

תוכן העניינים:

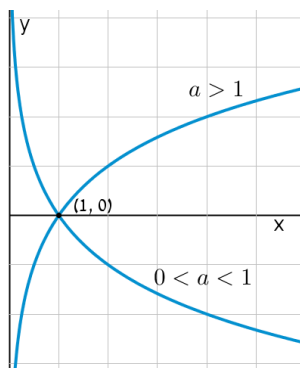
2	פרק 16
2	חשבון דיפרנציאלי – פונקציה לוגריתמית
2	סיכום כללי :
2	הגדרות כלליות :
2	תכונות כלליות :
2	תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית :
3	נגזרות של פונקציות לוגריתמיות :
4	שאלות יסודיות – חישובי נגזרות :
5	שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת :
6	שאלות שונות העוסקות בחקירה :
12	תשובות סופיות :
17	תרגול נוסף :
22	תשובות סופיות :

פרק 16

חשבון דיפרנציאלי – פונקציה לוגריתמית

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:



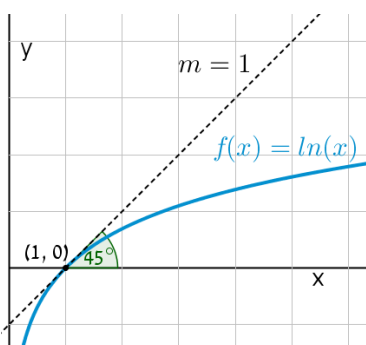
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית

כללית מהצורה: $f(x) = \log_a x$

עבור $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:

תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x > 0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה $(1, 0)$.
- עבור $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות $f(x) = \ln x = \log_e x$ נקבל

כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת

החיתוך שלה עם ציר ה- x הוא 1:

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y = \log(f(x))$ הוא: $f(x) > 0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הנגזרת	הפונקציה
$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \log_a x$
$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$	$y = \log_a f(x)$
$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln x$
$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \ln f(x)$

שאלות יסודיות – חישובי נגזרות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$ ב. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה. $f(x) = \ln(\cos x)$ ו. $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x) = x \ln x$ ב. $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$ ג. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$ ה. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x) = \ln^3 x$ ב. $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג. $f(x) = x^2 \ln^2 x$ ד. $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x) = \ln(x+2)$ ב. $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$

ג. $f(x) = x^2 \ln x$ ד. $f(x) = x^3 \ln x$

ה. $f(x) = \ln e^{2x}$ ו. $f(x) = e^x \ln x$

ז. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$ ח. $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$

ט. $f(x) = \ln(x^2)$ י. $f(x) = \ln(x^4)$

יא. $f(x) = (\ln x)^4$ יב. $f(x) = x \ln x - \ln x^2$

יג. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ יד. $f(x) = \ln \sqrt{x}$

טו. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ טז. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

- | | |
|---|---|
| <p>א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$</p> <p>ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$</p> <p>ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$</p> <p>ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$</p> <p>ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2-1}$</p> <p>ו. $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2+a^2} \right)$</p> <p>ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$</p> <p>ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$</p> <p>ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$</p> <p>י. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$</p> <p>יא. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$</p> <p>יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$</p> <p>יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$</p> <p>יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$</p> <p>טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$</p> | <p>א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$</p> <p>ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$</p> <p>ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$</p> <p>ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$</p> <p>ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2-1}$</p> <p>ו. $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2+a^2} \right)$</p> <p>ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$</p> <p>ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$</p> <p>ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$</p> <p>י. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$</p> <p>יא. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$</p> <p>יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$</p> <p>יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$</p> <p>יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$</p> <p>טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$</p> |
|---|---|

שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:

6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e,1)$.

7) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

8) הגרפים של הפונקציות $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק ל- $f(x)$. מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

9) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$. מצא את משוואת המשיק.

10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \ln(x^2 + 1)$ בנקודה שבה $x = 1$.

שאלות שונות העוסקות בחקירה:

11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

- | | |
|--|--|
| <p>א. $f(x) = \ln x$</p> <p>ב. $f(x) = \ln(x^2)$</p> <p>ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$</p> <p>ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$</p> <p>ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$</p> <p>ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$</p> <p>ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$</p> | <p>א. $f(x) = \ln x$</p> <p>ב. $f(x) = \ln(x^2)$</p> <p>ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$</p> <p>ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$</p> <p>ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$</p> <p>ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$</p> <p>ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$</p> |
|--|--|

12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = 2 \ln x - x^2$.

13) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$.

14) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$.

15) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$.

16) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$. הנקודה $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

17) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$. הנקודה $\left(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה : $f(x) = \ln(x-3)$.

19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה : $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$.

20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה : $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{\ln x + 1}$.

21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה : $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$.

22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$.

24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה : $f(x) = x \ln x + 2$.

25) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים :

- i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. $y = x \ln x$	א. $y = \sqrt{\ln(x+1)+1}$
ד. $y = \sqrt{x} \ln x$	ג. $y = x \ln x - x$
ו. $y = \ln(x^2 + 1)$	ה. $y = x^2 \ln x$

(27) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. מצא לאלו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

(29) נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

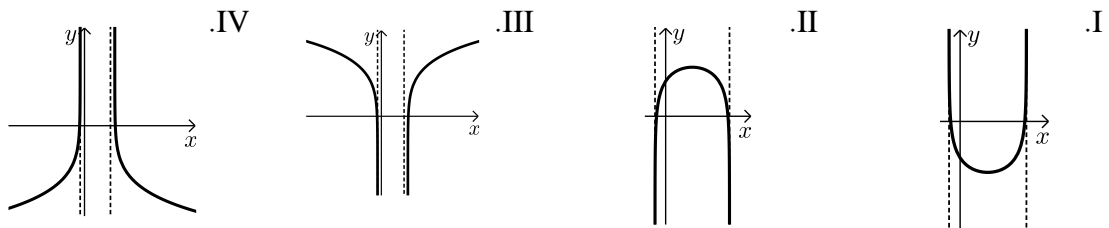
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \ln x$.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- ד. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור x , $(x_A = x_B)$.
מצא את שיעור ה- x של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

31 נתונה שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x זהה.
 - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
 - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- x שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- y של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

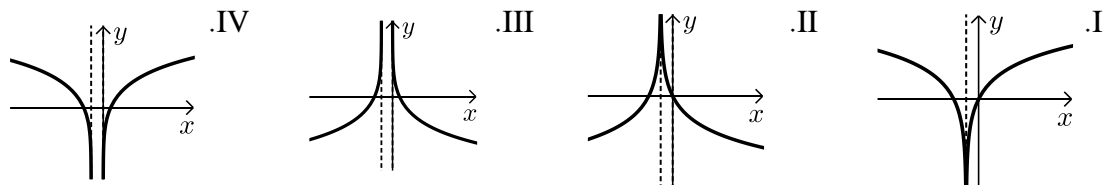
32 נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y ?
 - מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV.
- איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



33 נתונה הפונקציה: $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- y ?
 - מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV.
- איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



- ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

34) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

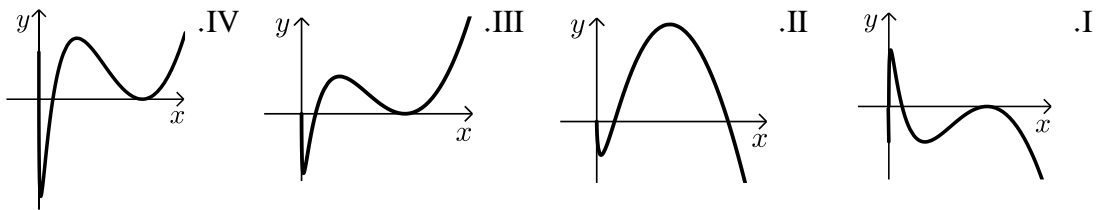
35) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$.

- הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$.
- מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ענה על השאלות הבאות:
 - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.



37) נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה $g(x) = \ln x$.

38 ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$

נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$

- ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה : $x=e$.

39 נתונה הפונקציה הבאה : $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$, פרמטר חיובי, $a \neq 1$

- א. הבע באמצעות a את :
i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
ii. הנקודה המקיימת $y' = 0$.
iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.
ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום : $x > e-2$. מצא את a .
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x > -1$.
ד. נתון הישר : $y = k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של k עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

40 נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln x + \frac{1}{x}$

- א. ענה על הסעיפים הבאים :
i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר y ? אם כן מצא אותה.
ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.
ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

$$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x} \text{ ב.} \quad f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \text{ א. (1)}$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \text{ ד.} \quad f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} \text{ ג.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3} \text{ ה.} \quad f'(x) = -\tan x \text{ ו.}$$

$$f'(x) = (3x+1) \left(6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right) \text{ ב.} \quad f'(x) = \ln x + 1 \text{ א. (2)}$$

$$f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}} \text{ ו.} \quad f'(x) = \frac{4}{x(\ln x+2)^2} \text{ ד.} \quad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \text{ ג.}$$

$$f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1) \text{ ג.} \quad f'(x) = \frac{6 \ln x}{x} \text{ ב.} \quad f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} \text{ א. (3)}$$

$$f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3} \text{ ד.}$$

$$x(2 \ln x + 1) \text{ ג.} \quad \frac{2 \ln x + 2}{x} \text{ ב.} \quad \frac{1}{x+2} \text{ א. (4)}$$

$$e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \text{ ה.} \quad 2 \text{ ו.} \quad x^2(3 \ln x + 1) \text{ ד.}$$

$$\frac{2}{x} \text{ ט.} \quad 4x \ln x \text{ ו.} \quad e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - 2x \ln x \right) \text{ ז.}$$

$$\ln x + 1 - \frac{2}{x} \text{ יב.} \quad \frac{4(\ln x)^3}{x} \text{ יא.} \quad \frac{4}{x} \text{ י.$$

$$\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} \text{ יז.} \quad \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \text{ יט.} \quad \frac{1}{2x} \text{ יד.} \quad \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} \text{ יג.}$$

$$\frac{6}{x^2-9} \text{ ג.} \quad \frac{2}{x^2-1} \text{ ב.} \quad -\frac{2}{x(x+2)} \text{ א. (5)}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2} \text{ ה.} \quad \frac{x}{x^2-1} \text{ ו.} \quad \frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1} \text{ ד.}$$

$$\frac{1}{x^2-1} \text{ ט.} \quad \frac{1}{4-2x} \text{ ו.} \quad \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}} \text{ ז.}$$

יב. $\frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2}$

טו. $\frac{\ln x - 4}{\ln^5 x}$

יא. $\frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2}$

יד. $\frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x}$

יג. $\frac{5}{1 - 25x^2}$

יח. $\frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)}$

יז. $y = \frac{1}{e}x$ (6)

יח. $a = 2, b = -2$ (7)

יט. $y = \frac{1}{e}x$ (8)

כ. $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$ (9)

כא. $y = \ln 2 \cdot x + x - 1$ (10)

כב. $x > 0$ (11) א. $x > 10$ או $x < -2$ ב. $x \neq 0$ ג. $x > \ln 4$ ד. $x \geq e$

כה. $0 < x \neq e$ ו. $x > 0$ וגם $x \neq e^3, e^{-1}$ ז. $x \geq e$

כז. $\max(1, -1)$ (12)

כח. $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$ (13)

כט. $\max\left(e, \frac{1}{e}\right)$, קצה, $\min(\sqrt{e}, 0)$ (14)

לא. $\min(4, -1)$ (15)

לב. $a = 1, b = -1$ (16)

לג. $a = 1, b = -1$ (17)

לד. $x = 3$ (18)

לה. נקודת אי הגדרה $(0, 0)$, $x = e, y = 0$ (19)

לו. נקודת אי הגדרה $(0, 2)$, $x = \frac{1}{e}, y = 2$ (20)

לז. נקודת אי הגדרה $\left(e^2, \frac{1}{4}\right)$, $(0, 0)$; $x = \frac{1}{e^2}, y = 0$ (21)

לח. $x = 0, y = 0$ (22)

(23) נקודת אי הגדרה (0,0).

(24) נקודת אי הגדרה (0,2).

(25) $\left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$

(26) א. $x \geq \frac{1}{e} - 1 \approx -0.63$.i .ii (0,1) .iii $\left(\frac{1-e}{e}, 0\right)$.אין.

iv. עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. i. $x > 0$.ii (1,0) .iii $\min(e^{-1}, -e^{-1})$

iv. עולה: $x > e^{-1}$ יורדת: $0 < x < e^{-1}$.

ג. i. $x > 0$.ii (e,0) .iii $\min(1, -1)$

iv. עולה: $x > 1$ יורדת: $0 < x < 1$.

ד. i. $x > 0$.ii (1,0) .iii $\min\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right)$

iv. עולה: $x > e^{-2}$ יורדת: $0 < x < e^{-2}$.

ה. i. $x > 0$.ii (1,0) .iii $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$

iv. עולה: $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ יורדת: $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$.

ו. i. כל x .ii (0,0) .iii $\min(0,0)$

iv. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$.

(27) א. $x > 0$.ב. $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1,0)$

ג. עלייה: $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{e^2}$, ירידה: $\frac{1}{e^2} < x < 1$.ד. (1,0).

(28) א. $0 < x \neq e$.ב. $\min(e^2, e^2)$.ג. עלייה: $x > e^2$, ירידה: $0 < x < e^2$ וגם $x \neq e$

ד. אין. ו. $k > e^2$.

(29) א. $x > 0$.ב. $\min(4, -1)$.ג. עלייה: $x > 4$, ירידה: $0 < x < 4$

ד. (1,0) , (16,0).

(30) א. $x \geq 1$.ב. מתקבל: $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$.ג. (1,0) , (e,1)

ד. $x = \sqrt[4]{e}$.

(31) א. i. לא נכון. תחום ההגדה של $f(x)$ הוא: $x > 0, x \neq 1$ ותחום ההגדרה

של $g(x)$ הוא: $x > 0$.

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x = e$ אך עבור $f(x)$ מדובר

במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x > e$; יורדת: $0 < x < e, x \neq 1$.

ועבור $g(x)$: עולה: $0 < x < e$; יורדת: $x > e$.

iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- y שלה הוא: $y = \frac{x}{\ln x}$ ו- $y = \frac{\ln x}{x}$.

$$\text{נכפול: } y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$$

(32) א. $x < -1, x > 7$. ב. $x = -1, 7$. ג. עולה: $x > 7$; יורדת: $x < -1$.

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום.

באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(33) א. $x \neq -1$. ב. $x = -1$. ג. עולה: $x > -1$; יורדת: $x < -1$.

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $x \neq -1, -2 < x < 0$.

(34) א. $0 < x < e$. (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: $1 - \ln x > 0$ וגם $x > 0$).

ב. $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$ - ולכן הפונקציה יורדת בת.ה. ג. $(1, 0)$.

(35) א. $x < -\frac{1}{2}, x > 1$. ב. $x = -\frac{1}{2}, 1$. ג. $(-2, 0)$.

ד. מתקבל: $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$.

(36) ב. $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$.

ג. i. 2 נקודות והן: $(e^{-2}, 0)$, $(1, 0)$. הנקודה שבה: $x = 0$ לא קיימת עקב ת.ה.

ii. $x \neq 1, x > e^{-2}$.

ד. III - בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.

שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

(37) א. $x > 0$. ב. $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$, $(e^{\sqrt{3}}, 0)$, $(1, 0)$.

ג. $\min(e, -2), \max(e^{-1}, 2)$. ה. $(1, 0)$, $(e^2, 2)$, $(e^{-2}, -2)$.

. $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$.ג

(38) א. $x = e$. ב. מתקבל: $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$

.iii $(0, \frac{a}{\ln a})$

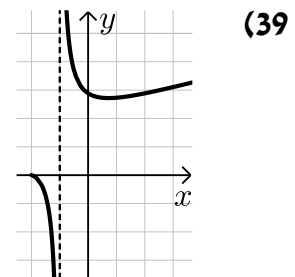
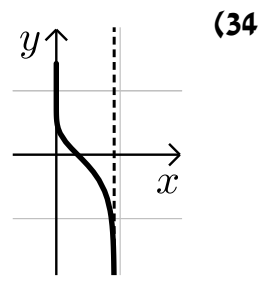
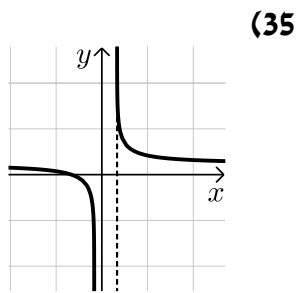
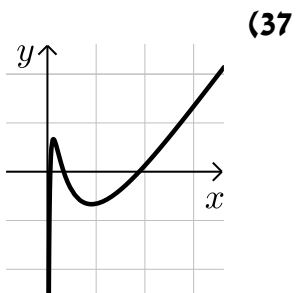
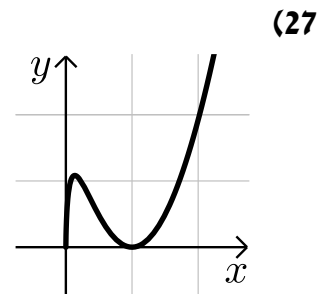
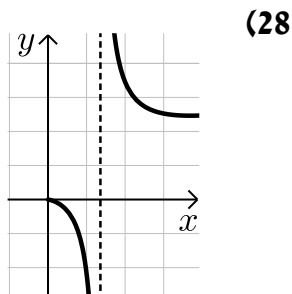
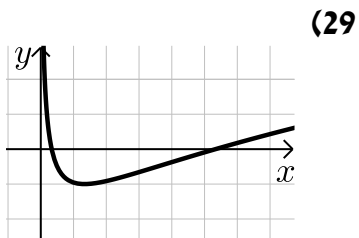
(39) א. i. $x > -a, x \neq 1-a$. ii. $(e-a, e)$

iv. $x = 1-a$. ב. $a = 2$. ג. $k < e$.

(40) א. i. $x > 0$. ii. $x = 0$. ב. $\min(1,1)$

ג. עולה: $x > 1$, יורדת: $0 < x < 1$.

סקיצות לשאלות:



תרגול נוסף:

(1) נתונה הפונקציה הבאה: $y = x(\ln x - 4)$.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln x + \sqrt{3-2x}$.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הגדרתה.
- מצא את האסימפטוטה האנכית של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(-x^2 + 4x - 3)$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.
- הראה כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- x .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(x^2)$.

- א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - האם יש לפונקציה נקודות קיצון? נמק והראה חישוב מתאים.
 - האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית? אם כן מהי?
 - כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = (\ln x)^2$.
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

5) נתונה הפונקציה: $f(x) = (\ln x)^2 + a \ln(x^2)$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = e^2$.
א. מצא את a .

ב. מצא האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודות נוספות.
ג. הראה כי הפונקציה מקבלת ערך מינימלי שהוא -1.

6) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln^2(x+a)$, a פרמטר.

א. הבע באמצעות a את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. האסימפטוטה האנכית של גרף הפונקציה.

ב. באיזה תחום צריך להימצא a עבורו האסימפטוטה של הפונקציה תהיה מימין לציר ה- y ?

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי עבור התחום שמצאת בסעיף הקודם יש לגרף הפונקציה נקודת קיצון עם שיעור x חיובי.

ii. הוכח כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- x וקבע את סוגה.

ד. מצא את a אם ידוע כי הפונקציה עולה בתחום: $x > 4$.

7) נתונה הפונקציה הבאה: $y = (x+k)(\ln(x+k)-1)$, k פרמטר.

א. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y' = \ln(x+k)$.

ב. הבע באמצעות k את:

i. נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ii. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. ידוע כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y . מצא את k .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. העזר בסקיצה של גרף הפונקציה והוכח כי אי-השוויון

הבא: $(x+k)(\ln(x+k)-1) \geq -1$ מתקיים עבור כל x .

(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = x(\ln x)^2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ii. הוכח כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x$.
 - iii. הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- x .
- ב. האם יש לגרף הפונקציה אסימפטוטות? נמק.
- ג. נתון הישר: $y = 4x$. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הישר.

(9) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln \frac{x}{x+a}$, $a > 0$ פרמטר.

א. הבע באמצעות a את:

- i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- ג. נגזרת הפונקציה מקיימת: $f'(1) = 0.5$. מצא את a .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(10) נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln^2(x-a)$, $a > 0$ פרמטר.

- א. הראה כי הנגזרת השנייה של הפונקציה היא: $f''(x) = [2 - 2 \ln(x-a)] / (x-a)^2$.
- ב. הבע באמצעות a את שיעורי הנקודה המאפסת את הנגזרת השנייה.
- ג. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך הנקודה המאפסת את הנגזרת השנייה.
- ד. הבע באמצעות a את משוואת המשיק הנ"ל.
- ה. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2e^{-1} - 1$. מצא את a .

(11) נתונה הפונקציה הבאה: $y = k \ln x - x^3$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 3$ הוא -26 .

- א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. היעזר בסעיף הקודם והוכח את הטענות הבאות:
- i. גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .
 - ii. גרף הפונקציה שלילי בכל תחום הגדרתו.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

12 ענה על הסעיפים הבאים :

- א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln^2 x + 2 \ln x = 0$.
- ב. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה : $f(x) = x(\ln x)^3$ היא : $f'(x) = (\ln x)^3 + 3(\ln x)^2$.
- ג. הוכח כי הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא : $f''(x) = \frac{3\ln^2 x + 6\ln x}{x}$.
- ד. הראה כי אחת מהנקודות המקיימות $f''(x) = 0$ נמצאת על ציר ה- x .

13 ענה על הסעיפים הבאים :

- א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln^2(10-x^2) - \sqrt{\ln(10-x^2)} = 0$
(רמז : סמן $t = \ln(10-x^2)$ ופתור עבור t).
- ב. לפניך הפונקציות הבאות : $f(x) = \ln^2(10-x^2)$, $g(x) = \sqrt{\ln(10-x^2)}$
קבע אלו מהמשפטים הבאים נכונים לגבי הפונקציות ואלו לא.
נמק כל הסבר בחישוב מתאים.
- i. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 - ii. לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון אחת הנמצאת על ציר ה- y .
 - iii. הגרפים של הפונקציות נחתכים ב-2 נקודות בלבד.
 - iv. הפונקציות חותכות את ציר ה- x באותן הנקודות.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ על סמך מה שקבעת בסעיף ב'.

14 נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון כלל.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. נתון הישר : $y = k$. האם קיימים ערכי k עבורם הישר יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד? אם כן – מצא אותם.

15 נתונה הפונקציה : $y = \log_2(3x+1)$.

- א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- ג. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

16 נתונה הפונקציה הבאה : $y = x^2 \log_{0.5}(x^2)$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

17 נתונה הפונקציה הבאה : $y = \log_3(x^2 + ax + 9)$

ידוע כי יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה אנכית : $x = -3$.

- א. מצא את a .
 ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 ג. הישר $y = 6$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
 מצא את נקודות אלו.

18 נתונות הפונקציות הבאות : $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x-2}$, $g(x) = 1 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של כל פונקציה.
 ב. הראה כי הגרפים של הפונקציות לא נחתכים באף נקודה.
 ג. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

19 נתונה הפונקציה הבאה : $y = \log_4(x-2) - \log_{16}(x^2-4)$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
 ג. מעבירים ישר $y = -1$ החותך את גרף הפונקציה.
 מצא את שיעור ה- x של נקודת החיתוך.

20 נתונה הפונקציה הבאה : $y = \frac{1}{\log_2(x-2)} + \frac{1}{\log_4 x}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 4$.
 ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
 ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

תשובות סופיות:

- (1) א. $x > 0$. ב. $\min(e^3, -e^3)$. ג. $(e^4, 0)$.
- (2) א. $0 < x \leq 1.5$. ב. $(1, 1)$. ג. $x = 0$.
- (3) א. $1 < x < 3$. ב. $x = 1, 3$. ג. $(2, 0)$.
- (4) א. i. $x \neq 0$. ii. לא. הנגזרת היא: $y' = \frac{2x}{x^2}$ והרי ש- $x \neq 0$. iii. $x = 0$.
- (5) iv. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$. v. $(1, 0)$, $(-1, 0)$. ב. $(1, 0)$, $(e^2, 4)$.
- (6) א. $a = -1$. ב. $(1, 0)$. ג. לגרף הפונקציה נקודת מינימום יחידה והיא: $(e, -1)$. לכן ערך הפונקציה המינימלי הוא -1 .
- (7) א. i. $x > -a$. ii. $x = -a$. ב. $a < 0$. ג. i. מתקבל: $x = 1 - a = 1 - (-) > 0$. ii. $\min(1 - a, 0)$. ד. $a = -3$.
- (8) א. i. $x > 0$. ii. הוכחה . iii. $(1, 0)$. ב. i. $(1 - k, -1)$. ii. $(0, k(\ln k - 1))$, $(e - k, 0)$, $(-k, 0)$. ג. $k = 1$.
- (9) א. i. $x > 0$, $x < -a$. ii. $x = 0, -a, y = 0$. ב. לא. גרף הפונקציה שואף ל-0 בגבול שלו. ג. $(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2})$, $(e^2, 4e^2)$.
- (10) א. i. $x > 0$. ii. $y = 3 \ln x - x^3, k = 3$. ב. $(a + e, 1)$. ג. $m = \frac{2}{e}$. ד. $y = \frac{2}{e}x - \frac{2a}{e} - 1$. ה. $a = 1$.
- (11) א. i. $x > 0$. ב. $\max(1, -1)$. ג. $y = 3 \ln x - x^3, k = 3$. ד. i. + ii. הערך המקסימלי של הפונקציה הוא -1 ולכן גרף הפונקציה לא נוגע בציר ה- x וכולו שלילי.
- (12) א. $x = 1, e^{-2}$.
- (13) א. $x_{1,2} = \pm 3, x_{3,4} = \pm 2.7$. ב. i. לא. עבור: $f(x)$ ת.ה. הוא: $-3.16 < x < 3.16$. עבור: $g(x)$ ת.ה. הוא: $-3 \leq x \leq 3$. ii. כן. עבור $f(x)$ הנקודה: $\max(0, 5.3)$. עבור: $g(x)$ הנקודה: $\max(0, 1.5)$. iii. לא. מסעיף אי ניתן לראות כי הגרפים חותכים זה את זה ב-4 נקודות שונות. iv. כן. $(3, 0)$, $(-3, 0)$.

14 א. $0 < x \leq 1, x \geq e^2$ ב. ניתן לראות כי :

$$f'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x}}{2\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} = \frac{2 \ln x - 2}{2x\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} = \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} \rightarrow x = e$$

הפתרון נפסל עקב ת.ה. ולכן אין נקודות קיצון כלל.

ג. עולה: $x \geq e^2$. יורדת: $0 < x \leq 1$ ג. $(1,0), (e^2,0)$.

ו. לא. הגרף תמיד יחתך בשתי נקודות כאשר $k \geq 0$ ובאף נקודה כאשר $k < 0$

15 א. $x > -\frac{1}{3}$ ב. מתקבל: $y' = \frac{3}{(3x+1)\ln 2} > 0$

16 א. $x \neq 0$ ב. $\max(-0.606, 0.53), \max(0.606, 0.53)$

ג. עולה: $0 < x < 0.606, x < -0.606$, יורדת: $x > 0.606, -0.606 < x < 0$.

17 א. $a = 6$ ב. $(-2,0), (-4,0)$ ג. $(-30,6), (24,6)$

18 א. עבור $f(x)$: $x < 1, x > 2$, עבור $g(x)$: $x < 0, x > 2$.

ב. הנקודה המתקבלת ($x = 1.5$) אינה בתחום. ג. $y = \frac{1}{2 \ln 3} x + \frac{\ln 2}{\ln 3}$

19 א. $x > 2$ ב. מתקבל: $y' = \frac{2}{(x^2 - 4)\ln 4} > 0$

ג. $x = 2 \frac{4}{15} \approx 2.266$

20 א. $x > 2, x \neq 3$ ב. $y = -\frac{5}{4 \ln 4} x + \frac{5 + \ln 16}{\ln 4}$

ג. $\left(\frac{4(5 + \ln 16)}{5}, 0\right), \left(0, \frac{5 + \ln 16}{\ln 4}\right)$ ד. $S = \frac{2(5 + \ln 16)^2}{5 \ln 4}$

סקיצות לשאלות:

