור שלפניך נתון הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.
הגרף של $f''(x)$ אינו חותך את ציר ה- x .

הפונקציה $f''(x)$ מוגדרת לכל x , ויורדת בכל תחום הגדרתה.

א. (1) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם הצירים (אם יש כאלה). הבע באמצעות a במידת הצורך.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול? נמק.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. האם לפונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$ יש נקודות פיתול? נמק.

ג. השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$,

על ידי הצירים ועל ידי הישר $x=1$, שווה ל $5 - \frac{8}{e}$.

מצא את הערך של a .

תשובות סופיות:

1 א. $(-7,0)$, $(3,0)$ ב. 23.8

2 א. מקבילים ב. 14.04° ג. 13.34°

3 א. הוכחה ב. 225° ג. 31.17

4 א. i. $x > \frac{2}{a}$ א. ii. $x = \frac{2}{a}$ א. iii. $(\frac{3}{a}, 0)$

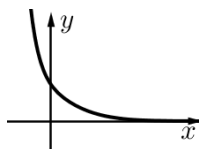
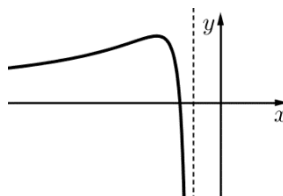
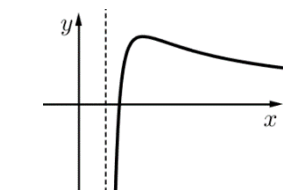
א. iv. $\max\left(\frac{e+2}{a}, \frac{1}{e}\right)$ ב. סקיצה בצד.

ג. סקיצה בצד. ד. 0.5

5 א. i. $(0, a)$ א. ii. עלייה: אין, ירידה: כל x

א. iii. לא א. iv. סקיצה בצד.

ב. לא ג. 5



בגרות קיץ 2016 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נתון טרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$). המשכי השוקיים BC ו- AD נפגשים בראשית הצירים.

השוק BC מונחת על החלק החיובי של ציר ה- x . הקדקודים A ו- D נמצאים ברביע השלישי. הבסיס AB מונח על הישר $3x - 4y - 15 = 0$. גובה הטרפז הוא 6. היעזר בסרטוט סקיצה של הטרפז במערכת צירים וענה על סעיפים א' ו-ב'.

א. מצא את משוואת הבסיס CD .

ב. נתון כי הקדקודים A ו- C נמצאים על מעגל שמרכזו בקדקוד B .

i. מצא את רדיוס המעגל.

ii. מצא את השיעורים של הקדקוד D .

2) בפירמידה $ABCDE$ שבסיסה ריבוע נתון: $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DE}$,

הווקטור \overrightarrow{AE} יוצר זוויות שוות עם הווקטורים \overrightarrow{AD} ו- \overrightarrow{AB} ,

אורך צלע הבסיס הוא 5. נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AE} = \underline{w}$ (ראה ציור).

א. מצא את הערך של המכפלה

הסקלרית $w \cdot v$, ושל המכפלה הסקלרית $\underline{w} \cdot \underline{u}$.

הנקודה H נמצאת על המקצוע EC כך ש- $\overrightarrow{EH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EC}$.

נתון: $|\overrightarrow{AH}| = 2\sqrt{17}$.

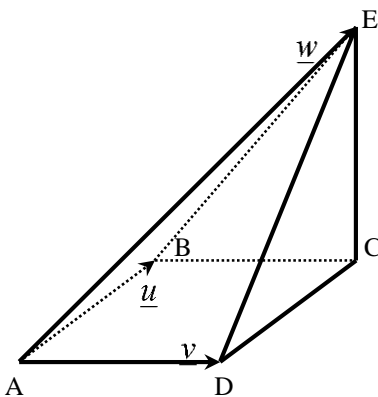
ב. מצא את אורך המקצוע AE .

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי המשולש EDC הוא ישר-זווית,

ומצא את שטחו.

ii. מצא את נפח הפירמידה המשולשת $AEDC$.



- 3 נתון: $z^2 - 2R \operatorname{cis} \theta \cdot z - 3R^2 \operatorname{cis}(2\theta) = 0$, הוא מספר מרוכב, $0 < \theta < 90^\circ$, R הוא מספר ממשי חיובי.
 פתרונות המשוואה הנתונה הם z_1 ו- z_2 . נמצא ברביע הראשון.
 א. הבע באמצעות θ ו- R את z_1 ואת z_2 .
 ב. נתון כי משוואת הישר העובר דרך z_1 ו- z_2 היא $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. מצא את θ .
 המספר המרוכב z_3 מקיים: $z_3 = \bar{z}_1$.
 ג. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. סרטט במישור גאוס את המספרים z_1, z_2, z_3 .
 ii. נתון כי שטח המשולש $z_1 O z_3$ הוא $225\sqrt{3}$ (0 - ראשית הצירים) מצא את הערך המוחלט של z_2 .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- 4 נתונה הפונקציה $f(x) = -3x^2 \cdot e^{x^3}$.
 א. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן. בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.
 ii. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 iii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 iv. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = |f(x)|$.
 הוסף סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ לסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשב את השטח הסגור בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ובין הישר $x = -1$.
 ג. הפונקציות $h(a)$ ו- $t(a)$ מקיימות: $t(a) = \int_{-1}^a g(x) dx$, $h(a) = \int_{-1}^a f(x) dx$, $a \geq -1$.
 מצא את השיעורים של נקודת הפגישה בין הגרפים של הפונקציות $h(a)$ ו- $t(a)$.

5 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \ln x \right)$

א. ענה על הסעיפים:

i. מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

ii. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

iii. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה) וקבע את סוגן.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה) וקבע את סוגן.

ii. מצא את השיעורים של נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של הפונקציה $f(x)$,

וסקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ii. ברביע הראשון הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ נפגשים בנקודה אחת. באיזה תחום ערכים נמצא שיעור ה- x של נקודה זו?

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x) = f(x)$.

נתון: $g(1) = a$, $g(\sqrt{e}) = b$, $g(e) = c$.

הבע באמצעות a , b ו- c את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=1$ ו- $x=e$.

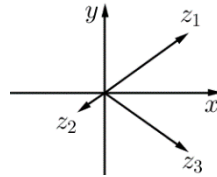
תשובות סופיות:

DC: $-3x + 4y + 45 = 0$ א. (1) ב. (i) $R = 10$ ב. (ii) $D(-9, -18)$

א. (2) $\underline{w} \cdot \underline{v} = 25, \underline{w} \cdot \underline{u} = 25$ ב. $AE = 10$ ג. (i) 17.68 יח"ר
ג. (ii) 29.46 יח"ר.

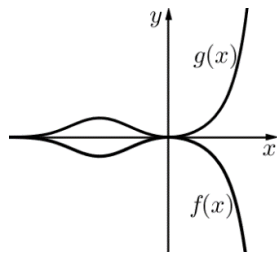
א. (3) $z_1 = Rcis\theta, z_2 = Rcis(180^\circ + \theta) = -Rcis\theta$ ב. 30°

ג. (i) להלן סקיצה: ג. (ii) 10



א. (4) $\max(0, 0), \min(-0.873, -1.175)$ א. (ii) $(0, 0)$

א. (iv) להלן סקיצה:



ג. $(-1, 0)$

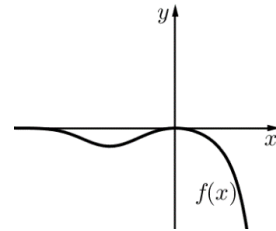
א. (ii) $(\sqrt{e}, 0)$

ב. (ii) $(\frac{1}{e}, \frac{3}{4e^2})$

ד. $S = 2b - a - c$

ג. (ii) $\frac{1}{e} < x < 1$

א. (iii) להלן סקיצה:

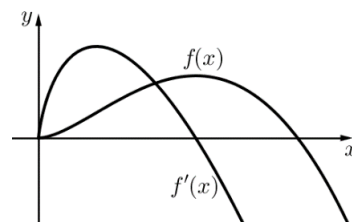


ב. 1.264

א. (i) $x > 0$ (5)

א. (iii) $\max(1, \frac{1}{4})$ ב. (i) $\max(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$

ג. (i) להלן סקיצה:



בגרות קיץ 2016 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) נתונה פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$.

שני ישרים המשיקים לפרבולה בנקודות K ו-L נפגשים בנקודה A, שהיא נקודת החיתוך של מדריך הפרבולה עם ציר ה-x.
א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי שיעור ה-x של K שווה לשיעור ה-x של L.

ii. הראה כי המשיקים מאונכים זה לזה.

נתון מעגל, שמרכזו M נמצא על ציר ה-x.

המשיקים לפרבולה הנתונה הנקודות K ו-L משיקים גם למעגל זה בנקודות אלה. הצב $p = 2$, וענה על הסעיפים ב, ג.

ב. מצא את משוואת המעגל שמרכזו M.

ג. מצא את משוואת המעגל החסום במרובע AKML.

(2) נתון מעגל הנמצא במישור π ומרכזו בראשית הצירים $O(0,0,0)$.

הישר $\ell_1: \underline{x} = (2,2,0) + t(1,2,1)$ נמצא במישור π ומשיק למעגל זה בנקודה B.

א. מצא את השיעורים של הנקודה B.

ב. הישר $\ell_2: \underline{x} = (0,1,1) + s(2,-1,1)$ חותך את מישור π בנקודה A.

i. הראה כי הנקודה A נמצאת על המעגל הנתון.

ii. מצא את שטח המשולש AOB.

3) ענה על הסעיפים הבאים :

$$א. \text{ נתון המספר המרוכב: } z = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}\right)^3}{\left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}\right)^2} . z$$

- i. מצא את $|z|$ ואת הארגומנט (הזווית) של z .
 - ii. מצא את הערכים של n (n מספר טבעי) שעבורם z^n הוא מספר מדומה טהור.
- ב. נתון המקום הגאומטרי $|(z + \bar{z}) - m(z - \bar{z})| = 40$, m הוא מספר ממשי גדול מ-1.
- i. זהה את המקום הגאומטרי, נמק.
 - ii. הנקודה שמיוצגת על ידי המספר $12 + 8i$ נמצאת על המקום הגאומטרי. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של המקום הגאומטרי עם הצירים. הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות $\left(33\frac{1}{3}\right)$ (נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^x - 3$ המוגדרת לכל x .

- א. ענה על הסעיפים הבאים:
 - i. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - ii. מצא את האסימפטוטה האופקית לגרף הפונקציה.
 - iii. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
 - iv. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. מצא את השטח מימין לציר ה- y , המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה- y ועל ידי האסימפטוטה האופקית. תוכל להשאיר \ln בתשובתך.
- ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + 4$. השטח שמצאת בסעיף ב שווה לשטח מימין לציר ה- y , המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- y ועל ידי הישר $y = k$. מהו הערך של k ? נמק.



5) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$:

נתון כי הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ מוגדרות לכל x .

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת

שמשוואתה $y = 1.5e$ כמתואר בציור.

נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$

הן: $A(4, 3e)$, $B(1, -1.5e)$.

הנקודות $E(5, 2e)$, $D(2, 0)$, $C(-2, 0)$ נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה \cap בתחום $x < -2$ ובתחום $2 < x < 5$,

וקעורה כלפי מעלה \cup בתחום $x > 5$ ובתחום $-2 < x < 2$.

א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

וקבע את סוגן. נמק.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \ln[f(x)]$.

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ii. מצא את האסימפטוטות של $g(x)$ המאונכות לציר ה- x .

iii. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה),

וקבע את סוגן.

iv. לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת שמשוואתה $y = \ln(1.5e)$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

1) א. (i). הוכחה. א. (ii). הוכחה. ב. $(x-3)^2 + y^2 = 8$

ג. $(x-1)^2 + y^2 = 2$

2) א. $(1, 0, -1)$ ב. (i). הוכחה. ב. (ii). $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) א. (i). $|z|=1$ א. (ii). $2k+1$, $k > 0$, n אי זוגי

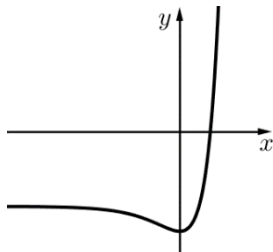
ב. (i). אליפסה קנונית.

ב. (ii). ציר x : $(-20, 0)$, $(20, 0)$, ציר y : $(0, -10)$, $(0, 10)$

4) א. (i). ציר x : $(1, 0)$, ציר y : $(0, -4)$

א. (ii). $y = -3$ (עבור $x \rightarrow \infty$)

א. (iii). $\min(0, -4)$ א. (iv). להלן סקיצה:

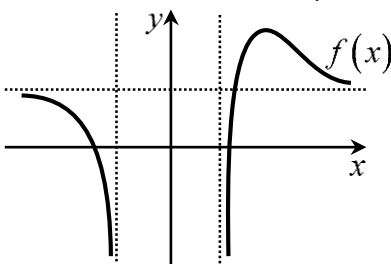


ב. $\frac{1}{2 \ln 3} = 0.455$ ג. 1

5) א. $\min: x = 5$, $\min: x = -2$, $\max: x = 2$

ב. (i). $x > 2$, $x < -2$ ב. (ii). $x = 2$, $x = -2$

ב. (iii). $\max(4, \ln(3e))$ ב. (iv). להלן סקיצה:



שאלון 572

פרק 35

פתרון בידאו של בחינות 2015

194	מועד חורף
197	קיץ מועד א
200	קיץ מועד ב

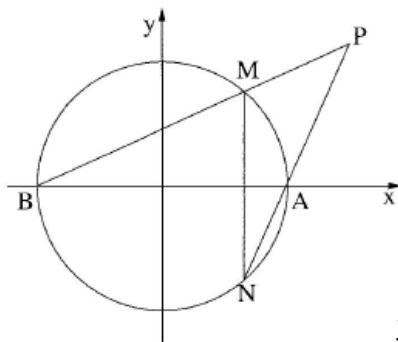
בגרות חורף 2015:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



(1) נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 25$.

המעגל חותך את ציר ה- x בנקודות A ו-B.

MN הוא מיתר במעגל, המאונך לציר ה- x .

א. הישרים MB ו-NA נפגשים

בנקודה $P(x, y)$ כמתואר בציור

(MN אינו מונח על ציר ה- y).

(1) נסמן: $M(x_0, y_0)$. הבע באמצעות x_0 ו- y_0

את משוואת הישר MB, ואת משוואת הישר NA.

(2) הראה כי המקום הגאומטרי של הנקודות $P(x, y)$, הנוצרות באופן

שתואר, מקיים את המשוואה: $y^2 = x^2 - 25$.

ב. אם המיתר MN מונח על ציר ה- y , מצא את רדיוס המעגל החסום

במרובע MBNA.

הערה: הפתרון של סעיף ב אינו תלוי בפתרון של סעיף א.

(2) נתון משולש שקדקודיו הם: $A(-10, 3, 11)$, $B(-2, -5, -5)$, $C(1, 1, 1)$.

גובה המשולש לצלע AB הוא CD.

א. מצא את השיעורים של הנקודה D.

ב. נתונה הנקודה $E(-1, 5, -2)$.

מהי הזווית בין הישר CE:

(1) לישר AB ?

(2) לישר BC ?

(3) למישור ABC ?

ג. חשב את הזווית בין הישר ED לבין המישור ABC. נמק.

3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה: $|z|i + 2z = \sqrt{3}$, z הוא מספר מרוכב

ב. המספר המרוכב z_1 הוא הפתרון של המשוואה שבסעיף א.

z_1 הוא קדקוד הראש של משולש שווה-שוקיים, החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים. z_2 ו- z_3 הם שני הקדקודים האחרים של המשולש.

נתון: $z_2 = 1$. המספר המרוכב w מקיים: $w = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$.

חשב את הסכום: $w + w^2 + w^3 + w^4 + \dots + w^{4n}$.

n הוא מספר טבעי.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2^{x-m} + 2^{m-x}}$ ונתונה הפונקציה $g(x)$

המקיימת: $g(x) = f'(x) \cdot f(x)$, $g(2) = -\frac{3}{4} \ln 2$, m הוא פרמטר.

ידוע כי הפונקציה $g(x)$ עולה לכל x .

מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הצירים (מצא ערך מספרי).

(5) נתונה פונקציית הנגזרת: $f'(x) = \frac{\ln(-x)+2}{x}$

א. מצא את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ וקבע את סוגה.

ג. מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה. לפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ יש אותו תחום הגדרה.

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$.
 היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא:
 (1) את תחום ההגדרה של $g(x)$.

(2) את השיעורים של נקודת הקיצון של $g(x)$, וקבע את סוגה.

תשובות סופיות:

(1) א. i. $MB: y = \frac{y_0}{x_0+5}x + \frac{5y_0}{x_0+5}$, $NA: y = \frac{y}{5-x_0}x - \frac{5y_0}{5-x_0}$

א. ii. הוכחה $\sqrt{12.5} = 3.535$ ב.

(2) א. $D(-4.5, -2.5, 0)$ ב. i. 90° ב. ii. 90° ב. iii. 90°

ג. 39.23°

(3) א. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ב. 0

(4) 3.0625

(5) א. $x < 0$ ב. $\min\left(-\frac{1}{e}, -e\right)$ ג. $x_{\min} = -\frac{1}{e^2}$

ד. i. $x \neq -\frac{1}{e^2}, x < 0$ ii. $\min\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

בגרות קיץ 2015 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) נתונה פרבולה המקיימת $y^2 = 2px$, $p > 0$.

נקודה D נמצאת על הפרבולה ברביע הראשון במרחק 8 מציר ה-x.

א. הבע באמצעות p את המרחק של הנקודה D מן המדריך של הפרבולה.

מעבירים שני מעגלים:

מעגל ראשון שמרכזו בנקודה D ורדיוסו $p+4$,

מעגל שני שמרכזו במוקד F של הפרבולה.

המעגל השני משיק מבחוץ למעגל הראשון ומשיק גם לציר ה-y.

ב. היעזר בסעיף א, ומצא את משוואת הפרבולה.

ג. נקודה K נמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת.

דרך הנקודה K העבירו משיק לפרבולה ואנך למשיק.

המשיק והאנך חותכים את ציר ה-x בנקודות T ו-S בהתאמה.

המרחק בין הנקודה T לנקודה S הוא 16.

מצא את השיעורים של הנקודה K. (מצא את שתי האפשרויות).

בתשובתך תוכל להשאיר שורש במידת הצורך.

(2) נתון ישר l שמשוואתו $\underline{x} = (1, 2, -4) + t(1, -2, 2)$.

מישור π מאונך לישר l , וחותך את ציר ה-x בנקודה A.

נקודה A נמצאת על הקרן החיובית של ציר ה-x במרחק 8 מראשית הצירים O.

נקודות B ו-C הן נקודות החיתוך של המישור π עם ציר ה-y ועם ציר ה-z בהתאמה.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את האורך של כל אחד מששת המקצועות של הפירמידה OABC.

ii. האם הפירמידה OABC היא ישרה? נמק.

ב. נקודה D נמצאת על הקטע AC כך ש-OD חוצה-זווית AOC.

מהו המצב ההדדי בין הישר OD לישר BC? נמק.

- 3) נתונה המשוואה $z^n = 8$, z הוא מספר מרוכב, $n > 2$.
- א. הוכח כי n הפתרונות של המשוואה הם קדקודים של מצולע משוכלל. המספרים z_0, z_1, z_2, z_3 הם ארבעה קדקודים עוקבים מבין n הקדקודים של המצולע שבסעיף א (לפי סדר המספרים הרשום).
 z_0 הוא מספר ממשי וחיובי. נמצא במישור גאוס ברביע הראשון.
 נתון: $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\sqrt{8}i$
 ב. מצא את הערך של n .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

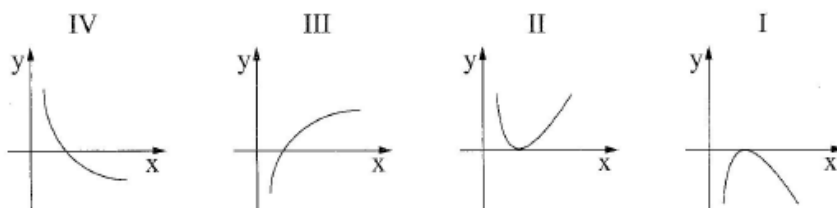
ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- 4) נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$ המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר גדול מ-0.
- א. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.
 ב. ענה על הסעיפים הבאים:
- i. הבע באמצעות a (במידת הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
 ii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=1$ ו- $x=-1$, אם נתון כי $a=2$.
 ד. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = [f(x)]^2$. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

5 נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot x \cdot \ln x - x^2$, הוא פרמטר גדול מ-0.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. הראה כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד, והבע את שיעור ה- x שלה באמצעות a .
- ג. איזה מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניך מתאים לגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$? נמק.



ד. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. אם שיפוע המשיק בנקודת הפיתול של $f(x)$ שווה ל-0, מצא את הערך של a .
- ii. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור הערך של a שמצאת.
- iii. האם עבור הערך של a שמצאת, יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון? נמק.
- ה. מצא עבור אילו ערכים של a שיפוע המשיק בנקודת הפיתול של $f(x)$ גדול מ-0.

תשובות סופיות:

1 א. $\frac{32}{p} + \frac{p}{2}$ ב. $y^2 = 8x$ ג. $(6, -\sqrt{48}), (6, \sqrt{48})$

2 א. (i) $BC = \sqrt{32}, AB = AC = \sqrt{80}, BO = CO = 4, AO = 8$ א. (ii) הפרמידה אינה ישרה. ב. מצטלבים.

3 א. הוכחה. ב. $n = 8$

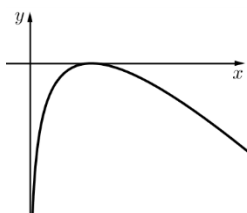
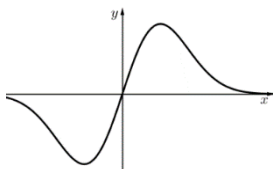
4 א. הוכחה. ב. (i) $\max\left(2, \frac{2a}{\sqrt{e}}\right), \min\left(-2, \frac{-2a}{\sqrt{e}}\right)$ ב. (ii) להלן סקיצה:

ג. 1.88 ד. $x_{\max} = -2, x_{\min} = 0, x_{\max} = 2$

5 א. $x > 0$ ב. $x = \frac{a}{2}$ ג. גרף IV

ד. (i) $a = 2$ ד. להלן סקיצה:

ה. $a > 2$ ד. (iii) לא.



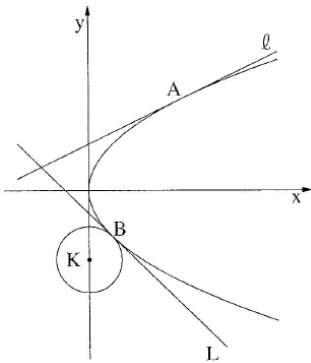
בגרות קיץ 2015 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



(1) נתונה הפרבולה $y^2 = 4x$.

הישרים l ו- L משיקים לפרבולה בנקודות A ו-B בהתאמה. הנקודה A נמצאת ברביע הראשון והנקודה B נמצאת ברביע הרביעי, כמתואר בציור. המשיקים נפגשים בנקודה $(-2, 1)$.

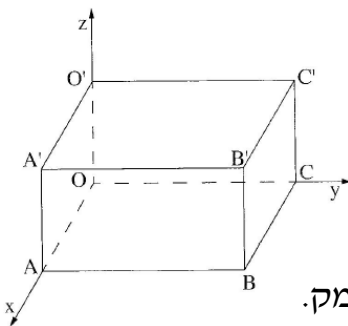
א. מצא את השיעורים של הנקודה A, ואת השיעורים של הנקודה B.

ב. הפרבולה משיקה בנקודה B למעגל שמרכזו K ונמצא על ציר ה- y (ראה ציור). מעגל שמרכזו M משיק לציר ה- y בראשית הצירים ומשיק מבחוץ למעגל שמרכזו K. המרכז M נמצא משמאל לציר ה- y .

i. מצא את השיעורים של המרכז K.

ii. מצא את משוואת המעגל שמרכזו M.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.



(2) המקצועות OA, OC ו- OO' של התיבה $OABCO'A'B'C'$ מונחים על הצירים כמתואר בציור.

נתון כי המישור $2x + y + 2z - 2m = 0$

עובר דרך הקדקודים A, C, O' . m הוא פרמטר גדול מ-0.

א. האם הישר BC' מקביל למישור הנתון או חותך אותו? נמק.

ב. הישר $O'M$ נמצא במישור הנתון, ואינו מתלכד עם הישר $O'A$.

i. האם הישרים BC' ו- $O'M$ מקבילים? נמק.

ii. הבע באמצעות m את המרחק בין הישרים BC' ו- $O'M$.

דרך הקדקודים C' ו-B העבירו אנכים למישור ACO' .

האנכים חותכים את המישור בנקודות E ו-F. אורך הקטע EF הוא $2\sqrt{2}$.

ג. מצא את הערך של m .

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. סרטט במערכת צירים את המקום הגאומטרי המקיים: $|z^2 - 3i| = |z^2 - i|$.

z הוא מספר מרוכב.

ב. שני מספרים מרוכבים שונים, z_1 ו- z_2 , נמצאים על המקום הגאומטרי שסרטטת.

המרחק של z_1 מראשית הצירים שווה למרחק של z_2 מהראשית.

נתון: $z_1 = 1 + iy_1$ (הוא מספר ממשי). מצא את הארגומנט של z_2 .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = \ln \frac{a+x}{a-x}$. a הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

i. את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ii. את שתי האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .

iii. את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

iv. את השיעורים של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. הישר $y = x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה.

לפונקציה $f(x)$ ולפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש אותו תחום הגדרה.

סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ציין בגרף את הערכים המספריים של האסימפטוטות ושל נקודות החיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).

5 נתונה הפונקציה $f(x) = -\frac{4e^x}{e^x - 2} + e^x + 4$

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ii. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

iv. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$, על ידי

הישר $x = -1$, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y .

ג. נתונה פונקציה המקיימת $F(x) = \int f(x) dx$ בתחום $x > \ln 2$.

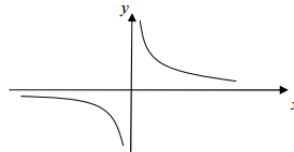
מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $F(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

תשובות סופיות:

1 א. $A(4,4)$, $B(1,-2)$ ב. (i) $K(0,-3)$ ב. (ii) $(x+2.47)^2 + y^2 = 6.125$

2 א. מקביל. ב. (i) מצטלבים. ב. (ii) $\frac{2m}{3}$ ג. 2

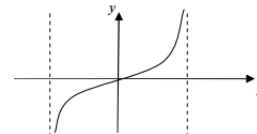
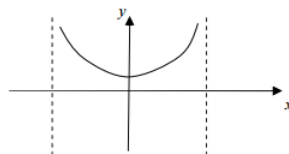
3 א. להלן סקיצה: ב. 225°



4 א. (i) $-a < x < a$ א. (ii) $x = a$, $x = -a$

א. (iii) עלייה: $-a < x < a$, ירידה: אין. א. (iv) $(0,0)$

ב. להלן סקיצה: ג. להלן סקיצה:

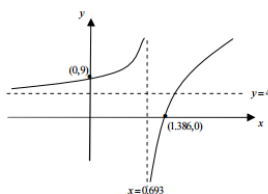


5 א. (i) $x \neq 0.693$ א. (ii) $y = 4$ (עבור $x \rightarrow -\infty$), $x = 0.693$

א. (iii) עלייה: $x > 0.693$, $x < 0.693$, ירידה: אין.

א. (iv) $(0,9)$, $(1.386,0)$ א. (v) להלן סקיצה:

ב. 6.59 ג. $x_{\min} = 1.386$



שאלון 572

פרק 36

פתרון בידאו של בחינות 2014

203	מועד חורף
206	קיץ מועד א
209	קיץ מועד ב
212	קיץ מועד ג

בגרות חורף 2014:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.
 (1) הנקודות $C(x_1, y_1)$ ו- $D(x_2, y_2)$ נמצאות ברביע הראשון על פי הפרבולה $y^2 = 4x$.

א. (1) הראה כי שיפוע המיתר CD הוא $m = \frac{4}{y_2 + y_1}$.

(2) הנקודה $(x, 3)$ היא אמצע המיתר CD. מצא את m .

ב. נתון כי מרחק כל נקודה על הפרבולה הנתונה מהישר $x = a$ שווה

למרחקה מהנקודה $(1, 0)$. מרחק הנקודה C מהישר $x = 2a$ הוא 6.

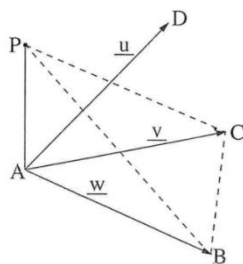
(1) מהו הערך של a ? נמק.

(2) מצא את משוואת הישר CD.

(2) נתונים הווקטורים: $\overline{AD} = \underline{u}$, $\overline{AC} = \underline{v}$, $\overline{AB} = \underline{w}$ (ראה ציור).

נתון: $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle DAC = 60^\circ$, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 2$.

א. האם ייתכן ששלושת הווקטורים \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} נמצאים במישור אחד? נמק.



נתון גם כי הווקטור $\overline{AP} = a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w}$

מאונך למישור ABC, ו- a ו- b הם פרמטרים (ראה ציור).

ב. מצא את האורך של \overline{AP} (ערך מספרי).

ג. היעזר בחישובים טריגונומטריים ומצא את הזווית

בין המישור PCB ובין המישור ABC.

(3) המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z מקיים $|z - 12 - 5i| = 7$.

המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים $w + x + iy$ מקיים: $\arg(w) = 45^\circ$.

($\arg(w)$ היא הזווית בהצגה הקוטבית של w). המקום הגאומטרי של המספרים

המרוכבים w חותך את המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z בנקודות B ו- C.

א. סרטט באותה מערכת צירים סקיצות של שני המקומות הגיאומטריים.

ב. הנקודות B ו- C מייצגות במישור גאוס של המספרים

המרוכבים z_1 ו- z_2 בהתאימה. מצא את $\arg(z_1 \cdot z_2)$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4 נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^{\sqrt{x}}$.

א. מצא:

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $y = 2 \cdot f'(x)$,

והראה כי נקודה זו נמצאת על גרף הפונקציה $y = f(x^2)$, $x > 0$.

ג. הפונקציות $y = 2 \cdot f'(x)$ ו- $y = f(x^2)$ נפגשות בנקודה אחת בלבד (הנקודה שמצאת בסעיף ב).

ד. השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי פונקציות אלה ועל ידי הישר

$x = a$, $a > 1$, שווה ל- $8e - 2 \cdot f(a)$. מצא את הערך של a .

תוכל להשאיר \ln בתשובתך.

5 ענה על הסעיפים הבאים:

א. קבלן מציע דירות למכירה בתשלומים חודשיים. בתאריך 1/1/2012 התשלום החודשי עבור הדירה היה 5900 ₪, ובכל חודש התשלום גדל ב-0.2%. המשכורת החודשית של רן בתאריך 1/1/2012 הייתה 8000 ₪, ובכל חודש היא גדלה ב-1.2%. רן יכול להתחיל לשלם עבור הדירה רק אחרי התאריך שבו התשלום החודשי עבור הדירה יהיה 60% ממשכורתו החודשית. כעבור כמה חודשים שלמים מהתאריך 1/1/2012 יוכל רן להתחיל לשלם עבור הדירה?

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = x^n \cdot \ln(x^n)$. הפרמטר n הוא מספר טבעי וזוגי.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) קבע אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או או-זוגית. נמק.

(3) הראה כי יש רק אחד המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ ומקביל

לציר ה- x , ומצא את משוואתו.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

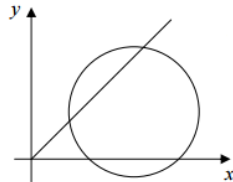
תשובות סופיות:

(1) א. i. הוכחה א. ii. $\frac{2}{3}$ ב. i. -1 ב. ii. $CD: y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

(2) א. לא ייתכן ששלושת הווקטורים נמצאים במישור אחד.

ב. 4.899 ג. 70.53°

(3) א. סקיצה בצד. ב. 90°



(4) א. i. $x \geq 0$ א. ii. עלייה: $x > 1$, ירידה: $0 < x < 1$

ב. $(1, 2e)$ והוכחה ג. 2.0986

(5) א. 21 חודשים ב. i. $x \neq 0$ ב. ii. זוגית

ב. iii. $y = -\frac{1}{e}$

בגרות קיץ 2014 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

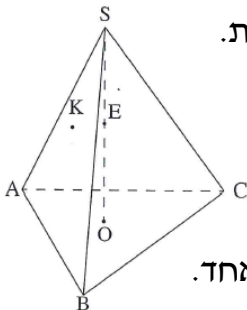
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את המשוואה של המקום הגאומטרי של הנקודות, שהמרחק של כל אחת מהן מהישר: $-5x+12y+13=0$ הוא 3.

ב. מהי משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים בשתי נקודות למקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א?

ג. האם ציר ה- y יכול להשיק בנקודה $(0,0)$ לאחד המעגלים שבסעיף ב? נמק.



2) נתונה פירמידה ישרה $SABC$, שבסיסה ABC הוא משולש שווה-צלעות.

גובה הפירמידה הוא SO . נקודה E היא אמצע SO (ראה ציור).

נקודה F מקיימת: $\vec{SF} = t \cdot \vec{SC}$. נסמן: $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{OS} = \vec{w}$.

נקודה K מקיימת: $\vec{SK} = \frac{1}{9}\vec{u} - \frac{2}{9}\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{w}$.

מצא את הערך של t , אם ידוע שהנקודות F, K, E נמצאות על ישר אחד.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. סרטט במישור גאוס סקיצה של המקום הגאומטרי של המספרים

המרוכבים z המקיימים: $|z+3-\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$. נמק.

ב. המקום הגאומטרי שבסעיף א נפגש עם ציר ה- x בנקודה z_1 .

נתונה הנקודה $M(-3, \sqrt{3})$. נסמן ב- O את ראשית הצירים.

המספר המרוכב z_2 נמצא על המקום הגאומטרי שבסעיף א

כך שהמרובע $z_1 M z_2 O$ הוא דלתון. מצא את הזווית החדה של הדלתון.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את הארגומנט של z_2 .

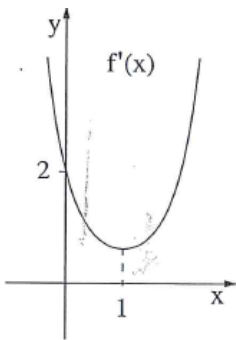
- ii. מבין המספרים המרוכבים z שבסעיף א, מהו המספר שיש לו הארגומנט הגדול ביותר? מהו ארגומנט זה?

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- 4) בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת לכל x .



- א. על פי הגרף של $f'(x)$ מצא תחומי קעירות כלפי מעלה \cup וכלפי מטה \cap של הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x . נמק. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בחלקו השלילי.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. נתון גם: $f(x) = (x-a)e^{0.5x^2-x}$, הוא פרמטר. היעזר בנתונים בגרף של $f'(x)$ וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים.

- 5) נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4(x^2 + 4x + c)$, הוא פרמטר c .

נתון כי לפונקציה יש אסימפטוטה שמשוואתה $x = -2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. מצא את ערך הפרמטר c .
- ii. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- iv. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. נתונה הפונקציה $g(x) = -|f(x)|$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

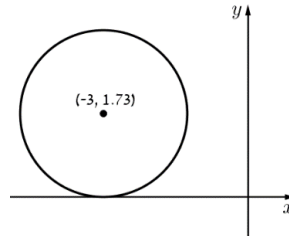
- ii. עבור אילו ערכים של k יש למשוואה $g(x) = k$ שני פתרונות בלבד?

תשובות סופיות:

1) א. $-5x+12y+52=0$, $-5x+12y-26=0$. ב. $-5x+12y+13=0$. ג. לא.

2) $t = \frac{1}{3}$

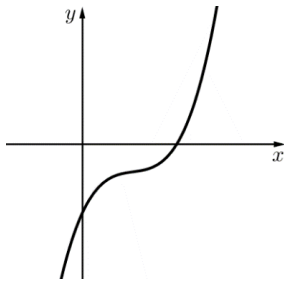
3) א. להלן סקיצה: ב. 60° . ג. 120° .(i)



ג. (ii) $z = -3$, הארגומנט -180° .

4) א. קעירות כלפי מעלה- $x > 1$, כלפי מטה- $x < 1$. ב. להלן סקיצה:

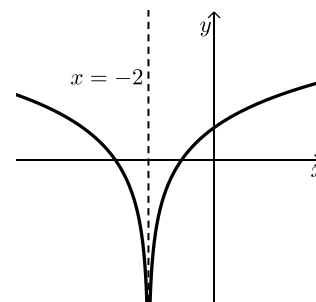
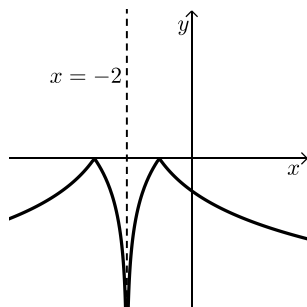
ג. $1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$



5) א. (i) $c = 4$. א. (ii) $x \neq -2$

א. (iii) עלייה: $x > -2$, ירידה: $x < -2$. א. (iv) $(-3,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$

א. (v) להלן סקיצה: ב. (i) להלן סקיצה: ב. (ii) $k = 0$



בגרות קיץ 2014 מועד ב':

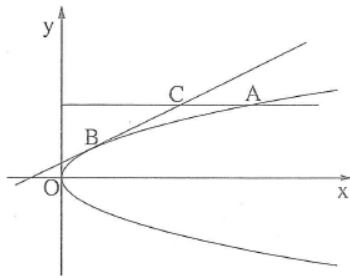
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) נקודה A נמצאת ברביע הראשון על הפרבולה שמשוואתה $y^2 = 3x$.



ישר המשיק לפרבולה בנקודה B מקביל למיתר OA (O – ראשית הצירים).

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה-x.

הישר חותך את המשיק בנקודה C.

נסמן: x_C – שיעור ה-x של הנקודה C.

x_A – שיעור ה-x של הנקודה A.

היעזר בעובדה שהנקודה C נמצאת על פרבולה שמשוואתה $y^2 = 4x$,

וענה על הסעיפים א, ב ו-ג.

א. הבע באמצעות x_C את x_A .

ב. הבע באמצעות x_C את השיפוע של הישר OA.

ג. נתון גם כי שטח המשולש BCA הוא 0.5625.

מצא את השיעורים של הנקודה C.

(2) במשולש ABC, גובה המשולש לצלע AB הוא CD. נסמן: $\vec{CA} = \underline{u}$, $\vec{CB} = \underline{v}$, $\vec{AD} = t \cdot \vec{AB}$.

נתון: $|\vec{CB}| = 2$, $|\vec{CA}| = 1$, $\cos \angle ACB = \frac{3}{4}$.

א. חשב את הערך של t בעזרת חשבון וקטורים.

ב. סרטט את המשולש ABC ואת הגובה CD כך שהסרטוט

יתאים לערך של t שחישבת בסעיף א.

ג. נקודה E נמצאת על הצלע BC (בין B ל-C).

נתון גם: $\frac{CE}{BE} = \frac{3}{5}$. נסמן: $\vec{CD} = \underline{h}$.

הבע את \vec{AE} באמצעות \underline{u} ו- \underline{h} בלבד.

3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה: $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$, z הוא מספר מרוכב.

ב. האם שלושה מן הפתרונות שמצאת בסעיף א נמצאים על המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים w השונים מ-0 ומקיימים: $107^\circ < \arg(w) < 253^\circ$? נמק.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-2(x+3)}{\sqrt{e^{ax}}}$, a הוא פרמטר.

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ii. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

היעזר בנתונים הרשומים בגרף, ומצא :

i. ערך מספרי עבור שיעור ה- x וערך מספרי עבור

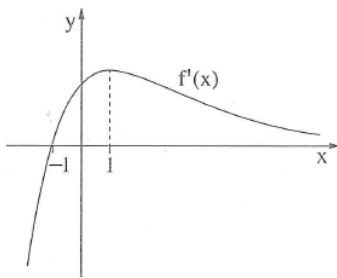
שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$,
וקבע את סוגה.

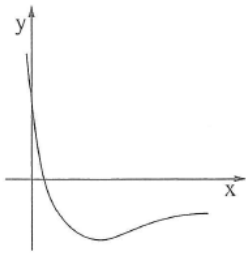
ii. ערך מספרי עבור שיעור ה- x וערך מספרי עבור

שיעור ה- y של נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

iii. את תחומי הקעירות כלפי מעלה \cup וכלפי מטה \cap של הפונקציה $f(x)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.





5 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3-9\ln(3x+1)}{3x+1}$ (ראה ציור).

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את נקודת החיתוך של גרף

הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ii. השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה, של ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים $x = a-1$ ו- $x = \frac{e-1}{3}$ הוא 3.5. נתון כי $a > \frac{e-1}{3}$.

היעזר בנגזרת של $y = \ln^2(3x+1)$, ומצא את a .

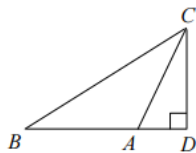
iii. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד בנקודה שבה $x = \frac{e^{4/3}-1}{3}$.

מצא עבור אילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ שלילית וגם פונקציית

הנגזרת $f'(x)$ שלילית.

תשובות סופיות:

א. $x_A = \frac{4}{3}x_C$ (1) ב. $1.5 \cdot \frac{\sqrt{x_C}}{x_C}$ ג. $C(2.25, 3)$



א. $t = -0.25$ (2) ב. להלן סקיצה:

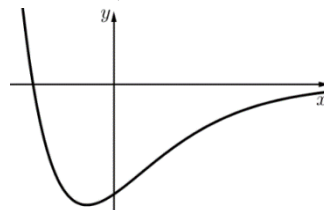
ג. $\vec{AE} = 0.875\vec{u} - 1.5\vec{h}$

א. $-2, -0.2-0.6i, 0, -0.2+0.6i$ ב. כן. (3)

א. כל x . א. (ii) $(-3, 0), (0, -6)$ ב. (i) $\min(-1, -6.59)$ (4)

ב. (ii) $(1, -4.85)$ ב. (iii) קעורה מעלה: $x < 1$, קעורה מטה: $x > 1$.

ג. להלן סקיצה:



א. $x > -\frac{1}{3}$ (5) ב. (i) $(0.132, 0)$

ב. $a = 2.13$ (ii) ג. $0.132 < x < 0.93$

בגרות קיץ 2014 מועד ג':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 16} = 1$, a הוא פרמטר חיובי שונה מ-4.

א. מצא עבור אילו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה.

אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 16} = 1$ חותכת את הקרן השלילית של ציר ה- y בנקודה A.

F_1 הוא המוקד הימני של האליפסה, ו- F_2 הוא המוקד השמאלי.

הישר AF_1 יוצר עם הקרן החיובית של ציר ה- x זווית של 26.566° .

ב. מצא את משוואת האליפסה.

ג. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של נקודות הנמצאות במרחקים שווים

מהמוקד F_1 ומן הישר שעובר דרך המוקד F_2 ומקביל לציר ה- y . נמק.

(2) בפירמידה משולשת ABCD, AF הוא גובה הפירמידה לפאה BDC,

ו-CH הוא גובה הפירמידה לפאה ABD.

הישרים AF ו-CH נפגשים בנקודה P (ראה ציור).

א. ענה על הסעיפים הבאים:

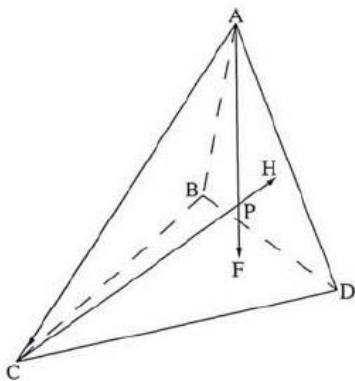
i. הסבר מדוע $\vec{AP} \cdot \vec{BD} = 0$.

ii. הוכח כי $\vec{AC} \perp \vec{BD}$.

ב. הוכח כי $\vec{AH} \perp \vec{BD}$.

ג. סמן $\vec{BA} = \underline{w}$, $\vec{BC} = \underline{v}$, $\vec{BD} = \underline{u}$.

הוכח כי אם $AB = BC$ אז $\angle CBD = \angle ABD$.



3 נתון המספר המרוכב $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, ונתון מספר מרוכב w שהערך המוחלט שלו הוא r ($r > 0$). z ו- w נמצאים ברביע הראשון.

$$z = \frac{w}{\bar{w}} \text{ מקיים:}$$

א. הבע באמצעות α ו- r את המספר w , את הצמוד שלו \bar{w} , ואת ההופכי שלו $\frac{1}{w}$.

ב. סרטט במערכת צירים את מעגל היחידה, והוסף לסרטוט דוגמה של מספר w ושל ההופכי שלו $\frac{1}{w}$, עבור $r > 1$.

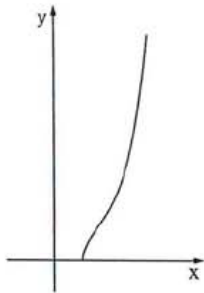
ג. נתונה סדרה הנדסית a_n שבה $a_1 = \frac{1}{w}$, $a_2 = z$.

הבע באמצעות α ו- r את a_5 .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות (33 $\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{2x-1} \cdot e^{x^2-x}$ (ראה ציור).

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה עולה לכל x בתחום ההגדרה שלה.

ג. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

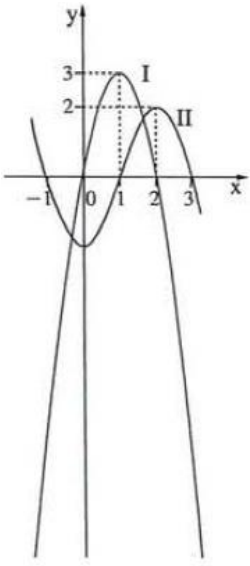
הישר נפגש עם גרף הפונקציה בשתי נקודות בלבד.

i. מצא את משוואת המשיק.

ii. העתק למחברתך את גרף הפונקציה, והוסף לגרף סרטוט של המשיק.

iii. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה ועל ידי המשיק מסתובב סביב ציר ה- x .

מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



5) בציור שלפניך מוצגים שני גרפים I ו-II של פונקציות המוגדרות

בתחום: $-1.1 \leq x \leq 3.1$. אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$

והאחר הוא של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א. קבע איזה מבין הגרפים I ו-II הוא של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(f(x))$.

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ii. מה הן האסימפטוטות של $g(x)$ המאונכות לציר ה- x ?

iii. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון הפנימיות

של $g(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

iv. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם נתון כי הישר $y=1$

חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשלוש נקודות.

תשובות סופיות:

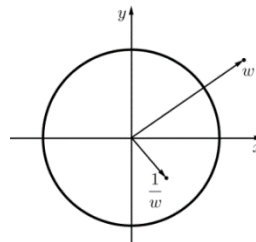
1) א. $a > 4$ ב. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ ג. $y^2 = 16x$

2) א. (i). הסבר. א. (ii). הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

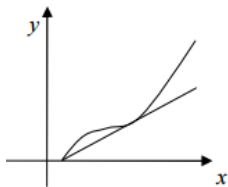
3) א. $w = 0.5\alpha$, $\bar{w} = r \operatorname{cis}(-0.5\alpha)$, $\frac{1}{w} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(-0.5\alpha)$

ג. $a_5 = r^3 \operatorname{cis}(5.5\alpha)$

ב. להלן סקיצה:



4) א. $x \geq 0.5$ ב. הוכחה. ג. (i). $y = 2x - 1$ ג. (ii). להלן סקיצה:

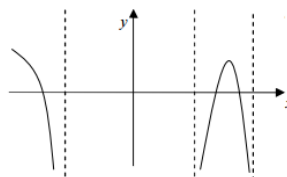


5) א. גרף II ב. (i). $-1.1 \leq x \leq -1$, $1 < x < 3$

ב. (ii). $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ ב. (iii). $\max(2, \ln 2)$

ב. (iv). עלייה: $1 < x < 2$, ירידה: $-1.1 < x < -1$, $2 < x < 3$

ב. (v). להלן סקיצה:



שאלון 572

פרק 37

פתרון בידאו של בחינות 2013

215	מועד חורף
220	קיץ מועד א
223	קיץ מועד ב

בגרות חורף 2013:

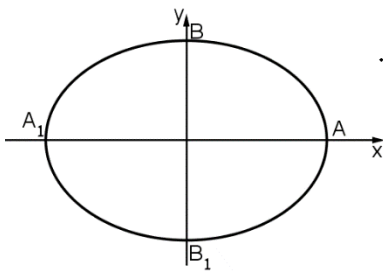
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) נתונה האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ראה ציור).



F_1 ו- F_2 הם מוקדי האליפסה וקדקודיה הם A, A_1, B, B_1 .

נתון כי המוקד F_1 הוא אמצע הקטע AF_2 .

דרך מרכז האליפסה ושניים מקדקודיה העבירו מעגל.

נתון כי קוטר המעגל הוא $\sqrt{17}$.

א. מצא את משוואת האליפסה.

ב. העבירו עוד שלושה מעגלים אחרים דרך מרכז האליפסה ושניים מקדקודיה.

המרכזים של ארבעת המעגלים הם קדקודים של מרובע.

המרובע, הנמצא במישור $[xy]$, הוא בסיס של פירמידה שקדקודה

הוא $S(0,3,4)$. מצא את נפח הפירמידה.

(2) שני מעגלים שמרכזיהם נמצאים ברביע השני,

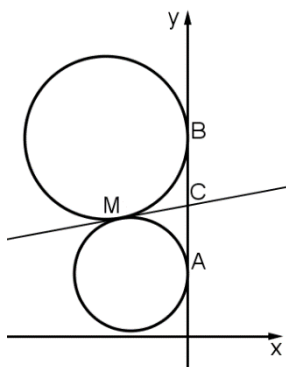
משיקים לציר ה- y בנקודות $A(0,1)$ ו- $B(0,3)$.

המעגלים משיקים זה לזה בנקודה M (ראה ציור).

א. המשיק המשותף לשני המעגלים חותך את

ציר ה- y בנקודה C .

הראה כי $MC = \frac{1}{2} AB$.



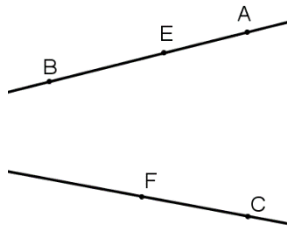
ב. (1) מצא את משוואת המקום הגאומטרי של

נקודות ההשקה M הנוצרות באופן שתואר.

(2) מהי הצורה של המקום הגאומטרי של הנקודות M ,

ובאיזה רביע/רביעים הוא נמצא?

ג. המדריך של הפרבולה $y^2 = 2px$ משיק למקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף ב. מצא את השיעורים של הנקודות על הפרבולה שמרחקן מהמוקד שלה הוא 10.



(3) נתונים שני ישרים מצטלבים.

קטע AB נמצא על אחד הישרים,

וקטע CF נמצא על הישר האחר.

נקודה E היא אמצע הקטע AB (ראה ציור).

נסמן: $\overrightarrow{EA} = \underline{w}$, $\overrightarrow{FE} = \underline{v}$, $\overrightarrow{CF} = \underline{u}$.

נתון: $|\underline{u}| = \sqrt{7}$, $|\underline{v}| = \sqrt{13}$, $|\underline{w}| = \sqrt{5}$, $\underline{v} \perp \underline{u}$, $\underline{v} \perp \underline{w}$.

קוסינוס הזווית בין הווקטורים \underline{w} ו- \underline{u} הוא $\frac{\sqrt{35}}{10}$.

א. מצא את גודל הזווית ABC.

נתון גם: $A(0,2,3)$, $B(2,6,3)$.

מישור π עובר דרך הנקודה B ומאונך לישר AB.

ב. מצא את משוואת המישור π .

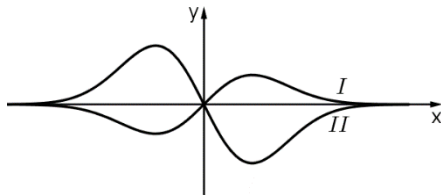
ג. היעזר בתשובתך לסעיף א ומצא את גודל הזווית

שבין הישר BC למישור π .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4 נתונות הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת $g'(x)$

מקיימות: $g'(x) = -2f(x)$.

בציור שלפניך מוצגים הגרפים I ו-II של הפונקציות $f(x)$ ו- $g'(x)$.

א. קבע איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$ ואיזה גרף הוא של פונקציית

הנגזרת $g'(x)$: נמק.

ב. נתון גם: $g'(x) = -2xe^{-x^2}$, $g(0.5) = \frac{1}{e^{0.25}}$.

מצא עבור אילו ערכים של x הגרף של הפונקציה $f(x)$ נמצא מעל הגרף

של הפונקציה $g(x)$.

ג. הישר l_1 עובר דרך נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ ודרך נקודת

המקסימום של פונקציית הנגזרת $g'(x)$.

הישר l_2 עובר דרך המקסימום של הפונקציה $f(x)$ ודרך נקודת

המינימום של פונקציית הנגזרת $g'(x)$.

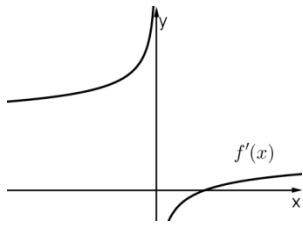
מצא את משוואת הישר l_1 ואת משוואת הישר l_2 .

ד. השטח, המוגבל על ידי הישר l_1 , על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$ ועל

ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $g'(x)$, הוא S_1 .

השטח, המוגבל על ידי הישר l_2 , על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$ ועל

ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $g'(x)$, הוא S_2 . מהו היחס $\frac{S_1}{S_2}$? נמק.



5) בציור שלפניך מוצג הגרף

$$f'(x) = \frac{2\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$$

של פונקציית הנגזרת
הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. היעזר בגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ומצא:

(1) את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) את תחומי הקעירות כלפי מעלה \cup

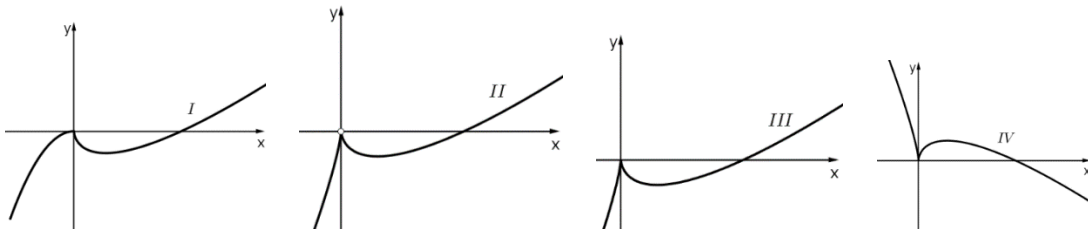
וכלפי מטה \cap של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ב. נתון כי הישר $y = -1$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$

בנקודת המינימום שלה. מצא את נקודות החיתוך

של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ג. לפניך ארבעה גרפים I-IV. איזה גרף עשוי לתאר את הפונקציה $f(x)$? נמק.



תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ ב. $8\sqrt{2}$
- (2) א. הוכחה ב.i. $x^2 + (y-2)^2 = 1$
- ב. ii. קשת המעגל $x^2 + (y-2)^2 = 1$ ברביע השני ($x < 0$) ג. $(9, -6), (9, 6)$
- (3) א. 80.9° ב. $x + 2y - 14 = 0$ ג. 9.1°
- (4) א. $f(x) - I, g'(x) - II$ ב. $x > 1$
- ג. $l_1: x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, l_2: x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ד. 1
- (5) א.i. עלייה: $x > 1$ או $x < 0$ ירידה: $0 < x < 1$
- א. ii. כלפי מעלה: $x > 0$ או $x < 0$ כלפי מטה: אין.
- ג. גרף III.
- ב. $(0, 0), \left(3\frac{3}{8}, 0\right)$

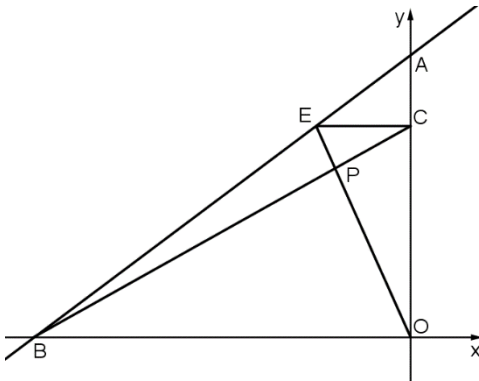
בגרות קיץ 2013 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



1 נתונות הנקודות: $A(0,6)$, $B(-8,0)$.

דרך הנקודה E שעל הקטע AB מעבירים ישר המקביל לציר ה-x (הנקודה E שונה מ-A ומ-B). הישר חותך את ציר ה-y בנקודה C. הישר BC חותך את הישר OE בנקודה P. O – ראשית הצירים.

א. הראה כי המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות P הנוצרות באופן שתואר, נמצא על קו ישר.

ב. הנקודה P_0 נמצאת על המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א, כך שהנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABO. מצא את שטח המשולש AP_0O .

2 במשולש ABC התיכון לצלע BC הוא AT. הנקודה L נמצאת על הצלע AC.

AT ו-BL נפגשים בנקודה M (ראה ציור).

נסמן: $\vec{BM} = \beta \vec{BL}$, $\vec{AM} = \alpha \vec{AT}$, $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$.

א. נתון: $\frac{AL}{LC} = \frac{3}{4}$.

מצא את הערך של α ואת הערך של β .

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את המשוואה של המקום הגאומטרי שעליו מונחות הנקודות B,

שעבורן במשולש ABC מתקיים: $A(1,0)$, $\underline{v} = (7,7)$, $AT = \sqrt{50}$.

עפ"י הנתונים שבתת-סעיף ב(i) והנתון שבסעיף א, ענה על תת-הסעיפים (ii) ו-(iii).

ii. מצא את השיעורים של הנקודה L.

iii. אם הישר MB מקביל לציר ה-y, מצא את השיעורים של הקדקוד B.

הערה: הפתרון של סעיף ב אינו תלוי בפתרון של סעיף א.

3 ענה על הסעיפים הבאים :

א. נתונה פירמידה SABCD שבסיסה ABCD הוא מקבילית (ראה ציור).

$$\vec{SA} = \underline{w}, \vec{SB} = \underline{u}, \vec{SD} = \underline{v}$$

i. הבע באמצעות \underline{w} , \underline{u} ו- \underline{v} את הווקטור \vec{SC} .

ii. נתון גם : $SB = SD$, $SC = SA$, $|\underline{w}| = 2a$, $|\underline{u}| = a$,

$$\angle DSB = 90^\circ, \angle ASD = \alpha, \angle ASB = \beta$$

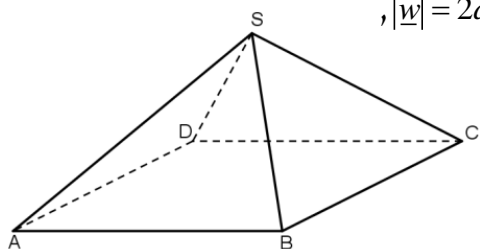
$$\text{הראה כי : } \cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$$

ב. z הוא מספר מרוכב.

$$i. \text{ פתור את המשוואה } |z|i + 2z = \sqrt{3}$$

ii. הראה כי כאשר n הוא מספר טבעי אז z^{6n} יכול לקבל רק שני ערכים.

הערה : אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.



פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות (33 $\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

$$4 \quad \text{נתונה פונקציית הנגזרת : } f'(x) = \frac{2 \ln x (2 - \ln x)}{x(1 - \ln x)^2}$$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מצא את תחום ההגדרה של $f'(x)$.

ii. אחת משתי האסימפטוטות האנכיות של $f'(x)$ היא $x = 0$.

מצא את האסימפטוטה האנכית השנייה.

iii. מצא את נקודות החיתוך של הגרף של $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

iv. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ היא שלילית, ואת התחומים שבהם

היא חיובית.

ב. ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש גם אסימפטוטה אופקית, $y = 0$.

סרטט סקיצה של הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. הישר $y = -4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x > e$.

i. מצא את השיעורים של נקודת ההשקה. נמק.

$$ii. \text{ הסבר מדוע } f(e^3) < -4$$

iii. השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$

ועל ידי ציר ה- x בתחום $e^2 \leq x \leq e^3$, שווה ל-0.5. מצא את הערך של $f(e^3)$.

- 5 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a^{x+1}}{a^{2x}-1}$, $0 < a < 1$.
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. ידוע שפונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציה זוגית. העבירו ישר l המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=1$, והעבירו ישר אחר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה אחרת, T . שני המשיקים מקבילים זה לזה. (T היא הנקודה היחידה על גרף הפונקציה $f(x)$ שבה המשיק מקביל ל- l). הבע באמצעות a (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה T . נמק.

תשובות סופיות:

- 1 א. $-2y+3x+12=0$, $y=1.5x+6$. ב. 8 יח"ר.
- 2 א. $\alpha=0.6$, $\beta=0.7$. ב. (i). $(x+6)^2+(y+7)^2$. ב. (ii). $(4,3)$. ב. (iii). $(4,-17)$.
- 3 א. (i). $\overline{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$. א. (ii). הוכחה. ב. (i).
- $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
- ב. (ii). הוכחה 1 או -1.
- 4 א. (i). $0 < x < e$ או $x > e$. א. (ii). $x=e$. א. (iii). $(1,0)$, $(e^2,0)$. א. (iv). תחום חיובי: $e < x < e^2$ או $1 < x < e$, תחום שלילי: $0 < x < 1$ או $x > e^2$. ב. להלן סקיצה:
-
- ג. (i). $(e^2, -4)$. ג. (iii). -4.5.
- 5 א. $x \neq 0$. ב. הוכחה. ג. תחומי עלייה: $x > 0$ או $x < 0$, תחומי ירידה: אין. ד. להלן סקיצה:
-
- ה. $\left(-1, \frac{a^2}{1-a^2}\right)$.

בגרות קיץ 2013 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) נתונות הנקודות: $A(-a,0)$ ו- $B(a,0)$, $a > 0$.

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה A גדול פי 2 ממרחקן מהנקודה B זהה למקום הגאומטרי של מספרים מרוכבים z המקיימים $|z+b|=4$.
 a ו- b הם פרמטרים ממשיים.

א. מצא את הערך של a ואת הערך של b .

ב. מלבן TNEF, שצלעותיו מקבילות לצירים, חסום במקום הגאומטרי המתואר בפתח. שיעורי ה- y של הקדקודים E ו-F קטנים מ-0. המספר המרוכב $z = 2 + iy$ מייצג את הקדקוד T של המלבן.

הנקודה C נמצאת על ציר ה- x כך ש- $\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{CF} = -16$. מצא את השיעורים של הנקודה C.

(2) הישר l עובר דרך הנקודות $A(0,0,1)$ ו- $B(1,1,0)$.

הישר מאונך למישור π_1 וחותך את המישור בנקודה D.

המישור π_1 עובר דרך ראשית הצירים O.

א. מצא את שטח המשולש OAD.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. המישור π_2 מכיל את ציר ה- x ומקביל לישר l .

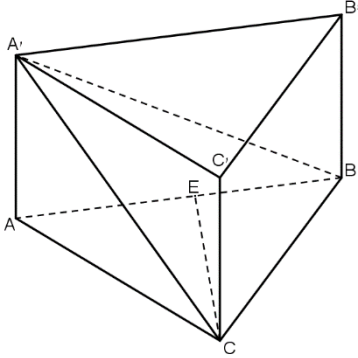
מצא את הזווית בין הישר l ובין ישר החיתוך שבין

המישור π_1 למישור π_2 .

ii. מצא את המרחק של הישר l מישר החיתוך שבין

המישור π_1 למישור π_2 .

3 נתונה מנסרה ישרה 'ABC A'B'C' שבסיסה משולש שווה-צלעות. הנקודה E נמצאת על המקצוע AB כך ש- $AE = kAB$, $(0 < k < 1)$.



א. נתון כי הזווית בין המישור A'EC למישור ABC היא הזווית A'EA. מצא את הערך של k. נתון: $\angle AEA' = 45^\circ$, $AC = 2$.

הזווית בין המישור A'EC למישור ABC היא $\angle AEA'$.
 ב. חשב את הזווית בין המישור ABC למישור A'BC. נקודה F נמצאת על המישור A'BC (לאו דווקא על BC) כך ש- $\vec{AF} = t\vec{AC} + m\vec{AB}$, ומתקיים: $\vec{AF} = t\vec{AC} + m\vec{AB}$.
 ג. סמן: $\vec{AA'} = \vec{w}$, $\vec{AC} = \vec{u}$, $\vec{AB} = \vec{v}$ והוכח כי: $t = m$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4 ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{-ax}$, $g(x) = e^{ax}$, $a > 0$.

i. סמן במערכת צירים את השטח הכלוא בין הגרפים של

הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ והישר $x = \frac{1}{a}$ ואת השטח הכלוא

בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ והישר $x = -\frac{1}{a}$.

ii. השטחים שסימנת בתת סעיף א (i) מסתובבים סביב ציר ה- x .

הבע כפונקציה של a את הנפח הכולל של גוף הסיבוב שנוצר, $V(a)$.

iii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $V(a)$.

ב. בתאריך 1/1/2005 הופקד בבנק א' סכום כסף מסוים, ובאותו תאריך הופקד גם בבנק ב' אותו סכום כסף. בכל אחד מהבנקים סכום הכסף שהופקד גדל כל שנה באחוז קבוע. כעבור 7 שנים היו בבנק א' 12298 ₪ ובבנק ב' היו 13162 ₪. כעבור כמה שנים מהתאריך 1/1/2005 יהיה בבנק ב' סכום כסף הגדול ב-25% מסכום הכסף שיהיה בבנק א'? הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

5 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx}{\ln x}$, k הוא פרמטר השונה מ-0.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. ענה על הסעיפים הבאים:
- i. מצא עבור אילו ערכים של k לפונקציה $f(x)$ יש מקסימום.
- נתון כי בתחום $x > 1$ הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים $y \leq -2$ ורק אותם.
- ii. מצא את הערך של k .
- iii. נתון גם כי הישר $x = 1$ הוא האסימפטוטה היחידה של הפונקציה $f(x)$.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בכל תחום הגדרתה.
- ג. מבין המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x > 1$, מצא את נקודת ההשקה של המשיק ששיפועו מינימלי.

תשובות סופיות:

- 1 א. $a = 3, b = -5$ ב. $C(5, 0)$
- 2 א. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ב. 90° ב. (ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 3 א. $k = 0.5$ ב. 30° ג. הוכחה.
- 4 א. (i) סקיצה. א. (ii) $\frac{\pi(e^2 + e^{-2} - 2)}{a}$
- א. (iii) סקיצה. ב. 23 שנים.
- 5 א. $x > 1$ או $0 < x < 1$ ב. (i) $k < 0$ ב. (ii) $k = -\frac{2}{e}$
- ב. (iii) סקיצה. ג. $(e^2, -e)$