שאלון 571 לכיתות יא



תוכן העניינים:

פרק 1 - מבוא לאלגברה 1
פרק 2 - משוואות אלגבריות 1
פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים 1
פרק 4 - חקירת משוואות ממעלה ראשונה ושנייה 1
פרק 5 - סדרות 1
פרק 6 - אינדוקציה מתמטית 1
פרק 7 - גיאומטריה במערכת הצירים 1
פרק 8 - מושגים יסודיים בפונקציות 1
פרק 9 - תזכורת מחטיבת הביניים - הפרבולה 1
פרק 10 - פונקציית החזקה עם מעריך טבעי 1
פרק 11 - פונקציה זוגית ואי-זוגית 1
פרק 12 - פעולות על פונקציות 1
פרק 13 - מבוא לפונקצית הפולינום 1
פרק 14 - נגזרת של פונקציה 1
פרק 15 - המשיק לגרף הפונקציה 1
פרק 16 - חקירת פונקצית פולינום 1
פרק 17 - נושאים נוספים עם פונקצית פולינום 1
פרק 18 - שאלות קצרות 1
פרק 19 - מבוא לפונקצית השורש 1
פרק 20 - חקירת פונקצית שורש 1
פרק 21 - פונקצית המנה 1
פרק 22 - חקירת פונקציות טריגונומטריות 1
פרק 23 - בעיות קיצון 1
פרק 24 - האינטגרל הכללי 1
פרק 25 - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים 1
פרק 26 - הסתברות קלאסית 1
פרק 27 - מבוא לגאומטריה של המישור 1

פרק 28 - משולשים 1
פרק 29 - מרובעים 1
פרק 30 - שטחים והיקפים 1
פרק 31 - המעגל 1
פרק 32 - פרופורציה ודמיון 1
פרק 33 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית 1
פרק 34 - זהויות טריגונומטריות 1
פרק 35 - משוואות טריגונומטריות 1
פרק 36 - טריגונומטריה במישור 1
פרק 37 - פתרון בוידאו של בחינות שנת 2026 1
פרק 38 - פתרון בוידאו של בחינות שנת 2025 23
פרק 39 - פתרון בוידאו של בחינות שנת 2024 47
פרק 40 - פתרון בוידאו של בחינות שנת 2023 71
פרק 41 - פתרון בוידאו של בחינות שנת 2022 99
פרק 42 - פתרון בוידאו של בחינות שנת 2021 127
פרק 43 - פתרון בוידאו של בחינות שנת 2020 148

שאלון 571 לכיתות יא

פרק 37

פתרון בוידאו של בחינות שנת 2026

מועד חורף 1
קיץ מועד א 9
קיץ מועד ב 16

בגרות חורף 2026:

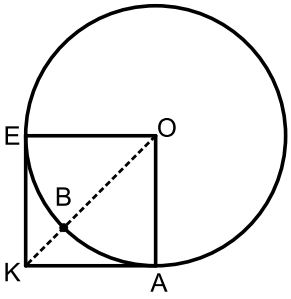
יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.
דרך הנקודות A ו-E שעל המעגל העבירו שני משיקים המאונכים זה לזה.
המשיקים נחתכים בנקודה K.
הקטע KO חותך את המעגל בנקודה B.



(1) מצאו פי כמה גדול שטח המשולש AOB משטח המשולש AKB.
נתון כי שטח המשולש AOB הוא 25.
(2) מצאו את אורך הגובה לצלע AK במשולש AKB.

ב. בתחרות שחמט, שני שחקנים - יאיר ונדב - מתחרים זה נגד זה.
כל משחק יכול להסתיים באחת מ-3 התוצאות האלה: ניצחון של יאיר, ניצחון של נדב או תיקו.
בכל משחק ההסתברות שיאיר ינצח היא קבועה וגדולה פי 2 מן ההסתברות שנדב ינצח.
נסמן ב- p את ההסתברות שנדב ינצח במשחק אחד.
יאיר ונדב משחקים שני משחקים.
(1) הביעו באמצעות p את ההסתברות שאחד מן השחקנים ישיג שני ניצחונות.
ידוע שאם שום שחקן לא השיג שני ניצחונות, ההסתברות שכל אחד מן המשחקים יסתיים בתיקו היא $\frac{1}{55}$.
(2) קבעו איזו מן האפשרויות I-III שלפניכם מתאימה לערך של p. נמקו את קביעתכם.

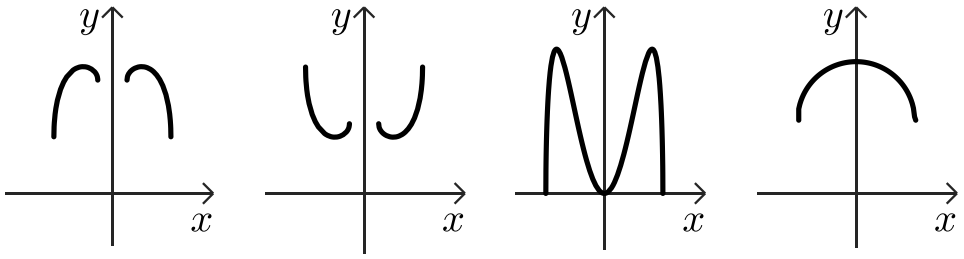
I. $\frac{1}{8}$ II. $\frac{9}{25}$ III. $\frac{3}{10}$

ג. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{64-x^2}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) אחד מן הגרפים I-IV מתאר את הפונקציה $f(x)$.

קבעו איזה מהם ונמקו את קביעתכם.



I II III IV

ד. נתונה סדרה אין-סופית שאיבריה מקיימים: $a_n=\frac{\cos(\pi\cdot 2^n)}{3\cdot 2^n}$ לכל n טבעי.

(1) מצאו את שלושת האיברים הראשונים בסדרה a_n.

(2) הוכיחו כי הסדרה a_n היא הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

(3) מצאו את סכום הסדרה a_n.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית יורדת שסכומה מתכנס.

המנה של הסדרה היא q.

נסמן ב- T את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי- זוגיים בסדרה,

ונסמן ב- R את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה.

נתון: $\frac{T^2}{R^2}=25$.

א. מצאו את הערך של q.

נתונה סדרה b_n שאיבריה מקיימים $b_n=\frac{1+q}{a_n\cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

נתון: $b_1=1$.

ב. מצאו את הערך של a_1.

ג. הביעו באמצעות n את b_1.

ד. הוכיחו באינדוקצייה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$b_1+b_2+\ldots+b_n=\frac{25^n-1}{24}.$$

3) בשכבה י"א של תיכון עירוני גדול חלק מן התלמידים הם מדריכים בתנועת נוער והשאר אינם מדריכים.

בשכבה זו לחלק מן התלמידים יש רישיון נהיגה ולשאר אין רישיון נהיגה.

חצי מן התלמידים שיש להם רישיון נהיגה הם מדריכים בתנועת נוער.

אחוז התלמידים המדריכים מבין התלמידים שיש להם רישיון שווה לאחוז התלמידים שאין להם רישיון מבין התלמידים המדריכים.

בוחרים באקראי תלמיד מבין תלמידי השכב.

ההסתברות שהתלמיד שנבחר הוא מדריך או שיש לו רישיון היא 0.36.

א. מצאו כמה אחוזים מן התלמידים בשכבה זו הם מדריכים.

ב. בוחרים באקראי תלמיד מבין התלמידים שאין להם רישיון.

מהי ההסתברות שתלמיד זה הוא מדריך?

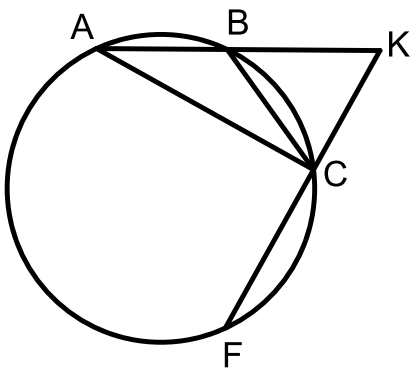
בוחרים באקראי 5 תלמידים מבין התלמידים שאין להם רישיון.

ג. (1) מהי ההסתברות שנבחר יותר ממדריך אחד?

(2) ידוע שנבחר יותר ממדריך אחד. מהי ההסתברות כי מספר המדריכים שנבחרו הוא זוגי?

פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) בסרטוט שלפניכם משולש קהה זווית ABC החסום במעגל.



הנקודה K הצלע המשך על נמצאת AB כך ש- $AB = BK$.

המשך הקטע KC חותך את המעגל בנקודה נוספת, בנקודה F.

נתון: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$.

א. הוכיחו כי AF הוא קוטר במעגל.

המיתרים BF ו-AC נחתכים בנקודה D.

ב. הוכיחו כי המשולש ADK הוא שווה שוקיים.

ג. (1) הוכיחו כי המרובע BDCK הוא בר חסימה במעגל.

(2) הוכיחו כי $\sphericalangle DKC = \sphericalangle FAC$.

ד. הוכיחו כי $AC \cdot AD = KC \cdot AF$.

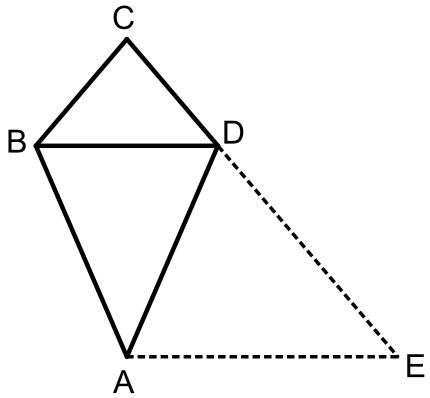
5) בסרטוט שלפניכם דלתון ABCD $(AB = AD \ , \ CB = CD)$.

נתון: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDB = 2\alpha \ , \ 0° < \alpha < 45°$.

נסמן: $AB = k$.

א. הביעו באמצעות k ו- α את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD גדול פי $\frac{4}{3}$ מרדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB.



ב. מצאו את גודל הזווית BAD.

הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABD.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל ל-BD וחותך את המשך הצלע CD בנקודה E.

נתון כי שטח המשולש AOE הוא 54.

ג. מצאו את הערך של k.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{5x^2-kx}}{x^3}$, k הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות k את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x)=-f(x)$.

שיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה $h(x)$ הוא 2.4.

ב. מצאו את הערך של k.

הציבו $k=12$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג-ו.

ג. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\left(f(x)\right)^2$ שתחום הגדרתה זהה לתחום של הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ-3.

ה. האם ערך הביטוי $\int_a^{a+1} g(x)dx$ שווה, גדול או קטן בהשוואה לערך הביטוי $\int_a^{a+1} f(x)dx$?

נמקו את תשובתכם.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישירים: $x=3$ ו- $x=6$.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=(\sin x)^2+\cos x-1$, המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)+b}$, b הוא פרמטר.

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש בדיוק שתי אסימפטוטות אנכיות.

ד. כתבו שני ערכים אפשריים של b, שאחד מהם חיובי והאחר שלילי.

הציבו בפונקציה $g(x)$ את הערך השלילי של b שמצאתם, וענו על הסעיפים ה-ו.

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=kx^3-3x^2+0.5k$, המוגדרת לכל x.

k הוא פרמטר שונה מ-0.

הנקודה A היא נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A.

נתון כי הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

ב. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k.

דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה- x החותך אותו בנקודה B,
ואנך לציר ה- y החותך אותו בנקודה C.
נתון ריבוע I שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AB,
וריבוע II שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AC.

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו סכום שטחי הריבועים I ו-II הוא מינימלי
(תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).

תשובות סופיות:

1) א. (1) פי 2.41 א. (2) 2.462.

ב. (1) $5p^2$ ב. (2) אפשרות III $\frac{3}{10}$.

ג. (1) $-8 \le x \le -2 \,,\, 2 \le x \le 8$ ג. (2) גרף IV.

ד. (1) $a_3 = \frac{1}{24} \,,\, a_2 = \frac{1}{12} \,,\, a_1 = \frac{1}{6}$ ד. (2) $q = \frac{1}{2}$ ד. (3) $S = \frac{1}{3}$.

2) א. $q = \frac{1}{5}$ ב. $a_1 = \sqrt{6}$ ג. $b_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{2-2n}$ או $b_n = 5^{2n-2}$.

ד. ראו סרטון.

3) א. 24% ב. $\frac{3}{19}$ ג. (1) 0.179 ג. (2) 0.845.

4) א. שאלת הוכחה ב. שאלת הוכחה ג. (1) שאלת הוכחה.

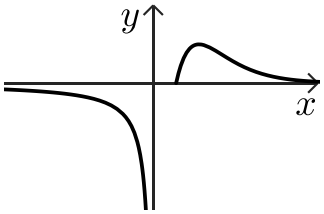
ג. (2) שאלת הוכחה ד. שאלת הוכחה.

5) א. $\frac{k\sin\alpha}{\sin 4\alpha}$ ב. $48.19°$ ג. $k = 12.69$.

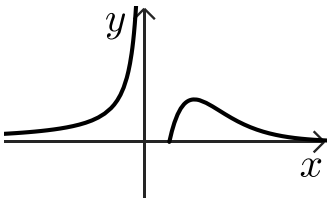
6) א. $x < 0 \,,\, x \ge \frac{k}{5}$ ב. $k = 12$.

ג. (1) אסימפטוטה אנכית: $y = 0$, אסימפטוטה אופקית: $y = 0$.

ג. (2) $\max\left(3, \frac{1}{9}\right) \,,\, \min(2.4, 0)$ ג. (3) להלן סרטוט:



ד. להלן סרטוט:

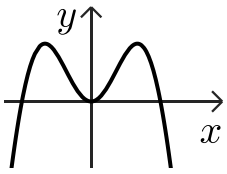


ה. קטן ו. $S = \frac{25}{1296} = 0.0193$.

7) א. ראו סרטון ב. (1) $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

ב. (2) $\min(-\pi,-2)$, $\max\left(-\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$, $\min(0,0)$, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$, $\min(\pi,-2)$.

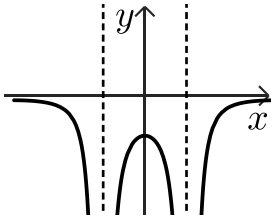
ג. להלן סרטוט: ד. למשל: $b=1$, $b=-\frac{1}{4}$.



ה. (1) $\frac{\pi}{3}<x\le\pi$ או $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$ או $-\pi\le x<-\frac{\pi}{3}$.

ה. (2) $\max\left(\pi,-\frac{4}{9}\right)$, $\max(0,-4)$, $\max\left(-\pi,-\frac{4}{9}\right)$.

ו. להלן סרטוט:



8) א. $\left(\frac{1}{k},\frac{1}{2}-\frac{2}{k^2}\right)$ ב. $x>2$ ג. $k=2\sqrt{2}$.

בגרות קיץ 2026 מועד א':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

ב. ליונתן יש בספרייה שבחדרו ספרים משני סוגים: ספרי קומיקס וספרי עיון.
60% מן הספרים הם ספרי קומיקס והשאר ספרי עיון.
70% מן הספרים הם בעברית והשאר באנגלית.
לפניכם שתי טענות I-II. קבעו בעבור כל אחת מהן אם היא נכונה או לא נכונה, ונמקו את קביעותיכם.

I. ליונתן אין ספרי קומיקס בעברית.

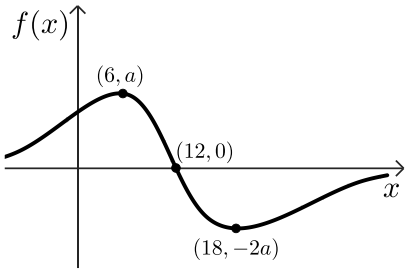
II. ההסתברות לבחור באקראי ספר בעברית מבין ספרי הקומיקס גדולה מן ההסתברות לבחור באקראי ספר קומיקס מבין הספרים שבעברית.

ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x.

לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת בלבד, שמשוואתה $y=0$,

ונקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה-x, ששיעוריה הם.

שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ מוצגים בסרטוט.



a הוא פרמטר גדול מ-1.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון כי לישר $y=\frac{a}{27}$ ולגרף הפונקציה $g(x)$ יש בדיוק 3 נקודות משותפות.

(3) מצאו את הערך של a.

ד. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{-30x^2}{\left(x^3-8\right)^2}$, המוגדרת בתחום $x\neq 2$.

בסרטוט מוצגות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך עם ציר ה-x של גרף הפונקציה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקציה שהנגזרת שלה מקיימת $g'(x)=f(x)$.

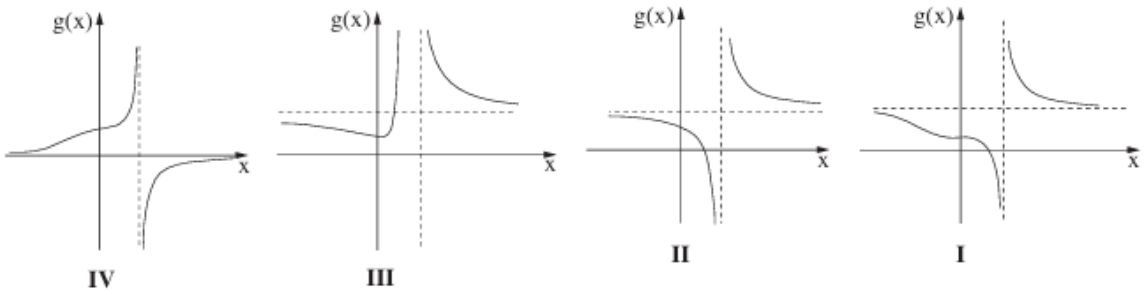
הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $x\neq 2$.

נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ עובר דרך הנקודה $(0,0.75)$.

(1) מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.

(2) אחד מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.

קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



פרק שני – אינדוקציה, סדרות והסתברות

2) a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית עולה שמנתה היא q.

b_n היא סדרה הנדסית אין-סופית עולה שמנתה היא $2q$.

c_n היא סדרה אין-סופית שאיבריה מקיימים $c_n = a_n \cdot b_n$ לכל n טבעי.

א. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו באמצעות q את מנתה.

נתון: $a_1 = b_1,\ c_2 = \frac{1}{8}\cdot(a_1)^2$.

ב. מצאו את הערך של q.

ג. (1) האם הערך של a_1 הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

(2) האם הסדרה c_n עולה או יורדת? נמקו את תשובתכם.

נסמן ב-S_1 את סכום הסדרה a_n, ב-S_2 את סכום הסדרה b_n וב-S_3 את סכום הסדרה c_n.

נתון: $S_1 + S_2 + S_3 = 434$.

ד. מצאו את הערך של a_1.

3) בשק א' ובשק ב' יש כדורים משני סוגים: כדורים רכים וכדורים קשים.

בשק א' יש 10 כדורים, מתוכם 4 כדורים רכים והשאר קשים.

בשק ב' יש 12 כדורים, מתוכם x כדורים רכים והשאר קשים.

גלית בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד.

לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לַשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק

(הוצאה עם החזרה). נתון כי ההסתברות שגלית הוציאה שני כדורים רכים היא $\frac{41}{200}$.

א. מצאו את הערך של x.

ב. ידוע שגלית הוציאה שני כדורים מאותו הסוג.

מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני כדורים מִשק א'?

גלית מבצעת את התהליך המתואר לפניכם 4 פעמים:

היא בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד.

לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לַשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק

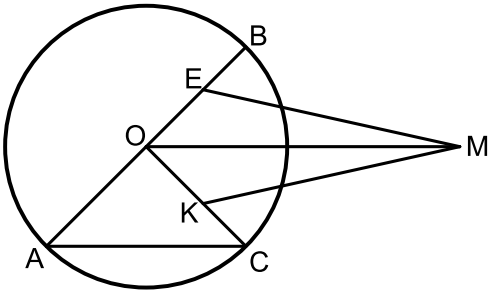
(הוצאה עם החזרה).

ג. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בדיוק בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים?

ד. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים

ובשתיים מן הפעמים רק כדורים רכים?

4) בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.



AB הוא קוטר במעגל.

הנקודה C נמצאת על המעגל.

הנקודה M נמצאת מחוץ למעגל

כך שהקטע AM חותך את הקטע CO בנקודה K.

הנקודה E נמצאת על הקטע BO

כך שהמרובע EMKO הוא דלתון $(MK = ME\ ,\ OK = OE)$.

א. הוכיחו כי $BC \parallel EK$.

ב. הוכיחו כי $OM \parallel AC$.

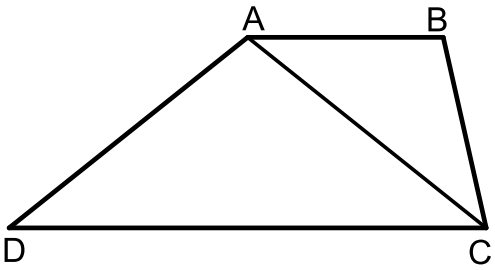
נתון: $\frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$.

ג. מצאו את הערך של $\frac{OM}{AC}$.

נסמן ב-S את שטח הדלתון EMKO.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AOC.

5) בסרטוט שלפניכם טרפז ABCD, $(AB \parallel DC)$.



נתון כי אורך הבסיס AB שווה לאורך הצלע BC.

נסמן: $AB = BC = k\ ,\ \sphericalangle ACB = \alpha\ ,\ 0° < \alpha < 90°$.

א. הראו כי $AC = 2k \cdot \cos\alpha$.

נתון: $AD = 1.2k\ ,\ DC = 2k$.

ב. מצאו את הערך של α.

ג. מצאו את גודל הזווית ADC.

המשכי הצלעות DA ו-CB נחתכים בנקודה E.

נתון כי האורך של רדיוס המעגל החסום במשולש EDC הוא 14.

ד. מצאו את הערך של k.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax}{(x-3)^2}$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$. a הוא פרמטר חיובי.

א. ענו על תתי-הסעיפים (1)-(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+0.5$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש בדיוק נקודה אחת משותפת עם ציר ה-x.

ג. מצאו את הערך של a.

הציבו בפונקציה $g(x)$ את הערך של a שמצאתם, וענו על סעיף ד.

נתונה הפונקציה $g(x)$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

ד. (1) רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $h(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$ ועל ידי ציר ה-x בתחום $-9\le x\le 0$.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=(1+\cos x)\cdot(-1+b\cos x)$, המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.
b הוא פרמטר. נתון: $0<b<1$.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{3}$.

ג. מצאו את הערך של b.

הציבו $b=\frac{1}{2}$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ה.

ד. (1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבצו את סוגן.

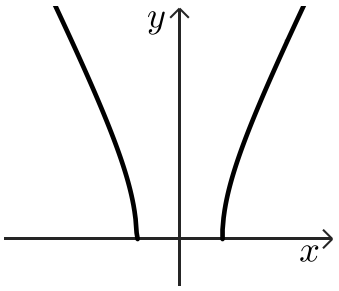
(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x)=f(x)+|f(x)|$, המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

נקודה A היא נקודה כלשהי הנמצאת על גרף הפונקציה $h(x)$.

ה. האם שיעור ה-y של נקודה A הוא חיובי, שלילי, שווה אפס או שאי אפשר לקבוע?
נמקו את תשובתכם.

8) בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=2\sqrt{x^2-1}$.



נתון הישר $y=3x-3$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הישר הנתון.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום שבין שתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב.
דרך הנקודה A העבירו שני ישרים:
ישר המקביל לציר ה-y וחותך את הישר הנתון בנקודה B.
ישר המקביל לציר ה-x וחותך את הישר הנתון בנקודה C.
נסמן ב-t את שיעור ה-x של הנקודה A.

ג. (1) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB.

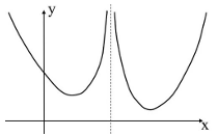
(2) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AC.

ד. מצאו את הערך של t שבעבורו סכום אורכי הקטעים AB ו-AC הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה ב. I לא נכונה, II נכונה ג. (1) $x\neq 12$

ג. (2) להלן סרטוט:



ד. (2) גרף I

ג. (3) $a=3$ ד. (1) $g(x)=\frac{10}{x^3-8}+2$

2) א. $\frac{c_{n+1}}{c_n}=2q^2$ ב. $q=\frac{1}{4}$ ג. (1) a_1 שלילי

ג. (2) c_n יורדת ד. $a_1=-21$

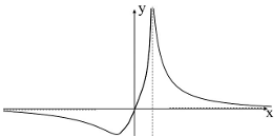
3) א. $x=6$ ב. $\frac{26}{51}$ ג. 0.2696 ד. 0.023456

4) א. הוכחה ב. הוכחה ג. $\frac{OM}{AC}=\frac{3}{2}$ ד. $\frac{5}{9}S$

5) א. הוכחה ב. $\alpha=36.87°$ ג. $\sphericalangle ADC=53.13°$ ד. $k=23.33$

6) א. (1) $y=0$, $x=3$ א. (2) $\min\left(-3,-\frac{a}{12}\right)$

ב. להלן סרטוט:



ג. $a=6$

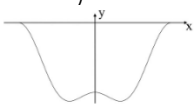
ד. (1) חיוביות: $-3<x<3$, שליליות: $x<-3$, $x>3$

ד. (2) $S=\frac{17}{128}$

7) א. הפונקציה זוגית ב. $(-\pi,0)$, $(\pi,0)$ ג. $b=\frac{1}{2}$

ד. (1) $\max(\pi,0)$, $\min\left(\frac{\pi}{3},-1.125\right)$, $\max(0,-1)$, $\min\left(-\frac{\pi}{3},-1.125\right)$, $\max(-\pi,0)$

ד. (2)



ה. $h(x)=0$ עבור כל x בתחום

8) א. $x\leq -1$ או $1\leq x$ ב. $(1,0)$, $(2.6,\ 4.8)$ ג. (1) $AB=2\sqrt{t^2-1}-3t+3$

ג. (2) $AC=\frac{2\sqrt{t^2-1}}{3}+1-t$ ד. $\frac{3\sqrt{5}}{5}=1.3416$

בגרות קיץ 2026 מועד ב':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

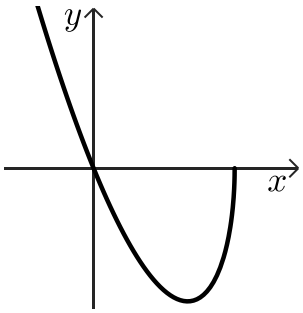
א. נתון כי השוויון $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{b}$ מתקיים בעבור $n=2$.

b הוא פרמטר שונה מ-0.

(1) מצאו את הערך של b.

(2) הציבו $b=4$ והוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי.

ב. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x\le 6$.



אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

I. $f(x)=x\sqrt{6-x}$

II. $f(x)=-x\sqrt{6-x}$

III. $f(x)=x\sqrt{x-6}$

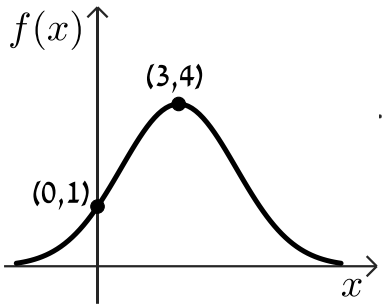
IV. $f(x)=-x\sqrt{x-6}$

(1) קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x)=\left(f(x)\right)^2$ המוגדרת בתחום $x\le 6$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה-x.

ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.



לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד

ואסימפטוטה אופקית אחת בלבד שמשוואתה היא $y=0$.

שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$

ושיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם ציר ה-y מוצגים בסרטוט.

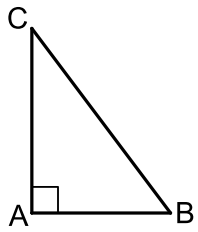
נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)-2}$.

(1) כמה אסימפטוטות המאונכות לציר ה-x יש לפונקציה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה-y של הפונקציה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle CAB=90°)$.



נתון כי אורכי צלעות המשולש הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית.

האיבר הראשון בסדרה שווה לאורך הצלע AB.

נתון: $AB=1$.

(1) האם ייתכן שהאיבר השני בסדרה שווה לאורך הצלע BC? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את אורך הצלע BC (בתשובתכם תוכלו להשאיר שורש).

פרק שני – אינדוקציה, סדרות והסתברות

2) a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית יורדת שכל איבריה חיוביים ומנתה היא q.

א. לפניכם שלוש טענות I-III. קבעו איזו מן הטענות נכונה ונמקו את קביעתכם.

I. $-1 < q < 0$

II. $0 < q < 1$

III. $1 < q$

b_n היא סדרה אין-סופית שאיבריה מקיימים $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה b_n היא הנדסית ומנתה היא q.

נתון כי סכום הסדרה b_n גדול פי 1.96 מסכום הסדרה a_n.

ג. מצאו את הערך של q.

c_n היא סדרה שאיבריה מקיימים $c_n = \frac{b_n}{4 \cdot a_n}$ לכל n טבעי.

נתון כי סכום k האיברים הראשונים בסדרה הוא 34.79.

ד. (1) הוכיחו כי הסדרה c_n היא קבועה.

(2) מצאו את הערך של k.

החליפו את הסימן של כל אחד מן האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה c_n.

ה. מצאו את סכום k האיברים הראשונים בסדרה c_n לאחר החלפת הסימנים.

נמקו את תשובתכם.

3) כדי להתקבל לעבודה בחברה מסוימת על המועמדים לעבור שלושה שלבי קבלה זה אחר זה: מבחן א', מבחן ב' וריאיון אישי.

רק מועמד שעובר את מבחן א' ניגש למבחן ב', ורק מועמד שעובר את מבחן ב' ניגש לריאיון.

מועמד שעובר את כל שלושת השלבים מתקבל לעבודה.

ההסתברות שמועמד יעבור את מבחן א' היא $(0 < p < 1)$ p

ההסתברות שמועמד שעבר את מבחן א' יעבור את מבחן ב' גדולה פי 2 מן ההסתברות שמועמד יעבור את מבחן א'. ההסתברות שמועמד יתקבל לעבודה גדולה פי 3 מן ההסתברות שמועמד יעבור את שני המבחנים ולא יעבור את הריאיון.

א. מצאו את ההסתברות שמועמד שעבר את שני המבחנים יעבור את הריאיון.

94 מן המועמדים לא מתקבלים לעבודה.

ב. מצאו את הערך של p.

ג. ידוע כי מועמד לא התקבל לעבודה. מהי ההסתברות שמועמד זה עבר את מבחן א'?

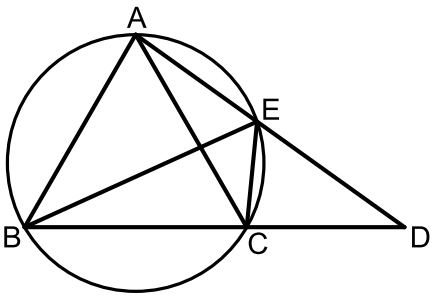
מבין כל המועמדים שלא התקבלו לעבודה בוחרים באקראי 5 מועמדים.

ד. מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם עברו את מבחן א'?

4) ABC הוא משולש שווה צלעות החסום במעגל.

הנקודה D נמצאת על המשך הצלע BC, כמתואר בסרטוט.

הקטע AD חותך את המעגל בנקודה E.



א. הוכיחו: $\sphericalangle AEB = \sphericalangle BEC = \sphericalangle CED = 60°$.

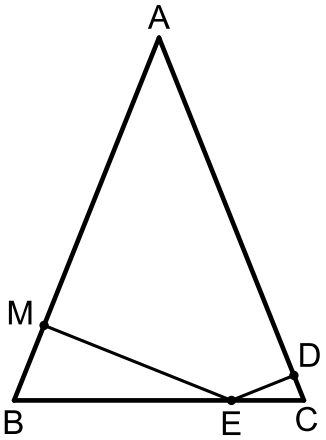
ב. הוכיחו: $\Delta AEB \sim \Delta CED$.

ג. הוכיחו: $\frac{AE}{CE} = \frac{BC}{CD}$.

נתון כי שטח המשולש AEB גדול פי 2.25 משטח המשולש CED.

ד. מצאו פי כמה גדול שטח המשולש ABD משטח המשולש CED.

5) בסרטוט שלפניכם משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$.



הנקודה E נמצאת על הבסיס BC כך ש-$BE = 3 \cdot EC$.

הנקודה D נמצאת על הצלע AC כך ש-ED מאונך ל-AC.

הנקודה M נמצאת על הצלע AB כך ש-EM מאונך ל-AB.

נסמן: $\sphericalangle ABC = \alpha$, $EC = k$, $30° < \alpha < 90°$.

א. הביעו באמצעות k ו- α את אורכי הקטעים DE ו-ME.

נתון כי סכום שטחי המשולשים CED ו-BEM הוא $1.6k^2$.

ב. מצאו את הערך של α.

נתון כי אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED הוא 29.

ג. מצאו את הערך של k.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6(x-1)^2}{x^2+a}$. a הוא פרמטר חיובי.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתון כי שיעור ה-y של נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ הוא 7.5.

ג. מצאו את הערך של a.

בעבור הערך של a שמצאתם ענו על הסעיפים ד–ה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x)=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

(3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה-x בתחום $-a\le x\le 0$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=(\sin x)^2\cdot\cos(2x)$, המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\sqrt{a\cdot f'(x)}$, a הוא פרמטר שלילי.

ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-x.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד בתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

8) בסרטוט שלפניכם מתוארים גרף הפונקציה: $f(x)=(4x-2)^3$

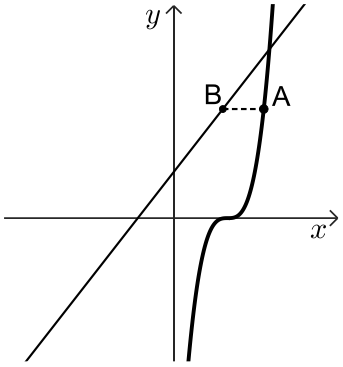
והישר $y=3x+b$. b הוא פרמטר חיובי.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ כך ששיעור ה-x שלה קטן משיעור ה-x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הישר הנתון.

הנקודה B נמצאת על הישר הנתון כך שהקטע AB מקביל לציר ה-x.

נסמן ב-t את שיעור ה-x של הנקודה A.

נתון: $0\le t\le 0.7$.



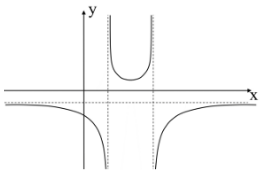
א. הביעו באמצעות b ו-t את שיעור ה-x של הנקודה B.

ב. (1) מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מינימלי.

(2) מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

1) א. (1) $b=4$ א. (2) הוכחה ב. (1) II ב. (2) 108 ג. (1) 2

ג. (2) $y=-\frac{1}{2}$ ג. (3) להלן סרטוט:  ד. (1) לא יתכן

ד. (2) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618$

2) א. טענה II ב. הוכחה ג. $q=0.6$ ד. (1) הוכחה

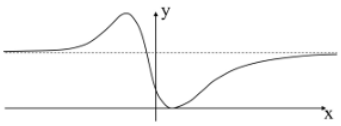
ד. (2) $k=71$ ה. $S_h=0.49$

3) א. 0.75 ב. $p=0.2$ ג. $\frac{7}{47}$ ד. 0.1628

4) א. הוכחה ב. הוכחה ג. הוכחה ד. 4.75

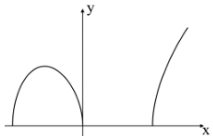
5) א. $DE=k\sin\alpha$, $ME=3k\sin\alpha$ ב. $\alpha=70.105°$ ג. $k=10.32$

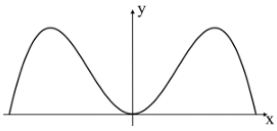
א. (1) כל x א. (2) $y=6$ ב. $\min(1,0)$, $\max\left(-a,\frac{6(a+1)}{a}\right)$ ג. $a=4$

ד. להלן סרטוט:  ה. (1) $x\neq 1$

ה. (2) חיוביות: $-4<x<1$, שליליות: $x<-4$, $x>1$ ה. (3) $S=\frac{8}{15}$

א. זוגית ב. $\max\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{8}\right)$, $\max\left(-\frac{\pi}{6},\frac{1}{8}\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, $\min(0,0)$

ג. להלן סרטוט:  ד. (1) $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{4}$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$

ד. (2) $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$, $(0,0)$, $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ ה. להלן סרטוט: 

6) א. $x_3=\frac{(4t-2)^3-b}{3}$ ב. (1) $t=\frac{3}{8}$ ב. (2) $t=0$

שאלון 571 לכיתות יא

פרק 38

פתרון בוידאו של בחינות שנת 2025

מועד חורף 23
קיץ מועד א 31
קיץ מועד ב 40

בגרות חורף 2025:

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתון כי השוויון $8+24+48+\ldots+n(n+2)=\frac{n(n+a)(n+4)}{6}$ מתקיים בעבור $n=2$.

a הוא פרמטר.

מצאו את הערך של a.

בעבור הערך של a שמצאתם, הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי זוגי.

ב. כל המועמדים ללימודים באוניברסיטה נבחנים בשני מבחנים.

נמצא כי מספר המועמדים שהצליחו רק במבחן הראשון קטן פי 4 ממספר המועמדים שהצליחו בשני המבחנים. $\frac{8}{9}$ מן המועמדים שהצליחו במבחן השני, הצליחו גם במבחן הראשון.

נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי מועמד שהצליח רק במבחן הראשון.

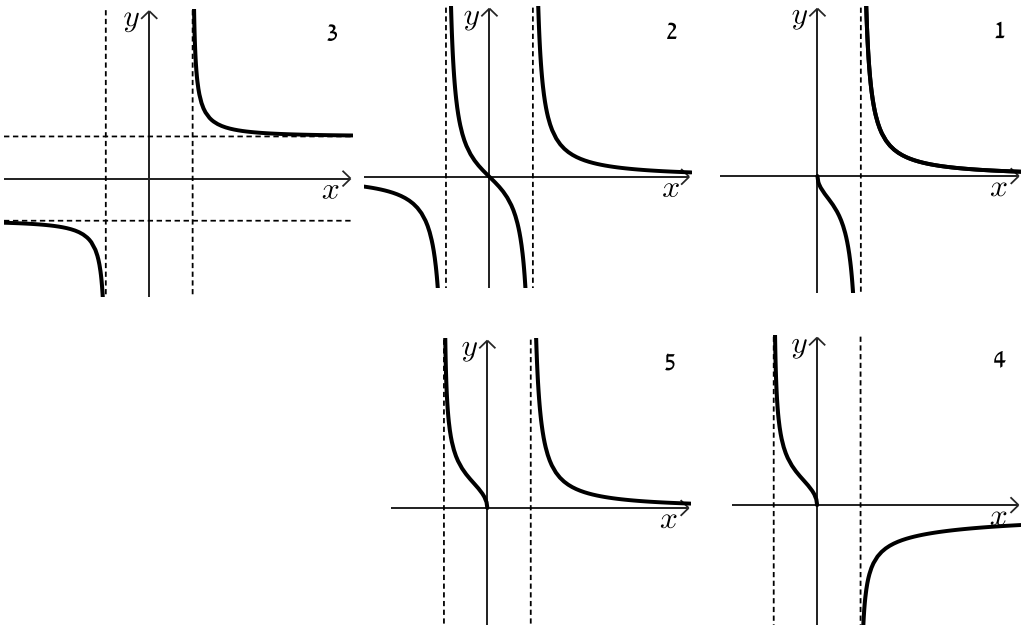
(1) הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי מועמד שהצליח לפחות במבחן אחד.

(2) ידוע שנבחר באקראי מועמד שהצליח לפחות במבחן אחד.
מה ההסתברות שהמועמד שנבחר הצליח בשני המבחנים?

ג. נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$, $h(x)=\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$.

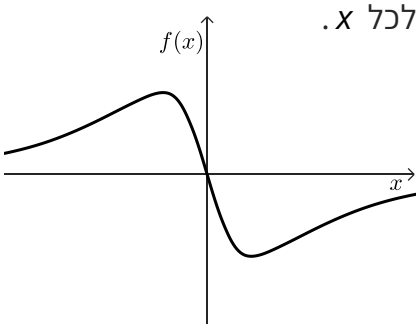
(1) מצאו את תחום ההגדרה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$.

(2) התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$, את הגרף המייצג אותה מבין הגרפים 1-5 שלפניכם. נמקו את קביעותיכם.



ד. הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$, מוגדרות לכל x.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.



נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית, ויש לה נקודת מינימום אחת בלבד ששיעוריה הם: $(-6,3)$.

לפונקציה $f(x)$ ולפונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y=0$.

(1) סרטטו סקיצה אפשרית של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f^2(x)\cdot f'(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x.

(3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ובה m איברים (m הוא מספר טבעי גדול מ-4).

נתון: כל איברי הסדרה A הם שליליים.

סכום $m-4$ האיברים האחרונים בסדרה הוא פי 16 מסכום $m-4$ האיברים הראשונים בסדרה.

א. (1) מצאו את מנת הסדרה A.

(2) האם הסדרה A עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת? נמקו את תשובתכם.

המשיכו את הסדרה A כך שנוצרה סדרה הנדסית אין-סופית.

נתונה סדרה אין סופית B שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{k^n}{a_n}$ לכל n טבעי. k הוא פרמטר שונה מ-0.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את המנה שלה באמצעות k.

נתון כי סכום הסדרה B מתכנס.

ג. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k.

נתון: מנת הסדרה B היא $\frac{1}{4}$.

סכום הסדרה B הוא 3- .

ד. מצאו את הערך של k ואת הערך של b_1.

בסדרה B מחקו כל איבר שלישי $(b_3, b_6, b_9, \ldots)$.

ה. מצאו את סכום האיברים הנותרים.

3) בכד א' יש 10 כדורים אדומים ו־ 15 כדורים צהובים, ובכד ב' יש רק כדורים אדומים.
דנה בוחרת באקראי כד ומוציאה ממנו באקראי כדור.
אם הכדור צהוב, היא מוציאה באקראי כדור שני מאותו הכד (הוצאה ללא החזרה).
אם הכדור הראשון אדום, היא מחזירה את הכדור לכד ושוב מוציאה באקראי כדור מאותו הכד.

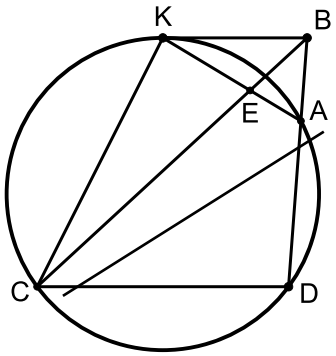
א. ידוע שדנה הוציאה שני כדורים באותו הצבע. מהי ההסתברות ששניהם צהובים?
דנה מחזירה לַכד את הכדורים שהוציאה.
יעל מבצעת את התהליך הזה:
היא בוחרת באקראי כד, מוציאה ממנו באקראי כדור אחד ומחזירה אותו לַכד.
יעל חוזרת על תהליך זה עד שהיא מוציאה כדור אדום, מחזירה אותו לַכד ומפסיקה להוציא כדורים.

ב. מצאו את ההסתברות שיעל ביצעה תהליך זה 6 פעמים בדיוק.
העבירו חלק מן הכדורים מכד ב' לכד א'.
לאחר מכן בחרו באקראי כד והוציאו ממנו באקראי כדור אחד.
נתון כי לאחר ההעברה ההסתברות שהכדור שהוציאו היה אדום היא $\frac{13}{16}$.

ג. האם ייתכן שלפני ההעברה היו בכד ב' 14 כדורים? נמקו את תשובתכם.

פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) במרובע BKCD הצלע KB מקבילה לצלע CD.
הצלע CD היא מיתר במעגל והצלע KB משיקה למעגל בנקודה K.
הצלע BD חותכת את המעגל בנקודה A.
האלכסון BC חותך את המיתר AK בנקודה E (ראו סרטוט).



א. הוכיחו כי $\Delta ABK \sim \Delta AKC$.

ב. הוכיחו כי $\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CE}$.

נתון: $BE=\frac{1}{4}CE$.

ג. מצאו את היחס $\frac{AK}{AB}$.

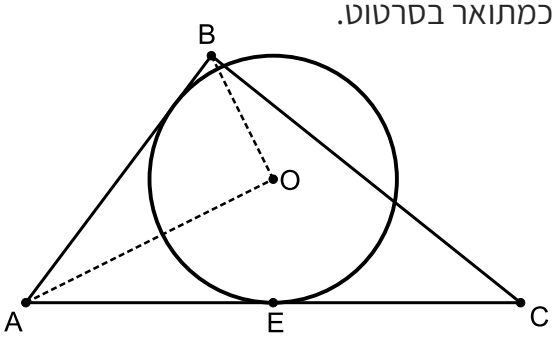
נתון: שטח המרובע ABKC הוא 30.
נסמן ב- S את שטח המשולש AEB.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש KEC.

5) נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

מן הנקודה A העבירו שני ישרים AB ו-AC המשיקים למעגל.

הנקודה E היא נקודת ההשקה של הישר AC למעגל, כמתואר בסרטוט.



נתון: $AE = CE$, $BO \perp AO$.

נסמן ב- 2β את הזווית BAC .

א. הביעו באמצעות R ו- β את האורך של AB.

נתון כי האורך של AB הוא $2.5R$,

והזווית BAC היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של β.

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש AOB.

נתון כי האורך של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 14.

ד. מצאו את הערך של R.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתון כי $f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-a^2)^3}$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$. a הוא פרמטר חיובי.

הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$ מוגדרות באותו התחום.

בסעיפים א-ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$.

ג. מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת תנאים אלה.

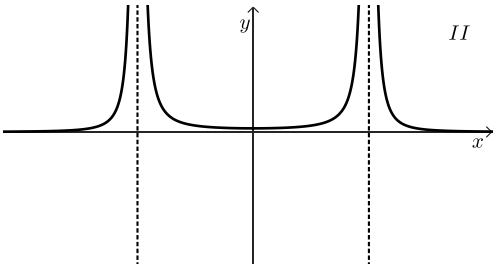
נתונות הפונקציה $g(x)=\frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}$ והפונקציה $h(x)=\frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}$.

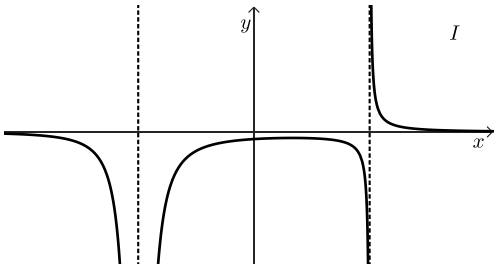
הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו-$h(x)$ מוגדרות באותו התחום.

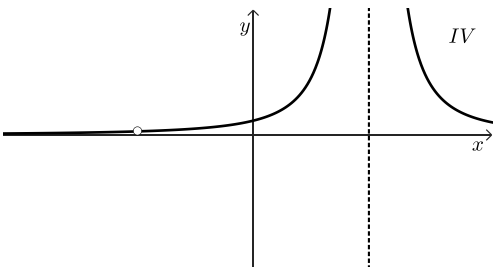
ד. התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו-$h(x)$ גרף אפשרי המייצג אותה מבין הגרפים I-IV שבסוף השאלה. נמקו את תשובותיכם.

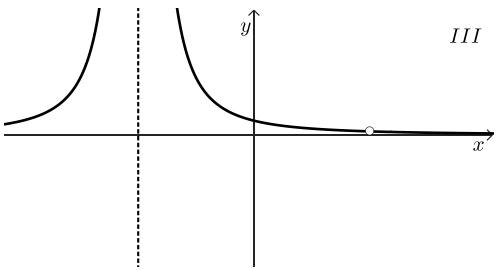
נתון כי לפונקציה $h(x-9)$ יש אסימפטוטה שמשוואתה $x=0.8a$.

ה. מצאו את הערך של a.









7) נתונה הפונקציה $f(x)=\cos x+\frac{4}{(\cos x)^2}+a$, בתחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

a הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לישר $y=4$ בשתי נקודות.

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$ וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציה $g(x)=f(x)-k$ והפונקציה $h(x)=\frac{1}{g(x)}$,

שתיהן בתחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

k הוא פרמטר, $k\ne4$, $k\ne6$.

ו. מצאו את הערך של k שבעבורו גרף הפונקציה $g(x)$ וגרף הפונקציה $h(x)$ נפגשים בכל אחת מנקודות הקיצון שלהן.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{8-x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון פנימית אחת ואין לה נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקציה $f(x)$.

הנקודה C היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם החלק החיובי של ציר ה- x .

מן הנקודה A העבירו שני אנכים:

אנך אחד לציר ה- x החותך אותו בנקודה B , ואנך נוסף לישר $x=8$ החותך אותו בנקודה D.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן ABCD הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

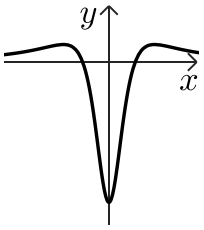
1) א. (1) $a=2$ א. (2) ראו סרטון.

ב. (1) $5.5p$ ב. (2) $\frac{8}{11}$.

ג. (1) $x>1\ ,\ x<-1$ (2) $f(x):x<-1\ ,\ x>1\ ,\ g(x):x\neq 1\ ,\ x\geq 0\ ,\ h(x):-1<x\leq 0$.

ג. (2) $f(x)$: גרף 3, $g(x)$: גרף 1, $h(x)$: גרף 5.

ד. (1) להלן סרטוט: ד. (2) $(3,0)\ ,\ (0,0)\ ,\ (-3,0)$ ד. (2) 144.



2) א. (1) $q=2$ א. (2) יורדת ב. $q_B=\frac{k}{2}$ ג. $-2<k<2\ ,\ k\neq 0$.

ד. $b_1=-2.25\ ,\ k=\frac{1}{2}$ ה. $-2\frac{6}{7}$.

3) א. $\frac{35}{151}$ ב. 0.001701 ג. לא ייתכן.

4) א. שאלת הוכחה ב. שאלת הוכחה ג. $\frac{AK}{AB}=2$ ד. $S_{\Delta KEC}=24-4S$.

5) א. $AB=\frac{2R}{\sin 2\beta}$ ב. $\beta=26.565°$ ג. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AOB}}=\frac{16}{5}=3.2$ ד. $R\approx 7$.

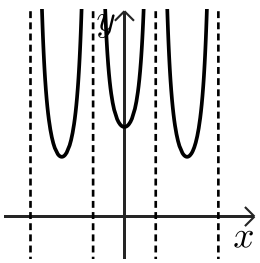
6) א. $x\neq \pm a$ ב. עלייה: $0<x<a\ ,\ x<-a$, ירידה: $x>a\ ,\ -a<x<0$.

ג. $f(x)=\frac{1}{\left(x^2-a^2\right)^2}$ ד. $f(x)$: גרף II, $g(x)$: גרף I, $h(x)$: גרף III ה. $a=5$.

7) א. $x\neq \pm\frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{3\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ ב. זוגית ג. $a=1$.

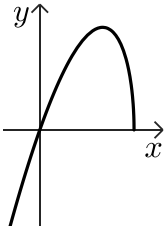
ד. $\min(\pi,4)\ ,\ \min(0,6)\ ,\ \min(-\pi,4)$ ה. להלן סרטוט:

ו. $k=5$.



8) א. (1) $x\leq 8$ א. (2) חיובית: $0<x<8$, שלילית: $x<0$ ב. להלן סרטוט:

ג. $A(4,8)$.



בגרות קיץ 2025 מועד א':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. (1) הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots+(2n)^2=\frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$

(2) חשבו את הערך של הסכום: $4^2+6^2+8^2+\ldots+90^2$.

ב. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ $(AB\parallel CD)$.

הנקודה O היא מפגש אלכסוני הטרפז.

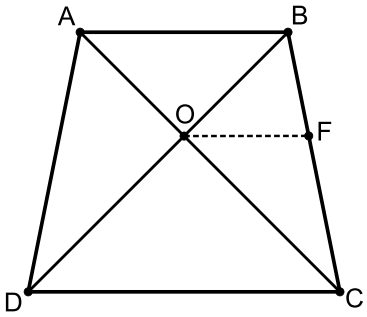
נתון: $\sphericalangle BAO=\sphericalangle CDO$.

(1) הוכיחו כי הטרפז $ABCD$ הוא שווה שוקיים.

הנקודה F נמצאת על הצלע BC כך שהקטע OF מקביל לבסיסי הטרפז.

נתון כי אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה, $DO=12$, $BO=9$.

(2) מצאו את אורך הקטע OF.



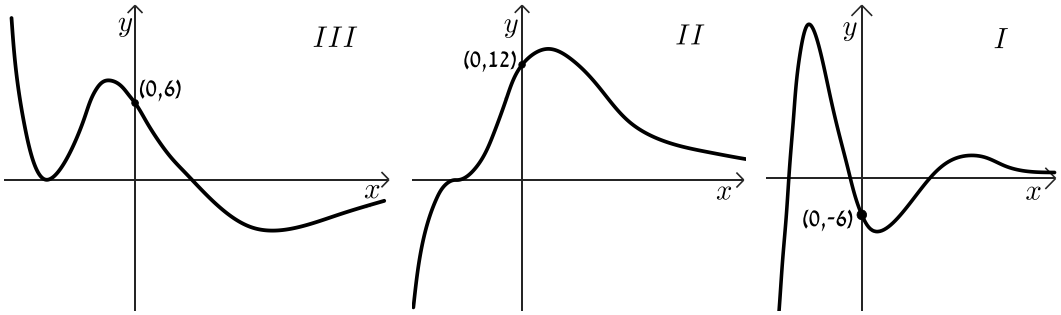
ג. הפונקציה $f(x)$, פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ מוגדרות לכל x.

לפניכם שלושה גרפים I-III. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$,

אחד את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ואחד את פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

בכל אחד מן הגרפים מופיעות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך שלו עם ציר ה- x.

על כל אחד מן הגרפים כתובים שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- y.



(1) התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ את הגרף המתאר אותה.
נמקו את תשובתכם.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.

שיעורי נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ הם $(a,15)$.

(3) מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי גרף הפונקציה $f''(x)$, על ידי הישר $x=a$ ועל ידי ציר ה- y.

ד. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$, המוגדרת בתחום: $x\neq 0\ ,\ x\neq -2$.

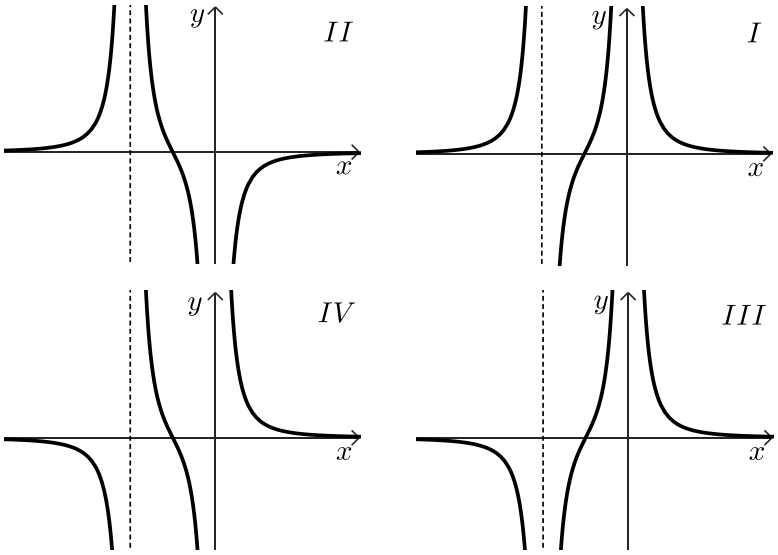
(1) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקציה $f(x)$.

(2) קבעו איזה מבין הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.

(3) חשבו את השטח הכלוא על ידי הגרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים $x=1$ ו- $x=3$.



2) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שאיבריה הם $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$.

נתון: $2a_2 + 8 = a_4$, $\frac{a_4}{a_2} = 4$.

א. מצאו את הערך של a_3 (מצאו את שתי האפשרויות).

נתון כי הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה אין סופית חדשה B.

נתון כי איברי הסדרה B מקיימים $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה הנדסית אין-סופית נוספת C .

איברי הסדרה C הם: $\frac{k}{a_1 \cdot a_2} , \frac{k}{a_3 \cdot a_4} , \frac{k}{a_5 \cdot a_6} , \ldots$. $k \neq 0$ הוא פרמטר.

ג. (1) מצאו את מנת הסדרה C.

(2) מצאו בעבור אילו ערכים של k הסדרה C עולה. נמקו את תשובתכם.

נסמן ב- S_B את סכום הסדרה B , וב- S_C את סכום הסדרה C.

נתון $S_C = 12 \cdot S_B$.

ד. מצאו את הערך של k.

3) במדינה גדולה התקיימו בחירות. המצביעים בבחירות אלה יכולים להצביע למפלגה א' או למפלגה ב' בלבד.

נסמן ב- p את ההסתברות שמצביע שנבחר באקראי הצביע למפלגה א' $(0 < p < 1)$.

בוחרים באקראי 3 מצביעים.

נתון כי ההסתברות שבדיוק אחד מהם הצביע למפלגה א' גדולה פי 2 מן ההסתברות ששלושתם הצביעו למפלגה ב'.

א. מצאו את הערך של p.

בוחרים באקראי 4 מצביעים.

ב. ידוע כי ארבעתם הצביעו לאותה המפלגה. מהי ההסתברות שהם הצביעו למפלגה א'?

חלק מן המצביעים הם מבוגרים והשאר צעירים.

נתון כי 49% מן המצביעים המבוגרים הצביעו למפלגה ב' ו-18% מן המצביעים הצעירים הצביעו למפלגה א'.

ג. מהי ההסתברות לבחור באקראי מצביע צעיר אחד מבין כל המצביעים?

לאחר הבחירות נערך סקר טלפוני בקרב המצביעים. דני, אחד הסוקרים התקשר באקראי למצביעים צעירים בלבד. הוא התקשר אליהם בזה אחר זה והפסיק מייד לאחר שראיין צעיר אחד שהצביע למפלגה אחת וצעיר נוסף שהצביע למפלגה האחרת.

ד. מהי ההסתברות שדני התקשר ל-5 צעירים בדיוק?

פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

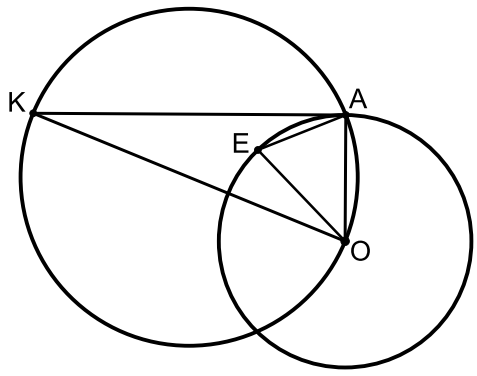
4) בסרטוט שלפניכם מעגל גדול שרדיוסו R ומעגל קטן שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r.

הנקודה O נמצאת על המעגל הגדול.

הנקודה A היא אחת מנקודות החיתוך של שני המעגלים, כמתואר בסרטוט.

דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל הקטן. המשיק חותך את המעגל הגדול בנקודה K.

הנקודה E נמצאת על המעגל הקטן בתוך המשולש KAO.



א. הוכיחו כי $\sphericalangle AOE = 2\sphericalangle KAE$.

המשך קטע AE חותך את הקטע OK בנקודה M.

נתון כי הנקודה M היא אמצע הקטע OK.

ב. הוכיחו כי הנקודה M היא מרכז המעגל הגדול.

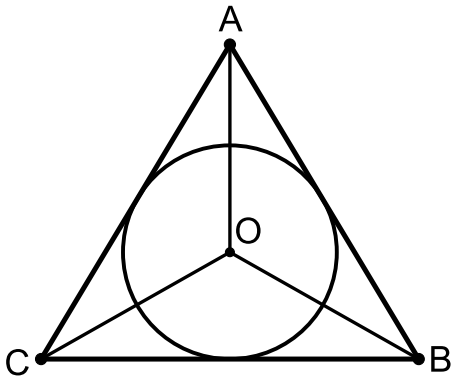
ג. הוכיחו כי $\Delta MOA \sim \Delta OEA$.

נתון: $R = 1.5r$.

נסמן ב- S את שטח המשולש MEO.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש OKA.

5) במשולש שווה שוקיים ABC $(AC = AB)$ חסום מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r (ראו סרטוט).



נסמן: $\sphericalangle ACB = 2\alpha$.

א. (1) הביעו באמצעות r ו- α את אורך הקטע CO.

(2) הביעו באמצעות r ו- α את אורך הצלע AC.

נתון כי אורך הצלע AC גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הקטע CO.

ב. מצאו את הערך של α.

הציבו $\alpha = 30°$ וענו על הסעיפים ג-ד.

המעגל חותך את הקטע BO בנקודה K.

נתון כי אורך הקטע CK הוא $\sqrt{63}$.

ג. מצאו את הערך של r.

הנקודה E נמצאת על הצלע CB.

נתון כי שטח המשולש CKE הוא 6.

ד. חשבו את אורך הקטע BE.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על הסעיפים א-ו. הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

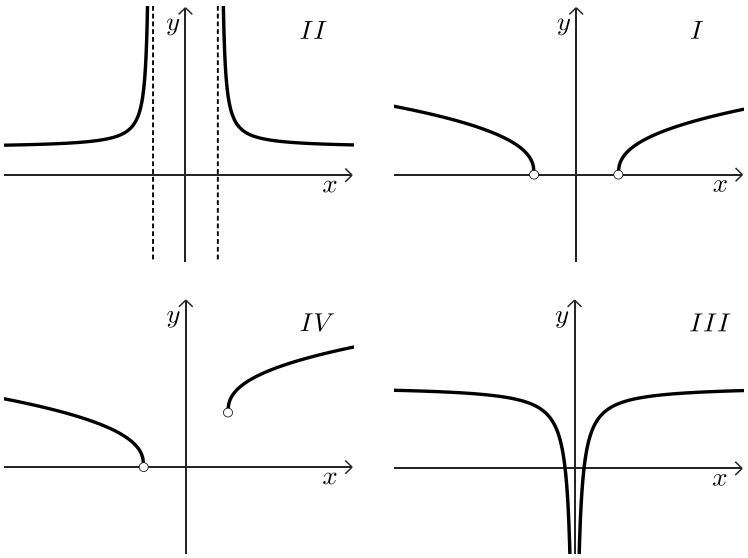
ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה. (1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(2) קבעו איזה מן הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקציה $g(x)$.

נמקו את קביעתכם.



נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x, ועל ידי הישרים $x=2a$ ו- $x=3a$, הוא 2.5.

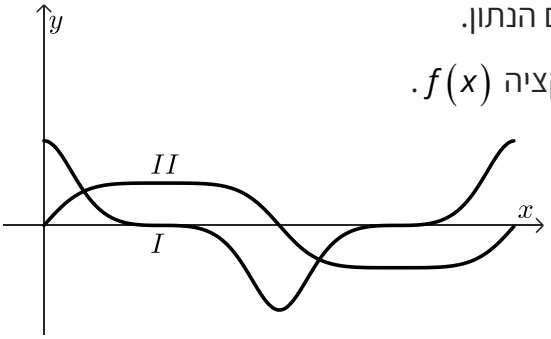
ו. מצאו את הערך של a.

7) בסרטוט שלפניכם נתונים שני גרפים I-II, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

אחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$,

ואחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות לכל x בתחום הנתון.



א. קבעו איזה מן הגרפים I-II מתאר את הפונקציה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.

נתון כי $f(x)=\frac{\sin x}{1+(\sin x)^2}$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

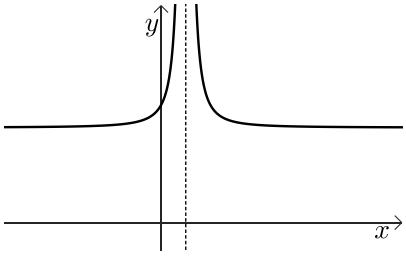
נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)-0.4|$ המוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x.

ד. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

8) בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+6$.



הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \ne 1$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות

לצירים של הפונקציה $f(x)$.

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, ושיעור ה- x שלה הוא 2.

דרך הנקודה C העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת הישר $x=1$ בנקודה B.

D היא נקודה ששיעוריה הם $(1,0)$.

ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB.

ד. מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.

תשובות סופיות:

1) א. (1) ראו סרטון א. (2) 125,576.

ב. (1) שאלת הוכחה ב. (2) $\frac{36\sqrt{2}}{7}=7.273$.

ג. (1) גרף I: $f''(x)$, גרף II: $f(x)$, גרף III: $f'(x)$ ג. (2) 3 נקודות ג. (3) $S=9$.

ד. (1) $-1<x<0$, $x>0$ ד. (2) גרף III ד. (3) $\frac{4}{15}=0.267$.

2) א. $a_3=\pm 8$ ב. $\frac{1}{4}$ ג. (1) $\frac{1}{16}$ ג. (2) $k>0$ ד. $k=15$.

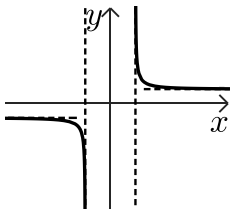
3) א. $\frac{2}{5}$ ב. $\frac{16}{97}$ ג. $\frac{1}{3}$ ד. 0.08224.

4) א. שאלת הוכחה ב. שאלת הוכחה ג. שאלת הוכחה ד. $3.6S$.

5) א. (1) $\frac{r}{\sin\alpha}$ א. (1) $\frac{r\cos\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha}$ ב. $\alpha=30°$ ג. $r=3$ ד. $BE=2.39$.

6) א. (1) $x<-a$, $x>a$ א. (2) $x=-a$, $x=a$, $y=-1$, $y=1$ ב. ראו סרטון.

ג. עלייה: אין, ירידה: $x<-a$, $x>a$ ד. להלן סרטוט:



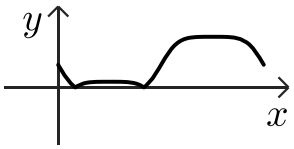
ה. (1) עלייה: $x>a$, ירידה: $x<-a$.

ה. (2) גרף I ו. $a=3$.

7) א. (1) $f(x)$: גרף II, $f'(x)$: גרף I ב. (1) $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(2\pi,0)$.

ב. (2) $\max\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(\frac{3\pi}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\max(2\pi,0)$, $\min(0,0)$ ג. $\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$.

ד. (1) להלן סרטוט:



ד. (2) $\max(0,0.4)$, $\min\left(\frac{\pi}{6},0\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{2},0.1\right)$, $\min(2\pi,0.4)$, $\max\left(\frac{3\pi}{2},0.9\right)$, $\min\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$.

8) א. $x=1$, $y=6$ ב. $y=-2ax+5a+6$ ג. $S_{ADB}=\frac{(3a+6)^2}{4a}$ ד. $a=2$.

בגרות קיץ 2025 מועד ב':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

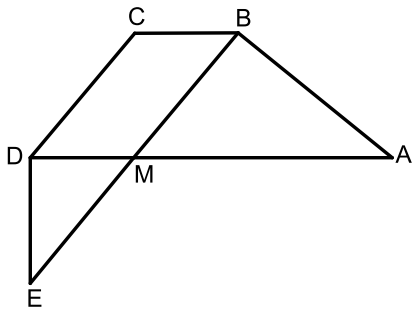
פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\ldots+\frac{4n-2}{3^n}=2-\frac{2n+2}{3^n}$$

ב. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ וטרפז $BCDE$ $(CD \parallel BE)$.



הנקודה M היא נקודת החיתוך של הצלעות AD ו-BE.

נתון: $EM=BM$, $ED \perp AD$, $AB \perp BM$.

אורך הקטע AM גדול פי 2.5 מאורך הקטע DM.

נסמן: $\sphericalangle EMD=\alpha$.

(1) מצאו את הערך של α.

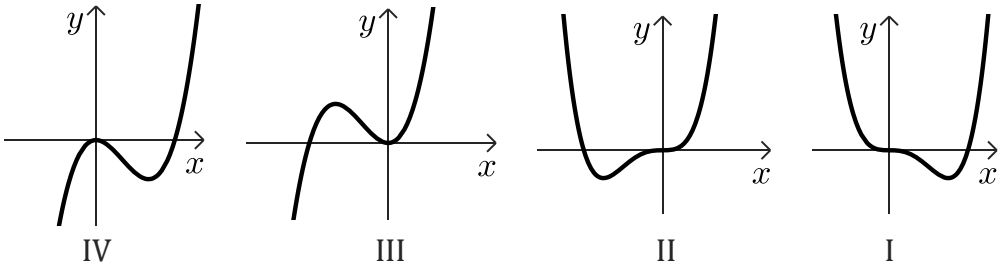
נתון: $DM=6$.

(2) חשבו את שטח הטרפז ABCD.

ג. נתונות הפונקציות $f(x)=x^n(x-1)$ ו- $g(x)=x^n(x+1)$, המוגדרות לכל x.

הוא פרמטר טבעי גדול מ-1.

כל אחד מן הגרפים I-IV לפניכם מייצג אחת מן הפונקציות בעבור n זוגי או n אי-זוגי.



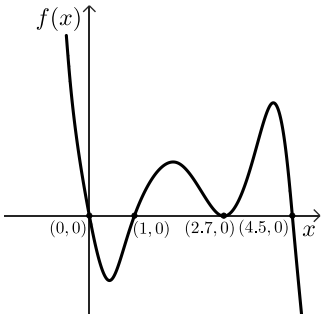
(1) התאימו לכל אחד מן הגרפים I-IV את הפונקציה, $f(x)$ או $g(x)$, המתאימה לו בעבור n זוגי או n אי-זוגי.

(2) הציבו $n=2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x.

ד. בסרטוט שלפניכם מתוארת הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.

בסרטוט מצוינים כל שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.

פונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $x\geq 0$, ומקיימת $g(x)=\int_0^x f(t)dt$.



(1) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $1\leq x\leq 2.7$.

נתון: $g(2.7)=0$, $g(4.5)=3\cdot S$.

(2) הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x, בתחום $0\leq x\leq 4.5$.

2) a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית עולה שמנתה היא q, $0 < q < 1$.

א. קבעו אם כל איברי הסדרה a_n הם חיוביים או שליליים. נמקו את קביעתכם.

b_n היא סדרה הנדסית אין-סופית וגם מנתה היא q.

c_n היא סדרה אין-סופית המקיימת לכל n טבעי $c_n = 2b_n - a_n$, $(c_n \neq 0)$.

ב. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q.

נתון כי $c_1 = 6\frac{2}{3}$, וכי סכום איברי הסדרה c_n גדול פי 8 מסכום איברי הסדרה b_n.

ג. מצאו את הערך של a_1.

נתון כי סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה a_n גדול ב-4 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה a_n.

ד. מצאו את הערך של q.

3) בבית אריזה גדול אורזים שני סוגי פירות בלבד: לימונים ותפוזים.
חלק מן הפירות מיועדים לייצוא והשאר אינם מיועדים לייצוא.
ההסתברות לבחור באקראי שני תפוזים מבין כל הפירות בבית האריזה היא 0.4096.
בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

א. מהי ההסתברות שנבחר לימון?

ההסתברות לבחור באקראי תפוז מבין הפירות שמיועדים לייצוא היא $\frac{3}{5}$.

ההסתברות לבחור באקראי לימון מבין הפירות שאינם מיועדים לייצוא היא $\frac{1}{5}$.

בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

ב. מהי ההסתברות שנבחר פרי המיועד לייצוא?

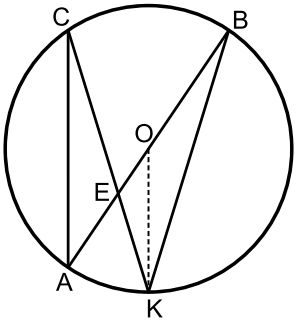
בוחרים באקראי שני פירות מבין כל הפירות בבית האריזה.

ג. ידוע שנבחרו שני לימונים.
מהי ההסתברות שאחד מהם מיועד לייצוא והאחר אינו מיועד לייצוא?

בוחרים באקראי 4 פירות מבין כל הפירות בבית האריזה. ידוע שלפחות אחד מהם מיועד לייצוא.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 3 מבין הפירות שנבחרו מיועדים לייצוא?

4) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.



המיתר CK חותך את הרדיוס AO בנקודה E (ראו סרטוט).

נתון: $\sphericalangle EKO = \sphericalangle ABK$.

א. הוכיחו כי $\Delta OKE \sim \Delta ACE$.

המשך הקטע KO חותך את המיתר CB בנקודה P.

נתון כי $PO = 7$, וכי רדיוס המעגל הוא 8.4.

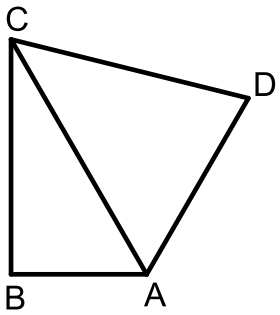
ב. (1) הוכיחו כי PO הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

(2) מצאו את אורך הקטע EO.

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ACE ובין שטח המשולש AOK.

5) בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC $\left(\sphericalangle ABC = 90°\right)$.

על הצלע AC בנו משולש נוסף ACD כך ש-AC הוא חוצה זווית BAD.



נסמן: $AB = k$, $\sphericalangle CAB = \alpha$.

א. הביעו באמצעות k ו- α את האורך של AC.

נתון: $AD = 1.5 \cdot k$, $CD = \sqrt{3.25} \cdot k$.

ב. חשבו את הערך של α.

הציבו $\alpha = 60°$ וענו על סעיפים ג–ד.

הנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

ג. הביעו באמצעות k את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC.

הנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

נתון: $ME = 4$.

ד. חשבו את הערך של k.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2ax}{\left(x^2-16\right)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ שפונקציית הנגזרת שלה היא $g'(x)=f(x)+1$.

תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ ושל פונקציית הנגזרת $g'(x)$

זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-2$.

ב. מצאו את הערך של a.

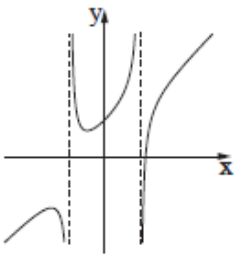
הציבו את הערך של a שמצאתם בפונקציה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג–ד.

נתון כי הפונקציה $g(x)$ עוברת בנקודה $(2,7)$.

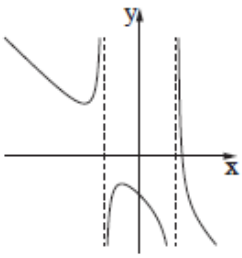
ג. כתבו ביטוי אלגברי אפשרי לפונקציה $g(x)$.

ד. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם הוא גרף אפשרי של הפונקציה $g(x)$.

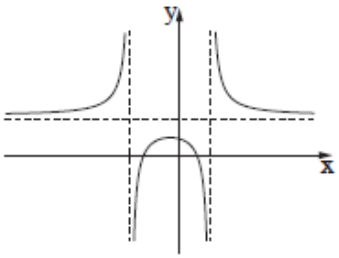
נמקו את קביעתכם.



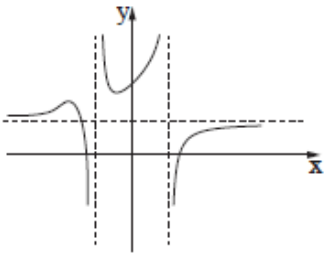
II



I



IV



III

7) נתונה הפונקציה $f(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$.

ב. קבעו אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית. נמקו את קביעתכם.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

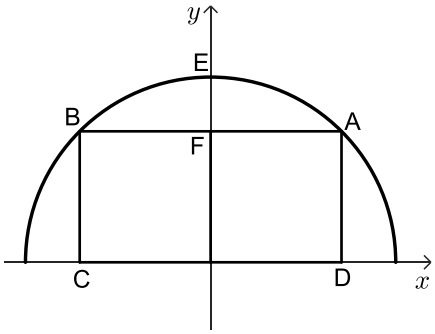
נתונה הפונקציה $g(x)=2\cos x+\frac{2\sin x}{\sin(2x)}$, בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הראו כי $g(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos x}$, בעבור כל x בתחום הגדרתה.

ו. האם קיים ערך של k שבעבורו הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ ב-3 נקודות בדיוק? אם כן, מצאו אותו. אם לא, נמקו את תשובתכם.

8) בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$,



R הוא פרמטר חיובי.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-R\le x\le R$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה- x

וחותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה נוספת B.

הנקודות C ו-D נמצאות על ציר ה- x כך שנוצר מלבן ABCD.

הנקודה F היא נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y.

הנקודה E היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y.

נתון ריבוע שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע EF.

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A.

א. (1) הביעו באמצעות R ו- t את אורך הקטע EF.

(2) הביעו באמצעות R ו- t את היקף המלבן ABCD.

ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן ABCD לבין היקף הריבוע הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

1) א. ראו סרטון.

ב. (1) $\alpha = 50.708$ (2) $S_{ABCD} = 99.2$.

ג. (1) גרף I: $n - f(x)$ אי זוגי, גרף II: $n - g(x)$ אי זוגי, גרף III: $n - g(x)$ זוגי, גרף IV: $n - f(x)$ זוגי (2) $\frac{1}{12}$.

ד. (1) מקסימום: $x = 0$, מינימום: $x = 1$, מקסימום: $x = 4.5$ (2) $5S$.

2) א. שליליים ב. $q_C = q$ ג. $a_1 = -5$ ד. $q = \frac{1}{4}$.

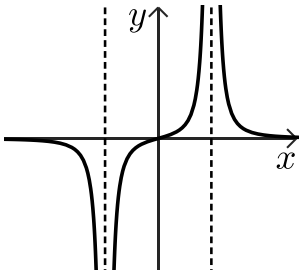
3) א. 0.36 ב. 0.8 ג. $\frac{16}{81}$ ד. $\frac{23}{39}$.

4) א. שאלת הוכחה ב. (1) שאלת הוכחה ב. (2) 3.15 ג. $\frac{25}{24}$.

5) א. $\frac{k}{\cos\alpha}$ ב. $60°$ ג. $\frac{\sqrt{3}k}{3+\sqrt{3}}$ ד. 7.73.

6) א. (1) $x \neq \pm 4$ א. (2) $x = \pm 4$, $y = 0$.

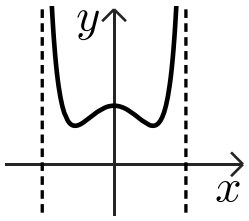
א. (3) עלייה: $-4 < x < 4$, ירידה: $x > 4$, $x < -4$ א. (4) להלן סרטוט:



ב. $a = 36$ ג. $g(x) = \frac{-36}{x^2 - 16} + x + 2$ ד. גרף II.

7) א. (1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ א. (2) $x \neq -\frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ ב. זוגית.

ג. $\min\left(-\frac{\pi}{4}, 2.82\right)$, $\max(0,3)$, $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2.82\right)$ ד. להלן סרטוט:



ה. (1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$ ה. (2) ראו סרטון ו. לא.

8) א. (1) $R - \sqrt{R^2 - t^2}$ א. (2) $4t + 2\sqrt{R^2 - t^2}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{13}}R$.

שאלון 571 לכיתות יא

פרק 39

פתרון בוידאו של בחינות שנת 2024

מועד חורף 47
קיץ מועד א 55
קיץ מועד ב 63

בגרות חורף 2024:

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

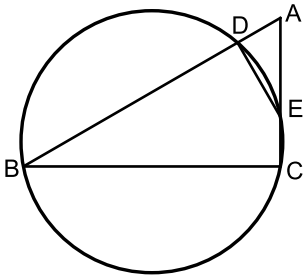
פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת שלכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$48+144+288+\ldots+6n(n+2)=n(n+2)(n+4)$$

ב. המרובע BCED חסום במעגל.
המשך המיתר BD והמשך המיתר CE נפגשים בנקודה A (ראו סרטוט).



נתון: $AE=2CE$, $AD=CE$.

(1) הוכיחו: $\Delta AED\sim\Delta ABC$.

(2) מצאו את היחס: $\frac{AB}{AC}$.

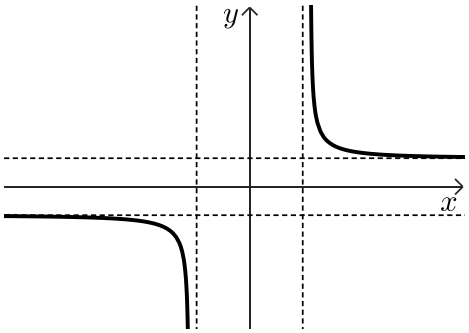
(3) נתון: $\sphericalangle DEC=150°$.

האם BE הוא קוטר במעגל הנתון? נמקו את תשובתכם.

ג. לפניכם סרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$.

לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x ושתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y.

אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $f(x)$.



I. $\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$

II. $\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$

III. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}$

IV. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}$

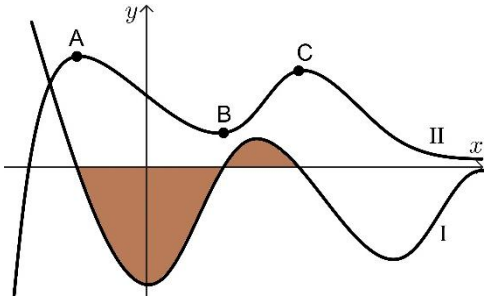
(1) קבעו איזה מן הביטויים I-IV מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x)$, המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת: $g'(x)=f(x)+\frac{5}{3}$.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ד. הגרפים I-II בסרטוט שלפניכם מתארים את הפונקציה $f(x)$
ואת פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
כל נקודות הקיצון של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$ מתוארות בסרטוט.



(1) קבעו איזה גרף, I או II, מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.

הנקודות A, B ו-C הן נקודות הקיצון של גרף II, כמתואר בסרטוט.
נתון: $y_A = 6$, $y_B = 2$.
השטח המוגבל על ידי גרף I ועל ידי ציר ה- x (השטח המסומן באיור) שווה ל-7.

(3) מצאו את שיעור ה- y של הנקודה C.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) בסדרה חשבונית A נתון: $a_1 = -4-4k$, $a_3 = -16+2k$. k הוא פרמטר.

א. מצאו עבור אילו ערכים של k:

(1) הסדרה A עולה.

(2) הסדרה A יורדת.

(3) הסדרה A קבועה.

נתון כי: $a_{17} = -232$.

ב. מצאו את הערך של k.

הציבו את הערך של k שמצאתם וענו על הסעיפים ג-ד.

נתונה סדרה חדשה, B, שאיבריה מוגדרים כך: לכל n טבעי, $b_n = a_n + 24n + 17$.

ג. הוכיחו כי הסדרה B היא חשבונית.

חשבו את הסכום: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \ldots + b_{29}^2 - b_{30}^2$.

3) ביישוב מסוים הוחלט לערוך סקר בנוגע להקמת פארק ביישוב.
בסקר השתתפו תושבים מבוגרים וצעירים בלבד.
כל אחד מן התושבים שהשתתף בסקר כתב אם הוא תומך בהקמת פארק או מתנגד להקמתו (לא היו נמנעים).
כל התושבים המבוגרים שהשתתפו תמכו בהקמת הפארק.
בחרו באקראי בתושב אחד מבין התושבים שהשתתפו בסקר.
נסמן ב- p את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר.
נסמן ב- k את ההסתברות שהתושב שנבחר תמך בהקמת הפארק.

א. הביעו באמצעות p ו- k את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר התומך בהקמת הפארק.

מחצית מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק.
$\frac{3}{7}$ מן המשתתפים בסקר שתמכו בהקמת הפארק היו צעירים.

ב. מצאו את p ואת k.

יוסי, כתב חדשות מקומי, ראיין באקראי 6 מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר.

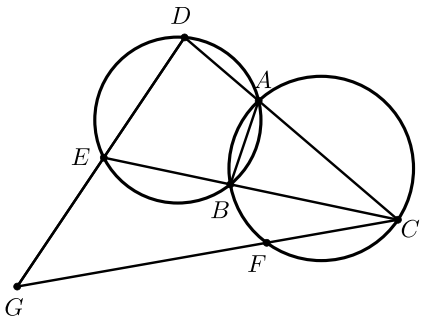
ג. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם תמך בהקמת הפארק ולפחות אחד מהם התנגד להקמת הפארק?

לאחר מכן ראיין יוסי באקראי, בזה אחר זה, 5 תושבים שהשתתפו בסקר.

ד. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן המרואיינים האלה היו צעירים, ושהמרואיין האחרון היה צעיר?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B.
C היא נקודה על המעגל הימני.
המשכי הקטעים CA ו-CB חותכים את המעגל השמאלי בנקודות D ו-E בהתאמה.
הנקודה F נמצאת על הקשת BC, כמתואר בסרטוט.
המשכי הקטעים CF ו-DE נפגשים בנקודה G.



א. הוכיחו: $\sphericalangle CBA = \sphericalangle EDA$.

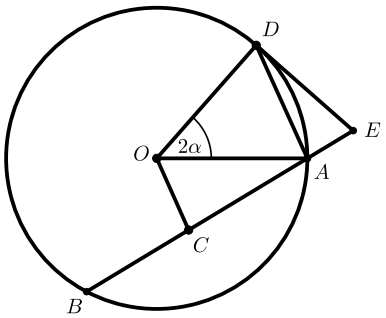
ב. הוכיחו: המרובע GDAF הוא בר חסימה במעגל.
המיתרים AF ו-BC נפגשים בנקודה H.
נתון: $\sphericalangle CHA = \sphericalangle GEC$.

ג. הוכיחו: $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$.

נתון: CE מאונך ל-AB, $DE = 18$, $CD = 36$.

ד. חשבו את אורכי הקטעים EG ו-CG.

5) נתון מעגל שמרכזו O והרדיוס שלו R. מנקודה E, הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר החותך את המעגל בנקודות A ו-B, כמתואר בסרטוט.
הנקודה D נמצאת על הקשת הגדולה AB, כך שהקטע ED משיק למעגל. הנקודה C היא אמצע המיתר AB.
נסמן את הזווית בין הרדיוסים OD ו-OA ב- 2α $\left(\alpha \le 60°\right)$.



נתון: המרחק של הנקודה O מן המיתר AB הוא $0.5R$.

א. מצאו את זוויות המרובע DOCE.
הביעו באמצעות α אם יש צורך.

ב. הביעו באמצעות R ו- α את אורך הקטע DE.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOD הוא $\frac{4}{7}R$.

ג. מצאו את α.

ד. מצאו את היחס בין שטח המעגל החוסם את המרובע DOCE ובין שטח המעגל הנתון.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x}-2}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. הראו כי לכל $x>0$ בתחום ההגדרה של הפונקציות מתקיים: $f(x)=g'(x)$.

ד. לפניכם טענות I-II. קבעו בנוגע לכל טענה אם היא נכונה או לא נכונה.
נמקו את קביעותכם.

I. יש משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ ששיפועו הוא 2.

II. לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

ה. חשבו את ערך הביטוי: $\int_{0.25}^{1} g(x)\cdot f(x)dx$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin(x)-a}{\sin(x)+a}$, a הוא פרמטר חיובי.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x המקיים: $\sin(x)\neq -a$.

נתון כי הגרף של הפונקציה $f(x)$ משיק לציר x בכל נקודות הקיצון שלה.

א. מצאו את הערך של a.

הציבו: $a=1$, וענו על הסעיפים ב-ה עבור התחום: $-2\pi \le x \le 2\pi$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x)=-1$ בתחום הנתון? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בכל אחד מחלקי תחום הגדרתה.

ה. קבעו אם הטענה שלפניכם נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+1\right)dx>\frac{\pi}{2}.$$

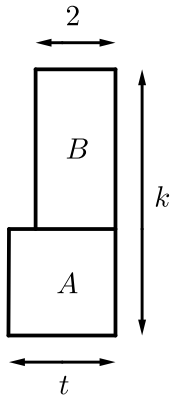
8) נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו, גינה A וגינה B.

הרוחב של גינה A הוא t מטרים.

הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה הוא: $2t+2$ מ"ר,

כמתואר בסרטוט שלפניכם.

האורך הכולל של שתי הגינות הוא k מטרים. k הוא קבוע.



א. הביעו באמצעות k ו-t את שטח הגינה A.

ב. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A הוא מינימלי.

ג. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה A ובין שטח הגינה B הוא מקסימלי.

נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות:

1) א. (1) ראו סרטון.

ב. (1) שאלת הוכחה ב. (2) 2:1 ב. (3) כן.

ג. (1) ביטוי II ג. (2) עלייה: $x>4$, $x<-5$, ירידה: $-5<x<-4$.

ד. (1) גרף II ד. (2) 3 נקודות ד. (3) $y_C=5$.

2) א. (1) $k>2$ א. (2) $k<2$ א. (3) $k=2$.

ב. $k=-3$ ג. הוכחה. ד. -48,465.

3) א. $k-1+p$ ב. $k=0.7$, $p=0.6$ ג. $\frac{31}{32}$ ד. $\frac{648}{3125}$

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. $CG=60$, $EG=30$.

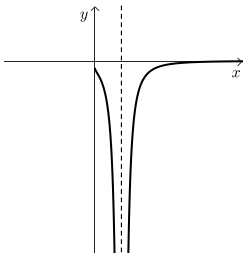
5) א. $\sphericalangle DEC=120°-2\alpha$, $\sphericalangle ODE=\sphericalangle OCE=90°$, $\sphericalangle DOC=2\alpha+60°$

ב. $DE=\frac{2R\sin\alpha\cdot\sin(60°+\alpha)}{\sin(120°-2\alpha)}$ ג. $\alpha=28.96°$ ד. $\frac{r^2}{R^2}=0.55$.

6) א. (1) $0\le x\ne 4$ א. (2) אנכית: $x=4$, אופקית: $y=0$ עבור: $x\to\infty$.

(3). ציר y: $(0,-1)$, ציר x: $(16,0)$ (4). $\max\left(36,\frac{1}{8}\right)$, $\max(0,-1)$.

ב. להלן סרטוט:



ג. הוכחה. ד. I: לא נכונה , II: נכונה.

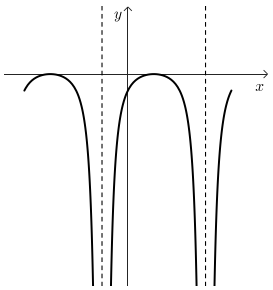
ה. $1\frac{17}{18}$.

7) א. $a=1$ ב. (1) $\frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi$ או $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ או $-2\pi\le x<-\frac{\pi}{2}$.

ב. (2) $(0,-1)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$.

ב. (3) $\max\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\max\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$, $\min(2\pi,-1)$, $\max(2\pi,-1)$.

ג. להלן סרטוט:



ד. יש 5 פתרונות. ה. הטענה נכונה.

8) א. $S_A=kt-t^2-t$ ב. $t_{min}=-1+\sqrt{k}$ ג. $t_{max}=-1+\sqrt{k}$.

בגרות קיץ 2024 מועד א':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

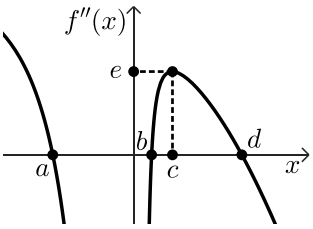
פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי: $4+13+\ldots+\frac{5n^2+3n}{2}=\frac{n(n+1)(5n+7)}{6}$.

ב. נתונות הפונקציות: $f(x)$, $f'(x)$ ו-$f''(x)$, המוגדרות לכל $x\neq 0$.

בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.



לגרף הפונקציה $f''(x)$ יש שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה-x, ושיעוריהן הם: $(d,0)$, $(b,0)$, $(a,0)$.

הנקודה: (c,e) היא נקודת הקיצון של הפונקציה $f''(x)$.

(1) הביעו באמצעות: e , d , c , b , a, אם יש צורך,

את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

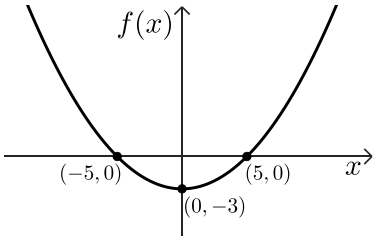
נתונה הפונקציה $h(x)$, המקיימת: $h'(x)=f''(x)-e$.

הפונקציה $h(x)$ מוגדרת לכל $x\neq 0$.

(2) מצאו כמה נקודות קיצון וכמה נקודות פיתול יש לפונקציה $h(x)$ (אם יש כאלה).

נמקו את תשובתכם.

ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, ועליו כתובים כל שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x ושיעורי נקודת המינימום שלה.



הפונקציה מוגדרת לכל x.

נתונות הפונקציות: $g(x)=\left|f(x)+m\right|$, $h(x)=\left|f(x)\right|+m$.

m הוא פרמטר, $0<m<2$.

(1) הביעו באמצעות m, אם יש צורך, את שיעורי נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$.

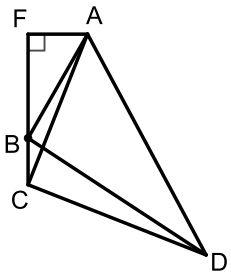
(2) הביעו באמצעות m, אם יש צורך, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגן.

(3) לפניכם שתי טענות, I-II. קבעו בעבור כל טענה אם היא נכונה או אינה נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ חיוביות לכל ערך של x.

II. לכל ערך של m בתחום: $0<m<2$ מתקיים שהישר: $y=m+\frac{1}{2}$ חותך כל אחת מן הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ בשלוש נקודות.

ד. המרובע ABCD הוא בר חסימה במעגל, כך ש-AD הוא קוטר במעגל.
הנקודה F נמצאת על המשך הצלע CB, כך ש- $FB \perp FA$,
כמתואר בסרטוט שלפניכם.



(1) הוכיחו: $\Delta ACD \sim \Delta AFB$.

נתון: $\sphericalangle BDA = 24°$.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשולש ACD ובין שטח המשולש AFB.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) הסדרה A היא סדרה הנדסית שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3 \ldots$

ומנתה היא q, $-1 < q < 0$. נתון: $a_1 = 1$.

הסדרה B מוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $b_n = a_n \cdot a_{n+2}$.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q.

ב. לפניכם שלוש טענות I-III. קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה או לא נכונה.
נמקו את קביעותיכם.

I. הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

II. הסדרה B היא סדרה עולה.

III. האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A יוצרים סדרה עולה.

נתון: הסדרה B היא סדרה אין-סופית שסכומה הוא $\frac{1}{8}$.

ג. מצאו את ערכו של q.

נתונה סדרה הנדסית נוספת C, המוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

נתון: $c_3 + c_4 + \ldots + c_m = 44{,}307$, m הוא מספר טבעי.

ד. מצאו את הערך של m.

3) בחידון יש 5 שאלות. ההסתברות לענות נכון על כל אחת מן השאלות היא P.
ידוע כי ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 4 שאלות לכל היותר
היא 0.67232.

א. מצאו את P.

ב. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 3 שאלות בדיוק.

מספר הנקודות הניתן לכל שאלה זהה למספר השאלה.
כלומר מתמודד שענה נכון על שאלה 1, מקבל נקודה אחת.
מתמודד שענה נכון על שאלה 2 מקבל שתי נקודות, וכן הלאה.

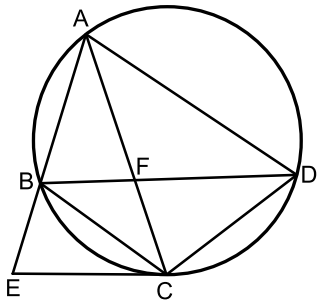
ג. מצאו את ההסתברות שמתמודד יצבור 14 נקודות לפחות.

ד. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יצבור 6 נקודות בדיוק.

ה. ידוע כי אחינועם ענתה נכון על 3 שאלות בדיוק.
מצאו את ההסתברות שהיא צברה 6 נקודות בדיוק.

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) המרובע ABCD חסום במעגל. אלכסוני המרובע נחתכים בנקודה F.
המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך המיתר AB
בנקודה E (ראו סרטוט).



נתון: $AB = CB$.

א. הוכיחו: $\sphericalangle EBC = 2 \cdot \sphericalangle BDC$.

נתון: AC חוצה את זווית ECD, $\frac{CD}{CF} = \frac{8}{5}$.

ב. (1) הוכיחו: $AC = AD$.

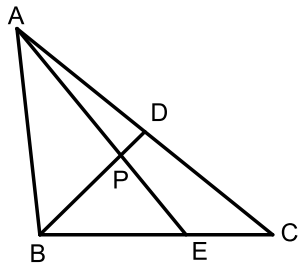
(2) מצאו את היחס: $\frac{AD}{CD}$.

(3) מצאו את היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש CBF.

נסמן את שטח המשולש ABF ב- S.

ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AEC.

5) במשולש ABC, BD הוא תיכון לצלע AC.
הנקודה E נמצאת על הצלע BC.
BD ו-AE נחתכים בנקודה P (ראו סרטוט).



נתון: $BP = 3 \cdot PD$.

נסמן: $AB = k$, $\sphericalangle BAP = \alpha$, $\sphericalangle ABP = \beta$, $\alpha < \beta$.

א. הביעו באמצעות: α, β ו- k את אורכי
הקטעים AP ו-BP.

נתון כי AE ו-BD מאונכים זה לזה, וכי שטח המשולש ABD הוא $0.28k^2$.

ב. מצאו את גודל הזווית α.

ג. מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC
ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEB.

ד. מצאו את אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC
כך שמתקיים: $\sphericalangle ABC = 90°$. הביעו את תשובתכם באמצעות k.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{\left(x^2-a\right)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על סעיפים א-ה. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x)=f(x)$.

גרף הפונקציה $g(x)$ עובר בנקודה $(0,0)$.

הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ג. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה $g(x)$.

ד. (1) מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלו.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ שמצאתם בתת-סעיף ד(1).

$h(x)$ היא פונקציה המוגדרת כך: $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.

הפונקציות $h(x)$ ו- $f(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ה. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקציה $h(x)$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos x-\sqrt{\cos x}$, בתחום: $-\pi \le x \le \pi$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הראו כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

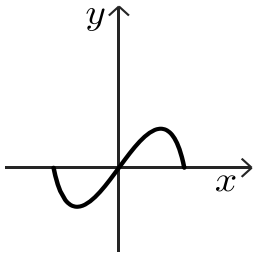
(4) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן (בתשובתכם דייקו 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

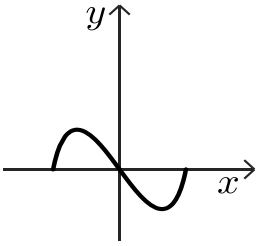
ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

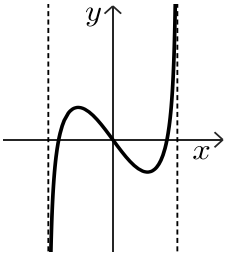
I



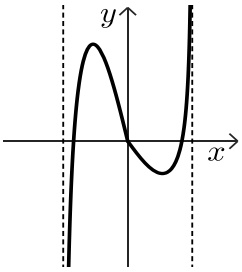
II



III



IV



נתונה הפונקציה: $g(x)=k-f(x)$, k הוא פרמטר חיובי.

הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

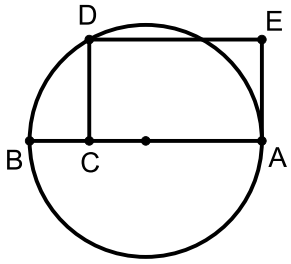
נסמן ב-S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה-x בתחום בין 0 ל-$\frac{\pi}{2}$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$

ועל ידי הישרים $x=\frac{\pi}{2}$ ו-$x=-\frac{\pi}{2}$ הוא $14\cdot S$.

ה. הביעו את k באמצעות S.

8) הקטע AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R.



מסמנים על הקוטר נקודה C ועל המעגל מסמנים נקודה D,
כך שהקטע CD מאונך לקטע AB. הקטע AC גדול מ- R.
דרך הנקודה D מעבירים ישר שמקביל לקוטר AB.
דרך הנקודה A מעבירים משיק למעגל.
הישר המקביל והמשיק נחתכים בנקודה E.
נסמן: $AC = x$.

א. הביעו באמצעות R את הערך של x שבעבורו שטח המלבן ACDE מקסימלי.
הנקודה F נמצאת על הצלע DE.

ב. הביעו באמצעות R את סכום השטחים המקסימלי של המשולשים CDF ו-AFE.

תשובות סופיות:

1) א. (1) הוכחה.
ב. (1) עלייה: $b < x < d$, $x < a$, ירידה: $x > d$, $0 < x < b$, $a < x < 0$ ב. (2) נקודה אחת.
ג. (1) $\max(0,-m+3)$ ג. (2) $\max(0,3+m)$, $(5,m)$, $\min:(-5,m)$.
ג. (3) I. הטענה אינה נכונה, II. הטענה אינה נכונה ד. (1) הוכחה ד. (2) 6.045.

2) א. הוכחה, q^2 ב. I – נכונה, II – לא נכונה, III – נכונה.
ג. $q = -\frac{1}{3}$ ד. $m = 9$.

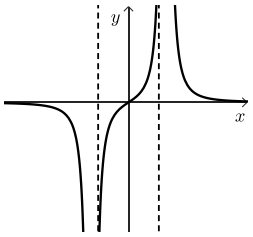
3) א. $P = 0.8$ ב. $\frac{128}{625} = 0.2048$ ג. $\frac{256}{625} = 0.4096$.
ד. $\frac{96}{3{,}125} = 0.03072$ ה. $\frac{1}{10} = 0.1$.

4) א. הוכחה. ב. (1) הוכחה. ב. (2) $\frac{5}{3}$ ב. (3) $\frac{5}{3}$ ג. $\frac{13}{5}S$.

5) א. $AP = \frac{k\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $BP = \frac{k\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ ב. $\alpha = 28.57°$.
ג. $\frac{R_1}{R_2} = 1.785$ ד. בוטל בגלל סתירה בנתונים.

6) א. (1) $x \neq \sqrt{a}$, $x \neq -\sqrt{a}$ א. (2) $x = \sqrt{a}$, $x = -\sqrt{a}$, $y = 0$.
א. (3) תחומי עלייה: $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$, תחומי ירידה: $x > \sqrt{a}$ או $x < -\sqrt{a}$.

ב. להלן סרטוט:



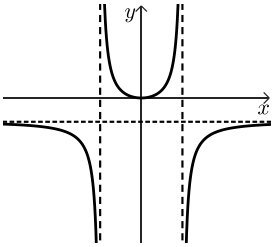
ג. קעירות כלפי מעלה: $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$, קעירות כלפי מטה: $\sqrt{a} < x$ או $x < -\sqrt{a}$.

ד. (1) $g(x) = \frac{-3}{x^2 - a} - \frac{3}{a}$

ה. (1) $x = \sqrt{a}$, $x = -\sqrt{a}$, $y = 0$.

ה. (2) $0 < x < \sqrt{a}$ או $x < -\sqrt{a}$.

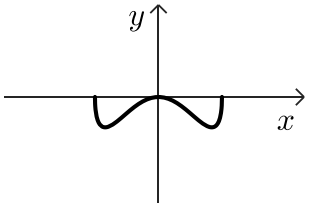
ד. (2) להלן סרטוט:



7) א. (1) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ א. (2) הוכחה. א. (3) $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

(4) $\max\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\min(-1.32,-0.25)$, $\max(0,0)$, $\min(1.32,0.25)$, $\max\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

ב. להלן סרטוט:



ג. תחומי חיוביות: אין, תחומי שליליות: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ או $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

ד. גרף III.

ה. $k = \frac{10S}{\pi}$.

8) א. $\frac{3}{2}R$ ב. $\frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

בגרות קיץ 2024 מועד ב':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.



א. (1) הוכיחו באינדוקצייה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

(2) האם הביטוי: $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)$ שווה ל- $\frac{n+1}{n}$ בעבור כל n טבעי?

נמקו את תשובתכם.



ב. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

נסמן: $\sphericalangle ACB=\alpha$, $0°<\alpha<90°$.

(1) הביעו באמצעות α את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש ABC, ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש AOB.

נתון כי היחס שהבעתם בתת-סעיף (1) שווה ל- $\sqrt{2}$,

וכי הצלע CB משיקה למעגל החוסם את משולש AOB.

(2) הוכיחו כי מרכז המעגל O נמצא על הצלע AC.

ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ורציפה המוגדרת לכל x.

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום אחת בלבד ובה: $x=-\frac{1}{2}$.

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא בנקודה $(1,0)$.

(1) סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית המוגדרת לכל x.

פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת: $g'(x)=-f(x)$.

נתון: $g(1)=2$.

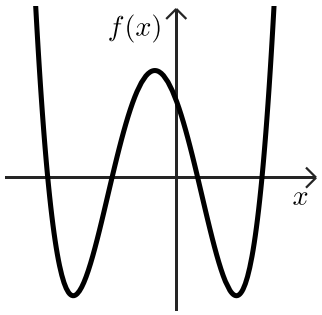
(2) מצאו את שיעורי נקודות המינימום של הפונקציה $g(x)$.

(3) לפניכם שני היגדים I-II. קבעו עבור כל היגד אם הוא נכון או לא נכון.
נמקו את קביעותיכם.

I. שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ הוא בין 0 ל-2.

II. הפונקציה $g(x)$ חיובית לכל x.

ד. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.



אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

(1) קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקציה $f(x)$,
נמקו את קביעתכם:

I. $f(x)=x(x-4)(x+6)$

II. $f(x)=x(x-1)(x+3)(x+6)$

III. $f(x)=(x-4)(x-1)(x+3)(x+6)$

IV. $f(x)=(x-4)(x+1)(x+3)(x+6)$

נתונה הפונקציה: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

(2) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון: $\int_4^7 g(x)dx=k$.

(4) הביעו באמצעות k את הערך של: $\int_5^8\left[\left(2\cdot g(x-1)+1\right)\right]dx$.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונה סדרה הנדסית שבה: $2n+1$ איברים (n הוא מספר טבעי).
כל איברי הסדרה: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n+1}$ הם חיוביים.
סכום איברי הסדרה ללא שני האיברים הראשונים גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה ללא שני האיברים האחרונים.
נתון כי סכום האיברים שנמצאים אחרי האיבר האמצעי גדול פי 256 מסכום האיברים שנמצאים לפני האיבר האמצעי.

א. מצאו את n.

המשיכו את הסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה הנדסית אין-סופית.

נתון: B היא סדרה אין-סופית המקיימת לכל k טבעי: $b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}$

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה.

בסדרה B כופלים כל איבר שנמצא במקום זוגי ב-2.

נתון כי לאחר ההכפלה, סכום האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב- $\frac{1}{30}$ מסכום האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים.

ג. מצאו את a_1.

3) במחקר שנעשה בקרב תלמידים בבית ספר מסוים נבדק הקשר בין חברות בתנועת נוער ובין התנדבות בקהילה. 80% מן החברים בתנועת נוער מתנדבים בקהילה.
בוחרים באקראי 5 תלמידים שחברים בתנועת נוער (הוצאה עם החזרה).

א. מהי ההסתברות שבחרו לפחות תלמיד אחד שמתנדב ולפחות תלמיד אחד שאינו מתנדב?

נתון כי 55% מן התלמידים אינם חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים, ו- $\frac{1}{12}$ מן התלמידים שאינם חברים בתנועת נוער מתנדבים.

ב. כמה אחוזים מן התלמידים חברים בתנועת נוער?

במחקר השתתפו 100 תלמידים סך הכול.

ג. כמה מן התלמידים חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים?

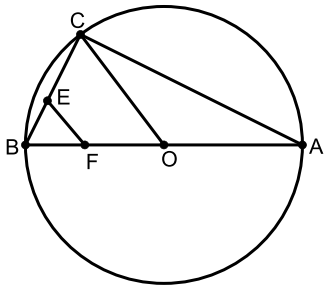
ד. בוחרים באקראי 3 מן התלמידים שאינם מתנדבים (הוצאה ללא החזרה).

(1) מהי ההסתברות שהתלמיד הראשון שנבחר חבר בתנועת נוער וששני התלמידים שנבחרו אחריו אינם חברים בתנועת נוער?

(2) מהי ההסתברות שאחד מן התלמידים שנבחרו חבר בתנועת נוער והשניים האחרים אינם חברים בתנועת נוער אם ידוע שהתלמיד הראשון שנבחר אינו חבר בתנועת נוער?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-AB הוא קוטר במעגל.



הנקודה E נמצאת על הצלע BC, והנקודה F נמצאת על הקטע BO,כמתואר בסרטוט.

נתון כי המרובע CEFO הוא בר חסימה במעגל.

א. הוכיחו: $EF = EB$.

המעגל החוסם את המרובע CEFO חותך את הצלע AC בנקודה D כך ש-ED מקביל ל-AB.

ב. (1) הוכיחו כי המרובע EDOB הוא מקבילית.

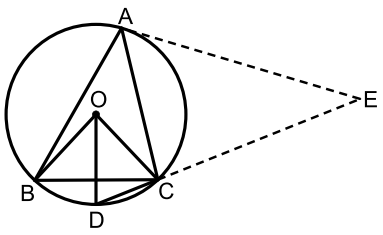
(2) הוכיחו: $OD \perp AC$.

הישר ℓ משיק בנקודה C למעגל החוסם את המשולש ABC.

ג. הוכיחו כי הישר ℓ משיק למעגל החוסם את המרובע CEFO.

5) משולש ABC חד זוויות חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

הנקודה D היא אמצע הקשת הקטנה BC, כמתואר בסרטוט.



נתון: $\sphericalangle ABC = 60°$

נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$

א. הביעו באמצעות R ו- α את שטחי המשולשים ABC ו-ODC.

נתון כי היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ODC הוא: $2\sqrt{3}\sin(80°)$.

ב. מצאו את הערך של α.

הנקודה E נמצאת על המשך המיתר DC כך ש- $\sphericalangle CAE = 50°$, כמתואר בסרטוט.

ג. הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החסום במשולש ACE.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-1}{(x-a)^3}$, המוגדרת בתחום: $x\neq a$, a הוא פרמטר שונה מ-0.

א. ענו על התת-סעיפים (1)-(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y.

ב. מצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון שנמצאת משמאל לאסימפטוטה האנכית לציר ה- x, וקבעו את סוגה.

הגרפים 1-4 שבסוף השאלה מתארים את הפונקציה $f(x)$ בעבור ערכים שונים של a.

ג. התאימו לכל אחד מן הערכים I-IV של a את הגרף המתאים לו, ונמקו את תשובותיכם.

I. $a=-1$ II. $a=0.5$ III. $a=1$ IV. $a=2$

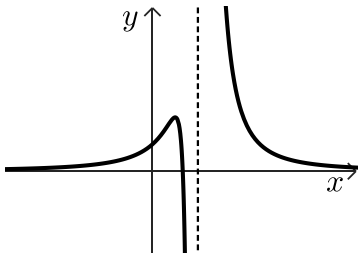
נתונה הפונקציה $g(x)$, המקיימת: $g(x)=f(x)-b$ בעבור הערך של a המתאים לגרף 2. b הוא פרמטר חיובי.

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x היא: $(t,0)$, $1<t<5$.

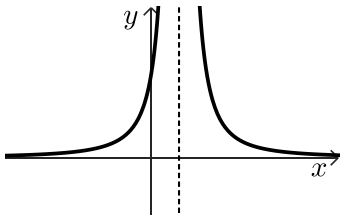
נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר $x=t$ ועל ידי הישר $x=5$ הוא 1.75.

ד. מצאו את הערך של b.

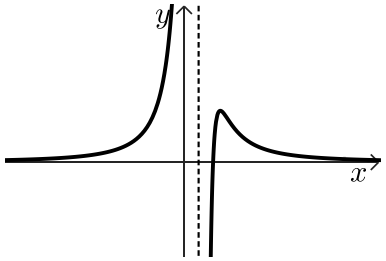
1



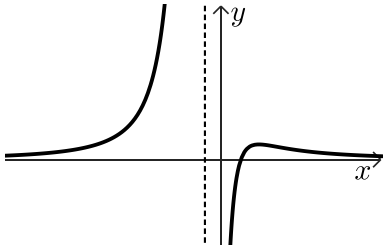
2



3



4



7) נתונה הפונקציה: $f(x)=(b+\cos x)\sin x$, המוגדרת בתחום: $-\pi \le x \le \pi$,

b הוא פרמטר.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי לגרף הפונקציה $f(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה- x.

ב. לפניכם שלוש אפשרויות I-III לערכים של b.

קבעו איזו אפשרות יכולה להתאים לפונקציה $f(x)$, ונמקו את קביעתכם.

I. $b=0$ II. $0<b<1$ III. $1\le b$

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$, כאשר: $\cos x=\frac{1}{4}$, הוא: $-\frac{5}{8}$.

ג. מצאו את הערך של b.

הציבו $b=1$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=(f(x))^2\cdot f'(x)$.

הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום: $0\le x\le \pi$.

ו. חשבו את השטח ברביע הראשון, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}$, המוגדרת בתחום: $x\geq 0$,

ונתונה הפונקציה: $g(x)=\dfrac{16}{x^2+3}$, המוגדרת לכל x.

א. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה $g(x)$.

(3) סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

בנקודה $C(t,0)$ מעבירים אנך לציר ה-x, $t>0$.

האנך חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

ב. הביעו באמצעות t את מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC.

ג. הוכיחו כי מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC מקסימלית כאשר הנקודה B היא נקודת פיתול של הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $k(x)=\dfrac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2+3}$, המוגדרת בתחום: $x\geq 4$.

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים של השאלה.

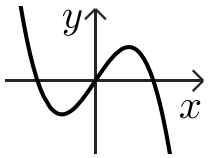
מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $k(x)$,

וקבעו את סוגה. נמקו את תשובתכם.

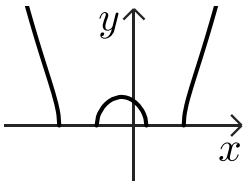
תשובות סופיות:

1) א. (1) הוכחה א. (2) לא ב. (1) $2\cos\alpha$ ב. (2) הוכחה.

ג. (1) להלן סרטוט: ג. (2) $(1,2)$, $(-1,2)$ ג. (3) I. אינו נכון, II. נכון.



ד. (1) ביטוי III ד. (2) $x\geq 4$, $-3\leq x\leq 1$, $x\leq -6$ ד. (3) להלן סרטוט:



ד. (4) $2k+3$.

2) א. $n=7$ ב. הוכחה, $\dfrac{1}{4}$ ג. $a_1=\dfrac{4}{3}$.

3) א. 0.672 ב. 40% ג. 8 ד. (1) 0.0097

ד. (2) 0.228.

4) א. הוכחה. ב. (1) הוכחה. ב. (2) הוכחה. ג. הוכחה

5) א. $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}R^2\sin\alpha\sin(120^\circ-\alpha)$, $S_{\Delta ODC}=\frac{R^2\sin\alpha}{2}$ ב. $\alpha=40^\circ$.

ג. $r=0.52R$.

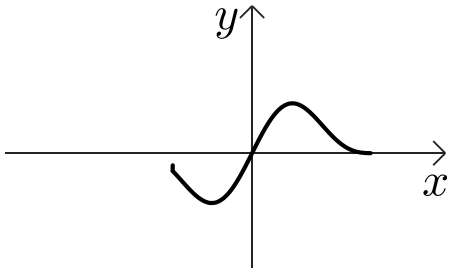
6) א. (1). אנכית: $x=a$, אופקית: $y=0$ (2). $\left(0,\frac{1}{a^3}\right)$.

ב. $a>1$, מקסימום. ג. גרף 1: IV , גרף 2: III, גרף 3: II , גרף 4: I ד. $b=4$.

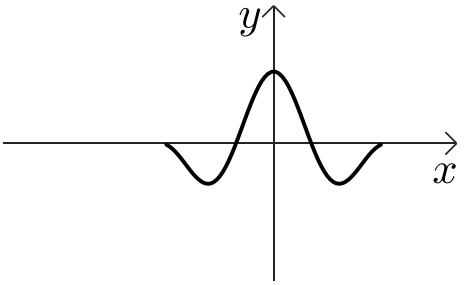
7) א. אי זוגית. ב. $b\geq 1$ ג. $b=1$.

ד. $\min(\pi,0)$, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $\max(-\pi,0)$.

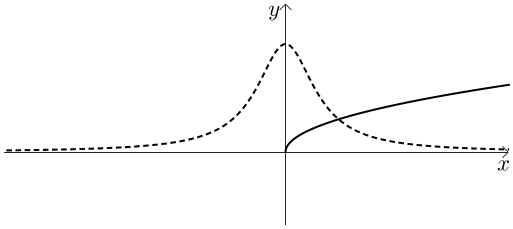
ה. (1) להלן סרטוט:



ה. (2) להלן סרטוט: ו. $\frac{27\sqrt{3}}{64}$.



8) א. (1) $\max\left(0,5\frac{1}{3}\right)$ א. (2) $(1,4)$, $(-1,4)$ א. (3) להלן סרטוט:



ב. $AC\cdot BC=\frac{16\sqrt{t}}{t^2+3}$ ג. הוכחה. ד. $\max(5,2)$.

שאלון 571 לכיתות יא

פרק 40

פתרון בוידאו של בחינות שנת 2023

מועד חורף 71
קיץ מועד א 78
קיץ מועד א דרום 85
קיץ מועד ב 92

בגרות חורף 2023:

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. ידוע כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2+4\cdot 7+7\cdot 12+\ldots+(3n-2)(5n-3)=n(5n^2-2n-1)$$

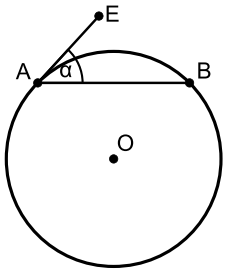
(1) חשבו את הערך של הביטוי: $7\cdot 12+10\cdot 17+\ldots+58\cdot 97$

ידוע כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2+4\cdot 7+7\cdot 12+\ldots+(3n-2)(5n-3)+(3n+1)(5n+2)=(n+1)(5n^2+8n+C)$$

(2) מצאו את הערך של C.

ב. הנקודה A נמצאת על מעגל שמרכזו O.
מעבירים משיק למעגל בנקודה A, והוא יוצר זווית של α מעלות עם המיתר AB (ראו סרטוט).



(1) הביעו באמצעות α את הזווית AOB.

(2) הביעו באמצעות α את היחס בין אורך הקשת הקטנה AB ובין היקף המעגל.

ג. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$ המוגדרת לכל x השונה מ-0.

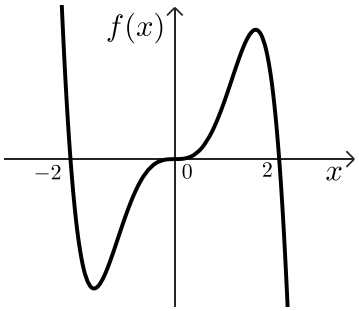
(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) נתונה הפונקציה: $g(x)=k\cdot f(x+3)$, $k>0$ הוא פרמטר.

מצאו את הערך של k שעבורו המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה $g(x)$ הוא 10. נמקו את תשובתכם.

ד. $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית המוגדרת לכל x.

הגרף שלפניכם מתאר את הפונקציה $f(x)$.



נתונה הפונקציה $g(t)$ המוגדרת בתחום: $-2\le t\le 2$

ומקיימת: $g(t)=\int_{-2}^{t} f(x)dx$.

(1) קבעו באיזה תחום הפונקציה $g(t)$ יורדת.

(2) האם קיימים ערכים של t (בתחום: $-2\le t\le 2$) שעבורם הפונקציה $g(t)$ חיובית? נמקו את תשובתכם.

(3) האם לפונקציה $g(t)$ יש נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונות נתונה סדרה הנדסית אינסופית A, שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.
בונים סדרה חדשה B, שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.

א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.

ב. בנוגע לכל אחד מההיגדים (1)-(2) שלהלן, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

(1) אם הסדרה A לא מתכנסת - בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

(2) אם הסדרה A יורדת - בהכרח היא גם מתכנסת.

נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום של כל איברי הסדרה A הוא $\frac{4}{7}$.

ג. מצאו את q.

נתון: n הוא מספר טבעי המקיים $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\ldots+\frac{b_n}{a_n}=\frac{3367}{1024}$.

ד. מצאו את n.

3) בחנות פירות יש ארגזים ובתוכם פירות. בארגז א' יש a פירות: 6 תפוחים והשאר אגסים.
בארגז ב' יש b פירות: 11 תפוחים והשאר אגסים.
מוציאים באקראי פרי אחד מארגז א'.
אם יצא תפוח - מעבירים אותו לארגז ב', ואם יצא אגס - מחזירים אותו לארגז א'.
לאחר מכן מוציאים באקראי פרי אחד מארגז ב'.

א. הביעו באמצעות a ו-b את ההסתברות שיצאו 2 תפוחים.

נתון: ההסתברות להוציא באופן המתואר 2 תפוחים היא $\frac{9}{65}$.

ההסתברות להוציא באופן המתואר תפוח אחד ואחר כך אגס אחד היא $\frac{21}{130}$.

ב. מצאו את a ו-b.

ג. חשבו את ההסתברות שמארגז ב' יצא אגס, אם ידוע כי מארגז א' יצא תפוח.

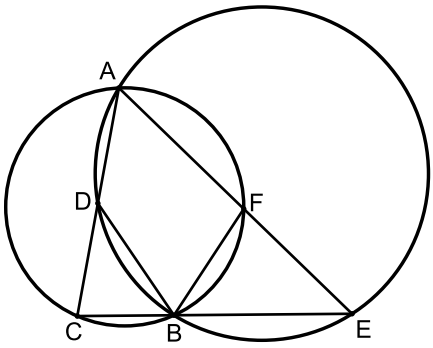
מעבירים את כל הפירות משני הארגזים לארגז אחר, שהיה ריק, ומוציאים ממנו באקראי פרי 6 פעמים, עם החזרה.

ד. מצאו את ההסתברות שב-4 מהפעמים בדיוק יצא תפוח <u>או</u> שבכל 6 הפעמים יצא אגס.

ה. ידוע שב-4 מהפעמים בדיוק יצא תפוח. מצאו את ההסתברות שהתפוחים יצאו ברציפות, בזה אחר בזה.

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B (ראו סרטוט).
המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה D.
המיתר AE במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.
הקטע CE עובר דרך הנקודה B.



א. הוכיחו כי $\Delta ACE \sim \Delta BCD$.

נתון: $DC = FE$.

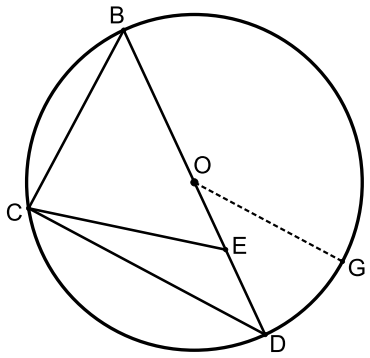
ב. הוכיחו כי $\Delta BFE \cong \Delta BCD$.

ג. (1) הוכיחו כי $AC \cdot BE = AE \cdot BC$.

(2) הוכיחו כי AB הוא חוצה זווית CAE.

ד. הוכיחו כי $\sphericalangle FCE = \sphericalangle DEC$.

5) משולש BCD חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.
הנקודות O ו-E נמצאות על הצלע BD, כך שמתקיים $OE = ED$ (ראו סרטוט).
נסמן $CD = k$, $\sphericalangle CDB = \alpha$.



א. הביעו את $\cos\alpha$ באמצעות k ו- R.

ב. הוכיחו כי $CE = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 + R^2}$.

נתון: $BC = EC$.

ג. חשבו את α.

מעבירים רדיוס OG, המקביל לצלע CD, כמתואר בסרטוט.

ד. חשבו את גודל הזווית OEG.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

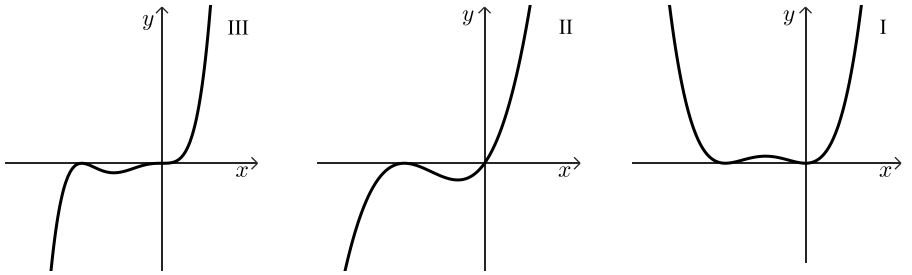
6) נתונה הפונקציה $f(x)=x^n\cdot(x+1)^2$, כאשר $n>1$ מספר טבעי, והפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
הבחינו בין n זוגי לבין n אי-זוגי.

ג. מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
הביעו את תשובתכם באמצעות n, אם יש צורך.
הבחינו בין n זוגי לבין n אי-זוגי.

לפניכם שלושה גרפים I-III. אחד מהגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור n זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור $n>1$ ואי-זוגי.



ד. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור n זוגי, ואיזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור $n>1$ ואי-זוגי. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x-6)$, כאשר k הוא פרמטר חיובי.
נסמן ב- A את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$ ובין ציר ה- x.

ה. הביעו באמצעות k ו- A את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין ציר ה- x. נמקו.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4\sin(x)}{\cos^2(x)-1}$, בתחום $-2\pi \le x \le 2\pi$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה- x.

(3) האם הפונקציה $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית?

הוכיחו את תשובתכם.

ב. ענו על סעיפים (1)-(2) שלהלן עבור התחום $0 \le x \le 2\pi$.

(1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ (בתחום $-2\pi \le x \le 2\pi$).

ד. הוכיחו כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה- x, בתחום $1.9 \le x \le 2.2$.

8) לפניכם שלוש פונקציות, שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x)=\frac{x^3-1}{x^2(x+2)} \quad , \quad h(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)} \quad , \quad k(x)=\frac{x^3}{x(x+2)}$$

ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקציה מקיימת את כל התכונות הללו. נמקו.

ענו על סעיפים ב-ד עבור הפונקציה שקבעתם בסעיף א.

ב. (1) מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ושל האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

נתון כי לפונקציה זו אין נקודות קיצון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

נסמן נקודה D על גרף הפונקציה, שעבורה $x=t$, $-1<t<1$.

מהנקודה D מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה- x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקציה, כך שנוצר מלבן על ידי הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה- x.

ד. מצאו את ערכו של t, שעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי.

תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

תשובות סופיות:

1) א. (1) 31,150 (2) $C=2$ ב. (1) $\sphericalangle AOB=2\alpha$ (2) $\frac{\alpha}{180}$.

ג. (1) $x=0$, $y=2$, $y=-2$ (2) $k=2.5$.

ד. (1) $-2<t<0$ (2) אין (3) 2 נקודות.

2) א. הוכחה. ב. (1) נכון. (2) לא נכון. ג. $q=\frac{3}{4}$ ד. $n=6$.

3) א. $\frac{72}{a(b+1)}$ ב. $a=20$ ג. $\frac{7}{13}$ ד. 0.176 ה. 0.2.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

5) א. $\cos\alpha=\frac{k}{2R}$ ב. הוכחה. ג. $\alpha=37.76°$ ד. $\sphericalangle OEG=115.38°$.

6) א. $(-1,0)$, $(0,0)$ ב. עבור n זוגי: תחום חיובית: $x>0$, $-1<x<0$, $x<-1$

(אין תחום שליליות). עבור n אי-זוגי: תחום חיוביות: $x>0$, תחום שליליות:

$-1<x<0$, $x<-1$. ג. עבור n זוגי: מינימום: $x=-1,0$, מקסימום: $x=-\frac{n}{n+2}$.

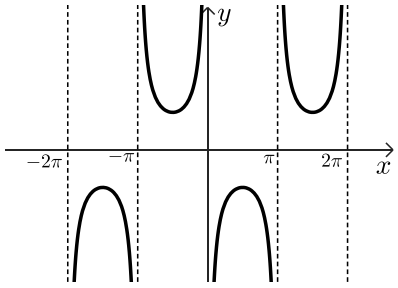
עבור n אי-זוגי: מינימום: $x=-\frac{n}{n+2}$, מקסימום: $x=-1$.

ד. עבור n זוגי: גרף I. עבור $n>1$ אי-זוגי: גרף III. ה. $\frac{A}{k}$.

7) א. (1) $x\neq 0$, $x\neq\pm\pi$, $x\neq\pm 2\pi$ (2) $x=0$, $x=\pm\pi$, $x=\pm 2\pi$.

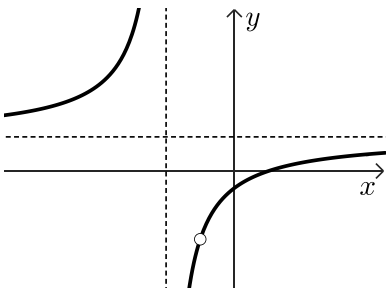
א. (3) אי זוגית. ב. (1) אין חיתוך. (2) $\min\left(\frac{3\pi}{2},4\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{2},-4\right)$.

ג. להלן סקיצה: ד. הוכחה. ה. 0.72.



8) א. $h(x)$ ב. (1) $y=1$, $x=-2$ (2) $(1,0)$, $(0,-0.5)$

ג. להלן סקיצה: ד. $t=-2+\sqrt{3}$.



בגרות קיץ 2023 מועד א':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתונות שתי סדרות המוגדרות לכל n טבעי: $a_n = 2n-1$, $b_n = 2^n$.

נסמן: $T_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.

(1) הוכיחו כי:

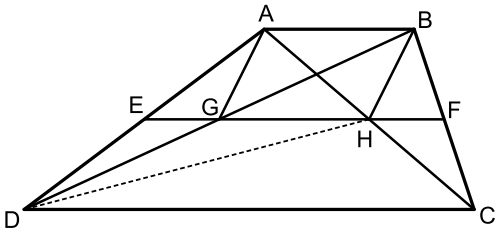
אם בעבור k טבעי כלשהו מתקיים: $T_k = (2k-3)\cdot 2^{k+1}$

אז מתקיים: $T_{k+1} = (2k-1)\cdot 2^{k+2}$

לפניכם טענה: לכל n טבעי מתקיים: $T_n = (2n-3)\cdot 2^{n+1}$

(2) הסבירו מדוע טענה זו אינה נכונה.

ב. בטרפז $ABCD$ $(AB||CD)$ הקטע EF הוא קטע אמצעים.



הקטע EF חותך את האלכסונים AC ו-BD של הטרפז בנקודות H ו-G בהתאמה.

נתון כי המרובע $ABHG$ הוא מקבילית.

(1) הוכיחו: $GH = 2EG$.

המשך הישר AG חותך את הקטע DH בנקודה M.

(2) הוכיחו: הקטע AM חוצה את הקטע DH.

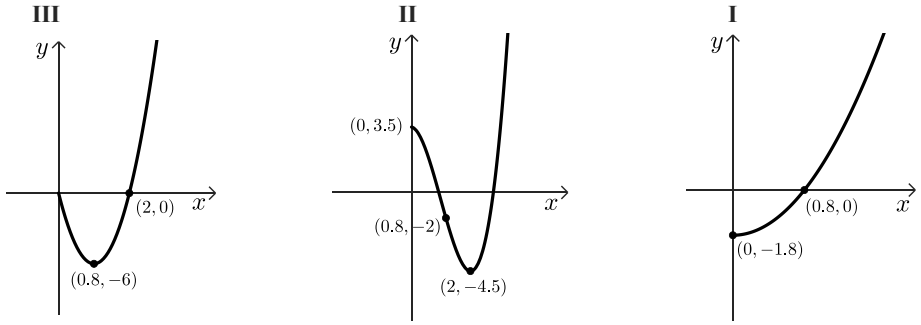
ג. לפניכם הגרפים I-III, המייצגים את הפונקציה $f(x)$,
את פונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$, ואת פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.
הפונקציות מוגדרות עבור: $0 \le x \le 3$.

(1) התאימו כל אחד מן הגרפים I-III לכל אחת מן הפונקציות: $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$,
נמקו.

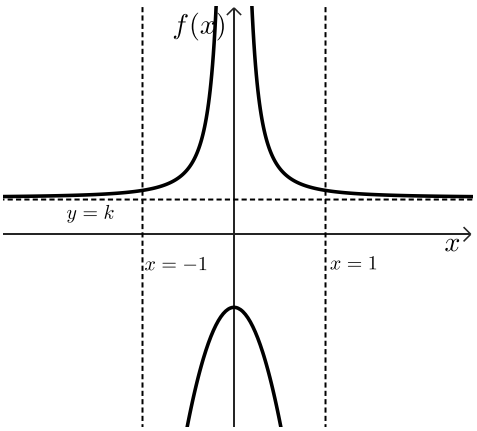
ענו על התת-סעיפים (2)-(3) על פי הנתונים המופיעים בגרפים I-III.

(2) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה.

(3) מצאו את הערך של האינטגרל: $\int_0^{0.8} f''(x)dx$.



ד. לפניכם הגרף של הפונקציה $f(x)$.
הפונקציה $f(x)$ מוגדרת עבור: $x \ne 1$, $x \ne -1$.
משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$
הן: $x = 1$, $x = -1$, $y = k$, $k > 1$.
שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$
עם ציר ה- y הם: $(0,-a)$, a הוא מספר חיובי.



(1) מצאו עבור אילו ערכים של a יש לגרפים
של הפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ שתי נקודות חיתוך. נמקו.

(2) נתון כי המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של הפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ הוא 1.5.
מהו הערך של k? נמקו.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונות שתי סדרות הנדסיות אינסופיות מתכנסות A ו-B, שכל איבריהן שונים מ-0.

האיבר הכללי של הסדרה A הוא a_n ומנתה היא q_A.

האיבר הכללי של הסדרה B הוא b_n ומנתה היא q_B.

משתי הסדרות ההנדסיות A ו-B בונים סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת חדשה שאיבריה הם: $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$.

כל שלוש הסדרות, הסדרה A, הסדרה B והסדרה החדשה אינן קבועות.

א. הביעו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות q_A ו- q_B.

הסדרה A אינה עולה ואינה יורדת, והסדרה B עולה.

ב. בנוגע לכל אחד משני ההיגדים (1) – (2) שלפניכם, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

(1) מנת הסדרה החדשה היא חיובית.

(2) כל איברי הסדרה B הם שליליים.

המספרים c_1, c_2 ו- c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית.

נתון כי c_2 שווה ל- $-c_1$, ומתקיים גם: $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{24}$.

ג. מצאו את c_1.

נתון כי המנה של הסדרה A שווה ל- c_1, ומתקיים גם: $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \ldots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots}$.

ד. מצאו את הערך של q_B.

3) במכללה גדולה הועלתה הצעה לקצר את הפסקת הצהריים כדי לסיים מוקדם יותר את יום הלימודים. בעקבות זאת ערכו משאל ובו השתתפו כל תלמידי שנה א' וכל תלמידי שנה ב'.

על פי תוצאות המשאל התברר כי 80% מן המשתתפים שבעד ההצעה הם תלמידי שנה א'.

עוד התברר כי מספר תלמידי שנה א' שבעד ההצעה שווה למספר תלמידי שנה ב' שנגד ההצעה. מבין המשתתפים במשאל לא היו נמנעים. נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שבעד ההצעה מבין כל התלמידים שהשתתפו במשאל.

א. בחרו באקראי אחד מתלמידי שנה ב'. מהי ההסתברות שהוא נגד ההצעה?

ידוע כי ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה א' הוא בעד ההצעה, גדולה ב- $\frac{13}{35}$ מן ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה ב' הוא בעד ההצעה.

ב. חשבו את הערך של p.

ג. בחרו באקראי אחד מן המשתתפים במשאל.

חשבו את ההסתברות שמתקיים לפחות אחד משני התנאים האלה:

(1) המשתתף שנבחר הוא תלמיד שנה ב'.

(2) המשתתף שנבחר בעד ההצעה.

ד. בחרו באקראי 5 מן המשתתפים במשאל.

ידוע כי כל החמישה שנבחרו הם תלמידי שנה ב'.

מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם בעד ההצעה וגם לפחות שניים מהם נגד ההצעה?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

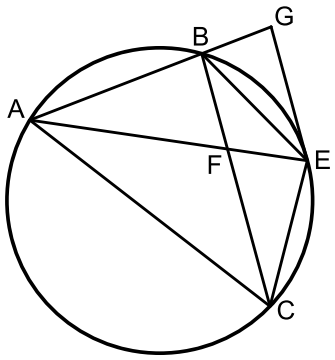
4) הנקודות A, B ו-C נמצאות על מעגל.

נקודה E היא אמצע הקשת BC, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

בנקודה E מעבירים משיק למעגל.

המשיק חותך את המשך המיתר AB בנקודה G.

המיתרים AE ו-BC נחתכים בנקודה F.



א. הוכיחו: $\Delta ACE \sim \Delta AEG$.

נתון: $AG = 18$, $AE = 9\sqrt{6}$.

ב. חשבו את אורך המיתר AC.

ג. הוכיחו: $BC \parallel GE$.

נתון: שטח המשולש ABF גדול פי 2 משטח המשולש BFE.

ד. חשבו את אורך המיתר AB.

ה. מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC?

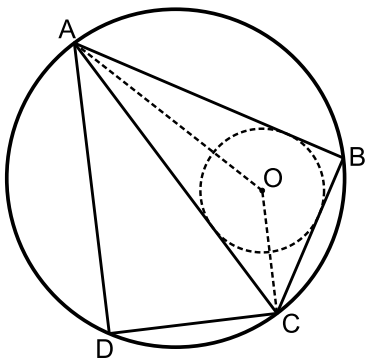
נמקו את תשובתכם.

5) דלתון ABCD חסום במעגל שרדיוסו R.

המיתר AC הוא האלכסון הראשי של הדלתון.

הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC

(ראו סרטוט). נסמן: $\sphericalangle CAB = \alpha$.



א. (1) מצאו את זוויות המשולש AOC

(הביעו באמצעות α במידת הצורך).

(2) הביעו את אורך הקטע AO באמצעות α ו- R.

נתון כי אורך הקטע AO הוא $R\sqrt{2}$.

ב. מצאו את גודל הזווית α.

נתון כי שטח הדלתון הוא $16\sqrt{3}$.

ג. מצאו את R.

ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החוסם את הדלתון לבין מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2a-x^2}{x}$, המוגדרת עבור $x\neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.

(2) הראו שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.

(4) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$, אם יש כאלה.

(5) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ ואת תחום הקעירות כלפי מטה $(\cap)$ של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x)=|f(x)|-b$, b הוא פרמטר חיובי.

הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ היא: $(3,-8)$.

ד. מצאו את הערכים של a ו-b.

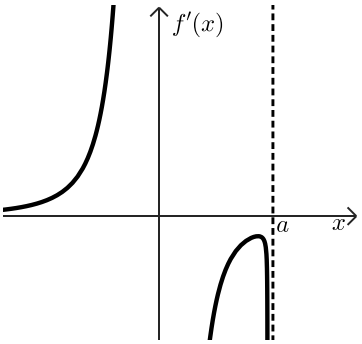
נתונה גם הפונקציה: $s(x)=\int_1^x g(t)dt$, המוגדרת בתחום: $x>1$.

ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתכם.

7) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום: $x \le a$, $x \ne 0$,

a הוא פרמטר חיובי.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום: $x \ne 0$, $x < a$.

לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש שלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים שמשוואותיהן: $y = 0$, $x = a$, $x = 0$.

בתחום: $x < 0$ פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עולה.

הישר $x = 0$ הוא אסימפטוטה גם לגרף הפונקציה $f(x)$.

$f(a) = 0$.

א. (1) מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקציה $f(x)$

(הביעו את תשובתכם באמצעות a, אם יש צורך). נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו.

נתון כי הישר: $y = 0$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$, בהתאם לתשובתכם בתת סעיף א(2).

נתון כי אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

I. $\frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$ II. $\frac{\sqrt{x-a}}{x^2}$ III. $\frac{\sqrt{a-x}}{x}$ IV. $\frac{\sqrt{x-a}}{x}$

ג. איזה מן הביטויים I-IV מייצג את הפונקציה $f(x)$? נמקו.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = (-2)$, הוא: $\frac{7}{16}$.

ד. מצאו את הערך של a.

ה. הציבו $a = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $(f(x))^2$,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר: $x = 1$.

8) נתון מעוין ABCD. נקודה E היא אמצע הצלע BC.

נסמן: $\sphericalangle ECD = x$.

נתון: שטח המשולש ECD הוא 25.

א. הביעו באמצעות x את אורך צלע המעוין.

ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE.

תשובות סופיות:

1) א. (1). הוכחה. א. (2) הטענה אינה נכונה עבור $n=1$. ב. הוכחה.

ג. (1) $III: f'(x)$, $II: f(x)$, $I: f''(x)$ ג. (2) $y=-6x+2.8$ ג. (3) -6.

ד. (1) $0<a<1$ ד. (2) $k=2$.

2) א. $\frac{q_A}{q_B}$ ב. (1). לא נכון. ב. (2). נכון. ג. $c_1=-\frac{1}{8}$ ד. $q_B=\frac{1}{4}$

3) א. 0.8 ב. $\frac{5}{12}$ ג. $\frac{3}{4}$ ד. $\frac{32}{125}=0.256$

4) א. הוכחה. ב. $AC=27$ ג. הוכחה. ד. $AB=12$ ה. $\frac{4}{9}$

5) א. (1). $\frac{\alpha}{2}$, $-\frac{\alpha}{2}$, $45°$, $135°$ א. (2). $AO=2\sqrt{2}R\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$

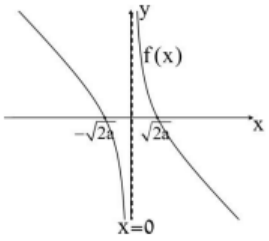
ב. $\alpha=30°$ ג. $R=4$ ד. 2.07

6) א. (1). $x=0$ א. (2). הוכחה. א. (3). $\left(\sqrt{2a},0\right)$, $\left(-\sqrt{2a},0\right)$

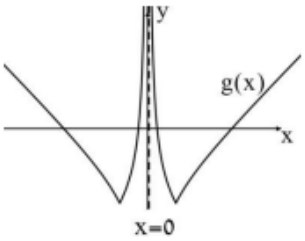
א. (4). תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x>0$ או $x<0$.

א. (5). תחומי קעירות כלפי מעלה: $x>0$, תחומי קעירות כלפי מטה: $x<0$.

ב. סרטוט:



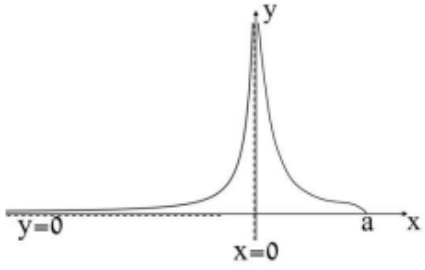
ג. סרטוט:



ד. $a=4.5$, $b=8$ ה. נקודת מינימום.

7) א. (1). תחומי עלייה: $x<0$, תחומי ירידה: $0<x<a$. א. (2). נקודה אחת.

ב. סרטוט: ג. ביטוי I ד. $a=2$ ה. $\frac{5}{24}$



8) א. $\frac{10}{\sqrt{\sin x}}$ ב. $5\sqrt{3}=8.66$.

בגרות קיץ 2023 מועד מיוחד:

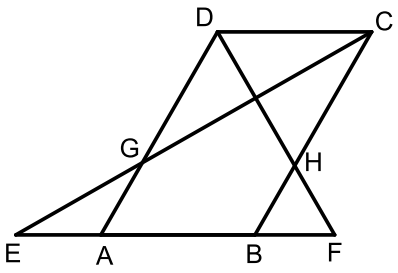
יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בסרטוט שלפניכם מקבילית $ABCD$.
הנקודות E ו-F נמצאות על המשכי הצלע AB, כמתואר בסרטוט.
הקטע EC חותך את הצלע AD בנקודה G.
הקטע FD חותך את הצלע BC בנקודה H.
נתון: $HF = 4$, $GE = 5$.



(1) מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש HBF ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש GEA.
נמקו את תשובתכם.

נתון: המרובע $ABHD$ הוא בר-חסימה במעגל, $BH = FH$.

(2) הוכיחו כי המשולש HBF הוא שווה צלעות.

ב. ביישוב מסוים ההסתברות לבחור באקראי גבר היא 0.2, וההסתברות לבחור באקראי אישה היא 0.8.
בוחרים באקראי 4 אנשים מיישוב זה.
לפניכם שני ביטויים:

ביטוי 1: $1-0.2^4-0.8^4$

ביטוי 2: $\binom{4}{3}\cdot 0.2^3\cdot 0.8+0.2^4$

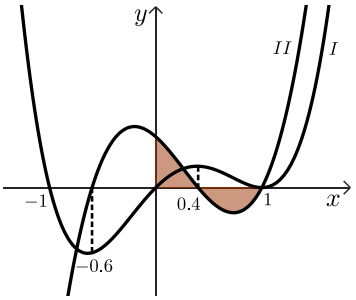
קבעו איזו מן ההסתברויות I-III שלפניכם אפשר לחשב על ידי ביטוי 1 ואיזו מהן אפשר לחשב על ידי ביטוי 2.

I. ההסתברות לבחור באקראי יותר גברים מנשים.

II. ההסתברות לבחור באקראי יותר נשים מגברים.

III. ההסתברות לבחור באקראי לפחות גבר אחד ולפחות אישה אחת.

ג. $f(x)$ היא פונקציה.



בסרטוט שלפניכם מוצגים שני גרפים: גרף I וגרף II.

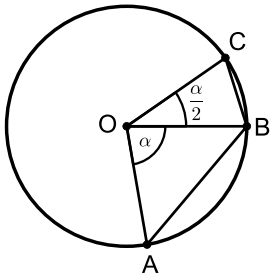
אחד הגרפים הוא של פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

והגרף האחר הוא גרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

(1) איזה גרף הוא של $f'(x)$, ואיזה גרף הוא של $f''(x)$? נמקו.

(2) הוכיחו שהשטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי ציר ה- x
ברביע הרביעי שווה לשטח המוגבל על ידי גרף II,
על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y ברביע הראשון.

ד. במעגל שמרכזו O בונים סדרה אין-סופית של משולשים שווי שוקיים.



זווית הראש של המשולש הראשון (ΔAOB) היא α.

זווית הראש של המשולש השני (ΔBOC) היא $\frac{\alpha}{2}$, כמתואר בסרטוט.

ממשיכים לבנות משולשים שווי שוקיים כך שזווית הראש של
כל משולש נוסף בסדרה קטנה פי 2 מזווית הראש של המשולש שלפניו.

נתון: סכום כל זוויות הראש של כל המשולשים בסדרה הוא $240°$.

(1) מצאו את α.

(2) האם שטחי כל המשולשים האלה הם סדרה הנדסית? נמקו את תשובתכם.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונה סדרה חשבונית A ובה $2n$ איברים (n הוא מספר טבעי).
d הוא הפרש הסדרה $(d \neq 0)$.

מגדירים סדרה נוספת B באופן הזה: $b_t = \frac{a_t + a_{t+1}}{2}$.

בסדרה B יש $2n-1$ איברים.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה חשבונית, והביעו באמצעות d את ההפרש שלה.

נסמן ב- S_A את סכום האיברים בסדרה A.

נסמן ב- S_B את סכום האיברים בסדרה B.

ב. הוכיחו: $\frac{S_A}{2n} = \frac{S_B}{2n-1}$.

נתון: $S_A = \frac{66}{65} \cdot S_B$, $S_A = 220 + S_B$.

ג. (1) מצאו את n.

(2) מצאו את סכום שני האיברים האמצעיים בסדרה A.

3) כדי להתקבל ללימודים בפקולטה מסוימת מועמד צריך להיבחן בשני מבחנים.
ההסתברות שמועמד יצליח במבחן הראשון היא P , $(P > 0.5)$.

אם המועמד הצליח במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני היא: $P + 0.1$.

אם המועמד נכשל במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני היא: $P - 0.4$.

נתון כי ההסתברות שהמועמד יצליח בדיוק במבחן אחד מבין השניים היא $\frac{1}{4}$.

א. מצאו את P.

כדי להתקבל ללימודים בפקולטה המועמד צריך להצליח בשני המבחנים.

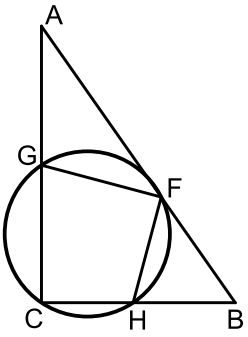
ב. ידוע כי מועמד הצליח לפחות במבחן אחד. מהי ההסתברות שהוא התקבל לפקולטה?

שלושה מועמדים נבחנו בשני המבחנים.

ג. מהי ההסתברות ששני מועמדים מבין השלושה התקבלו לפקולטה ואחד מהם נכשל בשני המבחנים?

n מועמדים נבחנו בשני המבחנים $(n \geq 2)$.

ד. הביעו באמצעות n את ההסתברות שלפחות מועמד אחד התקבל לפקולטה וגם לפחות מועמד אחד לא התקבל לפקולטה.



4) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית, $\sphericalangle ACB = 90°$.
הנקודות H, G ו-F נמצאות על הצלעות CB, AC ו-AB בהתאמה,
כך שהמרובע GCHF חסום במעגל (ראו סרטוט).
נתון: AB משיק למעגל בנקודה F, $GH \parallel AB$.

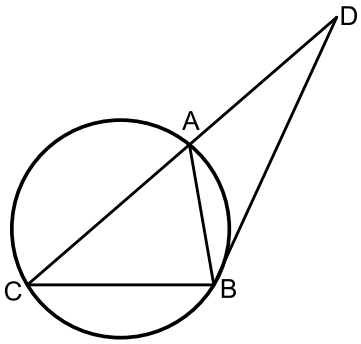
א. הוכיחו: $FG = FH$.

ב. (1) מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle ACF$.

(2) הוכיחו: $\Delta GFC \sim \Delta FBC$.

קוטר המעגל היוצא מנקודה F חותך את הצלע AC בנקודה E.

ג. הוכיחו: $\sphericalangle FCB = \sphericalangle FEB$.



5) המשולש ABC חסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R. המשיק
למעגל בנקודה B חותך את המשך הצלע CA בנקודה D,
כמתואר בסרטוט. נסמן: $\sphericalangle ABD = \alpha$. נתון: $\sphericalangle DBC = 120°$.

א. הביעו את אורכי הצלעות AB ו-BC באמצעות R ו- α,
אם יש צורך.

נתון: היחס בין שטח המשולש BDC ובין שטח המשולש BDA
הוא 1.8.

ב. מצאו את α.

נתון כי רדיוס המעגל החסום במשולש BDA הוא 6.

ג. מצאו את R.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin(x)\cdot\cos^3(x)$ המוגדרת בתחום: $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

א. (1) האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית? נמקו.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

(3) סרטטו (בקו מקווקו) סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים שבה סרטטתם את גרף הפונקציה $f(x)$.

ענו על סעיף ג בעבור התחום שבו מוגדרות שתי הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

ג. מצאו את המרחק המינימלי בין הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+\sqrt{x^2-9}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ וכלפי מטה $(\cap)$ של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x)=-f(-x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

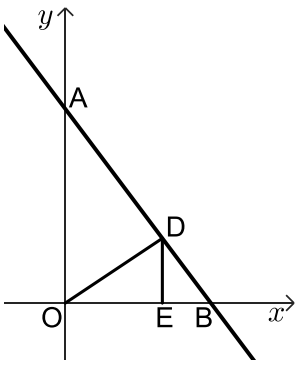
ג. באותה מערכת צירים שבה סרטטתם סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, הוסיפו בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

נתון: $a>5$ הוא פרמטר.

ד. סדרו את הביטויים I-III שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר (כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה).

I. $\int_{a}^{a+1}\left(f(x)-h(x)\right)dx$ II. $\int_{a+1}^{a+2}\left(f(x)-h(x)\right)dx$ III. $\int_{-a+1}^{-a+2}\left(f(x)-h(x)\right)dx$

8) הנקודה E ישר ששיפועו 2- חותך את החלק החיובי של ציר ה- x בנקודה B, ואת החלק החיובי של ציר ה- y בנקודה A.



הנקודה D נמצאת על הישר AB ברביע הראשון.

הנקודה E נמצאת על ציר ה- x כך שהקטע DE מקביל לציר ה- y.

הנקודה O היא ראשית הצירים, כמתואר בסרטוט.

נסמן את אורך הקטע OE ב- p.

נתון: שטח המשולש OED הוא $\frac{p}{2}$.

א. הביעו באמצעות p את משוואת הישר AB.

ב. מצאו את הערך של p שבעבורו היחס בין שטח המשולש OED ובין שטח המשולש ABO הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

1) א. (1) 4:5 א. (2) הוכחה ב. (1) I: ביטוי 2, II: ביטוי 3.

ג. (1) גרף I: $f'(x)$, גרף II: $f''(x)$ ג. (2) הוכחה.

ד. (1) $\alpha = 120°$ ד. (2) לא.

2) א. הוכחה, ההפרש הוא d. ב. הוכחה. ג. (1) $n = 33$ ג. (2) 440.

3) א. $p = 0.65$ ב. $\frac{39}{59}$ ג. 0.18715 ד. $1-\left(\left(\frac{39}{80}\right)^n+\left(\frac{41}{80}\right)^n\right)$.

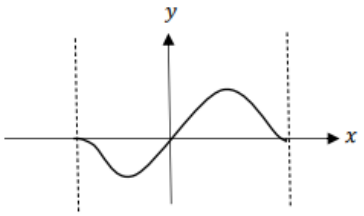
4) א. הוכחה. ב. (1) $45°$ ב. (2) הוכחה. ג. הוכחה.

5) א. $AB = 2R\sin\alpha$, $BD = \sqrt{3}R$ ב. $\alpha = 40.20°$ ג. $R = 15.396$.

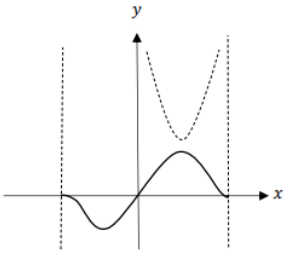
6) א. (1) אי זוגית א. (2) $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$, $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ א. (3) $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ מינימום,

$\left(\frac{\pi}{6},0.324\right)$ מקסימום, $\left(-\frac{\pi}{6},-0.324\right)$ מינימום, $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ מקסימום.

א. (4) סרטוט: ב. (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ב. (2) $\left(\frac{\pi}{6},1.756\right)$ מינימום.



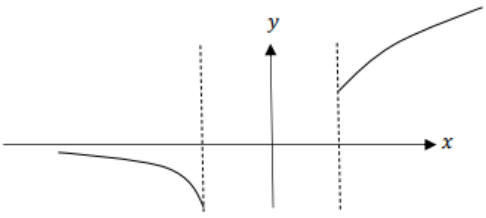
ב. (3) סרטוט: ג. 1.432.

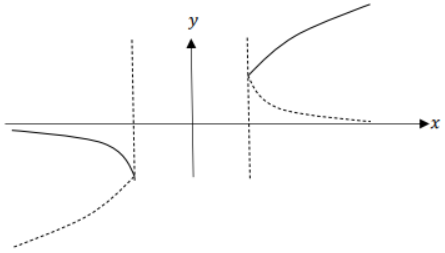


7) א. (1) $x \le 3$ או $x \le -3$ א. (2) אין. א. (3) עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < -3$.

א. (4) קעירות כלפי מטה: $x > 3$ או $x < -3$, קעירות כלפי מעלה: אין.

ב. סרטוט: ג. סרטוט: ד. $III < I < II$.





8) א. $y = -2x + 1 + 2p$ ב. $p = \frac{1}{2}$.

בגרות קיץ 2023 מועד ב':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בעבור כל n טבעי הוכיחו באינדוקצייה או בדרך אחרת כי מתקיים:

$$\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+\ldots+\frac{A}{2^n}=A\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

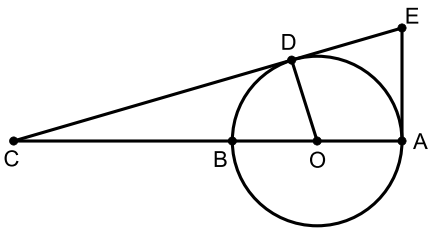
ב. הנקודה B היא אמצע הקטע AC.

AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

מן הנקודה C מעבירים ישר המשיק למעגל בנקודה D.

בנקודה A מעבירים משיק נוסף למעגל.

שני המשיקים נחתכים בנקודה E (ראו סרטוט).



(1) הוכיחו כי המרובע AODE הוא בר חסימה במעגל.

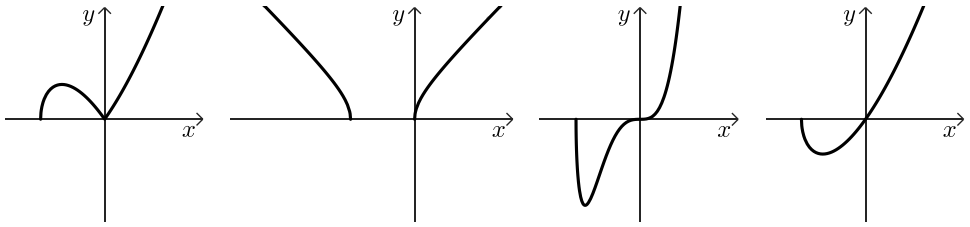
(2) הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AODE.

ג. לפניכם שלוש פונקציות והגרפים א-ד.
כל אחת מן הפונקציות מתוארת על ידי אחד מן הגרפים.

$$f(x)=\sqrt{x^2(x+2)}$$

$$h(x)=\sqrt{x(x+2)}$$

$$k(x)=x\sqrt{x+2}$$



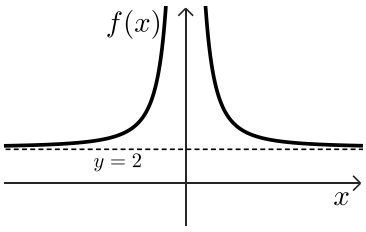
גרף ד | גרף ג | גרף ב | גרף א

(1) בעבור כל אחת מן הפונקציות, קבעו איזה מן הגרפים מתאר אותה.
נמקו את קביעותיכם.

נתונה הפונקציה: $g(x)=x^n\sqrt{x+2}$, n הוא פרמטר טבעי גדול מ-1.

(2) מצאו עבור אילו ערכים של n, הגרף הנותר מתאר את הפונקציה $g(x)$.

ד. לפניכם גרף של הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל $x\neq 0$.
הישרים $y=2$ ו-$x=0$ הם אסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$.
הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה בכל תחום הגדרתה.



(1) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) רשמו את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

נתון: $a>0$ הוא פרמטר.

(3) סדרו את הביטויים (1)-(4) שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר
(כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה).

(1) $\int_a^{a+1} f(x)dx$ (2) $\int_{a+1}^{a+2} f(x)dx$ (3) $\int_a^{a+1} f'(x)dx$ (4) המספר 2.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונה סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , ..., a_{3n}$ שבה $3n$ איברים, וההפרש שלה הוא d.
נסמן ב- S_n^* את הסכום של n האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכיחו כי: $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$.

נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של n האיברים האמצעיים שווה ל-0.

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי מתקיים: $a_1 = 19 \cdot |d|$.

ג. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

מוחקים כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה: $a_2 , a_5 , a_8 , ... , a_{3n-4}$. סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 54.

ד. מצאו את d.

3) עיתון יומי המופץ למנויים שגרים בחיפה או בתל אביב בלבד, אמור להישלח אל ביתם בכל יום עד השעה 6:00. מערכת העיתון ערכה סקר בקרב המנויים, ושאלה בנוגע ליום מסוים אם הם קיבלו את העיתון בזמן. כל המנויים השתתפו בסקר וכל אחד מהם ענה כן או לא.
מתוצאות הסקר עולה כי ההסתברות לבחור באקראי מנוי שקיבל את העיתון בזמן מבין המנויים שגרים בחיפה היא $\frac{2}{3}$, וההסתברות לבחור באקראי מנוי שגר בחיפה מבין המנויים שקיבלו את העיתון בזמן היא $\frac{5}{7}$.

נסמן ב- p את ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין כל המנויים גר בחיפה.
בוחרים באקראי אחד מן המנויים.

א. הביעו באמצעות p את ההסתברות שהמנוי שנבחר גר בתל אביב וקיבל את העיתון בזמן.

נתון כי מספר המנויים שגרים בתל אביב ולא קיבלו את העיתון בזמן גדול פי 1.5 ממספר המנויים שגרים בתל אביב וקיבלו את העיתון בזמן.

ב. כמה אחוזים מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן?

מבין המנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן, בוחרים באקראי שני מנויים.

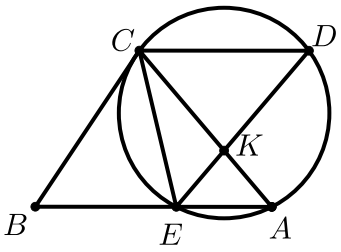
ג. מהי ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל אביב והשני שנבחר גר בחיפה?

באותו היום התקשרו למערכת העיתון 6 מנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מהם גרים בחיפה?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) מנקודה B, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה C, וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו-A, כמתואר בסרטוט.



הנקודה D נמצאת על המעגל כך שהמיתר CD מקביל למיתר EA. המיתרים ED ו-AC נחתכים בנקודה K.

א. הוכיחו: $\Delta CEB \sim \Delta DCE$.

נתון: $AK = 3$, $ED = 7$. נסמן את שטח המשולש CEK ב- S.

ב. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CKD.

נתון: $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$.

ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEB.

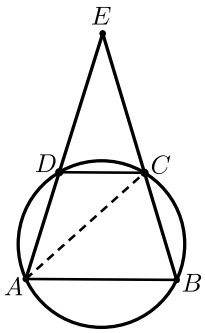
הנקודה O היא מרכז המעגל.

ד. הוכיחו: $\sphericalangle COE = \sphericalangle CKE$.

נתון: $\sphericalangle CAE = 45°$.

ה. הסבירו מדוע הנקודות E , C , O ו-K נמצאות על מעגל אחד.

5) נתון טרפז ABCD $(AB \| DC)$, החסום במעגל.



המשכי הצלעות AD ו-BC נפגשים בנקודה E, כמתואר בסרטוט.

נתון: $\sphericalangle ACB = 60°$.

נסמן: $AC = k$, $\sphericalangle CDE = \alpha$.

א. (1) מצאו את זוויות המשולש ACE

(הביעו באמצעות α אם יש צורך).

(2) הביעו באמצעות α ו- k את אורכי הצלעות AB ו-DC.

נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 3 משטח המשולש DCE.

ב. מצאו את גודל הזווית α.

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו אורך התיכון לצלע EC במשולש AEC הוא 63.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-a^2}{(x-3)^2}$, $0<a<3$ הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים (1)-(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{x^2}{(x-3)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) הוכיחו כי גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי הישר: $x=1$ ועל ידי ציר ה- y.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2+x}}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.

(3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

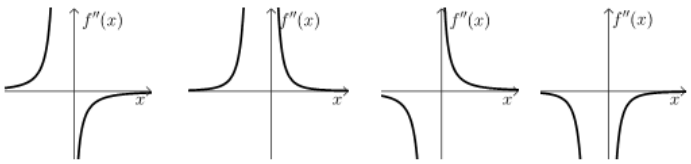
(4) מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

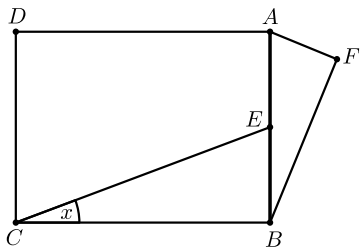
ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. היעזרו בגרף הפונקציה $f(x)$, וקבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$. נמקו את קביעתכם.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים: $x=1$ ו- $x=2$.



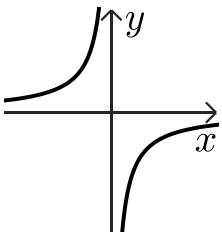
8) הנקודה E היא אמצע הקטע AB.
על הקטע AB בונים מלבן ABCD
ומשולש ישר זווית AFB, $\sphericalangle AFB = 90°$,
כמתואר בסרטוט.
נתון: $\sphericalangle ECB = x$, $\sphericalangle FAB = 2x$.
נסמן את אורך הקטע AB ב- h.



א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור x? הסבירו את תשובתכם.
ב. הביעו באמצעות x ו- h את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF.
ג. מצאו את הערך של x שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.
ד. בעבור הערך של x שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן ABCD לשטח המשולש AFB.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה ב. (1) הוכחה ב. (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$.
ג. (1) $f(x)$: גרף ד, $h(x)$: גרף ג, $k(x)$: גרף א ג. (2) עבור $n \geq$ טבעי ואי זוגי.
ד. (1) סרטוט: ד. (2) עליה: $x > 0$, $x < 0$, ירידה: אף x ד. (3) 1, 2, 4, 3.



2) א. הוכחה. ב. הפרש הסדרה שלילי. ג. 39 איברים. ד. $d = -3$.

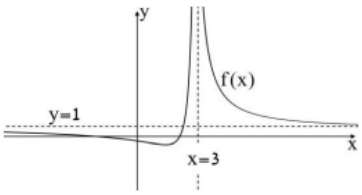
3) א. $\frac{4}{15}p$ ב. 56% ג. $\frac{30}{121}$ ד. 0.92.

4) א. הוכחה. ב. $\frac{4}{3}S$ ג. $\frac{175}{96}S$ ד. הוכחה.
ה. הוכחה.

5) א. (1). $\sphericalangle E = 180 - 2\alpha°$, $\sphericalangle ECA = 120°$, $\sphericalangle EAC = 2\alpha - 120°$.
(2). $AB = \frac{\sqrt{3k}}{2\sin\alpha}$, $CD = \frac{k\sin(2\alpha - 120)}{\sin\alpha}$ ב. $\alpha = 75°$ ג. $k = 6$.
ב. $\alpha = 30°$ ג. $R = 4$ ד. 2.07.

6) א. (1). $x \neq 3$ (2). $y=1$, $x=3$ (3). $(a,0)$, $(-a,0)$, $\left(0,\frac{-a^2}{9}\right)$.

(4). $x=\frac{a^2}{3}$ מינימום. (5). סרטוט:

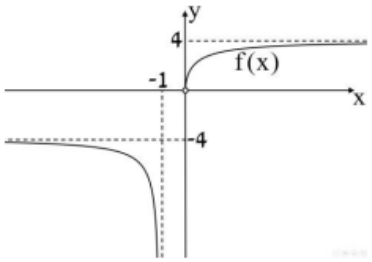


ב. (1). הוכחה. (2). $\frac{a^2}{6}$.

7) א. (1). $x>0$ או $-1>0$. (2). לא. (3). $y=4$, $y=-4$, $x=-1$.

(4). תחומי עלייה: $x>0$, תחומי ירידה: $x<-1$.

ב. סרטוט: ג. גרף I ד. 0.435.



8) א. $0<x<45$ ב. $\frac{h}{2\sin x}-h\cos(2x)$ ג. $x=30°$ ד. 4.

שאלון 571 לכיתות יא

פרק 41

פתרון בוידאו של בחינות שנת 2022

חורף מועד א 99
חורף מועד ב 106
קיץ מועד א 113
קיץ מועד ב 120

בגרות חורף 2022 מועד א':

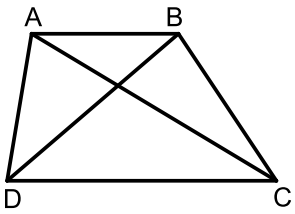
יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. לפניכם טרפז $ABCD$, $(AB||CD)$.



נתון: שטח המשולש ADC הוא 24 ושטח המשולש ADB הוא 12.

(1) חשבו את היחס בין אורך הבסיס הגדול ובין אורך הבסיס הקטן של הטרפז $ABCD$.

(2) חשבו את שטח הטרפז $ABCD$.

ב. (1) בעבור כל n טבעי, הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת את הטענה:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$$

(2) חשבו את המכפלה:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

ג. בעבור כל אחת מן הטענות (1)-(2) שלפניכם, קבעו אם היא נכונה לכל x. נמקו.

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

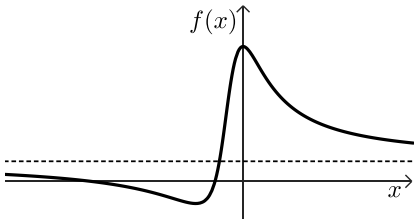
(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

ד. לפניכם הגרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x.

לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אופקית שמשוואתה היא: $y=1$ (ראו סרטוט),

ו-2 נקודות קיצון בדיוק:

נקודת מקסימום $(0,3)$ ונקודת מינימום $(-2,-1)$.



נגדיר את הפונקציה: $g(x)=f(-x)+1$.

גם הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x.

(1) מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$. נמקו.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$ והפרשה d.

מסמנים ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A, לכל n טבעי.

מגדירים סדרה נוספת, B, שאיבריה הם: $b_1 , b_2 , b_3 , \ldots$.

איברי הסדרה B מקיימים: $b_n = S_{n+1} - S_n$ לכל n טבעי.

א. (1) האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמקו.

(2) האם הסדרה B זהה לסדרה A? נמקו.

מסמנים ב- T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B, לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1+b_2)(b_1-b_2)+(b_3+b_4)(b_3-b_4)+\ldots+(b_{n-1}+b_n)(b_{n-1}-b_n)}{-d} .$$

נתון: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \ldots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$

$T_5 = -20$.

ג. חשבו את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי-זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי ושלם? נמקו.

3) בקופסה יש שלוש סוכריות בטעם תות ושתי סוכריות בטעם מנטה.

ליאור מוציא באקראי סוכרייה מן הקופסה. אם הסוכריה היא בטעם מנטה – הוא מחזיר אותה לקופסה, ואם היא בטעם תות – הוא אוכל אותה מייד.

א. ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

(1) חשבו את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.

(2) חשבו את ההסתברות שליאור אכל את הסוכריה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.

ב. ליאור מוציא מן הקופסה n סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

הביעו בעזרת n את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.

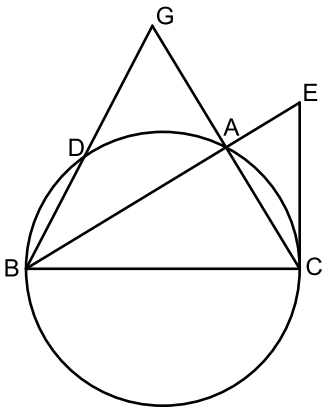
ג. ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה.

ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות, באופן המתואר בתחילת השאלה.

חשבו את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה.

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R (ראו סרטוט).
הצלע BC היא קוטר במעגל.
AG הוא המשך הצלע CA.
הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D.
נתון: $GA = AC$.



א. הוכיחו כי הישר AB חוצה את $\sphericalangle GBC$.

ב. הוכיחו כי $\Delta GBC \sim \Delta GAD$.

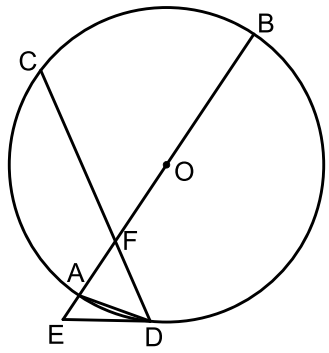
נתון כי: $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$.

ג. הביעו באמצעות R את אורך הצלע AC.

דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E.

ד. חשבו פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC.

5) AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O.
המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה F.
המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הקוטר AB בנקודה E (ראו סרטוט).
נסמן: $\sphericalangle ADE = \alpha$.



א. הראו כי: $\sphericalangle BAD = 90° - \alpha$.

נתון כי: $ED = FD$.

ב. הביעו באמצעות α את גודל $\sphericalangle CDA$.

ג. הביעו באמצעות α ו- R את שטח המשולש AFD.

ד. (1) הביעו באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

(2) נתון כי: $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1+\sqrt{3}$. מצאו את α.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{(x^3-m)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו את תשובותיכם באמצעות m אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-1$.

ב. מצאו את הערך של m.

הציבו בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאתם וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה: $g(x)=k\cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x.

נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x הוא 1 (השטח שמימין לאנך). מצאו את הערך של k.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x+2\cdot\sqrt{x^2-2x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את תחום ההגדרה של פונקצית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקצית הנגזרת $f'(x)$.

(4) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה- x.
בתשובתכם דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

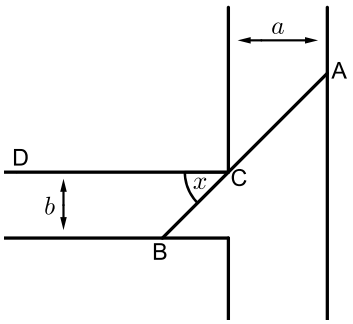
(5) סרטטו סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$, אם ידוע כי לפונקצית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם ייתכן שישר שמשוואתו $y=4x+c$ (c פרמטר) ישיק לגרף הפונקציה $f(x)$? נמקו.

8) תעלת מים ראשית ברוחב קבוע a מחוברת בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע b.
הנקודה C היא נקודת המפגש בין דופן של התעלה הראשית ובין דופן של התעלה המשנית (ראו סרטוט).



מהנדסת מתכננת סכר ישר, שיצא מן הנקודה A שבדופן התעלה הראשית, יעבור דרך הנקודה C ויגיע עד הנקודה B שבדופן התעלה המשנית.
הסכר ייצור זווית שגודלה x עם הדופן CD של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.

א. הביעו באמצעות a, b ו- x את אורך הסכר AB.

נתון כי: $a=2b$.

ב. מצאו את x שבעבורו אורך הסכר AB יהיה מינימלי.

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8. מצאו את b.

תשובות סופיות:

1) א. (1) 2:1 א. (2) 36 ב. (1) הוכחה ב. (2) 50.

ג. (1) הטענה נכונה ג. (2) הטענה אינה נכונה.

ד. (1) $y=2$ ד. (2) $\max(0,4)$, $\min(2,0)$.

2) א. (1) כן. א. (2) לא. ב. הוכחה. ג. $b_1=-5$, $d=\frac{1}{2}$.

ד. 14 איברים.

3) א. (1) 0.366. א. (2) 0.32787. ב. $1-\left(\frac{2}{5}\right)^n$. ג. 0.0128.

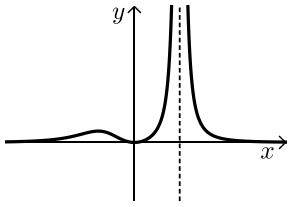
4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $AC=\frac{1}{2}R$. ד. $\frac{16}{15}$.

5) א. הוכחה. ב. 3α. ג. $\frac{R^2\sin\alpha\sin2\alpha\sin3\alpha}{\cos2\alpha}$.

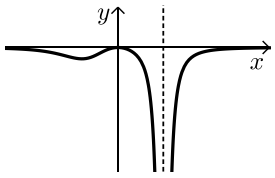
ד. (1) $\frac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}$. ד. (2) $15°$.

6) א. (1) $x\neq\sqrt[3]{m}$. א. (2) $x=\sqrt[3]{m}$, $y=0$. ב. $m=2$.

ג. $\min(0,0)$, $\max\left(-1,\frac{1}{9}\right)$. ד. להלן סרטוט:



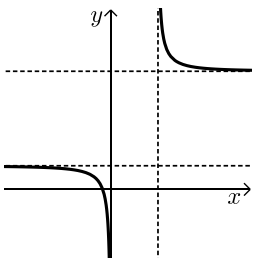
ה. (1) להלן סרטוט: ה. (2) $k=-18$.



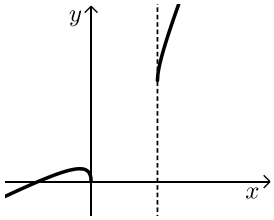
7) א. (1) $x\geq2$ או $x\leq0$. א. (2) $x>2$ או $x<0$.

א. (3) $x=2$, $x=0$, $y=5$, $y=1$. א. (4) $(-0.342.0)$.

א. (5) להלן סרטוט: ב. (1) $\max(-0.342,0.764)$, $\min(2,6)$, $\min(0,0)$.



ב. (2) להלן סרטוט: ג. לא.



8) א. $AB=\frac{b}{\sin x}+\frac{a}{\cos x}$. ב. $x=38.44°$. ג. $b=1.922$

בגרות חורף 2022 מועד ב':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני
ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

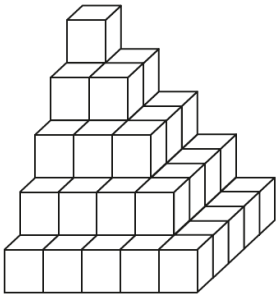
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים,
ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתון מרובע $ABCD$ שבו גודלי הזוויות מהווים סדרה חשבונית עולה.
איברי הסדרה הם: $a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ a_4$.
הוכיחו כי אם מתקיים: $\sphericalangle D = a_3 \ , \ \sphericalangle C = a_4 \ , \ \sphericalangle B = a_2 \ , \ \sphericalangle A = a_1$,
אז אפשר לחסום את המרובע $ABCD$ במעגל.

ב. נתון מגדל קוביות ובו 5 קומות (ראו ציור).
הקומה התחתונה בנויה מ-25 קוביות המסודרות בצורת ריבוע.
הקומה שמעליה בנויה מ-16 קוביות המסודרות בצורת ריבוע.
וכך הלאה עד לקומה העליונה שבה יש קובייה אחת.



(1) כמה קוביות סך הכול דרושות כדי לבנות באותו אופן
מגדל שבו 7 קומות?

(2) נתון מגדל ובו 10 קומות הבנוי באותו אופן שבו בנוי המגדל המתואר בתחילת סעיף ב.
כמה קוביות צריך להוסיף למגדל זה, כדי שיהיה בו 100 קומות הבנויות באותו אופן?
פרטו את חישוביכם.

תוכלו להיעזר בנוסחה (לכל n טבעי): $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

ג. נתונה הפונקציה: $f(x)=\left[\cos(x-\pi)+\cos(\pi-x)\right]^2+4\left(\sin(-x)\right)^2-5$
המוגדרת לכל x.
האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר ה- x? נמקו את תשובתכם.

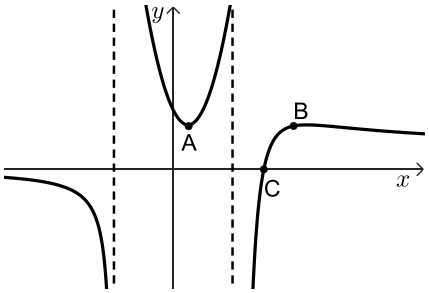
ד. הגרף שלפניכם מתאר את הפונקציה $g(x)$ שתחום ההגדרה שלה הוא: $x \neq 1$, $x \neq -1$.

הישרים: $x=-1$, $x=1$, $y=0$ הם אסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$.

הנקודה $A(0.3,1)$ היא נקודת המינימום היחידה של הפונקציה $g(x)$,

הנקודה $B(3,1)$ היא נקודת המקסימום היחידה של הפונקציה $g(x)$,

והנקודה $C(2,0)$ היא נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x.



(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה: $\frac{1}{g(x)}$.

(2) בכמה נקודות נפגשים הגרף של $g(x)$ והגרף של $\frac{1}{g(x)}$? נמקו את תשובתכם.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם: a_1 , a_2 , a_3 , ... ומנתה היא q.

כל איברי הסדרה A שונים מאפס.

א. האם הסדרה: $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$, ... היא סדרה הנדסית? הוכיחו את תשובתכם.

ב. (1) מסמנים ב- S_n את הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה A (n טבעי).

הוכיחו כי לכל n מתקיים: $\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}$.

(2) נתון: $a_1=1$, $q=3$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה A גדול פי 6561 מן

הסכום: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}$. מצאו את n.

הסדרה B מתקבלת מן הסדרה A על ידי הפיכת הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A.

איברי הסדרה B הם: b_1 , b_2 , b_3 , ...

נסמן ב- T_m את הסכום של m האיברים הראשונים של הסדרה B.

נתון כי m הוא מספר טבעי אי-זוגי.

ג. נתונה נוסחה: $\frac{T_m}{b_1 \cdot b_m} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \ldots + \frac{1}{a_m}$.

קבעו אם הנוסחה הנתונה נכונה. הוכיחו את תשובתכם.

3) כדי להתקבל ללימודים במכללה מסוימת יש לעבור מבחן קבלה.

כל השאלות במבחן הן מתוך מאגר שיש בו n שאלות שונות. לנבחנים יש גישה למאגר והם יכולים להתכונן למבחן באמצעותו. ביום הבחינה, כל נבחן מוציא באקראי מתוך קופסה מלאה בפתקים שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה. בכל אחד מן הפתקים כתובה שאלה אחת מתוך מאגר השאלות. מספר הפתקים שבקופסה שווה למספר השאלות שבמאגר, ובכל פתק כתובה שאלה אחרת. לאחר שהוציא הנבחן שלושה פתקים מן הקופסה וקרא את שלוש השאלות, הוא מחזיר את שלושת הפתקים לקופסה.

הנבחן יתקבל למכללה אם הוא יענה נכון על שתי שאלות לפחות מתוך שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא.

נתנאל התכונן למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון רק על 20 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ידוע כי ההסתברות של נתנאל לענות נכון על שאלה אחת לפחות מבין שתי השאלות שבשני הפתקים הראשונים שהוא הוציא היא $\frac{34}{69}$.

א. (1) מצאו את n.

(2) מהי ההסתברות שנתנאל יתקבל למכללה?

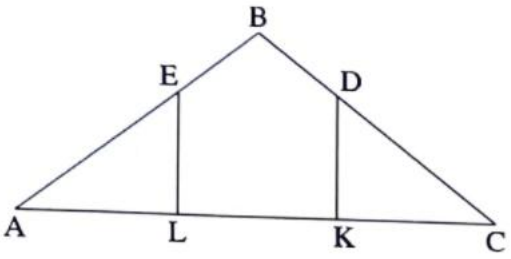
ב. אם ידוע כי נתנאל התקבל למכללה, מהי ההסתברות שהוא לא ענה נכון על השאלה שבפתק הראשון שהוא הוציא?

רמי התכונן גם הוא למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון על 40 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ג. האם ההסתברות שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי גדולה פי 2 מן ההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי? נמקו את תשובתכם.

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) בציור שלפניכם מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $BA = BC$.
מנקודה D הנמצאת על השוק BC הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה K.
מנקודה E הנמצאת על השוק BA הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה L.
נתון: $AL = LK = KC$.



א. חשבו את: $\frac{BD}{DC}$.

הקטעים DL ו-EK נפגשים בנקודה G.

ב. הוכיחו כי המרובע BDGE הוא דלתון.

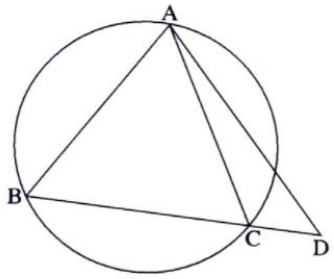
נתון: $AC = 45$.

היקף המרובע EDKL הוא 54.

ג. חשבו את אורך הקטע BG.

ד. האם קיימת נקודה F שנמצאת על הישר BG שעבורה המרובע BDFE הוא בר-חסימה במעגל? נמקו את תשובתכם.

5) בציור שלפניכם מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $AB = AC$, שחסום במעגל שרדיוסו R.
האריכו את הבסיס BC עד לנקודה D והעבירו ישר מנקודה D לנקודה A.
נתון: $\sphericalangle CAD = \alpha$, $\sphericalangle BAC = 2\alpha$.



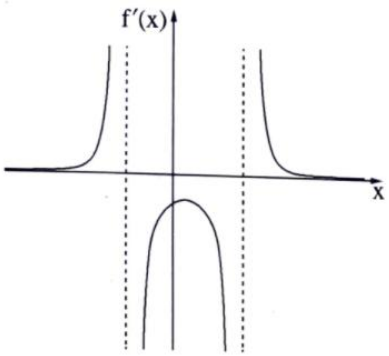
א. הוכיחו כי רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD שווה לרדיוס המעגל החוסם את משולש ACD.

ב. הביעו את שטח משולש ACD באמצעות R ו- α.
נסמן ב- m את היחס בין שטח המשולש ACD לבין שטח המשולש ABC.

ג. (1) האם ייתכן כי $m = 0.5$? נמקו את תשובתכם.
(2) נתון כי $m = 0.6$. מצאו את גודלי זוויות המשולש ABC.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום: $x<b$, $b<x<c$, $c<x$ וגזירה בכל תחום הגדרתה. בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד ושלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים: $y=0$, $x=b$, $x=c$.

שיעור ה- x של נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא a. a, b ו- c הם פרמטרים.

א. הביעו את תשובותיך באמצעות a, b ו- c, אם יש צורך.

(1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מטה $(\cap)$ של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(a,0)$.

ב. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון גם כי: $f(x)=\dfrac{18-36x}{\left(x^2-x-6\right)^2}$.

ג. מצאו את a, b ו- c.

ד. (1) הראו כי בתחום $b<x<c$ מתקיים: $f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^2\le 0$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה: $f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=0$ ו- $x=2a$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan(x)+\frac{1}{x}$.

ענו על הסעיפים א-ב בעבור התחום: $0\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד ששיעוריה $(2.798,0)$ בקירוב.

ב. מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x)=\frac{\cos(x)}{x}$, המוגדרת לכל $x\neq 0$.

ג. האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את תשובתכם.

ד. (1) הראו כי בתחום: $0\le x\le\frac{3\pi}{2}$ שיעור ה- x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ שווה לשיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x, וקבעו את סוגה של נקודת קיצון זו.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום: $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

8) חותכים חוט שאורכו k לשני חלקים.

מחלק אחד של החוט יוצרים משולש שווה-צלעות ומן החלק האחר יוצרים מעגל.

נסמן ב- x את אורך צלע המשולש.

א. הביעו באמצעות k את תחום ההגדרה של x.

ב. הביעו באמצעות k את אורך צלע המשולש, שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. הראו כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי, אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל במעגל שהתקבל.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה ב. (1) 140 קוביות ב. (2) 337,965 קוביות.
ג. אין ד. (1) $x \neq 2 \, , \, x \neq 1 \, , \, x \neq -1$ ד. (2) 4 נקודות.

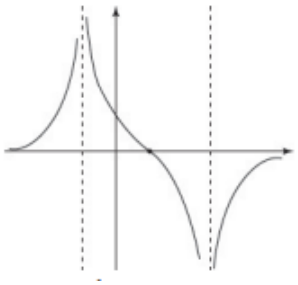
2) א. כן. ב. (1) הוכחה. ב. (2) $n = 9$ ג. הנוסחה נכונה.

3) א. (1) $n = 70$ א. (2) $\frac{76}{391}$ ב. $\frac{25}{84}$ ג. ההסתברות אינה גדולה פי 2.

4) א. $\frac{1}{2}$ ב. הוכחה. ג. 12 ד. כן.

5) א. הוכחה. ב. $R^2 \cos^2 \alpha \tan 2\alpha$ ג.(1) לא יתכן. ג. (2) $73.22° \, , \, 33.56°$.

6) א. (1) עליה: $x > c$ או $x < b$, ירידה: $b < x < c$.
א. (2) $\cup$: $x < b$ או $b < x < a$, $\cap$: $a < x < c$ או $c < x$. ב. להלן סרטוט:



ג. $a = \frac{1}{2} \, , \, b = -2 \, , \, c = 3$ ד. (1) הוכחה.
ד. (2) $\frac{1}{12}$.

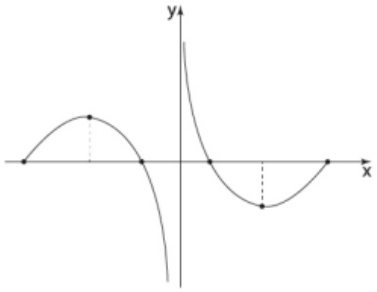
7) א. (1) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$ א. (2) $x = \frac{3\pi}{2} \, , \, x = \frac{\pi}{2} \, , \, x = 0$.

ב. תחומי החיוביות של $f(x)$: $2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

תחומי השליליות של $f(x)$: $\frac{\pi}{2} < x < 2.798$.

ג. $g(x)$ הינה פונקציה אי-זוגית. ד. (1) הוכחה. סוג הקיצור: מינימום.

ד. (2) להלן סרטוט:



8) א. $0 < x < \frac{k}{3}$ ב. $0.21k$ ג. הוכחה.

בגרות קיץ 2022 מועד א':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. (1) בעבור כל n טבעי, הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי הביטוי: 4^n-1 מתחלק ב-3 ללא שארית.

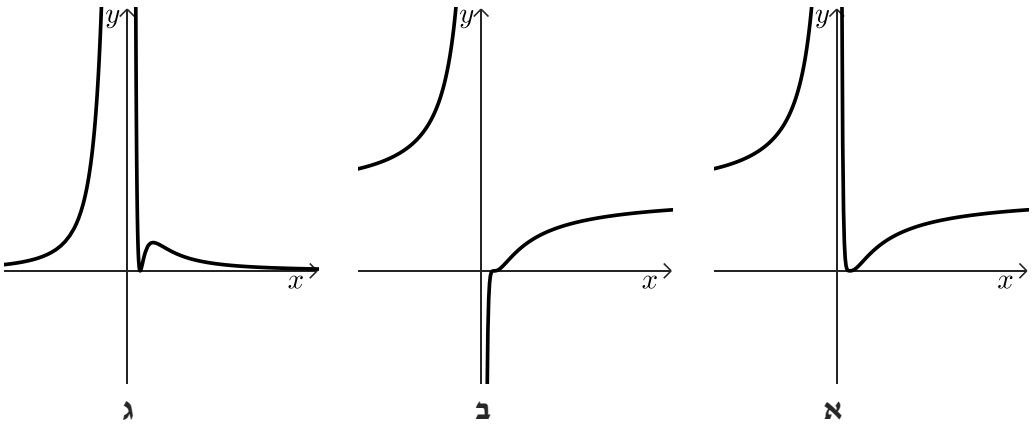
(2) נתון: p הוא מספר שלם.

כתבו דוגמה לערך של p שבעבורו הביטוי: $4^{n+1}+p$ מתחלק ב-12 ללא שארית, לכל n טבעי.

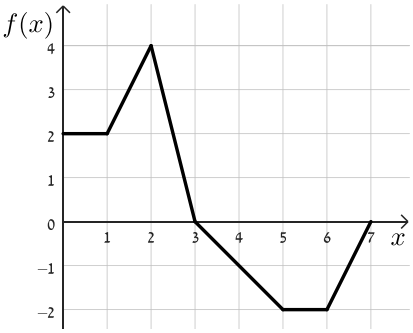
ב. נתונה הפונקציה: $f(x)=\left(2-\frac{1}{x}\right)^3$.

(1) אחד מן הגרפים א-ג מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבעו איזה מהם ונמקו בקצרה.

(2) קבעו כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמקו את התשובה.



א ב ג

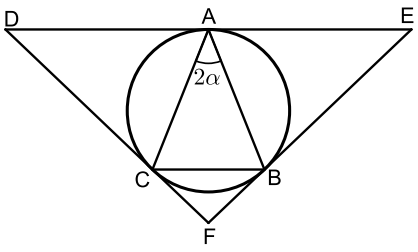


ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום: $0 \le x \le 7$,

ונתונה הפונקציה: $h(t)=\int_0^t f(x)dx$ בתחום זה.

(1) חשבו את הערכים של: $h(0)$, $h(3)$, $h(5)$.

(2) קבעו באיזה תחום $h(t)$ יורדת. נמקו את התשובה.



ד. לפניכם משולש ABC שווה שוקיים $(AB = AC)$ חסום במעגל (ראו סרטוט).

נסמן את זווית הראש של המשולש ב- 2α.

דרך כל אחד מקודקודי המשולש מעבירים משיק למעגל.

המשיקים נפגשים בנקודות: D, E ו-F, כמתואר בסרטוט.

הביעו באמצעות α את זוויות המשולש DEF.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) סדרה I היא סדרה הנדסית אין-סופית שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ומנתה היא: $9\cdot r^2$.

נתון: $0 < r < \frac{1}{3}$. בין כל שני איברים בסדרה I הכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם: $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ומנתה היא q.

א. (1) הביעו את q באמצעות r.

(2) הסבירו מדוע שתי הסדרות I ו-II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי $\frac{4}{3}$ מסכום סדרה I.

ב. חשבו את q.

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 15.

ג. מצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב-5 $\left(b_5, b_{10}, b_{15}, \ldots\right)$.

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחריו אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

3) נטע משחקת במשחק מסוים. במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תיקו והפסד.

ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק.

נסמן ב- p את ההסתברות שנטע תפסיד במשחק $\left(p > 0\right)$.

בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.

נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא $4.5p$.

א. מצאו את הערך של p.

נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.

ב. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב-3 משחקים לפחות.

ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

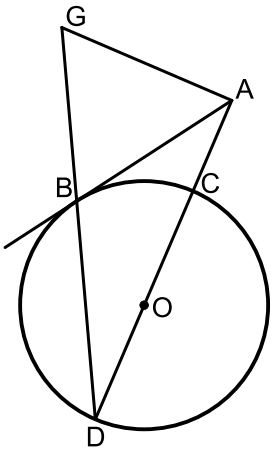
ד. (1) מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.

(2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות.

מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O.
מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:
הישר AB משיק למעגל בנקודה B,
הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות C ו-D,
והישר AG מאונך לישר AD (ראו סרטוט).
הנקודות: D, B ו-G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט.



נסמן: $\sphericalangle ADB = \alpha$.

א. הביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות α.

ב. הוכיחו: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$.

נתון: $AC = \frac{1}{2}DC$, $AG = 7$.

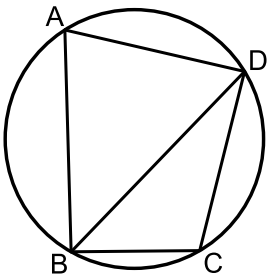
ג. חשבו את R.

נסמן ב- S את שטח המשולש BDC.

ד. (1) הוכיחו: $\Delta ADG \sim \Delta BDC$.

(2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.

5) מרובע ABCD חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O (ראו סרטוט).
נסמן: $\sphericalangle DAB = \alpha$, α היא זווית חדה.



א. הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות α ו- R.

נתון: $BC = R$, $CD = R\sqrt{2}$.

ב. חשבו את α.

נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

ג. חשבו את גודל הזווית ABD.

נסמן ב- h_1 את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD,
וב- h_2 את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD.

ד. חשבו את $\frac{h_1}{h_2}$.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x+\frac{3}{x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית?

הוכיחו את התשובה.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

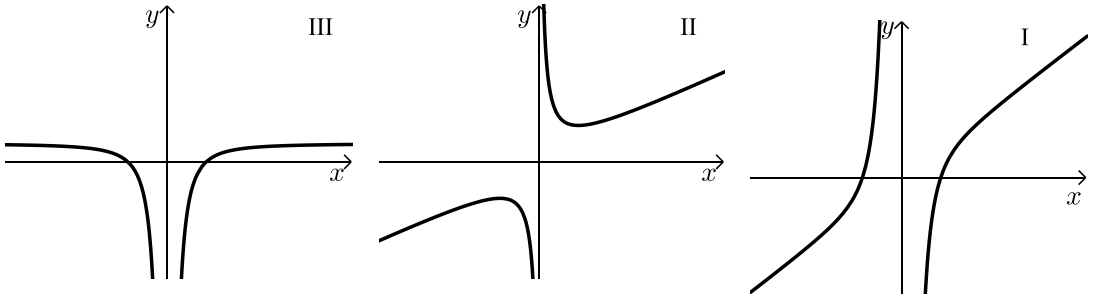
נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו-$g(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ו-$g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$.

הפונקציות $f'(x)$ ו-$g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ב. כל אחד מן הגרפים I-III שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות: $f(x)$, $f'(x)$ ו-$g(x)$.

לכל אחת מן הפונקציות כתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.



ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-x.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה-x

ועל ידי הישרים: $x=\frac{1}{2}$ ו-$x=2$.

ה. נתון: $a>1$ הוא פרמטר. חשבו את: $\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)dx$.

נתונה הפונקציה: $h(x)=\int_{1}^{x} f'(t)dt$. נתון כי הפונקציה $h(x)$ מוגדרת בתחום $x\geq 1$.

ו. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגה.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{2(\cos x)^2+\sin 2x}{2\cos x}$, בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הסבירו מדוע לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x.

(3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. (1) הראו כי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ מתקיים: $f'(x)=\cos x-\sin x$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) t הוא מספר. מצאו את כל ערכי t שבעבורם יש למשוואה: $f(x)=t$ פתרון יחיד (בתחום: $0\le x\le 2\pi$).

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי שני הישרים: $x=\dfrac{3}{4}\pi$ ו- $x=\dfrac{5}{4}\pi$.

8) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה $g(x)$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- x.

נתון כי שיעור ה- x של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה- x של נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה $g(x)$. נסמן ב- p את שיעור ה- x של הנקודה A.

p הוא פרמטר.

ב. הביעו באמצעות p את אורך הקטע AB.

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB.

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי? נמקו את התשובה.

תשובות סופיות:

1) א. (1) הוכחה א. (2) $p=8$ ב. (1) גרף ג ב. (2) 2 נקודות.

ג. (1) $h(0)=0$, $h(3)=7$, $h(5)=5$ ג. (2) $3<x<7$.

ד. $\sphericalangle D=\sphericalangle E=2\alpha$, $\sphericalangle F=180°-4\alpha$.

2) א. (1) $q=3r$ א. (2) הסבר. ב. $q=\frac{1}{3}$ ג. $S=\frac{60}{121}$ ד. 2 ה. הוכחה.

3) א. $p=\frac{1}{6}$ ב. 0.5. ג. 0.125. ד. (1) $\frac{3125}{7776}=0.4188$.

ד. (2) $\frac{54}{4651}=0.012$.

4) א. $\sphericalangle BAG=2\alpha$, $\sphericalangle ABG=90°-\alpha$, $\sphericalangle AGB=90°-\alpha$.

ב. הוכחה. ג. $R=\frac{7}{\sqrt{3}}$ ד. (1) הוכחה. ד. (2) $S_{ADG}=3S$.

5) א. $BD=2R\sin\alpha$ ב. $\alpha=75°$ ג. $\sphericalangle ABD=45°$ ד. $\frac{h_1}{h_2}=3+\sqrt{3}\approx 4.732$.

6) א. (1) $x\neq 0$ א. (2) הפונקציה היא אי-זוגית.

א. (3) עולה: $x>1$, $x<-1$, יורדת: $0<x<1$, $-1<x<0$.

ב. $g(x)\to$ I , $f'(x)\to$ III , $f(x)\to$ II.

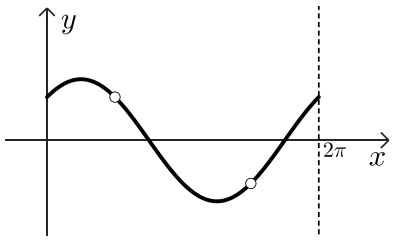
ג. $(1,0)$, $(-1,0)$ ד. $S=20.25$ ה. 0 ו. $\min(1,0)$.

7) א. (1) $0\le x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi$ א. (2) הסבר.

א. (3) $(0,1)$, $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$ ב. (1) הוכחה.

ב. (2) $\max(2\pi,1)$, $\min\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, $\min(0,1)$.

ג. (1) להלן סקיצה:



ג. (2) $t=\sqrt{2}$, $t=-\sqrt{2}$, $t=-1$.

ד. $S=\sqrt{2}=1.414$.

8) א. (1) $f(x)$: כל x , $g(x)$: $x\ge 0$ א. (2) $(1,1)$, $(0,0)$.

ב. $AB^2=p-p^2$ ג. $S_{max}=\frac{128}{3125}=0.04096$ ד. לא.

www.bagrut.co.il

בגרות קיץ 2022 מועד ב':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי בעבור כל n טבעי מתקיים:

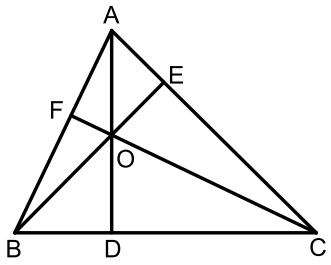
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

ב. במשולש חד זוויות ABC, הגבהים: AD, BE, CF נפגשים בנקודה O (ראו סרטוט).

נתון כי סכום המרחקים של הנקודה O מקודקודי המשולש הוא 20.

(1) הוכיחו שאפשר לחסום במעגל כל אחד מן המרובעים: $AEOF, BDOF, CDOE$.

(2) מהו סכום ההיקפים של המעגלים החוסמים את המרובעים: $AEOF, BDOF, CDOE$?



ג. נתונה הפונקציה: $f(x)=3+\frac{x}{\sqrt{x^2-25}}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) ידוע כי האסימפטוטות של גרף הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, חותכות זו את זו.

חשבו את השטח הכלוא בין האסימפטוטות נמקו את התשובה.

ד. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a\cdot x}{x^2-4}$, המוגדרת עבור: $x\neq 2$ ו- $x\neq -2$,

$a\neq 0$ הוא פרמטר.

אחד מן הגרפים א-ה שלפניכם מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a>0$,

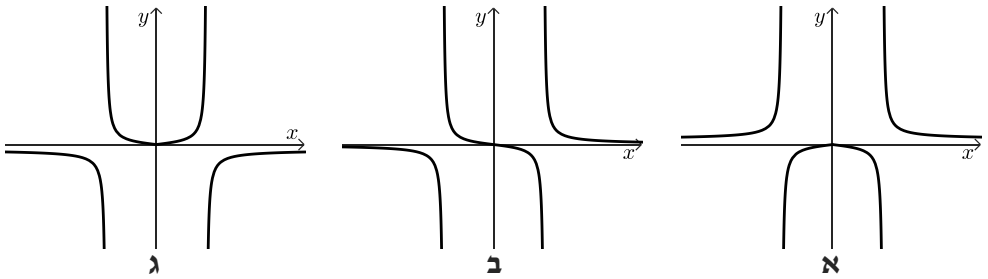
ואחד מהם מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a<0$.

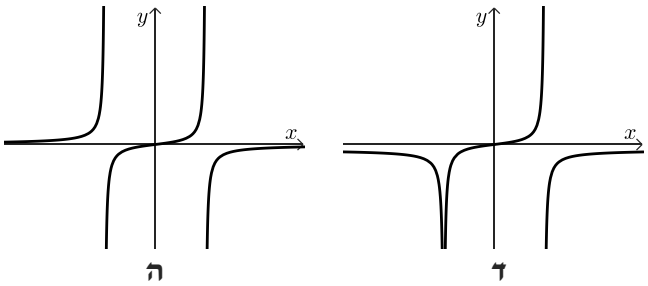
(1) איזה מן הגרפים מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a>0$?

נמקו את התשובה בקצרה.

(2) איזה מן הגרפים מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a<0$?

נמקו את התשובה בקצרה.





2) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים: $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

בעבור $2k$ האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים בסדרה שווה: $10,935 \cdot a_1$.

נתון: $a_{2k-2} = 1,215$.

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

נתון: $a_1 = 5$.

ג. (1) קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.

(2) מצאו את k.

מן הסדרה A בונים את הסדרה האין-סופית B באופן הזה: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ד. הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי-זוגיים כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם: $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ה. מצאו את סכום הסדרה C.

3) בעיר גדולה בישראל נערך סקר ובו נבדקה רמת השליטה בשפה האנגלית בקרב תושבי העיר.
בסקר השתתפו אנשים רבים – מבוגרים וצעירים.
בסקר נמצא שמספר המבוגרים ששולטים באנגלית גדול פי 3 ממספר הצעירים ששולטים בה,
ומספר המבוגרים שלא שולטים באנגלית גדול פי $2\frac{2}{3}$ ממספר המבוגרים ששולטים בה.
נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר ששולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית מבין כלל המבוגרים שהשתתפו בסקר.

ב. בוחרים באקראי שלושה מבוגרים מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר.
מצאו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם שולטים באנגלית.

ג. (1) הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר שלא שולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

(2) הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור p הוא: $0 < p < \frac{1}{12}$.

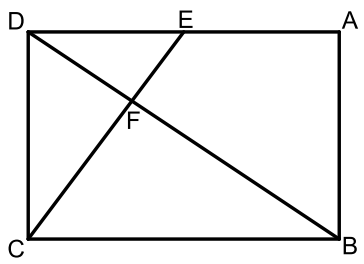
ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית שווה להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית.

ד. מצאו את הערך של p.

ה. האם המאורעות "לשלוט באנגלית" ו"להיות מבוגר" תלויים זה בזה?
נמקו את תשובתכם.

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) במלבן ABCD, הנקודה E נמצאת על הצלע AD.
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה F.
המרובע EABF הוא בר חסימה במעגל.



א. הוכיחו: $\Delta DAB \sim \Delta BFC$.

נתון: $DE = EA$.

ב. חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$.

נסמן את שטח המשולש DEF ב- S.

ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו-BFC באמצעות S.

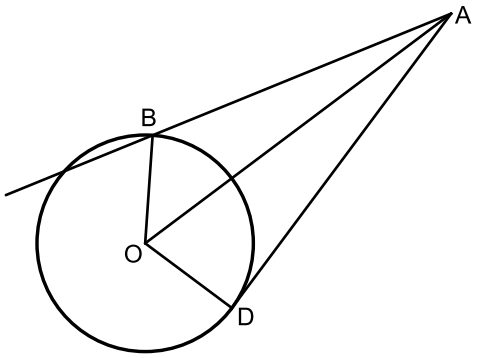
ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC.

נסמן: $DE = a$.

ה. (1) הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a.

(2) הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a.

5) נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.
מנקודה A, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה D וישר אחר, שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט.
נסמן: $\sphericalangle AOD=\alpha$, $\sphericalangle AOB=\beta$.



א. הביעו באמצעות α, β ו- R, אם יש צורך, את:
(1) אורך הקטע AO.
(2) אורך הקטע AB.
נתון: $AB=\sqrt{2}R$.

ב. הוכיחו כי: $\cos\beta=\frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.

משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r.
נתון: $\frac{R}{r}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$.

ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו- β.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-9}{\sqrt{x+a}}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב. (1) מצאו את a.
(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.
(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $g(x)=-f(x+2)$, $h(x)=|f(x)|$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.
(2) האם שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ גדול משיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $h(x)$, קטן ממנו או שווה לו?
נמקו את התשובה.

נתון כי: $\int_{-1}^{3} h(x)dx = \int_{-3}^{k} g(x)dx$, $k > -3$.

ד. מצאו את k. הסבירו את התשובה.

7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x) - 1$, המוגדרת לכל x.

א. האם הפונקציה $f(x)$ זוגית? נמקו.

ב. הוכיחו כי לכל x מתקיים: $-2 \le f(x) \le 0$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים בתחום: $-\pi \le x \le \pi$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $-\pi \le x \le \pi$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = f(2x)$, המוגדרת לכל x.

ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי: $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \left(g'(x) - f'(x)\right)dx = S$.

הביעו באמצעות S את: $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \left(g'(x) - f'(x)\right)dx$. הסבירו את התשובה.

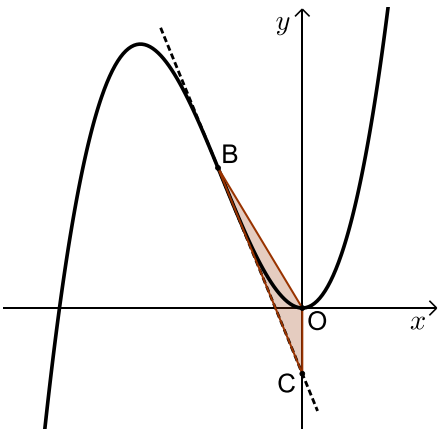
8) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + 4x^2$, המוגדרת לכל x.

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע השני (ראו סרטוט).

מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C.

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה B.



א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B.

ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה- x.

ב. מהו תחום הערכים של t?

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה ב. (1) הוכחה ב. (2) 20π ג. (1) $x>5\ ,\ x<-5$.

ג. (2) 20 ד. (1) גרף ב ד. (2) גרף ה.

2) א. הוכחה. ב. $q=3\ ,\ q=-3$ ג. (1) עולה ג. (2) $k=4$.

ד. הוכחה. ה. $S_C=-\frac{3}{20}$.

3) א. $\frac{3}{11}$ ב. $\frac{216}{1331}$ ג. (1) $1-12p$ ג. (2) הוכחה.

ד. $p=\frac{1}{20}$ ה. תלויים.

4) א. הוכחה. ב. 0.5. ג. $S_{DFC}=2S\ ,\ S_{BFC}=4S$

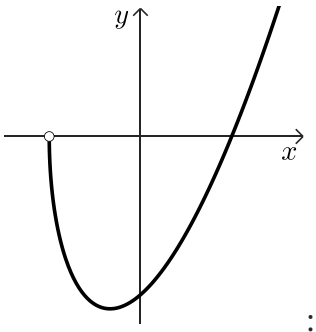
ד. $\sqrt{1.5}$ ה. (1) $\sqrt{6}\cdot a$ ה. (2) $\sqrt{3}\cdot a$.

5) א. (1) $AO=\frac{R}{\cos\alpha}$ א. (2) $AB=R\sqrt{1+\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}}$

ב. הוכחה. ג. $\alpha=58.05°\ ,\ \beta=47.13°$.

6) א. $x>-a$ ב. (1) $a=3$ ב. (2) $(3,0)\ ,\ \left(0,-3\sqrt{3}\right)$

ב. (3) $\min\left(-1,-4\sqrt{2}\right)$ ב. (4) להלן סקיצה:

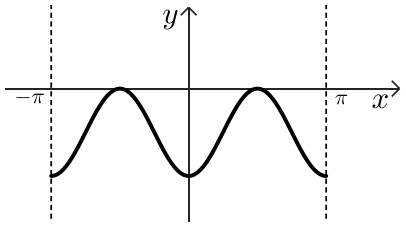


ג. (1) $h(x):x>-3\ ,\ g(x):x>-5$

ג. (2) שווה לו. ד. $k=1$.

7) א. זוגית. ב. הוכחה.

ג. $(0,-2)\ ,\ \left(-\frac{\pi}{2},0\right)\ ,\ \left(\frac{\pi}{2},0\right)$. ד. להלן סקיצה:



ה. $\min\left(-\frac{\pi}{2},-2\right)\ ,\ \max\left(-\frac{\pi}{4},0\right)\ ,\ \min(0,-2)\ ,\ \max\left(\frac{\pi}{4},0\right)\ ,\ \min\left(\frac{\pi}{2},-2\right)$

ו. $-S$.

8) א. $y=\left(3t^2+8t\right)x-2t^3-4t^2$ ב. $-2<t<0$ ג. $S_{OBC}=\frac{27}{16}$.

שאלון 571 לכיתות יא

פרק 42

פתרון בוידאו של בחינות שנת 2021

קיץ מועד א 127
קיץ מועד ב 135
חורף מועד נבצרים 143

בגרות קיץ 2021 מועד א':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

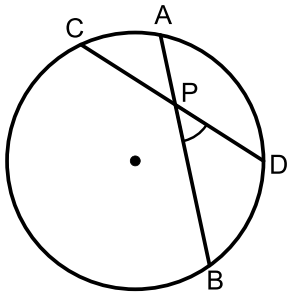
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הראו כי במעגל, הזווית הנוצרת על ידי שני מיתרים שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

כלומר יש להראות: $\sphericalangle BPP = \frac{AC+BD}{2}$.



ב. לפניך שתי טענות אשר רק אחת מהן נכונה לכל n טבעי.
קבעו איזו מהטענות נכונה.
הוכיחו את הטענה הנכונה לכל n טבעי באינדוקציה (או בדרך אחרת).

I. $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2n+4}$

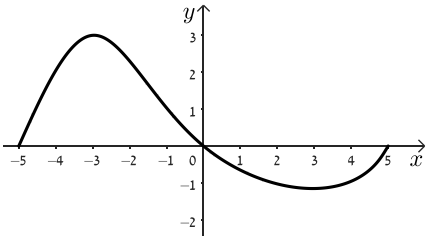
II. $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{3(n+1)}$

ג. קבעו אם הטענות הבאות נכונות. נמקו.

I. הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-3}$ זהה לפונקציה: $h(x)=\sqrt{(x+1)(x-3)}$.

II. הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{x+1}$ זהה לפונקציה: $h(x)=\sqrt{x^2(x+1)}$.

ד. נתון גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $-5\le x\le 5$



ונתונה הפונקציה עבור $a>-4$: $h(a)=\int_{-4}^{a} f(x)dx$.

(1) קבעו באיזה תחום הפונקציה $h(a)$ עולה. נמקו.

(2) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה
והקעירות כלפי מטה של הפונקציה $h(a)$. נמקו.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונה סדרה a_n שסכום n האיברים הראשונים שלה, לכל n טבעי, הוא: $S_n = k \cdot n^2 - p \cdot n$. $p > 0$, $k > 0$ הם פרמטרים.

א. (1) הביעו את האיבר הכללי של הסדרה באמצעות k, p ו-n, בעבור $n \geq 2$.

(2) הנוסחה שמצאתם בתת-סעיף א(1) נכונה בעבור כל n טבעי, הסבירו מדוע.

(3) הוכיחו כי הסדרה היא סדרה חשבונית והביעו את d, ההפרש של הסדרה, באמצעות k.

נתונות שתי סדרות הנדסיות b_n ו-c_n. מנת הסדרה b_n שווה ל-d (הפרש הסדרה החשבונית a_n). הסדרה c_n היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה שווה ל-$\frac{2}{d}$.

נתון: $a_1 = b_1 = c_1$, $k = 1.5$, $p = 4.5$.

ב. הסבירו מדוע הסדרה c_n היא סדרה מתכנסת.

נתון כי היחס בין סכום m האיברים הראשונים של הסדרה b_n ובין סכום כל איברי הסדרה האינסופית c_n הוא $40\frac{1}{3}$.

ג. חשבו את m.

ד. האם הסדרה c_n היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת? נמקו את תשובתכם.

3) בבית ספר תיכון גדול מאוד, מספר התלמידים גדול פי 9 ממספר המורים.
בבית הספר נערך סקר שהשתתפו בו כל המורים והתלמידים בבית הספר, והם בלבד.
המשתתפים בסקר נשאלו אם הם נבדקו לגילוי קורונה.
נמצא כי 80% מן המורים בבית הספר נבדקו לגילוי קורונה.
כמו כן נמצא כי $\frac{13}{15}$ מכלל המשתתפים בסקר (מורים ותלמידים), שנבדקו לגילוי קורונה, היו תלמידים.

א. מהי ההסתברות שמבין כלל המשתתפים בסקר ייבחר באקראי תלמיד שלא נבדק לגילוי קורונה?

בחרו באקראי בזה אחר זה 5 משתתפים מבין כלל משתתפי הסקר.

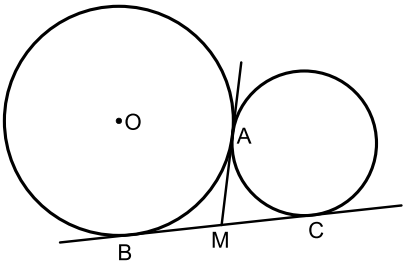
ב. מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם נבדקו לגילוי קורונה?

ג. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, לפחות משתתף אחד נבדק לגילוי קורונה.
מהי ההסתברות שלפחות 4 מן המשתתפים שנבחרו נבדקו לגילוי קורונה?

ד. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, בדיוק 2 נבדקו לגילוי קורונה.
מהי ההסתברות שהאחרון שנבחר נבדק לגילוי קורונה?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A (ראו סרטוט).
הנקודה O היא מרכז המעגל השמאלי.
מעבירים בנקודה A משיק משותף לשני המעגלים.
B ו-C הן נקודות ההשקה של ישר נוסף שמשיק לשני המעגלים.
שני המשיקים נחתכים בנקודה M.



א. הוכיחו כי הזווית $\sphericalangle BAC$ ישרה.

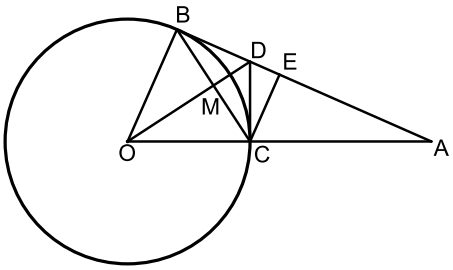
ב. הוכיחו כי: $4 \cdot AM^2 = AC^2 + AB^2$.

נתון: $AC = 6$, $AB = 8$.

ג. חשבו את רדיוס המעגל שמרכזו הוא בנקודה O.

ד. חשבו את יחס השטחים: $\frac{S_{\Delta OBM}}{S_{\Delta AMC}}$.

5) DB ו-DC משיקים למעגל שמרכזו O, כמתואר בסרטוט.
רדיוס המעגל: R.
המשך BD חותך את המשך OC בנקודה A.
הקטע OD והמיתר BC נחתכים בנקודה M.
הקטע CE מאונך ל-AB.
נסמן: $\sphericalangle ABC = \alpha$.



א. הסבירו מדוע אפשר לחסום במעגל:
(1) את המרובע OBDC.
(2) את המרובע MDEC.

נסמן: d_1 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע OBDC.
d_2 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע MDEC.
d_3 הוא קוטר המעגל החוסם את המשולש AOD.

ב. הביעו באמצעות α ו- R את d_1, את d_2 ואת d_3.

ג. מצאו את הערך של α שבעבורו מתקיים: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונות הפונקציות: $g(x)=\frac{x}{(x^2-2)^3}$, $f(x)=\frac{x}{(x^2-2)^2}$.

א. ענו על תת-סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

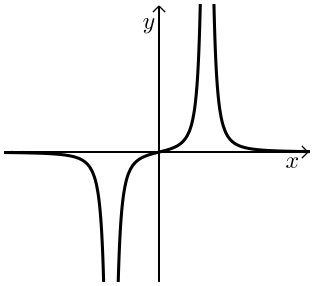
(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) הראו כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

(4) הוכיחו כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ב. (1) הגרף שלפניך מתאר את אחת הפונקציות $f(x), g(x)$.

קבעו איזו מן הפונקציות הגרף מתאר. נמקו את קביעתכם.



(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.

נתונה פונקציה $h(x)$ המקיימת: $h'(x)=f(x)$.

$f(x)$ ו-$h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של $h(x)$?

ד. חשבו את:

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. נמקו את תשובתכם.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה-x והישרים: $x=-1$, $x=1$.

נתונה הפונקציה: $k(x)=f(x)+b$, $b\neq 0$ הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית?

נמקו את תשובתכם.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-4a}}{x^3}$, $a>0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ה, בטאו את תשובותיכם באמצעות a לפי הצורך.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x)$ אי-זוגית.

ג. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

ה. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$, אם יש כאלה?

ידוע כי בכל אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$, יש לגרף של $f(x)$ ולגרף של $g(x)$ משיק משותף.

ו. (1) הוסיפו לסרטוט שבמחברתך סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

פרטו את שיקוליכם.

(2) מהו הערך של a? נמקו את תשובתכם.

8) במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a.

נתון: $\sphericalangle BAC=\alpha$ (α ברדיאנים).

נסמן: $\sphericalangle ABC=x$ ($0<x<\pi-\alpha$).

א. הביעו באמצעות x, a ו-α את היקף המשולש ABC.

ב. הביעו באמצעות α את ערך ה-x שבעבורו היקף המשולש ABC הוא מקסימלי.

ג. הסבירו מדוע מתקיים המשפט הזה:

מכל המשולשים בעלי צלע נתונה וזווית מולה נתונה, המשולש בעל ההיקף המקסימלי הוא משולש שווה שוקיים.

תשובות סופיות:

1) א. ראו סרטון ב. טענה I.

ג. I. הטענה אינה נכונה, II. הטענה אינה נכונה.

ד. (1) $-4 < x < 0$.

ד. (2) קעורה כלפי מעלה: $3 < x < 5$, $-4 < x < -3$, קעורה כלפי מטה: $-3 < x < 3$.

2) א. (1) $a_n = 2kn - k - p$. א. (2) הוכחה. א. (3) $d = 2k$.

ב. הסבר $\left(q = \frac{2}{3}\right)$. ג. $m = 5$. ד. עולה.

3) א. 0.38. ב. 0.33696. ג. $\frac{351}{1{,}031} = 0.340446$ ד. 0.4.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$. ד. $\frac{25}{18}$.

5) א. (1). הוכחה. (2). הוכחה.

ב. $d_1 = \frac{R}{\cos\alpha}$, $d_2 = R\tan\alpha$, $d_3 = \frac{R}{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}$. ג. $\alpha = 30°$.

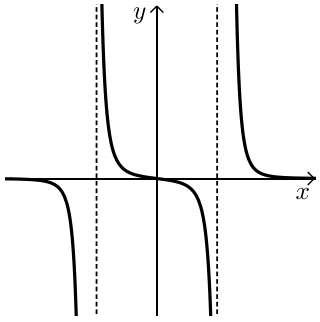
6) א. (1) $f(x)$: $x \neq \pm\sqrt{2}$, $g(x)$: $x \neq \pm\sqrt{2}$.

א. (2) $f(x)$: $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $y = 0$ $g(x)$: $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $y = 0$.

א. (3) $f(x)$: הוכחה, $g(x)$: הוכחה.

א. (4) $f(x)$: הוכחה, $g(x)$: הוכחה.

ב. (1) $f(x)$. ב. (2) להלן סרטוט:



ג. עליה: $x > \sqrt{2}$ או $0 < x < \sqrt{2}$, ירידה: $-\sqrt{2} < x < 0$ או $x < -\sqrt{2}$,

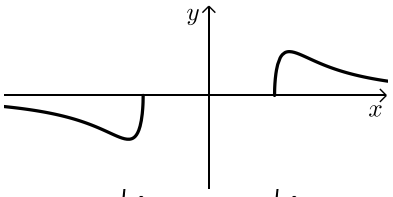
ד. (1). 0. (2). $\frac{1}{2}$. ה. לא זוגית ולא אי זוגית.

7) א. $x \le \sqrt{\frac{4a}{3}}$ או $x \le -\sqrt{\frac{4a}{3}}$. ב. הוכחה. ג. (1) $\left(\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$.

א. (2) $\left(\sqrt{2a},\frac{1}{2a}\right)$ מקסימום, $\left(-\sqrt{2a},-\frac{1}{2a}\right)$ מינימום, $\left(\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$ מינימום,

$\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$ מקסימום.

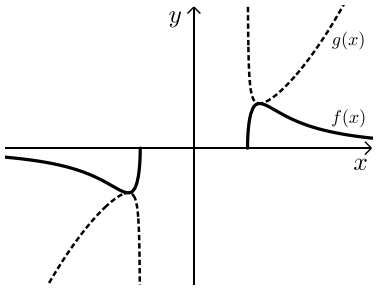
ד. סרטוט:



ה. (1) $x < -\sqrt{\frac{4a}{3}}$ או $\sqrt{\frac{4a}{3}} < x$.

ה. (2) $x = \sqrt{\frac{4a}{3}}$, $x = -\sqrt{\frac{4a}{3}}$.

ו. (1) סרטוט:



ו. (2) $a = \frac{1}{2}$.

8) א. $a + \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin x + \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin(\alpha + x)$. ב. $\frac{\pi - \alpha}{2}$. ג. הוכחה.

בגרות קיץ 2021 מועד ב':

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

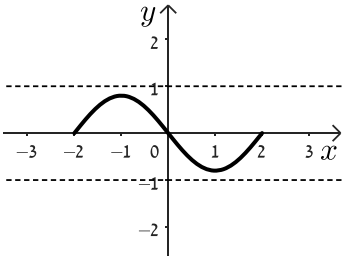
1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בסרטוט שלפניכם:

גרף של פונקציה אי-זוגית $f(x)$ בתחום: $-2 \le x \le 2$

והישרים: $y=1$, $y=-1$.

קבעו עבור כל אחת מן הטענות הבאות אם היא נכונה או לא. נמקו.



(1) $\int_{0}^{2} f(x)dx = 0.5\int_{-2}^{2} f(x)dx$

(2) $\int_{-2}^{0} f(x)dx > \int_{0}^{2} \left(f(x)\right)^2 dx$

ב. נתונה טבלת הסתברויות ובה מידע חלקי:

	A	$\bar{A}$	סה"כ
B	$2a^2-\frac{1}{8}$		$2a$
$\bar{B}$			
סה"כ	a		1

(1) האם המאורעות A ו- B תלויים זה בזה? נמקו.

(2) נתון: $P(A\cap B)=5P(\bar{A}\cap\bar{B})$. חשבו את a.

ג. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2+10x-12}{2x^2-10x+12}$. a הוא פרמטר חיובי.

ציר ה- x והאסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים יוצרים מלבן ששטחו 2.

(1) מהו הערך של הפרמטר a?

(2) נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x+3)$.

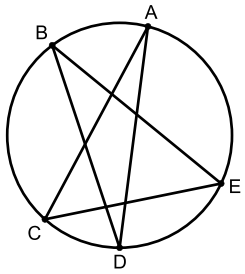
מהו השטח של המלבן שנוצר על ידי ציר ה- x והאסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים? נמקו.

ד. במעגל שמרכזו בנקודה O חסום כוכב.

הנקודות: A, B, C, D, E הן קודקודי הכוכב (ראו סרטוט).

הוכיחו שסכום 5 הזוויות של קודקודי הכוכב:

$\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle C+\sphericalangle D+\sphericalangle E$ הוא $180°$.



פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית a_n שאיבריה: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$ והמנה שלה q.

א. הביעו באמצעות a_1 ו- q את ערכי הסכומים שלפניכם.

(1) $A = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{40}$.

(2) $B = a_4 + a_8 + a_{12} + \ldots + a_{40}$.

נתון כי a_n היא סדרה עולה וכי: $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$.

ב. מצאו את ערכו של q.

בונים מן הסדרה a_n הנתונה סדרה הנדסית אין-סופית b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = 3a_{n+1}$.

ג. מצאו את המנה של הסדרה b_n.

בונים סדרה הנדסית אין-סופית חדשה: $\ldots , \frac{1}{b_4} , -\frac{1}{b_3} , \frac{1}{b_2} , -\frac{1}{b_1}$.

ד. הביעו את הסכום של כל איברי הסדרה החדשה באמצעות a_1.

נתונה הסדרה: $b_1 , a_1 , \frac{1}{a_1}$.

ה. (1) האם ייתכן שסדרה זו חשבונית? נמקו את תשובתכם.

(2) האם ייתכן שסדרה זו הנדסית? נמקו את תשובתכם.

3) בתחרות ספורט שנערכת בבית ספר משתתפים תלמידים רבים. כל משתתף צריך להצליח לעבור 3 מכשולים בזה אחר זה לפי הסדר. משתתף שלא מצליח לעבור מכשול מודח מייד מן התחרות. ההסתברות להצליח לעבור מכשול שונה ממכשול למכשול, אך שווה לכל המשתתפים. משתתף שמצליח לעבור את כל שלושת המכשולים עולה לשלב חצי הגמר. 28% מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים. ההסתברות שמשתתף שמצליח לעבור את שני המכשולים הראשונים יודח מן התחרות גדולה פי 3 מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר.

א. חשבו את ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר.

ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון ולא יעבור את המכשול השני היא 0.42.

ב. חשבו את ההסתברות שמשתתף בתחרות לא יצליח לעבור את המכשול הראשון.

ג. בחרו באקראי שלושה משתתפים: עומר, גל וליאור.

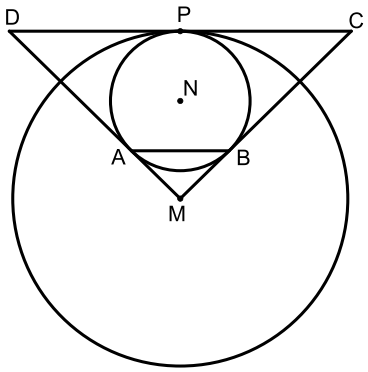
ידוע ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.

(1) חשבו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר.

(2) חשבו את ההסתברות שמבין השלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה P (ראו סרטוט).
מרכזי המעגלים הם הנקודות M ו-N,
והרדיוסים שלהם הם R_1 ו- R_2 בהתאמה, $R_2 < R_1$.
מעבירים משיק משותף לשני המעגלים דרך הנקודה P.
מן הנקודה M יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל
שמרכזו N בנקודות A ו-B.
ישרים אלה חותכים את המשיק המשותף לשני המעגלים
בנקודות C ו-D כמתואר בסרטוט.



א. הוכיחו כי $AB \perp MN$.

ב. הוכיחו כי $AB \parallel DC$.

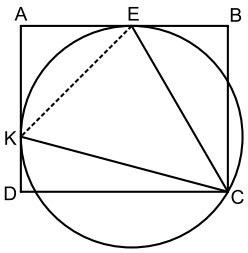
ג. הוכיחו כי $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$.

נתון: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$, $MN = 8$.

ד. (1) מצאו את R_1 ואת R_2.

(2) מצאו את DC.

5) המרובע ABCD הוא מלבן ששתיים מצלעותיו, AB ו-AD, משיקות למעגל
שרדיוסו R בנקודות E ו-K בהתאמה (ראו סרטוט). הנקודה C נמצאת על המעגל.



א. הוכיחו: $\sphericalangle KCE = 45°$.

נתון: $\sphericalangle KCD = \alpha$, $0° < \alpha < 45°$.

ב. (1) הביעו באמצעות α את הזוויות של המשולש KCE.

(2) הביעו באמצעות R ו- α את האורכים של צלעות המשולש KCE.

ג. הביעו באמצעות α את היחס $\frac{EB}{AE}$.

נתון: $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ד. חשבו את α.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות



6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a>0$ הוא פרמטר.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ וקבעו את סוגן.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}$.

תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה. הסתמכו על הסעיפים הקודמים וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

הציבו $a=2$.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=3$ ו- $x=4$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}+3$.

ענו על הסעיפים שלפניכם בתחום: $0 \le x \le 2\pi$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

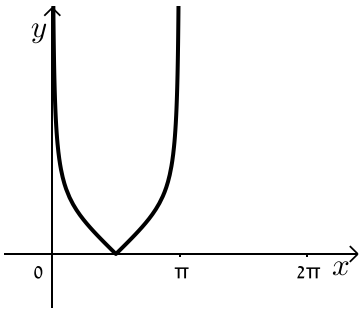
(4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

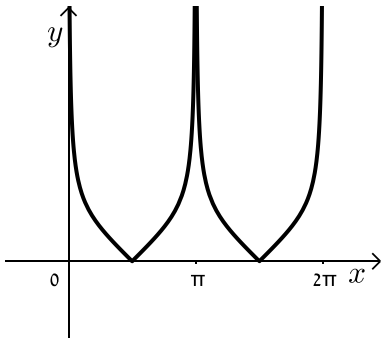
נתונות שתי פונקציות: $k(x)=f(x)-3$, $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$.

ג. אחד מן הגרפים א-ד שלפניכם מתאר את הפונקציה $k(x)$, ואחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $g(x)$. קבעו איזה מן הגרפים מתאר כל אחת מן הפונקציות ונמקו את קביעותיכם.

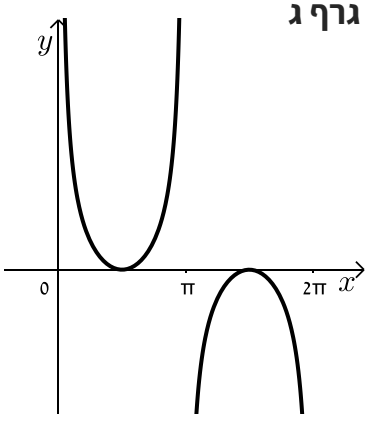
גרף א



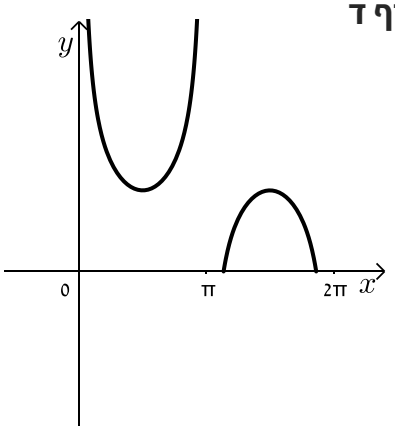
גרף ב



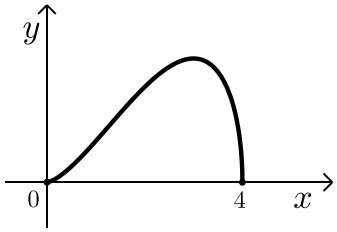
גרף ג



גרף ד



8) בסרטוט שלפניכם מוצגת הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax^4+bx^3}$.



נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $0\le x\le 4$.

א. (1) הוכיחו כי $b=-4a$.

(2) לפניכם שתי טענות I-II. רק אחת מהן נכונה.
קבעו מהי הטענה הנכונה, ונמקו את קביעתכם.

I. $b<0$, $a>0$.

II. $b>0$, $a<0$.

הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ המוגדרת גם היא בתחום: $0\le x\le 4$.

מהנקודה P מעבירים ישר המאונך לציר ה- x.

M היא נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה- x, ו-O היא ראשית הצירים.

ב. מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי?
נמקו את תשובתכם.

ג. בעבור שיעור ה- x שמצאת בסעיף ב, בטאו באמצעות a את השטח המקסימלי של המשולש PMO.

ד. אם ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ אינה יורדת, מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות:

1) א. (1) הטענה אינה נכונה א. (2) הטענה נכונה ב. (1) כן ב. (2) $a=0.375$.

ג. (1) $a=4$ ג. (2) 2 יח"ר ד. הוכחה.

2) א. (1) $\frac{a_1q\left(q^{40}-1\right)}{q^2-1}$. א. (2) $\frac{a_1q^3\left(q^{40}-1\right)}{q^4-1}$ ב. $q=3$ ג. $q=3$.

ד. $-\frac{1}{12a_1}$. ה. (1) לא. ה. (2) כן.

3) א. 0.07. ב. 0.3. ג. (1) 0.027. ג. (2) 0.009.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

ד. (1) $R_1=14$, $R_2=6$. ד. (2) $DC=12\sqrt{7}$.

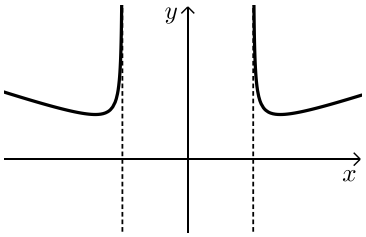
5) א. הוכחה. ב. (1) $\sphericalangle CKE=45°+\alpha$, $\sphericalangle CEK=90°-\alpha$, $\sphericalangle KCE=45°$.

ב. (2) $CE=2R\sin\left(45°+\alpha\right)$, $CK=2R\cos\alpha$, $KE=\sqrt{2}R$.

ג. $\frac{EB}{AE}=2\sin\left(45°+\alpha\right)\cdot\sin\left(45°-\alpha\right)=\sin\left(90°+2\alpha\right)=\cos2\alpha$. ד. $22.5°$.

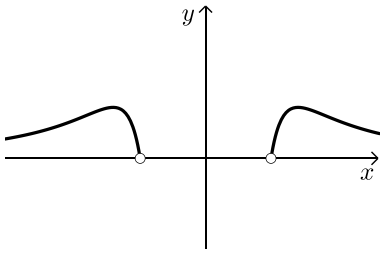
6) א. $x<-a$ או $a<x$. ב. הוכחה. ג. (1) אין. ג. (2) $x=a$, $x=-a$.

ג. (3) $\left(\sqrt{2}a,2a\right)$ מינימום, $\left(-\sqrt{2}a,2a\right)$ מינימום. ג. (4) סרטוט:



ד. $\left(\sqrt{2}a,4a^2\right)$, $\left(-\sqrt{2}a,4a^2\right)$.

ה. סרטוט:

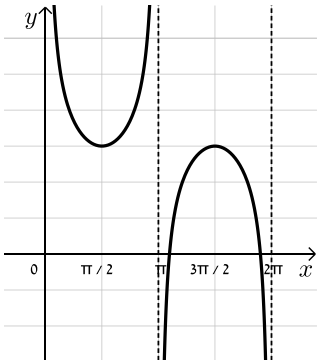


ו. $\frac{71}{1,296}$.

7) א. (1) $0<x<2\pi$, $x\neq0$. א. (2) $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$.

א. (3) עליה: $\pi<x<1.5\pi$ או $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, יורדת: $1.5\pi<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$.

א. (4) $\left(\frac{3\pi}{2},3\right)$ מקסימום, $\left(\frac{\pi}{2},3\right)$ מינימום.



ב. ראו סרטוט בצד:

ג. $k(x)$: גרף ג', $g(x)$: גרף א'.

8) א. (1) הוכחה. א. (2) II.

ב. $x=3.2$. ג. $-41.94a$ ד. $x=3$.

בגרות חורף 2021 מועד נבצרים:

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1) ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו כי כל טרפז שחסום במעגל הוא שווה שוקיים.

ב. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת שהביטוי n^3-n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ אינה קבועה, מוגדרת לכל x והיא אי-זוגית.

קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא זוגית, אי-זוגית, לא זוגית ולא אי-זוגית או שלא ניתן לקבוע. נמקו.

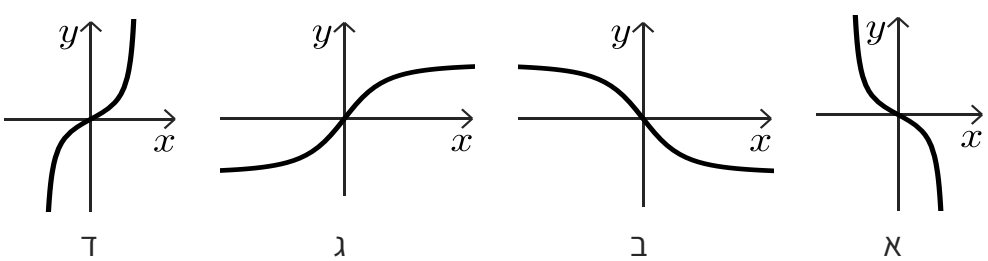
I. $h(x)=-f(x)$

II. $k(x)=\left(f(x)\right)^2$

III. $g(x)=f(x)+4$

ד. נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}$, $a>0$.

אילו מהסרטוטים הבאים הוא גרף הפונקציה? נמקו בקצרה.



א ב ג ד

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2) ערכו סקר בין תלמידי בית הספר ומצאו: 80% מהבנים עוסקים בספורט.
מספר הבנות בבית הספר גדול פי 1.2 ממספר הבנים שעוסקים בספורט.

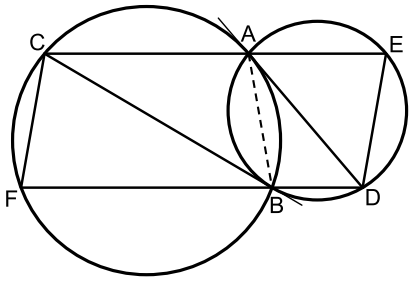
א. מהי ההסתברות לבחור בן מבין תלמידי בית הספר?

ב. מהי ההסתברות לבחור תלמיד שעוסק בספורט (בן או בת), אם ידוע שהמאורעות:
"נבחר בן" ו-"נבחר תלמיד שעוסק בספורט" הם בלתי תלויים? הסבירו.

ג. נבחר באקראי תלמיד (בן או בת). ידוע שהוא עוסק בספורט.
מה סביר יותר, שהוא בן או בת? הסבירו.

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

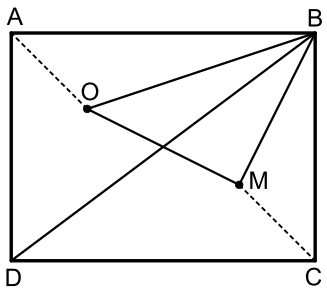
3) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B.
המיתר AD במעגל הימני משיק למעגל השמאלי בנקודה A.
המיתר CB במעגל השמאלי משיק למעגל הימני בנקודה B.
המשך המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה E.
המשך המיתר BD במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.



א. הוכיחו:
(1) $\Delta ABC \sim \Delta BDA$.
(2) $\sphericalangle CED + \sphericalangle FCE = 180°$.
(3) המרובע CEDF הוא מקבילית.

ב. נתון: $BD = 4$, $AC = 9$.
מצאו פי כמה גדול שטח משולש ABC
משטח משולש BDA. נמקו.

4) במלבן ABCD הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABD והנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש BDC.



נסמן: $AB = a$, $BC = b$, $\sphericalangle ABD = \alpha$.

א. הביעו את AO ואת BO באמצעות a ו- α.

ב. הראו כי $\sphericalangle OBM = 45°$.

נתון: $AB = 8$, $BC = 6$.

ג. חשבו את α.

ד. חשבו את שטח המשולש OMB.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

5) נתונה סדרה הנדסית בת $2n$ איברים: a_1 , a_2 , ... , a_{2n}. מנת הסדרה היא q.

א. הביעו באמצעות q את היחס בין סכום הסדרה לסכום האיברים במקומות הזוגיים.

נתון כי היחס בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא 5.

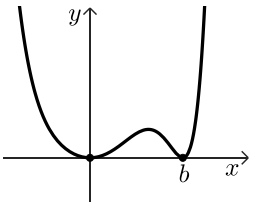
ב. מצאו את q. נמקו.

נתון: $a_2 = 5$.

נסמן: $T = a_2 - a_1 + a_4 - a_3 + a_6 - a_5 + ... + a_{2n} - a_{2n-1}$.

ג. הביעו את T באמצעות n בלבד.

6) לפניכם גרף הפונקציה $f'(x)$ (נתון כי $f'(0)=0$ וכן $f'(b)=0$):



א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f''(x)$.

הסבירו את שיקוליכם.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ כאשר נתון: $f(b)=0$.

סמנו בגרף את נקודות הפיתול ונקודות הקיצון (אם יש כאלה).

הסבירו את שיקוליכם.

נתון כי אחת מהפונקציות $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ היא: $g(x)=(x^3-a)^2\cdot x^2$,

a הוא פרמטר.

ג. (1) התאימו את הפונקציה $g(x)$ לאחת מן הפונקציות הנ"ל ונמקו את בחירתכם.

(2) היעזרו בנתונים בשאלה, ובטאו את a באמצעות b.

נתון כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$ ובין ציר ה- x הוא $\frac{1}{9}$.

ד. חשבו את a.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$.

ענו על הסעיפים הבאים עבור התחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. מצאו את האסימפטוטות של $f(x)$ המאונכות לציר ה- x.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

לפניכם שלושה ביטויים:

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$ (2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ (3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$

ו. סדרו אותם מהקטן לגדול. פרטו את שיקוליכם.

ז. חשבו את ערכו של הביטוי הגדול מבין השלושה.

תשובות סופיות:

1) א. שאלת הוכחה ב. שאלה הוכחה.

ג. I. פונקציה זוגית, II. פונקציה זוגית, III. פונקציה לא זוגית ולא אי זוגית ד. גרף ג.

2) א. $\frac{25}{49}$ ב. 0.8 ג. בן.

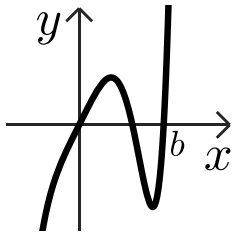
3) א. (1) שאלת הוכחה א. (2) שאלת הוכחה א. (3) שאלת הוכחה ב. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BDA}}=\frac{9}{4}$.

4) א. $AO=\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)}$, $BO=\frac{a\sqrt{2}}{2\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)}$ ב. ראו סרטון.

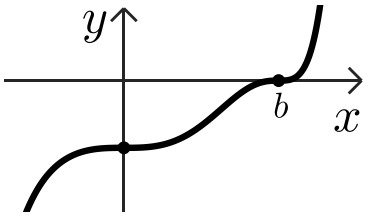
ג. $\alpha=36.87°$ ד. 10.

5) א. $\frac{q+1}{q}$ ב. $q=5$ ג. $T=\frac{5^{2n}-1}{6}$.

6) א. להלן סרטוט:



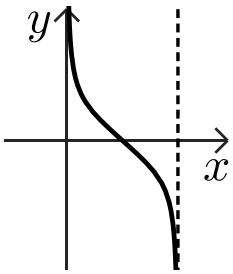
ב. להלן סרטוט:



ג. (1) $g(x)=f'(x)$. (2) $a=b^3$ ד. $a=1$.

7) א. $0<x<\pi$ ב. $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ ג. ירידה: $0<x<\pi$, עליה: אף x.

ד. $x=\pi$, $x=0$ ה. להלן סרטוט:



ו. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}f(x)dx<\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}f(x)dx<\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

ז. $2-\sqrt[4]{2^3}\approx 0.3182$.